ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. TORTRAT

Sur les mesures aléatoires dans les groupes non abéliens (Compacité, mesure de Palm associée et représentation de Poisson)

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, n° 1 (1969), p. 31-47

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_1_31_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. V, n° 1, 1969, p. 31-47.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Sur les mesures aléatoires dans les groupes non abéliens

(Compacité, mesure de Palm associée et représentation de Poisson)

par

A. TORTRAT
Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre et Marie-Curie, Paris 5[e].

RÉSUMÉ. — Sont étendues au cas d'un groupe non abélien certains résultats de Mecke (cf. [*4*]), en prouvant la compacité des mesures aléatoires envisagées. Sont également développées des idées de Goldman (cf. [*1*]) qui, pour les mesures ponctuelles dans R^n concernaient la représentation en « nuage, de Poisson », des mesures aléatoires indéfiniment divisibles.

SUMMARY. — Certain results of Mecke (cf. [*4*]) are improved to the case of non abelian groups, essentially by proving the compacity of the laws of the random measures in question. Also are improved, in this case, ideas of Goldman (cf. [*1*]) which, for punctual measures in R^n, were concerning the representation by « Cluster Poisson process » of the infinitely divisible laws of such random measures.

I. PRÉLIMINAIRES

E désigne un « groupe mesurable » en ce sens : c'est un groupe muni d'une tribu $\mathscr{B}$ et satisfaisant à l'hypothèse

(H₁) l'application $x \times y \to xy$ de $(E \times E, \mathscr{B} \times \mathscr{B})$ dans $(E, \mathscr{B})$ est mesurable.

(H_1) est vérifiée lorsque :

a) E est localement compact et $\mathscr{B}$ est la tribu engendrée par les compacts qui sont des G_δ (cf. [*2*], p. 257).

ou

b) E est métrique séparable et $\mathscr{B}$ est la tribu borélienne (: engendrée par les ouverts).

Ω est un espace de mesures ω (à valeurs dans $[0, \infty]$) dans E, définies sur $\mathscr{B}$, espace qu'on prendra toujours *invariant* pour les translations à droite définies par $E(\omega \times x \xrightarrow{\psi} \omega_x$ convolution de ω et de la mesure $\delta(x)$, alors $\omega_x A = \omega A_{-x}$, avec $A_{-x} = \{y : yx \in A\}$ (*)). Nous munissons Ω de la tribu (: « minimale ») engendrée par les $\{\omega : \omega A < a\}$, $A \in \mathscr{B}$, a réel > 0. $\mathscr{L}$ est à base dénombrable si $\mathscr{B}$ est telle (par exemple dans le cas *b*) ci-dessus). L'application ψ susdite est mesurable (de $\Omega \times E$, $\mathscr{L} \times \mathscr{B}$ dans Ω, si (H_1) vaut (cf. par exemple [*4*]).

Une mesure aléatoire est une loi (de probabilité) μ dans $(\Omega, \mathscr{L})$. μ définit dans $\Omega \times E$ une mesure d'un type particulier, par l'égalité (1) ou par (1').

$$\nu(L, A) = \int_L \omega A \mu(d\omega), \tag{1}$$

$$\int g(\omega, x)\nu(d\omega \times dx) = \int g(\omega, x)\omega(dx)\mu(d\omega); \tag{1'}$$

g, comme toutes les fonctions utilisées ci-après est à valeurs $\geqq 0$, et mesurable pour les tribus impliquées. Dans toute la suite on fera l'hypothèse (malheureusement restrictive) :

$$(H_2) \qquad \text{la mesure} \qquad \rho A = \nu(\Omega, A) \qquad \text{est } \sigma\text{-finie,}$$

et on désignera par E_n ($E_n \uparrow E$ et $D_n = E_n - E_{n-1}$, $D_0 = \emptyset$) une suite de parties ρ-finies, donc sur lesquelles les ω sont (μ – p. s.) finies. L_x désigne le translaté (à droite) $\psi(L \times x) = \{\omega_x : \omega \in L\}$ et μ est dite invariante (à droite) si $\mu L_x = \mu L$ (tout $L \in \mathscr{L}$, tout $x \in E$).

