ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

F. LAURANT
M. OHEIX
J.-P. RAOULT

Introduction à la statistique mathématique. V. Tests d'hypothèses

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, nº 4 (1969), p. 385-414
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_4_385_0>

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. V, n° 4, 1969, p. 385-414.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Introduction à la statistique mathématique.

V. Tests d'hypothèses

par

F. LAURANT
Maître Assistant de la Faculté des Sciences de Paris

M. OHEIX
Attaché de Recherches au C. N. R. S.

et

J.-P. RAOULT
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rouen.

V.1. GÉNÉRALITÉS

A. Introduction.

Les tests d'hypothèses sont des problèmes statistiques particuliers ou l'espace des décisions est un espace à 2 éléments d_0 et d_1.

Ils sont donc déterminés par :

— un espace mesurable $(X, \mathscr{X})$ espace des observations,
— un espace mesurable $(\Theta, \mathscr{H})$ espace des paramètres,
— une famille de probabilités $(P_X^\theta)_{\theta\in\Theta}$ définie sur $(X, \mathscr{X})$,
— un espace mesurable $(D, \mathscr{D})$ espace des décisions où $D = \{ d_0, d_1 \}$,
— une application h, définie sur Θ, à valeurs dans D.

. En général, nous représentons un problème de décision statistique par

$$[X, \Theta, (P_X^\Theta)_{\theta\in\Theta}, D]$$

. Ici $D = \{ d_0, d_1 \}$, donc h induit une partition de Θ en 2 sous-ensembles

$$\Theta_0 = h^{-1}(d_0) \qquad \Theta_1 = h^{-1}(d_1)$$

. On suppose en outre que $\Theta_0 \in \mathscr{H}$.

Un test sera représenté par : $[X, \Theta_0, \Theta_1, (P_X^\Theta)_{\theta\in\Theta}]$.

B. Définition d'une stratégie.

— Par définition, une stratégie relative au test $[X, \Theta_0, \Theta_1, (P_X^\theta)_{\theta\in\Theta}]$ est une *transition*, S_D^X, *de* $(X, \mathscr{X})$ *vers* $(D, \mathscr{D})$.

— Comme $D = \{ d_0, d_1 \}$, une stratégie est parfaitement définie par la donnée de l'application mesurable $x \rightsquigarrow \varphi(x) = S_{d_1}^x$ (probabilité de décider d_1 si x), l'application $\varphi : X \to [0, 1]$ est appelée fonction critique de la stratégie S_D^X.

Dorénavant, par abus de langage, nous parlerons de la stratégie φ.

— *Fonction puissance d'une stratégie* φ.

. La fonction puissance d'une stratégie φ est une application de $\Theta \to [0, 1]$ telle que

$$\Theta \rightsquigarrow E_\theta\varphi = \int_X \varphi(x) dP^\theta(x).$$

— *Seuil et taille d'une stratégie* φ.

. On dira qu'une stratégie φ est de seuil α, si et seulement si,

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} E_\theta\varphi \leqq \alpha$$

. On dira qu'une stratégie φ est de taille α, si et seulement si,

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} E_\theta\varphi = \alpha$$

— *Relation d'équivalence* $\mathscr{R}$ *entre stratégies.*

Étant donné un test $[X, \Theta_0, \Theta_1, (P_X^\theta)_{\theta\in\Theta}]$, comme on ne travaille que sur les fonctions puissances des stratégies, on dira que deux stratégies sont équivalentes si et seulement si elles ont même fonction puissance.

$$\varphi \equiv \varphi' \Leftrightarrow (\forall \theta \in \Theta) E_\theta\varphi = E_\theta\varphi'$$

C. **Comparaison de deux stratégies.**

(relatives à un même test $[X, \Theta_0, \Theta_1, (P^\theta)_{\theta\in\Theta}]$)

— Notons S, la classe de toutes les stratégies relatives au test $[X, \Theta_0, \Theta_1, (P^\theta)_{\theta\in\Theta}]$.

— Nous prendrons comme critère de comparaison sur S un préordre, noté (C) (ce critère sera toujours compatible avec la relation d'équivalence $\mathscr{R}$).

Remarque. — Comme le critère de comparaison est un préordre sur S, noté $\geqslant$, on s'intéressera au problème d'existence et de caractérisation d'éléments « optimum » ou maximaux (*).

EXEMPLES DE CRITÈRES.

1) *Critères de Neyman et Pearson.*

Étant donné $\alpha \in [0, 1]$.

. Si il existe deux stratégies φ_1 et φ_2 telles que

$$\left.\begin{array}{l} \sup\limits_{\theta\in\Theta_0} E_\theta \varphi_1 \geqq \alpha \\ \sup\limits_{\theta\in\Theta_0} E_\theta \varphi_2 \leqq \alpha \end{array}\right| \text{ alors } \varphi_2 \geqslant \varphi_1$$

. Si il existe deux stratégies φ_1 et φ_2 telles que :

$$\left.\begin{array}{r} \sup\limits_{\theta\in\Theta_0} E_\theta \varphi_1 \leqq \alpha \\ \sup\limits_{\theta\in\Theta_0} E_\theta \varphi_2 \leqq \alpha \\ (\forall \theta \in \Theta_1) E_\theta \varphi_1 \leqq E_\theta \varphi_2 \end{array}\right| \text{ alors } \varphi_2 \geqslant \varphi_1$$

Remarque 1. — 1. Pour toute stratégie φ telle que $\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} E_\theta \varphi > \alpha$, la stratégie φ', telle que $(\forall x \in X)\varphi'(x) = \alpha$, satisfait à $\varphi' \geqslant \varphi$.

2. Deux stratégies peuvent ne pas être comparables.

3. Les fonctions puissance de deux stratégies peuvent ne différer que sur Θ_0, donc il peut exister plusieurs stratégies optimums.

(*) Étant donné un préordre, noté $\geqslant$, sur un ensemble S on dit que

. φ' est un majorant de Φ si et seulement si $\varphi' \geqslant \varphi$

. φ est un optimum si et seulement si $(\forall \varphi' \in S)\varphi \geqslant \varphi'$

. est un élément maximal, si et seulement si,

$$\varphi' \in S \quad \text{tel que} \quad \varphi' \geqslant \varphi.$$

On remarque qu'un élément maximal n'est pas forcément comparable à tous les éléments de S, tandis que l'optimum est comparable à tous.

4. Dans de nombreux ouvrages les stratégies optimums sont appelées « tests UMP » (uniformément les plus puissants).

5. Dans de nombreux ouvrages les « stratégies maximales » sont appelées « tests admissibles ».

2) *Critère maximum.*

Étant donné $\alpha \in [0, 1]$.

. Si il existe deux stratégies φ_1 et φ_2 telles que :

$$\left.\begin{array}{l} \sup\limits_{\theta \in \Theta_0} E_\theta \varphi_1 > \alpha \\ \sup\limits_{\theta \in \Theta_0} E_\theta \varphi_2 \leqq \alpha \end{array}\right| \text{ alors } \varphi_2 \geqslant \varphi_1$$

. Si il existe deux stratégies φ_1 et φ_2 telles que :

$$\left.\begin{array}{l} \sup\limits_{\theta \in \Theta_0} E_\theta \varphi_1 \leqq \alpha \\ \sup\limits_{\theta \in \Theta_0} E_\theta \varphi_2 \leqq \alpha \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{alors } \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ sont toujours comparables} \\ \text{et } \varphi_2 \geqslant \varphi_1 \Leftrightarrow \operatorname*{Inf}\limits_{\theta \in \Theta_1} E_\theta \varphi_2 \geqslant \operatorname*{Inf}\limits_{\theta \in \Theta_1} E_\theta \varphi_1 \end{array}$$

V.2. EXISTENCE ET CONSTRUCTION DE STRATÉGIES OPTIMUMS

Dans ce paragraphe on suppose les P_X^θ dominées par une mesure σ σ-finie. Θ_0 et Θ_1 sont munis chacun d'une tribu. On note P^θ les densités des probabilités P_X^Θ par rapport à σ et on les suppose mesurables par rapport aux tribus produits mises sur $\Theta_0 \times X$ et $\Theta_1 \times X$. Remarquons que cette condition est satisfaite si X est séparable. Une stratégie est ici (V.2) une classe d'équivalence de variables aléatoires définies sur $(X, \mathscr{X}, \sigma)$, à valeurs dans [0, 1].

A. Existence de stratégies optimums.

1° Propriétés de la classe $\mathscr{S}_\alpha$

Théorème 1. — $\mathscr{S}_\alpha$, ensemble des stratégies de seuil α, est une partie convexe de $L_\infty(X, \mathscr{X}, \sigma)$; elle est compacte pour la topologie faible $\sigma(L_\infty, L_1)$.

Démonstration. — Rappelons que $\mathscr{S}_\alpha$ est l'ensemble des stratégies φ telles que

$$\operatorname*{Sup}_{\theta \in \Theta_0} E_\theta(\varphi) \leqq \alpha.$$

L'ensemble $\mathscr{S}_{\alpha,\theta}$ des stratégies telles que $E_\theta(\varphi) \leqq \alpha$, c'est-à-dire

$$\int_X \varphi(x)p^\theta(x)d\sigma(x) \leqq \alpha$$

est fermé pour la topologie $\sigma(L_\infty, L_1)$ et ceci quel que soit θ.

$\mathscr{S}_\alpha = \bigcap_{\theta\in\Theta_0} \mathscr{S}_{\alpha,\theta}$ est fermé. Étant contenu dans la boule unité de L_∞ qui est compacte, $\mathscr{S}_\alpha$ est compact.

2° Cas ou Θ_1 a un seul élément θ_1

Dans ce cas les deux critères considérés coïncident. L'application de $\mathscr{S}_\alpha$ dans $\mathbb{R}$ qui à φ associe sa puissance $E_{\theta_1}(\varphi)$ est faiblement continue. $\mathscr{S}_\alpha$ étant faiblement compact, cette application atteint sa borne supérieure : la stratégie optimum existe.

3° Cas ou Θ_1 est quelconque.

On ne peut rien dire quant à l'existence de la stratégie optimum au sens de Neyman-Pearson, mais la stratégie maximin existe, en effet les applications de $\mathscr{S}_\alpha$ dans $\mathbb{R}$ qui à φ associent $E_\theta(\varphi)$ sont faiblement continues quel que soit θ. Donc l'application qui à φ associe $\operatorname*{Inf}_{\theta\in\Theta_1} E_\theta(\varphi)$ est faiblement semi-continue supérieurement et atteint sa borne supérieure sur $\mathscr{S}_\alpha$ faiblement compact.