DÉFINITION. — ρ sera dite compacte si les restrictions ρ_i de ρ à D_i le sont (au sens de Marczewski) : il existe des classes compactes (**)

$$\mathscr{C}_i \subset \mathscr{B} \cap D_i \qquad \text{avec} \qquad \rho(A \cap D_i) = \sup_{\substack{C \subset A \\ C \in \mathscr{C}_i}} \rho C.$$

(*) Concession à la notation additive, pour la simplicité. Dans la suite, pour fixer les idées nous n'envisagerons que les translations à *droite*.

(**) En ce sens : toute partie dénombrable d'intersection vide contient une partie finie d'intersection vide.

Il nous paraît utile de justifier ainsi cette définition :

LEMME 1. — Cette notion ne dépend pas du partage $E = \sum_1^\infty D_i$ (avec $\rho D_i < \infty$) et on peut prendre la classe $\mathscr{C}$ des sommes finies $\sum_1^I C_i$ de $C_i \in \mathscr{C}_i$ pour approcher tout A ρ-fini.

Preuve. — Prenant $\emptyset \in \mathscr{C}_i$, soit

$$\Gamma_n = \sum_1^{I_n} C_{i,n} \qquad \text{et} \qquad \bigcap_1^\infty \Gamma_n = \emptyset.$$

Puisque $\bigcap_1^N \Gamma_n \downarrow \emptyset$, on peut limiter les i des couples (i, n) à $i \leqq I_1$, et vu la disjonction de tous $C_{i,n}$ à i distincts, on a

$$\bigcap_1^\infty \Gamma_n = \sum_{i \leqq I_1} \bigcap_n C_{i,n};$$

chaque $\bigcap_n C_{i,n}$ est donc vide, donc aussi chaque $\bigcap_{n=1}^N C_{i,n}$ pour N assez grand, donc $\bigcap_1^N \Gamma_n$. Ainsi $\mathscr{C}$ est une classe compacte, et tout A ρ-fini est approché (relativement à ρ) par un $\Gamma \in \mathscr{C}$, puisque $A \cap E_n$ l'est et que il existe E_n avec $\rho(A \cap E_n) > \rho A - \varepsilon$.

Inversement si $\mathscr{C}$ est (dans $\mathscr{B}$) une classe compacte permettant d'approcher tout A ρ-fini et si $E_n \uparrow E$ est une suite (arbitraire) de parties ρ-finies (croissant vers E), ρ est évidemment compacte au sens de la définition (prendre pour $\mathscr{C}_i$ l'ensemble des $C \in \mathscr{C}$ et contenus dans $D_i = E_i - E_{i-1}$).

LEMME 2. — Si μ est compacte, pour tout A ρ-fini $\nu(., A)$ l'est, et cela pour la même classe compacte.

Soient en effet, dans $\mathscr{L}$, $\mathscr{C}$ une classe compacte approchant $\mathscr{L}$ par rapport à μ, et $L \in \mathscr{L}$.

Supposant (ce qui est loisible) $\mathscr{C}$ stable pour les $\cup$ finies, il existe $C_j \in \mathscr{C}$ avec :

$$C_j \uparrow \qquad \text{et} \qquad \mu C_j > \mu L - 2^{-j}.$$

On a donc :

$$\int_{C_j} \omega A\mu(d\omega) \uparrow \int_{L} \omega A\mu(d\omega),$$

soit :

$$\nu(C_j, A) \uparrow \nu(L, A). \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 1. — Soit $\nu(.,.)$ une mesure dans $(\Omega \times E, \mathscr{L} \times \mathscr{B})$ (il suffit de la définir sur les pavés $L \times A$), ρ la mesure marginale dans E, supposée σ-finie. On suppose $\mathscr{B}$ (donc $\mathscr{L}$) à base dénombrable.

Alors, au sens des mesures conditionnelles régulières on a :

1° S'il existe une représentation

$$(2) \qquad \nu(L, A) = \int_L \nu(d\omega)\nu(\omega \mid A), \quad \nu(\Omega) = 1 \quad (\text{alors} \quad \nu(\omega \mid E_n) < \infty \quad \nu - \text{p. s.}),$$

elle est unique à une équivalence près, en ce sens que pour une autre représentation $\nu'(.)$, $\nu'(\omega \mid .)$, sauf sur une partie de Ω nulle pour $\nu(d\omega \times E)$, on a

$$\nu' \sim \nu \qquad \text{et} \qquad \frac{d\nu'}{d\nu} = \varphi(\omega) \neq 0 \qquad \text{avec} \qquad \nu(\omega \mid .) = \varphi(\omega)\nu'(\omega \mid .).$$

2° Si ρ est compacte il existe une telle représentation.