B. Construction de stratégies optimums. Probabilités les moins favorables.

Le lemme de Neyman-Pearson donne une forme suffisante des stratégies optimums dans le cas ou Θ_0 et Θ_1 ont chacun un seul élément. Dans les autres cas on essaiera de se ramener à celui-ci et c'est là qu'interviendra la notion de probabilité la moins favorable.

1° Lemme de Neyman-Pearson.

On considère le cas ou Θ_0 et Θ_1 ont chacun un seul élément noté respectivement θ_0 et θ_1.

THÉORÈME 2.

1) Il existe une stratégie φ et un nombre k tels que

(*a*) $E_{\theta_0}(\varphi) = \alpha$.

(*b*) $\varphi(x) = 1$ quand $p^{\theta_1}(x) > kp^{\theta_0}(x)$,

$\varphi(x) = 0$ quand $p^{\theta_1}(x) < kp^{\theta_0}(x)$.

2) Toute stratégie telle qu'il existe k satisfaisant aux conditions (*a*) et (*b*) est optimum.

3) Si une stratégie φ est optimum, alors il existe k tel que (*b*) soit vraie σ-presque partout et on a soit $E_{\theta_0}(\varphi) = \alpha$ soit $E_{\theta_1}(\varphi) = 1$.

2° Θ_0 ET Θ_1 SONT QUELCONQUES. CRITÈRE DU MAXIMIN

Les parties de Θ_1 réduites à un élément sont supposées mesurables.

Le critère considéré ici est celui du maximin. Soit λ une probabilité sur Θ_1. Posons :

$$E_\lambda(\varphi) = \int_{\Theta_1} E_\theta(\varphi) d\lambda(\theta).$$

Remarquons que $E_\lambda(\varphi)$ peut s'écrire :

$$E_\lambda(\varphi) = \int_X \varphi(x) \left[\int_{\Theta_1} p^\theta(x) d\lambda(\theta) \right] d\sigma(x) = \int_X \varphi(x) p^\lambda(x) d\sigma(x).$$

Au lieu de considérer la famille de densités $\{ p^\theta, \theta \in \Theta_1 \}$ on considère la densité unique p^λ définie par

$$p^\lambda(x) = \int_{\Theta_1} p^\theta(x) d\lambda(\theta)$$

qui est encore une densité de probabilité par rapport à la mesure σ sur $(X, \mathscr{X})$.

Définition d'une λ-stratégie. — φ_λ est une stratégie de Bayes associée à λ (ou une λ-stratégie) si φ_λ maximise $E_\lambda(\varphi)$ c'est-à-dire si

$$E_\lambda(\varphi_\lambda) = \sup_{\varphi \in \mathscr{I}_\alpha} E_\lambda(\varphi),$$

Remarque. — Une λ-stratégie φ_λ est une stratégie optimum pour le problème consistant à tester Θ_0 contre l'hypothèse simple associée à la densité p^λ. Pour ce nouveau problème la classe des stratégies de seuil α est inchangée et $E_\lambda(\varphi)$ est la nouvelle puissance de la stratégie.

Définition d'une probabilité la moins favorable. — Une probabilité μ sur Θ_1 est dite la moins favorable si :

$$(\forall \lambda) \qquad E_\mu(\varphi_\mu) \leqq E_\lambda(\varphi_\lambda).$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(\forall \lambda) \qquad \sup_{\varphi \in \mathscr{S}_\alpha} E_\mu(\varphi) \leqq \sup_{\varphi \in \mathscr{S}_\alpha} E_\lambda(\varphi).$$

Définition d'une (λ_n)-stratégie. — Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de probabilités sur Θ_1, φ_0 est une stratégie bayésienne associée à la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou une (λ_n)-stratégie) si :

$$\lim_{n \to \infty} [E_{\lambda_n}(\varphi_0) - \sup_{\varphi \in \mathscr{S}_\alpha} E_{\lambda_n}(\varphi)] = 0.$$

THÉORÈME 3. — Si une μ-stratégie est telle que :

$$E_\mu(\varphi_\mu) = \operatorname*{Inf}_{\lambda} E_\lambda(\varphi_\mu). \tag{1}$$

Alors : 1) φ_μ est maximin.
2) μ est la moins favorable.

Démonstration du théorème 3.
1° φ_μ est maximin. En effet :

$$\operatorname*{Inf}_{\theta \in \Theta_1} E_\theta(\varphi) \leqq \int_{\Theta_1} E_\theta(\varphi) d\mu(\theta) \leqq \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathscr{S}_\alpha} E_\mu(\varphi) = E_\mu(\varphi_\mu).$$

$$(\forall \lambda) \qquad E_\mu(\varphi_\mu) = \operatorname*{Inf}_{\lambda} E_\lambda(\varphi_\mu) \leqslant E_\lambda(\varphi_\mu).$$

Les parties de Θ_1 réduites à un point étant mesurables quel que soit $\theta \in \Theta_1$, il existe une probabilité λ_θ concentrée en θ. On a $E_{\lambda_\theta}(\varphi) = E_\theta(\varphi)$; donc :

$$(\forall \theta \in \Theta_1), (\forall \varphi \in \mathscr{S}_\alpha) \operatorname*{Inf}_{\theta \in \Theta_1} E_\theta(\varphi) \leqq E_\theta(\varphi_\mu).$$

2° μ est la moins favorable. En effet :

$$\operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathscr{S}_\alpha} E_\lambda(\varphi) \geqq E_\lambda(\varphi_\mu) \geqq E_\mu(\varphi_\mu) = \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathscr{S}_\alpha} E_\mu(\varphi).$$

Donc, les probabilités les moins favorables, si elles existent permettent si la condition (1) est réalisée, d'atteindre les stratégies maximin comme stratégies de Bayes associées à ces probabilités.

THÉORÈME 4. — Toute stratégie φ_0 maximin est un (λ_n)-test et

$$\lim_{n \to \infty} E_{\lambda_n}(\varphi_0) = \operatorname*{Inf}_{\theta \in \Theta_1} E_\theta(\varphi_0).$$

Démonstration du théorème 4. — On vérifie aisément que

$$\operatorname*{Inf}_{\theta\in\Theta_1} E_\theta(\varphi) = \operatorname*{Inf}_{\lambda} E_\lambda(\varphi).$$

Soit φ_0 stratégie maximin, on a alors :

$$\operatorname*{Inf}_{\theta\in\Theta_1} E_\theta(\varphi_0) = \operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} \operatorname*{Inf}_{\theta\in\Theta_1} E_\theta(\varphi) = \operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} \operatorname*{Inf}_{\lambda} E_\lambda(\varphi) \tag{1}$$

D'autre part :

$$\operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} \operatorname*{Inf}_{\lambda} E_\lambda(\varphi) = \operatorname*{Inf}_{\lambda} \operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} E_\lambda(\varphi) \tag{2}$$

en effet, considérons l'application :

$$\begin{aligned} f : (\varphi, \theta) &\rightsquigarrow E_\theta(\varphi) \\ \mathscr{S}_\alpha \times \Theta_1 &\to \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\mathscr{S}_\alpha$ est une partie compacte d'un espace vectoriel topologique. Θ_1 est un espace mesurable où toutes les parties réduites à un point sont mesurables. L'application $\varphi \rightsquigarrow E_\theta(\varphi)$ est quasi-convexe et semi-continue inférieurement l'ensemble $\{\varphi;\ E_\theta(\varphi) \leqq \alpha\}$ étant convexe et fermé. Les conditions requises sont bien réalisées pour que (2) soit vrai (cf. Nicolas C. I. R. O.).

En réunissant (1) et (2) on obtient

$$\operatorname*{Inf}_{\theta\in\Theta_1} E_\theta(\varphi_0) = \operatorname*{Inf}_{\lambda} \operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} E_\lambda(\varphi).$$

Il existe donc une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de probabilités telles que :

$$\operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} E_{\lambda_n}(\varphi) \to \operatorname*{Inf}_{\theta\in\Theta_1} E_\theta(\varphi_0) \qquad \text{quand} \qquad n\to\infty$$

Or

$$\operatorname*{Inf}_{\theta\in\Theta_1} E_\theta(\varphi_0) = \operatorname*{Inf}_{\lambda} E_\lambda(\varphi_0) \leqq E_{\lambda_n}(\varphi_0) \leqq \operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} E_{\lambda_n}(\varphi).$$

Donc $E_{\lambda_n}(\varphi_0)$ et $\operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} E_{\lambda_n}(\varphi)$ ont même limite (et par là φ_0 est une (λ_n)-stratégie), et cette limite est $\operatorname*{Inf}_{\theta\in\Theta_1} E_\theta(\varphi_0)$.

*
* *

On va voir maintenant que sous certaines hypothèses cette (λ_n)-stratégie est une μ-stratégie telle que la probabilité μ soit la moins favorable.

THÉORÈME 5. — Pour qu'il existe une probabilité la moins favorable il suffit que :

1° Θ_1 soit localement compact à base dénombrable et muni de la tribu de Borel.

2° $p^\theta(x)$, pour chaque x, soit continu en θ.

3° Quel que soit $\varepsilon > 0$, quel que soit K compact de Θ_1 il existe $S \in \mathscr{X}$ tel que :

a) $P^\theta_{S^c} \leqq \varepsilon$ si $\theta \in \Theta_0 \cup K$.

b) P^θ_S est une fonction de θ nulle à l'infini pour $\theta \in \Theta_1$.

Démonstration du théorème 5. — Θ_1 étant L. C. D. donc *a fortiori* Polonais, les mesures sur la tribu de Borel de Θ_1 sont régulières pour les compacts. La tribu de Borel est identique à la tribu engendrée par les compacts car Θ_1 est dénombrable à l'infini. Donc il y a correspondance biunivoque entre les mesures sur la tribu de Borel de Θ_1 et les mesures de Radon définies sur Θ_1.

Munissons $\mathscr{M}(\Theta_1)$, ensemble des mesures de Radon sur Θ_1, de la topologie vague. $\mathscr{M}^+(\Theta_1)$ le sous-ensemble des mesures positives, est métrisable car Θ_1 est L. C. D. De plus le sous-ensemble des mesures μ telles que $\|\mu\| \leqq 1$ est vaguement compact. Donc de toute suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de probabilité on peut extraire une sous-suite convergente. On notera encore $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite extraite :

$$\mu_n \to \mu \qquad \text{avec} \qquad \|\mu\| \leqq 1$$

c'est-à-dire :

$$E_{\mu_n}(f) \to E_\mu(f)$$

pour toute la fonction f réelle continue à support compact définie sur Θ_1. Et même avec la topologie choisie sur Θ_1 ceci vaut pour f réelle continue bornée définie sur Θ_1. On a vu précédemment qu'il existait un test φ_0 maximin et une suite de probabilités $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que φ_0 soit un (λ_n)-test. De cette suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ extrayons une sous-suite convergente, que nous noterons encore $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lambda_n \to \gamma\mu$$

avec $\gamma \in [0, 1]$ et μ une probabilité.

On va maintenant montrer que, sous les hypothèses faites, on a :

a) Si $\gamma = 1$, μ est la moins favorable.

b) Si $\lim_n \operatorname{Sup}_{\varphi\in\mathscr{P}_\alpha} E_{\lambda_n}(\varphi) = 1$, toute probabilité sur Θ_1 est la moins favorable.

c) On a soit $\gamma = 1$, soit $\lim_n \operatorname{Sup}_{\varphi\in\mathscr{P}_\alpha} E_{\lambda_n}(\varphi) = 1$ et la démonstration sera terminée.

a) *Si* $\gamma = 1$, *montrons que* μ *est la moins favorable*, c'est-à-dire

$$\operatorname{Sup}_{\varphi\in\mathscr{P}_\alpha} E_\mu(\varphi) = \operatorname{Inf}_\lambda \operatorname{Sup}_{\varphi\in\mathscr{P}_\alpha} E_\lambda(\varphi)$$

ou encore en utilisant le théorème 4

$$\operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} \mathrm{E}_\mu(\varphi) = \lim_n \operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} \mathrm{E}_{\lambda_n}(\varphi)$$

Cela va résulter de ce que $(\forall \varphi \in \mathscr{S}_\alpha)\mathrm{E}_{\lambda_n}(\varphi)$ tend vers $\mathrm{E}_\mu(\varphi)$ uniformément en φ. En effet on déduit de cette convergence uniforme

$$\operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} \mathrm{E}_\mu(\varphi) = \operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} \lim_n \mathrm{E}_{\lambda_n}(\varphi) = \lim_n \operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} \mathrm{E}_{\lambda_n}(\varphi).$$

Montrons donc que $\mathrm{E}_{\lambda_n}(\varphi)$ tend vers $\mathrm{E}_\mu(\varphi)$ uniformément en φ.

Sur Θ_1 on considère une nouvelle topologie définie par la distance d:

$$d(\theta, \theta') = \operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} |\mathrm{E}_\theta(\varphi) - \mathrm{E}_{\theta'}(\varphi)|.$$

La nouvelle topologie est moins fine que la topologie initiale, en effet, soit $(\theta_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite d'éléments de Θ_1 qui converge vers θ_0 au sens de la topologie initiale

$$\mathrm{E}_{\theta_0}(\varphi) - \mathrm{E}_{\theta_n}(\varphi) = \int_{\mathrm{X}} \varphi(x)[p^{\theta_0}(x) - p^{\theta_n}(x)]d\sigma(x)$$

$$|\mathrm{E}_{\theta_0}(\varphi) - \mathrm{E}_{\theta_n}(\varphi)| \leqq \int_{\mathrm{X}} |p^{\theta_0}(x) - p^{\theta_1}(x)|\, d\sigma(x)$$

$p^\theta(x)$ étant continu en θ, $p^{\theta_n}(x)$ converge vers $p^{\theta_0}(x)$ pour x fixé. Posons $\mathrm{U}_n(x) = p^{\theta_n}(x) - p^{\theta_0}(x)$.

$$\int_{\mathrm{X}} \mathrm{U}_n(x)d\sigma(x) = 0 \qquad \int_{\mathrm{X}} \mathrm{U}_n^+(x)d\sigma(x) = \int_{\mathrm{X}} \mathrm{U}_n^-(x)d\sigma(x)$$

$$\int |p^{\theta_n}(x) - p^{\theta_0}(x)d\sigma(x) = 2\int_{\mathrm{X}} \mathrm{U}_n^-(x)d\sigma(x)$$

$$\mathrm{U}_n^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p^{\theta_n}(x) \geqq p^{\theta_0}(x) \\ p^{\theta_0}(x) - p^{\theta_n}(x) & \text{si} \quad p^{\theta_n}(x) < p^{\theta_0}(x). \end{cases}$$

$0 \leqq \mathrm{U}_n^-(x) \leqq p^{\theta_0}(x)$, $p^{\theta_0}(x)$ est intégrable, $\mathrm{U}_n^-(x)$ converge presque sûrement, donc, d'après le théorème de convergence dominée, $\mathrm{U}_n^-(x)$ est intégrable et $\int_{\mathrm{X}} \mathrm{U}_n^-(x)d\sigma(x)$ converge vers 0 et :

$$d(\theta_n, \theta_0) = \operatorname*{Sup}_{\varphi\in\mathscr{S}_\alpha} |\mathrm{E}_{\theta_0}(\varphi) - \mathrm{E}_{\theta_n}(\varphi)| \to 0$$

Θ_1 muni de la nouvelle topologie d reste séparable ; dans ces conditions

d'après le théorème 2.14 (Wald, Statistical Decision Functions) la convergence vague de λ_n vers μ entraîne la convergence de

$$\operatorname*{Sup}_{\varphi} |E_{\lambda_n}(\varphi) - E_\mu(\varphi)|$$

vers 0, ce qu'il restait à démontrer.

b) Si $\lim_n \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathscr{S}_\alpha} E_{\lambda_n}(\varphi) = 1$, *alors toute probabilité est la moins favorable.* De la façon même dont a été choisie la suite λ_n :

$$\lim_n \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathscr{S}_\alpha} E_{\lambda_n}(\varphi) = \operatorname*{Inf}_{\lambda} \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathscr{S}_\alpha} E_\lambda(\varphi)$$

Donc si $\lim_n \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathscr{S}_\alpha} E_{\lambda_n}(\varphi) = 1$, alors $(\forall \lambda) \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathscr{S}_\alpha} E_\lambda(\varphi) = 1$ et toute probabilité λ est la moins favorable.

c) On a soit $\gamma = 1$, soit $\lim_n \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathscr{S}_\alpha} E_{\lambda_n}(\varphi) = 1$.

Cela va résulter des lemmes 1 et 2 suivants. Sous les hypothèses du théorème 5, on a les résultats suivants :

LEMME 1. — $\forall$K compact $\subset \Theta_1$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$N tel que :

$$\forall n \geqq N \qquad \int_{K^c} E_\theta(\varphi_0) d\lambda_n(\theta) \geqq 1 - \gamma - \varepsilon \tag{1}$$

LEMME 2. — $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$K compact $\subset \Theta_1$, $\exists$N′ tel que

$$\forall n \geqq N' \qquad \text{et} \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}_\alpha$$

on ait

$$\int_K E_\theta(\varphi) d\lambda_n(\theta) \geqq \gamma E_\mu(\varphi) - \varepsilon \tag{2}$$

Voyons d'abord les conséquences de ces lemmes :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \text{ et } N'$$

tels que pour $n \geqq N'$ on ait (2)

$$E_{\lambda_n}(\varphi_0) = \int_K E_\theta(\varphi_0) d_{\lambda_n}(\theta) + \int_{K^c} E_\theta(\varphi_0) d_{\lambda_n}(\theta)$$

donc

$$\int_K E_\theta(\varphi_0) d_{\lambda_n}(\theta) \geqq \gamma E_\mu(\varphi_0) - \varepsilon.$$

D'après le lemme 1 il existe N tel que si $n \geqq N$:

$$\int_{K^c} E_\theta(\varphi_0) d_{\lambda_n}(\theta) \geqq 1 - \gamma - \varepsilon$$

Donc :

$$\forall n \geqq \operatorname{Sup}(N, N') \qquad E_{\lambda_n}(\varphi_0) \geqq \gamma E_\mu(\varphi_0) + 1 - \gamma - 2\varepsilon$$

$$\lim_n E_{\lambda_n}(\varphi_0) \geqq \gamma E_\mu(\varphi_0) + 1 - \gamma$$

$$E_\mu(\varphi_0) \geqq \gamma E_\mu(\varphi_0) + 1 - \gamma$$

Ceci n'est possible que si $\gamma = 1$ ou $E_\mu(\varphi_0) = 1$ c. q. f. d.

Démonstration du lemme 1. — Il suffit de démontrer que $\forall K$ compact de Θ_1 et $\forall \varepsilon > 0$

$$\int_{K^c} E_\theta(\varphi_0 1_{S^c}) d_{\lambda_n}(\theta) \geqq 1 - \gamma - \varepsilon$$

où S un élément de $\mathscr{X}$ qui est associé à ε et à K selon l'hypothèse 3 du théorème 5.

Nous allons montrer que si l'on suppose l'existence d'un compact K tel que $\forall \varepsilon > 0$ et $\exists N$ $n_0 \geqq N$ tel que :

$$\int_{K^c} E_\theta(\varphi_0 1_{S^c}) d_{\lambda_n}(\theta) < 1 - \gamma - \varepsilon \tag{1}$$

on aboutit à une contradiction.

Considérons le test φ^* défini ainsi :

$$\varphi^* = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in S^c \\ \dfrac{\alpha - \varepsilon}{\alpha} \varphi_0 & \text{si} \quad x \in S \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\varphi^* \in \mathscr{S}_\alpha$.