3° S'il existe une représentation

$$(3) \qquad \nu(L, A) = \int_A \rho(dx)\nu(L \mid x), \qquad \text{avec} \qquad \nu(\Omega \mid x) = 1,$$

celle-ci est unique à une équivalence près : deux systèmes de $\nu(L \mid x)$ sont égaux ρ-p. s.

4° Si les $\nu(., E_n)$ sont compactes (en particulier si $\nu \in (1)$ avec μ compacte), on a une représentation (3).

Preuves. — 1° Soit (pour $\nu(.)$ et $\nu'(.)$ dans Ω) $\nu' = \nu'_a + \nu'_s$ avec $\nu'_a \leqq \nu$ et $\nu'_s \perp \nu$ et de support L_s. Dans L_s on a $\nu(d\omega \times E) \equiv 0$, et hors de L_s on a $d\nu' = \varphi d\nu$ et $\nu(d\omega)\nu(\omega \mid .) = \nu(d\omega)\varphi(\omega)\nu'(\omega \mid .)$, donc $\nu(\omega \mid A) = \varphi(\omega)\nu'(\omega \mid A)$ pour tout A d'une base dénombrable donc tout $A \in \mathscr{B}$, sauf sur une partie ν-nulle de Ω. On peut joindre à L_s la partie $\{\omega : \varphi(\omega) = 0\}$, d'où la première affirmation.

2° Dans $\Omega \times D_n$, le théorème d'Irjin s'applique pour assurer l'existence sur $\Omega \times \mathscr{B}_n$ ($\mathscr{B}_n$ restriction de $\mathscr{B}$ à D_n), vu la compacité de la restriction ρ_n de ρ à D_n, des lois conditionnelles $\nu^{(n)}(\omega \mid dx)$, portées par D_n,

$$\nu(L, A \cap D_n) = \int_L \nu^{(n)}(\omega \mid A \cap D_n)\nu_n(d\omega), \qquad \text{avec} \qquad \nu_n(d\omega) = \nu(d\omega, D_n).$$

Posant

$$\nu(.) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\nu_n(.)}{2^n \rho D_n},$$

ν est une loi équivalente à la loi marginale dans Ω relative à $\nu(.,.)$, puisque $\nu L = 0$ équivaut à

$$\nu(L, E) = \sum_{1}^{\infty} \nu_n(L) = 0.$$

Posant $\dfrac{d\nu_n}{d\nu} = \varphi(\omega)$ on a :

$$\nu(d\omega \times dx) = \nu(d\omega)\nu(\omega \mid dx) \qquad \text{avec} \qquad \nu(\omega \mid dx) = \sum_{1}^{\infty} \varphi_n(\omega)\nu^{(n)}(\omega \mid dx).$$

3° Pour chaque L d'une base dénombrable les $\nu(L \mid x)$ sont égales, sauf sur une partie ρ-nulle.

4° Le théorème d'Irjin assure, si $\nu(., E_n)$ est compacte, l'existence de lois $\nu_n(. \mid x)$ telles que (3) vaille pour $A \subset E_n$. Lorsque $n \uparrow \infty$, les restrictions de ces lois à $x \in E_{n_0}$ sont ρ-p. s. égales, d'où la définition (modulo une partie ρ-nulle de E) de $\nu(. \mid x)$ cherchée.

II. LA MESURE DE PALM

PROPOSITION 2. — Si μ est compacte, sur $\mathscr{L}$ à base dénombrable, et satisfait à (H_2), alors l'invariance (à droite) de μ entraîne que :

A) ρ est invariante (à droite) dans E,

B) il existe une loi μ^0, unique, associée à μ, dans Ω telle que :

$$\int_L \omega A \mu(d\omega) = \int_A \mu^0(L_{-x})\rho(dx) \tag{4}$$

ou

$$\int g(\omega, x)\omega(dx)\mu(d\omega) = \int g(\omega_x, x)\rho(dx)\mu^0(d\omega). \tag{4'}$$

Remarques. — (4) (ou (4') équivalente) revient à dire que l'image de la mesure $\nu(.,.)$ définie par (1), dans la transformation $\omega \times x \to \omega_{-x} \times x$ est la mesure produite $\mu^0 \times \rho$.