D'autre part

$$\varphi^*(x) \geqq \frac{\alpha - \varepsilon}{\alpha} \varphi_0(x) + 1_{S^c}(x)[1 - \varphi_0(x)].$$

$$E_{\lambda_n}(\varphi^*) \geqslant \frac{\alpha - \varepsilon}{\alpha} E_{\lambda_n}(\varphi_0) + \int_{\Theta_1} d\lambda_n(\theta) \int_{S^c} [1 - \varphi_0(x)] p^\theta(x) d\sigma(x)$$

$$\int_{\Theta_1} d\lambda_n(\theta) \int_{S^c} (1 - \varphi_0(x)) p^\theta(x) d\sigma(x) \geqq \int_{K^c} P^\theta_{S^c} d\lambda_n(\theta) - \int_{K^c} E_\theta(\varphi_0 1_{S^c}) d\lambda_n(\theta)$$

$$\int_{K^c} P^\theta_{S^c} d\lambda_n(\theta) = 1 - \int_{\Theta_1} P^\theta_S d\lambda_n(\theta) - \int_K P^\theta_{S^c} d\lambda_n(\theta)$$

P_S^θ étant une fonction sur Θ_1 nulle à l'infini, il existe un compact $K' \subset \Theta_1$ tel que $P_S^\theta \leqq \varepsilon$ si $\theta \notin K'$

$$\int_{K'^c} P_S^\theta d\lambda_n(\theta) \leqq \varepsilon \lambda_n(K'^c) \leqq \varepsilon$$

$$\int_{K'} P_S^\theta d\lambda_n(\theta) \leqq \lambda_n(K')$$

Or $\lambda_n \to \gamma\mu$ donc il existe N' tel que quel que soit $n \geqq N'$ on ait

$$\lambda_n(K') \leqq \gamma\mu(K') + \varepsilon \qquad K' \text{ étant compact}$$

$$\lambda_n(K') \leqq \gamma + \varepsilon$$

D'où

$$\int_{\Theta_1} P_S^\theta d\lambda_n(\theta) \leqq \gamma + 2\varepsilon$$

On a

$$\int_K P_{S^c}^\theta d\lambda_n(\theta) \leqq \varepsilon \lambda_n(K) \leqq \varepsilon$$

Donc

$$\int_{K^c} P_{S^c}^\theta d\lambda_n(\theta) \geqq 1 - \gamma - 3\varepsilon \qquad \forall n \geqq N'$$

et

$$E_{\lambda_n}(\varphi^*) \geqq \frac{\alpha - \varepsilon}{\alpha} E_{\lambda_n}(\varphi_0) + 1 - \gamma - 2\varepsilon - \int_{K^c} E_{\lambda_n}[\varphi_0 1_{S^c}] d\lambda_n(\theta)$$

Mais avec l'hypothèse (1) précédente pour n assez grand et ε assez petit :

$$E_{\lambda_n}(\varphi^*) \geqq E_{\lambda_n}(\varphi_0) + k$$

k étant un nombre strictement positif. Or $E_{\lambda_n}(\varphi_0)$ a la même limite que $\operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathscr{S}_\alpha} E_{\lambda_n}(\varphi)$, il y a contradiction, c. q. f. d.

Démonstration du lemme 2. — Il existe K compact de Θ_1 tel que

$$\mu(K^c) \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$1_K(\theta) p^\theta(x)$ est pour x fixé une fonction continue à support compact, donc

$$\int_{\Theta_1} 1_K(\theta) p^\theta(x) d\lambda_n(\theta) \to \gamma \int_{\Theta_1} 1_K(\theta) p^\theta(x) d\mu(\theta)$$

Posons

$$Y_n(x) = \int_K p^\theta(x) d\lambda_n(\theta) \qquad \text{et} \qquad Y(x) = \gamma \int_K p^\theta(x) d\mu(\theta)$$

$Y_n(x) \to Y(x)$, les Y_n sont positifs ou nuls; en utilisant le lemme de Fatou, on obtient :

$$\varliminf_n \int_X Y_n(x)d\sigma(x) \geqq \int_K Y(x)d\sigma(x).$$

C'est-à-dire en échangeant l'ordre des intégrations :

$$\varliminf_n \int_K E_\theta(\varphi)d\lambda_n(\theta) \geqq \gamma \int_K E_\theta(\varphi)d\mu(\theta).$$

$\exists\, N(\varepsilon)$ tel que pour $n \geqq N(\varepsilon)$

$$\int_K E_\theta(\varphi)d\lambda_n(\theta) \geqq \gamma \int_K E_\theta(\varphi)d\mu(\theta) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Or

$$\int_{K^c} E_\theta(\varphi)d\mu(\theta) \leqq \mu(K^c) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\int_K E_\theta(\varphi)d\lambda_n(\theta) \geqq \gamma E_\mu(\varphi) - \varepsilon$$

3° Θ_0 QUELCONQUE. Θ_1 A UN SEUL ÉLÉMENT.

a) Les parties de Θ_0 réduites à un point sont supposées mesurables. Posons $f(x) = p^\theta(x)$ pour θ égal à l'unique élément de Θ_1. Soit λ une probabilité définie sur Θ_0 ;

$$p^\lambda(x) = \int_{\Theta_0} p^\theta(x)d\lambda(\theta)$$

est une densité de probabilité par rapport à σ.

On considère le nouveau problème du test de deux hypothèses simples liées respectivement aux densités $p^\lambda(x)$ et $f(x)$. Soit $\mathscr{S}_{\alpha,\lambda}$ l'ensemble des stratégies de seuil α pour ce problème. Posons :

$$E_\lambda(\varphi) = \int_X \int_{\Theta_0} \varphi(x)p^\theta(x)d\lambda(\theta)d\sigma(x) = \int_{\Theta_0} E_\theta(\varphi)d\lambda(\theta)$$
$$\mathscr{S}_{\alpha,\lambda} = \{\, \varphi / E_\lambda(\varphi) \leqq \alpha \,\}$$

$(\forall \lambda)\mathscr{S}_{\alpha,\lambda}$ contient $\mathscr{S}_\alpha$. Remarquons que les ordres considérés sur ces deux ensembles coïncident sur $\mathscr{S}_\alpha$.

Désignons par φ_λ une stratégie optimum pour ce nouveau problème, sa puissance est :

$$E_f(\varphi_\lambda) = \int_X \varphi_\lambda(x) f(x) d\sigma(x) = \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathscr{S}_{\alpha,\lambda}} E_f(\varphi).$$

Définition d'une probabilité la moins favorable. — μ, probabilité sur Θ_0, est dite la moins favorable si la puissance des stratégies optimums associées à μ est inférieure à celle de toute stratégie optimum associée à toute autre probabilité λ. C'est-à-dire :

$$\forall \lambda \qquad E_f(\varphi_\mu) \leqq E_f(\varphi_\lambda)$$

ou encore :

$$\forall \lambda \qquad \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathscr{S}_{\alpha,\mu}} E_f(\varphi) \leqq \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathscr{S}_{\alpha,\lambda}} E_f(\varphi).$$

THÉORÈME 6. — Soit φ_μ une stratégie optimum associée à μ. Si $\varphi_\mu \in \mathscr{S}_\alpha$, alors :

1) φ_μ est optimum dans $\mathscr{S}_\alpha$, c'est-à-dire pour le problème initial.

2) μ est la moins favorable.

Démonstration.

1) φ_μ appartient à $\mathscr{S}_\alpha$ et est optimum dans $\mathscr{S}_{\alpha,\mu}$ qui contient $\mathscr{S}_\alpha$, donc φ_μ est optimum dans $\mathscr{S}_\alpha$.

2) $\varphi_\mu \in \mathscr{S}_\alpha$ donc $\forall \lambda\ \varphi_\mu \in \mathscr{S}_{\alpha,\lambda}$; la puissance de φ_μ est inférieure à celle de φ_λ optimum dans $\mathscr{S}_{\alpha,\lambda}$.

$$\forall \lambda \qquad E_f(\varphi_\mu) \leqq E_f(\varphi_\lambda)$$

Donc μ est la moins favorable.

Du théorème précédent et du lemme de Neyman-Pearson résulte le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — S'il existe une stratégie φ, un nombre k, et une probabilité λ sur Θ_1, tels que :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f(x) > k \displaystyle\int_{\Theta_0} P^\theta(x) d\lambda(\theta) \\ 0 & \text{si} \quad f(x) < k \displaystyle\int_{\Theta_0} P^\theta(x) d\lambda(\theta) \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} &E_\theta(\varphi) \leqq \alpha \qquad \forall \theta \in \Theta_0 \\ &E_\theta(\varphi) = \alpha \end{aligned}$$

sauf sur un ensemble de Θ_0 de mesure λ-nulle, alors φ est optimum dans $\mathscr{S}_\alpha$ et λ est la moins favorable.

Les probabilités les moins favorables peuvent permettre de construire des stratégies optimums. Dans ce qui suit, on donne une condition suffisante d'existence d'une probabilité la moins favorable et des propriétés utiles pour la recherche de ces probabilités.

b. Existence d'une probabilité la moins favorable.

THÉORÈME 7.

Il existe une probabilité la moins favorable sous les hypothèses suivantes :
1) Θ_0 est localement compact à base dénombrable.
2) $p^\theta(x)$ est une fonction de $\theta \in \Theta_0$ continue pour chaque x.
3) $\forall \varepsilon > 0$ $\forall$K compact $\subset \Theta_0$, $\exists S \in x$ tel que :

$$P^\theta_{S^c} \leqq \varepsilon \qquad \forall \theta \in K \cup \Theta_1$$

P^θ_S est une fonction de $\theta \in \Theta_0$ nulle à l'infini.

Démonstration du théorème 7. — En échangeant les rôles de Θ_0 et Θ_1, le théorème 5 nous a appris l'existence d'une stratégie φ'_0 et d'une probabilité μ' sur Θ_0 telle que :

$$E_{\mu'}(\varphi'_0) = \operatorname*{Inf}_{\theta \in \Theta_0} E_\theta(\varphi'_0) = \operatorname*{Sup}_{\{\varphi \mid E_f(\varphi) \leqq \alpha\}} E_{\mu'}(\varphi) = \operatorname*{Inf}_{\lambda} \operatorname*{Sup}_{\{\varphi \mid f(\varphi) \leqq \alpha\}} E_\lambda(\varphi).$$

On aurait pu montrer de même l'existence d'une stratégie φ_0 et d'une probabilité μ sur Θ_0 telles que :

$$E_\mu(\varphi_0) = \operatorname*{Sup}_{\theta \in \Theta_0} E_\theta(\varphi_0) = \operatorname*{Inf}_{\{\varphi \mid E_f(\varphi) \geqq \beta\}} E_\mu(\varphi) = \operatorname*{Sup}_{\lambda} \operatorname*{Inf}_{\{\varphi \mid E_f(\varphi) \geqq \beta\}} E_\lambda(\varphi).$$

Choisissons β égal à la puissance de la stratégie optimum du problème :

$$\beta = \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \mathscr{S}} E_f(\varphi).$$

1° *φ_0 est optimum dans $\mathscr{S}_\alpha$.* — Soit φ_1 une stratégie optimum de $\mathscr{S}_\alpha$:

$$E_f(\varphi_1) = \beta \qquad \operatorname*{Sup}_{\theta \in \Theta_0} E_\theta(\varphi_1) \leqq \alpha$$

donc $E_\mu(\varphi_1) \leqq \alpha$.

$$\operatorname*{Sup}_{\theta \in \Theta_0} E_\theta(\varphi_0) = E_\mu(\varphi_0) = \operatorname*{Inf}_{\{\varphi \mid E_f(\varphi) \geqq \beta\}} E_\mu(\varphi) \leqq E_\mu(\varphi_1) \leqq \alpha.$$

D'où φ_0 appartient à $\mathscr{S}_\alpha$ et est optimum dans $\mathscr{S}_\alpha$: $E_f(\varphi_0) = \beta$.

2° *μ est la moins favorable.* — *Si* $\beta = 1$ toute probabilité est la moins favorable car

$$\forall \lambda \qquad E_f(\varphi_\lambda) = 1$$

Si $\beta < 1$. Pour montrer que μ est la moins favorable d'après le théorème 6, il suffit de montrer que φ_0 est une stratégie optimum associée à μ.

Montrons d'abord que $\operatorname*{Sup}_{\theta\in\Theta_0} E_\theta(\varphi_0) = \alpha$. En effet si $\operatorname*{Sup}_{\theta\in\Theta_0} E_\theta(\varphi_0) < \alpha$, la stratégie

$$\left[\varphi'(x) = \lambda\varphi_0(x) + 1 - \lambda \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{1-\alpha}{1 - \operatorname*{Sup}_{\theta\in\Theta_0} E_\theta(\varphi_0)}\right]$$

est telle que $\operatorname*{Sup}_{\theta\in\Theta_0} E_\theta(\varphi') = \alpha$ et $E_f(\varphi') > E_f(\varphi_0) = \beta$; or ceci est impossible.

Montrons donc que φ_0 est une stratégie optimum associée à la probabilité μ, c'est-à-dire :

$$E_f(\varphi_0) = \operatorname*{Sup}_{\{\varphi \mid E\ (\varphi) \leqq \alpha\}} E_f(\varphi)$$

ou

$$\beta = \operatorname*{Sup}_{\{\varphi \mid E\ (\varphi) \leqq \alpha\}} E_f(\varphi)$$

ou encore

$$\{\varphi \mid E_\mu(\varphi) \leqq \alpha\} \subset \{\varphi \mid E_f(\varphi) \leqq \beta\}$$

Or

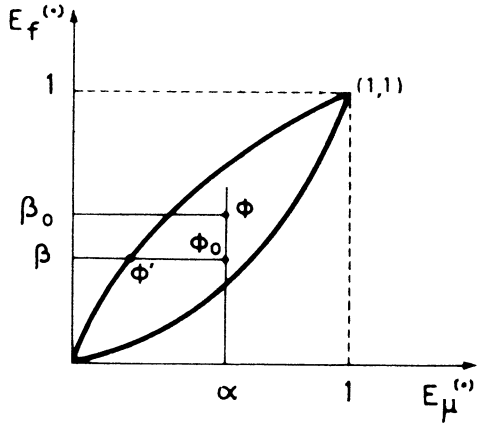
$$\alpha = \operatorname*{Inf}_{\{\varphi \mid E_f(\varphi) \geqq \beta\}} E_\mu(\varphi)$$

donc

$$\{\varphi \mid E_f(\varphi) \geqq \beta\} \subset \{\varphi \mid E_\mu(\varphi) \geqq \alpha\}.$$

Il suffit de montrer qu'il n'existe pas de stratégie telle que $E_f(\varphi) > \beta$ et $E_\mu(\varphi) = \alpha$.

A toute stratégie φ on peut associer le couple $(E_\mu(\varphi), E_f(\varphi))$. L'ensemble de ces valeurs est convexe dans R^2.



Si on suppose qu'il existe φ tel que $E_f(\varphi) = \beta_0 > \beta$ et $E_\mu(\varphi) = \alpha$, alors il existe φ' tel que $E_f(\varphi') = \beta$ et $E_\mu(\varphi') < \alpha$ (C'est la stratégie qui minimise E_μ sur $\{ \varphi \mid E_f(\varphi) = \beta \}$) ce qui est impossible. Il n'existe pas de stratégie φ telle que $E_f(\varphi) > \beta$ et $E_\mu(\varphi) = \alpha$.

c. Propriétés des probabilités les moins favorables utiles pour leur recherche.

Nous ne considérons dans ce paragraphe que la sous-classe des probabilités les moins favorables μ telles que la stratégie φ_μ associée appartienne à $\mathscr{S}_\alpha$ (voir théorème 6).

Si on cherche les probabilités les moins favorables concentrées en un point, ce point θ' sera tel que la densité de probabilité $p^{\theta'}(x)$ correspondante soit dans la famille $(p^\theta)_{\theta \in \Theta_0}$ celle qui « ressemble le plus à f », c'est-à-dire l'hypothèse qu'il semble le plus difficile à distinguer de la contre-hypothèse. Plus généralement une probabilité la moins favorable correspond à une pondération des densités p^θ qui donne une densité la « plus proche » possible de f. C'est le sens du théorème suivant.

THÉORÈME 8. — Soit μ une probabilité la moins favorable au sens restreint précédent. Supposons que la stratégie optimum φ soit donnée par :

$$\begin{array}{lll} \varphi(x) = 1 & \text{si} & f(x) > kp^\mu(x) \\ \varphi(x) = 0 & \text{si} & f(x) < kp^\mu(x). \end{array}$$

Alors $\| kp^\mu - f \| \leqq kp^\lambda - f \|$ $\forall \lambda$, la norme utilisée étant celle de $\mathscr{L}_1(X, \mathscr{X}, \sigma)$.

LEMME. — Soient f et g deux densités de probabilités par rapport à σ et $k > 0$. On a

$$\| kg - f \| = k - 1 + 2 \operatorname*{Sup}_{A \in \mathscr{X}} \int_A [f(x) - kg(x)] d\sigma(x).$$

Démonstration du lemme.

$$\begin{aligned} \| kg - f \| &= \int_X | kg(x) - f(x) | \, d\sigma(x) \\ &= k - 1 + 2 \int_{\{f > kg\}} [f(x) - kg(x)] d\sigma(x) \\ &= k - 1 + 2 \operatorname*{Sup}_{A \in \mathscr{X}} \int_A [f(x) - kg(x)] d\sigma(x). \end{aligned}$$

Démonstration du théorème 8. — Elle résulte du lemme précédent et de la définition de φ

$$\begin{aligned} \| kp^\lambda - f \| &= k - 1 + 2 \operatorname*{Sup}_{A \in \mathscr{X}} \int_A [f(x) - kp^\lambda(x)] d\sigma(x) \\ &\geqq k - 1 + 2 \int \varphi(x)[f(x) - kp^\lambda(x)] d\sigma(x) \\ &\geqq \| kp^\mu - f \| \end{aligned}$$

THÉORÈME 9. — Si une probabilité est uniformément la moins favorable c'est-à-dire si elle est la moins favorable quel que soit le seuil α, alors :

$$\lambda \forall \quad \| p^\mu - f \| \leqq \| p^\lambda - f \|$$

Démonstration du théorème 9. — En effet il suffit d'appliquer le théorème 8 à un seuil α_0 tel que $k(\alpha_0) = 1$ (Ceci est possible, voir la démonstration du lemme de Neyman-Pearson). Le théorème 9 servira dans la recherche d'une probabilité uniformément la moins favorable : elle sera parmi les probabilités λ sur Θ_0 telles que la densité p^λ soit la plus proche de f au sens de la norme de $\mathscr{L}^1$.

Dans le cas ou il n'existe pas de probabilité uniformément la moins favorable les théorèmes suivants serviront dans la recherche d'une probabilité la moins favorable pour un seuil donné, quand on en connaît pour d'autres seuils.

THÉORÈME 10. — Pour α fixé, l'ensemble des probabilités les moins favorables pour ce seuil est convexe.

THÉORÈME 11. — L'ensemble des valeurs des seuils α pour lesquelles une probabilité donnée μ est la moins favorable est fermé.

Démonstration du théorème 10. — Soit α fixé, et soient μ_1 et μ_2 deux probabilités les moins favorables pour ce seuil α.

Soit $a \in [0, 1]$. Montrons que $\mu = a\mu_1 + (1 - a)\mu_2$ est la moins favorable pour le seuil α.

Soit φ optimum ; il est optimum respectivement dans $\mathscr{S}_{\alpha,\mu_1}$ et $\mathscr{S}_{\alpha,\mu_2}$. D'après le lemme de Neyman-Pearson il existe k_1 et k_2 tels que :

$$\left.\begin{array}{lll} \varphi(x) = 1 & \text{si} & f(x) > k_i p^{\mu_i}(x) \\ \varphi(x) = 0 & \text{si} & f(x) < k_i p^{\mu_i}(x) \end{array}\right\} \sigma \text{ presque partout}$$

et on a soit $E_f(\varphi) = 1$, soit $E_{\mu_1}(\varphi) = E_{\mu_2}(\varphi) = \alpha$.

Soient k et b déterminés par :

$$\begin{aligned} ka &= k_1 b \\ k(1 - a) &= k_2(1 - b). \end{aligned}$$

Considérons le test φ' défini par :

$$\begin{array}{lll} \varphi'(x) = 1 & \text{si} & f(x) > k[ap^{\mu_1}(x) + (1-a)p^{\mu_2}(x)] = kp^{\mu}(x) \\ \varphi'(x) = 0 & \text{si} & f(x) < k[ap^{\mu_1}(x) + (1-a)p^{\mu_2}(x)] = kp^{\mu}(x) \\ \varphi'(x) = \varphi(x) & \text{si} & f(x) = k[ap^{\mu_1}(x) + (1-a)p^{\mu_2}(x)] = kp^{\mu}(x) \end{array}$$

$\varphi' = \varphi$ σ-presque partout donc soit $E_f(\varphi') = 1$ (et toute probabilité est la moins favorable), soit :

$$E_\mu(\varphi') = E_\mu(\varphi) = aE_{\mu_1}(\varphi) + (1-a)E_{\mu_2}(\varphi) = \alpha$$

(et dans ce cas φ' est optimum dans $\mathscr{S}_{\alpha,\mu}$ et appartient à $\mathscr{S}_\alpha$, dont μ est la moins favorable).