L'intégrale pour $\omega(dx) \times \mu(d\omega)$ de $g(\omega, x)$ devient en effet, pour la mesure image, celle de la fonction $g(\omega_x, x)$ qui est mesurable puisque $g(\omega, x)$ et $\psi(\omega \times x \to \omega_x)$ le sont. On notera qu'à gauche dans (4') on doit d'abord intégrer pour la variable x, ensuite pour la variable ω.

Démonstration. — Considérons les lois $\nu(.\,|\,x)$ de (3). L'invariance de μ entraîne :

$$\nu(\mathrm{L}, \mathrm{A}) = \nu(\mathrm{L}_y, \mathrm{A}_y)$$

car on a :

$$\nu(\mathrm{L}, \mathrm{A}) = \int_{\mathrm{L}_y} \omega_{-y}\mathrm{A}\mu(d\omega) = \int_{\mathrm{L}_y} \omega\mathrm{A}_y\mu(d\omega).$$

En particulier (faire $\mathrm{L} = \Omega$), ρ est invariante.

Donc :

$$\int_{\mathrm{A}} \nu(\mathrm{L}\,|\,x)\rho(dx) = \int_{\mathrm{A}_y} \nu(\mathrm{L}_y\,|\,x)\rho(dx) = \int_{\mathrm{A}} \nu(\mathrm{L}_y\,|\,xy)\rho(dx),$$

et

$$\nu(\mathrm{L}\,|\,x) = \nu(\mathrm{L}_y\,|\,xy)$$

ρ-p. s. (en x, pour chaque y).

Ainsi l'ensemble (mesurable) des $x \times y$, de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$, tel que $\nu(\mathrm{L}\,|\,x)$ diffère de $\nu(\mathrm{L}_y\,|\,xy)$ pour au moins un L d'une base dénombrable de $\mathscr{L}$, est $\rho \times \rho$ nul; prenant une x_0-section de cet ensemble qui soit ρ-nulle (elles le sont presque toutes) on a :

$$\nu(\mathrm{L}\,|\,x_0) = \nu(\mathrm{L}_y\,|\,x_0y)$$

pour tout $\mathrm{L} \in \mathscr{L}$, ρ-p. s.

Il suffit alors de poser $\mu^0\mathrm{L} = \nu(\mathrm{L}_{x_0}\,|\,x_0)$ pour obtenir $\nu(\mathrm{L}\,|\,x) = \mu^0(\mathrm{L}_{-x})$. (Cette démonstration est essentiellement celle de [5], on pourrait montrer de même, pour E métrisable séparable, que l'unité de E appartient, p. s. aux supports des ω, mais cela sera plus simple comme corollaire de [5] ci-après.

PROPOSITION 3. — μ étant une mesure aléatoire, l'existence d'une mesure de probabilité associée μ^0 et de ρ satisfaisant à (4) équivaut à :

$$(5) \qquad \int \mu(\omega_{-x})g(x)\omega(dx)\mu(d\omega) \Big/ \int g(x)\rho(dx)$$

ne dépend pas de g intégrable, et c'est $\mu^0 u$ (*) et équivaut également à :

$$(5') \qquad \int f(x, y, \omega_{-y})\rho(dx)\omega(dy)\mu(d\omega) = \int f(y, x, \omega_{-y})\rho(dx)\omega(dy)\mu(d\omega).$$

De plus :

A) si les ω sont (p. s.) portées par l'ensemble de leurs valeurs possibles (: à voisinages tous de mesures positives, par exemple sous les conditions de b), avec ρ finie sur des ouverts $\mathcal{O}_n \uparrow \mathrm{E}$), μ^0 est portée par la partie Ω_e de Ω constituée des ω dont le support contient l'unité e de E, sous l'hypothèse que e soit à base dénombrable de voisinages (et $\mathscr{B}$ la tribu borélienne).