Démonstration du théorème 11. — Supposons qu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathrm{N}}$ de nombres appartenant à [0, 1]. convergente vers α, et que μ soit la moins favorable quel que soit le seuil α_n. Montrons que μ est la moins favorable pour α.

Soit φ_n une stratégie optimum pour le seuil α_n. L'ensemble des stratégies étant compact pour la topologie faible $\sigma(L_\infty, L_1)$ on peut extraire de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une sous-suite convergente, que nous noterons encore $(\varphi_n)_{n\in\mathrm{N}}$. Soit φ la limite. On a :

$$E_\theta(\varphi_n) \to E_\theta(\varphi) \qquad \theta \in \Theta_0.$$

Or $\forall\theta \in \Theta_0$, $E_\theta(\varphi_n) \leqq \alpha_n$, donc $E_\theta(\varphi) \leqq \alpha$: φ est de seuil α. Soit $\beta(\alpha)$ la puissance de la stratégie optimum dans le test du p^μ contre f au seuil α.

On a :

$$(\forall n) \qquad \beta(\alpha_n) = E_f(\varphi_n).$$

Or $E_f(\varphi_n)$ a pour limite $E_f(\varphi)$ et β étant une fonction concave de α et par là continue, $\beta(\alpha_n)$ a pour limite $\beta(\alpha)$. Donc $E_f(\varphi) = \beta(\alpha)$. φ est optimum pour le test de p^μ contre f au seuil α, φ est de seuil α pour le problème initial, donc μ est la moins favorable pour le seuil α.

V.3. CLASSES DE STRATÉGIES

Soient

— S, l'ensemble des stratégies relatives au test $[X, \Theta_0, \Theta_1, (P_X^\theta)_{\theta\in\Theta}]$,
— C, le centre de comparaison entre stratégies, préordre sur S,
— $\mathscr{M}_C^S$, l'ensemble des éléments optimums de S par rapport à ce critère C,
— $\mathscr{A}_C^S$, l'ensemble des éléments maximaux de S,

alors

$$\mathscr{M}_C^S \subset \mathscr{A}_C^S \subset S$$

A. Réductions du problème.

Comme, dans de nombreux cas il n'existe pas d'éléments optimums dans S, nous sommes amenés à restreindre notre problème.

A.1 Soit $\mathscr{P}$ une propriété telle que, si on note P, le sous-ensemble des stratégies de S, possédant la propriété $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{M}_C^S \neq \emptyset \Rightarrow \mathscr{M}_C^S \subset P$$

Soient $\mathscr{M}_C^P$, l'ensemble des stratégies optimums de P par rapport au critère C. $\mathscr{A}_C^P$, l'ensemble des stratégies maximales de P, alors

$$\mathscr{M}_C^S \subset \mathscr{M}_C^P \subset P \subset S \qquad \text{et} \qquad \mathscr{M}_C^S \neq \emptyset \Rightarrow \mathscr{M}_C^S = \mathscr{M}_C^P$$

En effet 1) $\mathscr{M}_C^S = \emptyset \Rightarrow \mathscr{M}_C^P \subset P \subset S$.

2) Si $\mathscr{M}_C^S \neq \emptyset$, il existe une stratégie $\varphi \in \mathscr{M}_C^S$, donc $\varphi \in P$.

. Or φ étant optimum est comparable à toutes les stratégies de S, donc *a fortiori* à celles de P. Donc φ est aussi optimum dans P. $\mathscr{M}_C^S \subset \mathscr{M}_C^P$.

. De plus, si il existe, une autre stratégie φ' appartenant à $\mathscr{M}_C^P$, alors $\varphi' \geqq \varphi$ et par transitivité φ' majore toutes les stratégies de S. Donc $\mathscr{M}_C^P \subset \mathscr{M}_C^S$

Conclusions. — Nous avons toujours intérêt à travailler dans P, car si nous trouvons une stratégie optimum dans P,

ou bien $\mathscr{M}_C^S \neq \emptyset$ et cette stratégie est aussi optimum dans S,

ou bien $\mathscr{M}_C^S = \emptyset$ et cette stratégie a l'avantage d'être optimum parmi une classe de stratégies, possédant une propriété qu'aurait eu tout optimum de S.

A.2 Soient maintenant deux propriétés $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, telles que, si on note P_1 et P_2, les deux sous-ensembles de stratégies de S, possédant la propriété $\mathscr{P}_1$ respectivement la propriété $\mathscr{P}_2$.

$$\mathscr{M}_C^S \neq \emptyset \Rightarrow \mathscr{M}_C^S \subset P_1 \subset P_2 \subset S$$

On a donc d'après le paragraphe précédent les inclusions suivantes :

$$\mathscr{M}_C^S \subset \mathscr{M}_C^{P_2} \subset P_2 \subset S$$

si de plus

$$\mathscr{M}_C^{P_2} \subset P_1$$

Alors

$$\mathscr{M}_C^S \subset \mathscr{M}_C^{P_2} \subset \mathscr{M}_C^{P_1} \subset P_1 \subset P_2 \subset S$$

Avec les remarques suivantes:

. $\mathcal{M}_C^S \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{M}_C^S = \mathcal{M}_C^{P_2} = \mathcal{M}_C^{P_1} \subset P_1 \subset P_2 \subset S.$

. $\left.\begin{array}{l}\mathcal{M}_C^S \neq \emptyset \\ \mathcal{M}_C^{P_2} \neq \emptyset\end{array}\right| \Rightarrow \mathcal{M}_C^{P_2} = \mathcal{M}_C^{P_1} \subset P_1 \subset P_2 \subset S$

. $\left.\begin{array}{l}\mathcal{M}_C^S = \mathcal{M}_C^{P_2} \neq \emptyset \\ \mathcal{M}_C^P \neq \emptyset\end{array}\right| \Rightarrow \mathcal{M}_C^{P_1} \subset P_1 \subset P_2 \subset S$

. Évidemment, tout ceci peut être étendu à un ensemble fini de sous-ensembles P_i emboîtés.

Dans les prochains paragraphes, nous n'utiliserons que le critère de Neymann et Pearson.

B. Stratégies sans biais.

DÉFINITION. — Une stratégie φ *est dite sans biais* si et seulement si

$$(\forall\theta \in \Theta_0)(\forall\theta' \in \Theta_1) \qquad E_\theta\varphi \leqslant E_{\theta'}\varphi$$

On notera B l'ensemble des stratégies sans biais.

(Ce sont les stratégies pour lesquelles la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle est, si $\theta \in \Theta_0$, inférieure à la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle si $\theta \in \Theta_1$).

a) A tout $\alpha \in]0, 1[$ on associe φ_α^*, stratégie constante ($\varphi_\alpha^* = \alpha$). On note

$$D = \{ \varphi_\alpha^* \mid \alpha \in]0, 1[\}$$

On remarque que

$$D \subset B \subset S$$

Toute stratégie majorant la stratégie constante φ_α^* est sans biais, donc

$$\mathcal{M}^S \subset B \subset S$$

b) Le paragraphe précédent nous donne les inclusions suivantes:

$$\mathcal{M}^S \subset \mathcal{M}^B \subset B \subset S$$

c) De plus, toute stratégie optimum dans B est maximale dans S. En effet, comme toute stratégie majorant une stratégie sans biais est sans biais, un optimum dans B, ne peut être majoré donc:

$$\mathcal{M}^S \subset \mathcal{M}^B \subset B \subset S$$
$$\mathcal{M}^S \subset \mathcal{M}^B \subset \mathcal{A}^S$$

C. Stratégies semblables.

DÉFINITION. — Étant donné une partie ω de Θ, une stratégie φ est dite semblable sur ω, si et seulement si

$$(\forall(\theta, \theta') \in \omega^2) \qquad E_\theta\varphi = E_{\theta'}\varphi.$$

On notera Σ_ω, l'ensemble des stratégies semblables sur ω.

. Désormais, on supposera Θ muni d'une topologie et on note

$\omega_0 = \overline{\Theta}_0 \cap \overline{\Theta}_1$. Par abus de langage, on appellera stratégies semblables, les stratégies semblables sur ω_0 et on notera $\Sigma = \Sigma_{\omega_0}$.

Propriétés élémentaires :

. $D \subset \Sigma$.

. Une condition suffisante pour qu'une stratégie φ sans biais, soit semblable est que l'application $\theta \rightsquigarrow E_\theta\varphi$ soit continue.

. Dans ce cas nous avons les inclusions suivantes :

$$\mathscr{M}^S \subset B \subset \Sigma \subset S \qquad \text{donc} \qquad \mathscr{M}^S \subset \mathscr{M}^\Sigma \subset \Sigma \subset S$$

Or comme $D \subset \Sigma$, toute stratégie optimum dans Σ, majorant les éléments de D, est sans biais, c'est-à-dire que

$$\mathscr{M}^\Sigma \subset B.$$

Donc, grâce au résultat du paragraphe (A-2) :

Si $(\forall\varphi \in B)$ l'application $\theta \rightsquigarrow E_\theta\varphi$ est continue alors

$$\mathscr{M}^S \subset \mathscr{M}^\Sigma \subset \mathscr{M}^B \subset B \subset \Sigma \subset S$$

Remarques. — Il est intéressant de travailler sur Σ plutôt que sur S ou B, car on sait un peu plus facilement exhiber les stratégies semblables que les autres ([1]).

Il y a de nombreux cas classiques de tests ou existent des tests optimums dans Σ, donc optimums dans B, alors qu'il n'existe pas d'optimum dans S.

Exemples. — Famille exponentielle à un paramètre réel θ :

Soient les tests $[X, \Theta_0, \Theta_1, (P_X^\theta)_{\theta\in\Theta}]$ ou $(\forall\theta\in\Theta)$ P_X^θ est une probabilité absolument continue par rapport à une mesure σ-finie sur $(X, \mathscr{X})$ de densité

([1]) LINNIK [*4*].

de la forme $P_\theta(x) = C(\theta)e^{\theta T(x)}h(x)$, où C, T, h sont des fonctions à valeurs réelles.