B) Si ρ est invariante (à droite) μ l'est et on a :

$$(6) \qquad \mu u = \int h(\omega_x, x)u(\omega_x)\rho(dx)\mu^0(d\omega),$$

toute u nulle en $\omega = 0$, pour toute fonction $h(\omega, x)$ satisfaisant à :

$$(7) \qquad \int h(\omega, x)\omega(dx) = 1,$$

tout $\omega \in \Omega$ (**), mais $\omega \neq 0$.

Démonstration. — (5) est un cas particulier de (5′) : prenant

$$f(x, y, \omega) = g(x)g'(y)u(\omega),$$

on obtient :

$$\rho g . \int u(\omega_{-y})g'(y)\omega(dy)\mu(d\omega) = \rho g' . \int u(\omega_{-y})g(y)\omega(dy)\mu(d\omega) ;$$

et d'après (4′), cela égale $\rho g . \rho g' . \mu^0 u$.

(5) entraîne (5′) : nous venons de voir que (5) n'est autre que (5′) pour

$$f(x, y, \omega) = g(x)g'(y)u(\omega)$$

(5′) vaut alors pour les combinaisons linéaires de ces fonctions à variables séparées; et la classe des $f(x, y, \omega)$ pour lesquelles (5′) vaut étant stable pour les limites monotones, cette classe comprend toutes les fonctions f mesurables pour la tribu produit $\mathscr{B} \times \mathscr{B} \times \mathscr{L}$, et intégrables, ainsi que

(*) La notation μu désigne l'intégrale de la fonction u par rapport à la mesure μ.

(**) On construit aisément, suivant [*4*],

$$h(\omega, x), \qquad \text{telle} \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{1_{\mathrm{D}_n}(x)}{2^n \omega \mathrm{D}_n} \Big/ \sum_{\omega \mathrm{D}_n \neq 0} 2^{-n}$$

toutes les f mesurables et $\geqq 0$ (les seules fonctions que nous prenions ici en considération).

(5) résulte de (4′) en prenant $g(\omega, x) = u(\omega_{-x})g(x)$.

Enfin (5′) contient (4′) que l'on obtient en prenant :

$$u(\omega) = \int g(\omega, y)\rho(dy)$$

dans :

$$(5'') \qquad \mu^0 u = \int g(x)u(\omega_{-x})\omega(dx)\mu(d\omega), \qquad \text{avec} \qquad \int g(x)\rho(dx) = 1.$$

Il faut auparavant noter que (5″) définit une mesure, μ^0, avec $\mu^0 1 = \rho g (= 1)$ par définition de ρ, μ^0 est bien une loi.

De plus :

A) Soit $u(\omega) = 1_{\Omega_0}(\omega)$ la fonction indicatrice du fait que e appartienne au support $\underline{\omega}$ de ω. Elle est mesurable $\mathscr{L}$ si B_n est une base dénombrable de voisinages (ouverts de e), puisque :

$$\Omega_0 = \bigcap_1^\infty \{ \omega : \omega \mathrm{B}_n > 0 \}.$$

Si $\omega \{ \underline{\omega}^c \} = 0$, p. s., on peut dans (5″) réduire l'intégrale

$$\int g(x)u(\omega_{-x})\omega(dx) \qquad \text{à} \qquad \underline{\omega},$$

alors $u(\omega_{-x}) = 1$ (tout $x \in \underline{\omega}$) et on obtient $\mu^0 u = 1$. ■

Le lemme ci-après étudiera la condition $\omega \{ \underline{\omega}^c \} = 0$.

Notons que cette condition ne caractérise pas μ^0. Il n'est d'ailleurs pas ici supposé que ρ (donc μ si (4) ou (5) valent) soit invariante.