Si on a

1° $\Theta_0 =]-\infty, \theta_0]$, $\Theta_1 =]\theta_0, +\infty[$, alors il existe un optimum dans S.

2° $\Theta_0 = [\theta_0, +\infty[$, $\Theta_1 =]-\infty, \theta_0[$, il existe un optimum dans S.

3° $\Theta_0 =]-\infty, \theta_1] \cup [\theta_2, +\infty[$, $\Theta_1 =]\theta_1, \theta_2[(\theta_1 < \theta_2)$, il existe un optimum dans S.

4° $\Theta_0 = [\theta_1, \theta_2]$, $\Theta_1 =]-\infty, \theta_1[\cup]\theta_2, +\infty[(\theta_1 < \theta_2)$, il n'existe pas un optimum dans S, il existe un optimum dans Σ.

5° $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ $\Theta_1 = \{\theta \in \Theta \mid \theta \neq \theta_0\}$, il n'existe pas un optimum dans S, il existe un optimum dans Σ (1).

D. Tests conditionnés.

Dans un grand nombre de Test, Θ_0 n'est pas composé d'un seul élément ; le conditionnement par une statistique exhaustive T, va nous aider à ramener un problème général (ou se présentent des paramètres nuisibles) à un problème où Θ_0 est simple.

D.1. Définition du conditionnement d'un test

— Soit un test $[X, \Theta, \Theta_0, \Theta_1, (P_X^\theta)_{\theta\in\Theta}]$.

— Soit $T : (X, \mathscr{X}) \to (Y, \mathscr{Y})$ une application mesurable. On suppose que « $\mathscr{Y}$ contient les points de Y′ ».

— Soient $\begin{cases} \mathscr{X}_T = T^{-1}(\mathscr{Y}) & \text{la tribu induite par T.} \\ Q^\theta = P^\theta \quad T^{-1} & \text{la probabilité image par T.} \end{cases}$

Hypothèses fondamentales.

a) $(\forall \theta \in \Theta)$ $P_X^{\theta, \mathscr{X}_T}$ est régulière ; donc une version de cette probabilité étant fixée, pour tout y, la notation $P_X^{\theta, T(x)=y}$ que l'on écrira $P_X^{\theta, y}$ désignera une probabilité sur X.

b) $(\forall \theta \in \Theta)(\forall y \in Y)$ $P_X^{\theta, y}$ est concentrée sur $T^{-1}(y)$ c'est-à-dire

$$(\forall A \in \mathscr{X}) \qquad P^{\theta, y}(A) = P^{\theta, y}(A \cap T^{-1}(y)) \text{ (2)}$$

On note $\mathscr{X}_{|A}$ la tribu des traces sur A des éléments de $\mathscr{X}$.

---

(1) Les démonstrations se trouvent dans LEHMANN [*1*].

(2) Voir les conditions de concentration. MÉTIVIER, *Thèse Rennes*, 1966-1967. Ionescu TULCEA, On the Lifling Property disintegration of mesure S. *Annales Inst. Fourier*, Grenoble, 1964.

Définition. — Soit $y \in Y$, on appelle test conditionné en y le test

$$[T^{-1}(y), \mathscr{X}_{|T^{-1}(y)}, \Theta_0, \Theta_1, (P^{\theta,y}_{T^{-1}(y)\theta\in\Theta})]$$

Comme on désigne par « stratégie associée au problème initial », toute application mesurable $\varphi: (X, \mathscr{X}) \to ([0, 1], B_{[0,1]})$ et par S, l'ensemble de ces stratégies,

par analogie, on désignera par « stratégie associée au test conditionné en y » toute application mesurable $\varphi_y : (T^{-1}(y), \mathscr{X}_{|T^{-1}(y)}) \to ([0, 1), B_{[0,1]})$ et par S_y, l'ensemble des stratégies du test conditionné en y.

Donc si φ est une stratégie du test initial, $\varphi_{|T^{-1}(y)}$ est une stratégie du test conditionné en y.

Définition 2. — Le test initial est *T-conditionnalisable* si et seulement si

$$\varphi \in \mathscr{M}^S \Rightarrow (\forall \theta \in \Theta) \qquad Q^\theta \{ y \in Y \mid \varphi_{|T^{-1}(y)} \in \mathscr{M}^{Sy} \} = 1$$

c'est-à-dire que $\mathscr{P}$ presque toutes les restrictions d'une stratégie optimum pour le test initial sont des stratégies optimums pour chaque test conditionné.

Inversement : On peut se demander si, étant donné, pour tout $y \in Y$, une stratégie optimum pour le test conditionné, Ψ_y :

1) il existe une stratégie φ: $(\mathscr{S}, \mathscr{X}) \to ([0, 1]), B_{[0,1]})$, telle que

$$(\forall y \in' Y) \qquad \Psi_y = \varphi_{|T^{-1}(y)},$$

2) si cette stratégie φ, quand elle existe est optimum dans S.

Nous désignerons ce problème sous le nom de « recollement des solutions des tests conditionnés ».

Remarques. — Dans de nombreux cas, au lieu de chercher un optimum dans S, on cherche un optimum dans Σ. On note Σ_y l'ensemble des stratégies semblables du test conditionné en y ; le problème que nous venons de poser est ainsi seulement légèrement modifié : nous remplaçons S par Σ et Sy par Σy.

D.2. Conditions pour qu'un test soit T-conditionnalisable

D.2.1. *Préliminaires théoriques.*

α) *Saturation par rapport* à (T, Θ).

Définition. — On appelle tribu saturée de $\mathscr{X}$ par rapport à (T, Θ) la tribu

$$\mathscr{X}^{(T,\Theta)} = \{ A \in \mathscr{P}(X) \mid (\forall \theta \in \Theta) y \rightsquigarrow P^{\theta,y}(A \cap T^{-1}(y)) \text{ est } \mathscr{Y}\text{-mes.} \}$$

PROPRIÉTÉS. — $\mathscr{X}^{(T,\Theta)} \supset \mathscr{X}$.

P_X^θ se prolonge de $\mathscr{X}$ à $\mathscr{X}^{(T,\Theta)}$ par

$$(\forall A \in \mathscr{X}^{(T,\Theta)})\ P^\theta(A) = \int_Y P^{\theta,y}(A \cap T^{-1}(y))dQ^\theta(y).$$

On supposera désormais que $\mathscr{X}$ est sa propre saturée par rapport à (T, Θ) (Ce qui n'implique pas nécessairement qu'elle le soit par rapport à (T, Θ_0), car $\mathscr{X}^{(T,\Theta)}$ est plus grosse que $\mathscr{X}^{(T,\Theta)}$).

β) Familles complètes de probabilités.

. Soit $(X, \mathscr{X})$ une espace mesurable et $\mathscr{P} = (P^\eta)_{\eta \in H}$ une famille de probabilités sur $(X, \mathscr{X})$.

. Soit $\mathscr{H}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_1(X, \mathscr{X}, \mathscr{P})$.

. Soit E^H l'application : $\mathscr{H} \to \mathbb{R}^H$

$$\varphi \rightsquigarrow \{ E^\eta \varphi \}_{\eta \in H}$$

PROPRIÉTÉS. — Si $\varphi = \varphi'(\mathscr{P})$ alors $E^H\varphi = E^H\varphi'$.

Posons $n = \{ \varphi \in \mathscr{H} \mid \varphi(x) = 0\ (\mathscr{P}) \}$.

E^H induit une application F de $\mathscr{H}/n$ dans $\mathbb{R}^H$.

PROPRIÉTÉ P_1. — On dit que le couple $(\mathscr{H}, H)$ satisfait à la propriété P_1 si et seulement si F est injective.

Remarques. — On dit [1], dans le cas ou $\mathscr{H} = \mathscr{L}_1(X, \mathscr{X}, \mathscr{P})$ que $\mathscr{P}$ est une famille complète de probabilités.

Dans le cas ou $\mathscr{H} = \mathscr{L}_\infty(X, \mathscr{X}, \mathscr{P})$, que $\mathscr{P}$ est une famille bornée complète de probabilités.

PROPRIÉTÉS P_2. — On dit que le couple $(\mathscr{H}, H)$ satisfait à la propriété (P_2) si et seulement si il satisfait à la propriété P_1 et si l'application réciproque F^{-1} associe à tout élément positif de $F(\mathscr{H}/n)$ un élément positif de $\mathscr{H}/n$:

$$(\forall \varphi \in \mathscr{H}) \qquad [(\forall \eta \in H)\ E_\eta \varphi \geqq 0] \Rightarrow [\varphi \geqq 0\ (\mathscr{P})]$$

D.3. TEST T-PRÉCONDITIONNALISABLE

Nous allons introduire deux propriétés des tests :

— la préconditionnabilité,

— la propriété de majoration mesurable dont la conjonction entraîne la conditionnabilité.

---

(1) FRASER [2].

DÉFINITIONS. — Le test $[X, \Theta_0, \Theta_1(P_X^\theta)_{\theta\in\Theta}]$ est T-*préconditionnalisable* si et seulement si

$$\operatorname*{Sup}_{\Theta_0} E_\theta\varphi \leqq \varphi \Rightarrow (\forall\theta\in\Theta)\ Q^\theta\{y\in Y \mid \operatorname*{Sup}_{\Theta_0} E_\theta^{\mathscr{X}_T}\varphi|_{T^{-1}(y)} \leqq \alpha\} = 1\ (^1)$$

On dit que Θ_1 est dominé par Θ_0 (et on note $\Theta_1 \ll \Theta_0$) si et seulement si

$$(\forall\theta\in\Theta_1)(\forall\theta_0\in\Theta_0)\ P_X^{\theta_1} \ll P_X^{\theta_0}.$$

THÉORÈME 1. — Si l'application est exhaustive pour Θ_0, Θ_1 est dominée par Θ_0 une CNS pour que le test $[X, \Theta_0, \Theta_1, (P_X^\theta)_{\theta\in\Theta}]$ soit T-préconditionnalisable est que le couple $(L_\infty(X, \mathscr{X}, \mathscr{P}), \Theta_0)$ possède la propriété P_2 (²).

Démonstration. — On note $E_0^y\varphi$ la valeur commune des $E_\theta^y\varphi$ pour tout $\theta\in\Theta_0$.

a) *Condition suffisante.*

On a la chaîne d'une implication suivante :

$$\begin{array}{ll}
(\forall\theta_0\in\Theta_0)\ E_{\theta_0}\varphi \leqq \alpha. & \\
\Downarrow & \\
(\forall\theta_0\in\Theta_0)\ E_{\theta_0}[E_0^y\varphi] \leqq E_{\theta_0}\alpha & \\
\Downarrow & \\
(\forall\theta_0\in\Theta_0)\ E_0^y\varphi \underset{\Theta_1\ll\Theta_0}{\overset{(P_2)}{\leqq}} \alpha & [Q_{\theta_0}] \\
\Downarrow & \\
(\forall\theta\in\Theta)\ E_0^y\varphi \leqq \alpha & [Q_\theta]
\end{array}$$

b) *Condition nécessaire.*

Soit $\varphi\in\mathscr{L}_\infty(X, \mathscr{X}, \mathscr{P})$ telle que $(\forall\theta_0\in\Theta_0)\ E_{\theta_0}\varphi \geqq 0$.

Soient M et m les bornes supérieures et inférieures essentielles de φ pour la famille $\mathscr{P}$ (²).

(¹) Dans le cas où nous cherchons un optimum dans Σ. Nous notons N_T la classe des stratégies du test $[X, \Theta_0, \Theta_1, (P_X^\theta)_{\theta\in\Theta}]$ telles que

$$(\forall\theta\in\omega)\ E_\theta\varphi=\alpha \Rightarrow (\forall\theta\in\Theta)\ Q^\theta\{y\in Y \mid (\forall\theta\in\omega)\ E_\theta^{\mathscr{X}_T}\varphi|_{T^{-1}(y)} = \alpha\} = 1$$

Si $N_T = \Sigma$, alors nous pourrons dire que le test est T-préconditionnalisable et dans le théorème 1, la propriété P_2 sera remplacée par la propriété P_1. On appelle les éléments de N_T : « stratégies de structures de Neyman ».

(²) Rappel : cela signifie que

$$(\forall\theta\in\Theta_0)\ P^\theta[\varphi > M] = 0$$

et

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\theta\in\Theta_0)\ P^\theta[\varphi > M - \varepsilon] \neq 0.$$

On suppose que $m < 0$; soit la stratégie $\dfrac{\varphi + m}{M + m}$ elle satisfait à la condition

$$(\forall \theta \in \Theta_0)\ E_\theta\left(\frac{\varphi + m}{M + m}\right) \geqq \frac{m}{m + m}$$

et donc par hypothèses

$$E_0^y\left(\frac{\varphi + m}{M + m}\right) \geqq \frac{m}{m + m} \qquad (\mathscr{P})$$

autrement dit

$$E_0^y \varphi \geqq 0 \qquad (\mathscr{P})$$

et alors

$$E_\theta\ \varphi = E_\theta\ (E_0^y \varphi) \geqq 0 \qquad (\mathscr{P})$$

ce qui est contraire à l'hypothèse $m < 0$.

D.4. Tests conditionnalisables et préconditionnalisables

Familles de stratégies mesurablement majorée en α.

Définition. — Soit, pour tout $y \in Y$, Ψ_y, stratégies définies sur $T^{-1}(y)$ telles que

$$\operatorname*{Sup}_{\Theta_0} E_\theta^y \Psi_y \leqq \alpha$$

On dit que $\{\Psi_y\}_{y \in Y}$ est mesurablement majorée en α, si et seulement si

$$\exists \varphi : (X, \mathscr{X}) \to [0, 1]$$

telle que

$$(\forall y \in Y)(\forall x \in T^{-1}(y))\ \varphi(x) \geqq \Psi_y(x)$$

et

$$\operatorname*{Sup}_{\Theta_0} E_\theta \varphi \leqq \alpha.$$

Remarques. — Si $(\forall \theta \in \Theta)$, $y \rightsquigarrow E_\theta^y(\Psi_y)$ est mesurable, alors $\{\Psi_y\}_{y \in Y}$ est mesurablement majorée en α. On prend pour φ le recollement des Ψ_y, qui est mesurable car on a supposé $\mathscr{X}$ égale à saturée par rapport à (T, Θ).

Autre cas particulier

T exhaustive pour Θ_0 et Θ_1.

$\mathscr{X}$ (saturée par rapport à (T, Θ)) est saturée par rapport à (T, Θ_0).

Pour tout y, $P^{\theta,y}$ (valeur commune des $P^{\theta,y}$ pour $\theta \in \Theta_0$) est diffuse sur $T^{-1}(y)$. On peut en effet définir, pour tout y, une stratégie Ψ'_y vérifiant :

$$\left|\begin{array}{ll} (\forall x \in T^1(y)) & \Psi'_y(x) \geqq \Psi_y(x) \\ E_0^y(\Psi'_y) = \alpha. & \end{array}\right.$$

Le recollement des Ψ'_y est mesurable par rapport à la tribu saturée $\mathscr{X}$ par rapport à (T, Θ_0) puisque l'application $y \rightsquigarrow E_\theta^y \Psi'_y = E_0^y \Psi'_y = \alpha$, constante.

On a alors $(\forall \theta \in \Theta_0)\ E_\theta \Psi' = E_\theta[E_0^y \Psi'] = \alpha$, donc $\Psi' \in \Sigma$.

THÉORÈME 2. — Une condition suffisante pour qu'un test préconditionnalisable soit conditionnalisable est que

1) Pour toute famille $(\Psi_y)_{y \in Y}$ (ou, pour tout y, Ψ_y est une stratégie de taille $\leqq \alpha$ pour le test conditionné en y) la propriété de majoration mesurable en α soit satisfaite.

2) Le couple $(L_\infty(X, \mathscr{X}, \mathscr{P}), \Theta_1)$ possède la propriété P_1.

3) Pour tout y, le test conditionné en y soit tel que $\mathscr{M}^{S_y} \neq \emptyset$.

Démonstration.

1) Soit $\varphi \in \mathscr{M}^S$, et soit $B = \{ y \in Y,\ \varphi_{|T^{-1}(y)} \notin \mathscr{M}^{S_y} \}$.

Pour tout y appartenant à B, il existe Ψ_y de seuil α, tel que $\Psi_y \in \mathscr{M}^{S_y}$. φ étant de seuil α, il en est de même de $\mathscr{P}$-presque tous les $\varphi_{|T^{-1}(y)}$.

Soit alors Ψ qui majore mesurablement en α les $\varphi_{|T^{-1}(y)}$ (si $y \in B$) et les Ψ_y (si $y \in B$) Ψ vérifie donc

$$(\forall \theta \in \Theta_1)(\forall y \in Y)\ E_\theta^y \Psi' \geqq E_\theta^y \varphi$$

et donc

$$(\forall \theta \in \Theta_1)\ E_\theta \Psi' \geqq E_\theta \varphi.$$

Or $\varphi \in \mathscr{M}^S$, et donc

$$(\forall \theta \in \Theta_1)\ E_\theta \Psi' \leqslant E_\theta \varphi$$

d'où, le couple $(L_\infty(X, \mathscr{X}, \mathscr{P}), \Theta_1)$ possédant la propriété P_1,

$$(\forall \theta \in \Theta_1)\ \Psi' = \varphi \qquad P_\theta \text{ p. s.}$$

d'où

$$(\forall \theta \in \Theta_1)\ Q_\theta \{ y,\ \Psi'_y \neq \varphi_{|T^{-1}(y)} \} = 0$$

et donc

$$(\ \theta \in \Theta_1)\ Q_\theta(B) = 0$$

2) Réciproquement, soit un test φ tel que

$$(\forall \theta \in \Theta)\ Q^\theta \{ y \in Y;\qquad \varphi_{|T^{-1}(y)} \in \mathscr{M}^{S_y} \} = 1$$

Soit alors Ψ un autre test; il vérifie en particulier

$$(\forall \theta \in \Theta_1)\ E_\theta^y \varphi \geqq E_\theta^y \psi \qquad P_\theta \text{ p. s.}$$

et donc

$$(\forall \theta \in \Theta_1)\ E_\theta \varphi \geqq E_\theta \Psi.$$

Donc $\varphi \in \mathscr{M}^S$.

D.5. RECOLLEMENT. THÉORÈME 3.

Soit le test T-conditionnalisable $[X, \mathscr{X}, \Theta_0, \Theta_1, (P^\theta_X)_{\theta\in\Theta}]$ tel que :

— $\mathscr{M}^S \neq \emptyset$.

— pour tout y le test conditionné en y est tel que $\mathscr{M}^{Sy} \neq \emptyset$,

— si $\varphi_y \in \mathscr{M}^{Sy}$, $\Psi_y \in \mathscr{M}^{Sy}$, $\varphi_y \neq \Psi_y$ alors pour tout θ $\varphi_y = \Psi_y[P^{\theta,y}]$. Alors tout recollement des Ψ_y (pour $\Psi_y \in \mathscr{M}^{Sy}$) est un élément de $\mathscr{M}^S$, ces recollements sont $\mathscr{P}$-presque sûrement égaux.

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathscr{M}^S$ alors $(\forall y \in Y)$ $\varphi|_{T^{-1}(y)} \in \mathscr{M}^{Sy}$.
Soit Ψ_y un autre élément de $\mathscr{M}^{Sy}$; on a

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad \Psi_y = \varphi_{|T^{-1}(y)} \qquad (P^{\theta,y} \text{ p. s.})$$

Le recollement des $\varphi_{|T^{-1}(y)}$ étant par hypothèse $\mathscr{X}$-mesurable il en est de même de celui des Ψ_y (car $\mathscr{X}$ est saturée pour (T, Θ)) (on le note Ψ) et

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad \Psi = \varphi \qquad (P^\theta \text{ p. s.})$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] LEHMANN, *Testing Statistical hypotheses*, Wiley.

[2] LEHMANN, On the existence of least favorable distributions. *A. M. S.*, vol. **23**, n° 3, 1952, p. 408.

FRASER, *Non parametric method in statistic*, Wiley.

[3] REINHARDT, The use of least favorable distributions in testing composite hypotheses. *A. M. S.*, vol. **32**, 1961, p. 1034.

[4] WALD, *Statistical decision functions*, Wiley.

LINNIK, *Leçons sur les Problèmes de Statistique Analytique*, Gauthier-Villars.

Manuscrit reçu le 11 juin 1969.

Directeur de la publication : GUY DE DAMPIERRE.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1647*b*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 5902. 12-1969