B) L'invariance de μ équivaut à $\nu(\mathrm{L}, \mathrm{A}) = \nu(\mathrm{L}_y, \mathrm{A}_y)$ (pour ν définie par (1)). Nous avons en effet vu (démonstration de la proposition 2) qu'elle entraînait cette égalité. Inversement, celle-ci s'écrit :

$$\int_{\mathrm{L}_y} \omega \mathrm{A}_y \mu(d\omega) = \int_{\mathrm{L}_y} \omega_{-y} \mathrm{A} \mu(d\omega) = \int_{\mathrm{L}} \omega \mathrm{A} \mu(d\omega_y)$$
$$= \int_{\mathrm{L}} \omega \mathrm{A} \mu(d\omega) \Rightarrow \mu(d\omega_y) = \mu(d\omega).$$

Prenons $h(\omega, x) \in (7)$, et portons dans (4′) $g(\omega, x) = h(\omega, x)u(\omega)$, on obtient (6) :

$$(6) \qquad \mu u = \int h(\omega_x, x)u(\omega_x)\rho(dx)\mu^0(d\omega).$$

Reste donc à vérifier l'invariance de $\nu(.,.)$, dans $\Omega \times E$ pour la transformation $\omega \times x \to \omega_y \times xy$, donc l'invariance de $\mu^0(d\omega) \times \rho(dx)$ pour la transformation $\omega' \times x \to \omega' \times xy$ (avec $\omega' = \omega_{-x} = (\omega_y)_{-xy}$), invariance qui équivaut à celle de ρ. ■

LEMME 3. — Soit E est un groupe métrique séparable, et $\mathscr{B}$ sa tribu borélienne; supposons la mesure ω finie sur des ouverts $E_n \uparrow E$. Alors ω est nulle hors de l'ensemble fermé $F = \underline{\omega}$ réunion des valeurs possibles pour ω. Cette propriété est donc p. s. vraie pour une mesure aléatoire μ si :

$$\int \omega A \mu(d\omega) = \rho A$$

définit une mesure ρ finie sur des ouverts $E_n \uparrow E$.

Preuve. — Soit x une valeur possible pour ω, et $x \in E_n$. E_n étant ouvert, x est aussi valeur possible pour la restriction $\omega_{E_n}A = \omega(A.E_n)$ de ω à E_n. Cette restriction étant bornée, et E métrique séparable, le support $F_n = \underline{\omega_{E_n}}$ de ω_{E_n} a pour mesure ωE_n. Puisque $F = \underline{\omega}$ égale $\lim \uparrow F_n$, $F^c.E_n = \bar{E}_n - F_n$ est ω-nul donc aussi sa $\lim\limits_{n\infty} \uparrow$ qui est F^c. ■

Remarques. — Cette proposition 3 résulte essentiellement de [*4*]. Mais dans [*4*] sont étroitement imbriquées des propositions où le caractère abélien du groupe (et aussi l'unicité à un facteur près des ρ invariantes) est essentiel, et d'autres où cela n'intervient pas. Nous ne savons pas, même dans le cas où nous pouvons montrer la compacité de μ, donc l'existence de μ^0, caractériser μ^0.

Dans [*4*] cela est fait sous la forme :

$$\int g(\omega_{-x'}, -x)\omega(dx)\mu^0(d\omega) = \int g(\omega, x)\omega(dx)\mu^0(d\omega),$$

seul le caractère abélien de E intervenant dans la démonstration de cette formule à partir d'une des formules équivalentes (4) ou (5). Par contre, intervient en outre l'unicité de ρ invariante pour démontrer (5′) donc l'existence de μ^0, et ensuite pour démontrer que μ σ-finie entraîne μ^0 σ-finie ; alors l'hypothèse restrictive (H_2) est inutile.

III. LA COMPACITÉ DE μ

On peut conjecturer que lorsque E est un groupe polonais muni de sa tribu borélienne, les mesures ω finies à distance finie (: sur toute partie bornée) forment un espace Ω tel que toute loi μ dans $(\Omega, \mathscr{L})$ soit compacte.

Mais nous n'avons pu le prouver que pour les ω de Radon dans un espace E localement compact à base dénombrable de voisinages (donc σ-compact et polonais), c'est-à-dire dans les conditions de [*4*], *sauf* que le groupe E n'est pas supposé abélien.

Ainsi la proposition 2 et une partie intéressante des résultats de Mecke, vaut dans ce cas, mais avec l'hypothèse restrictive que les ωE_n ont une moyenne finie (pour $E_n \uparrow E$, des E_n convenables, soit (H_2)).

THÉORÈME. — Soit E groupe localement compact à base dénombrable (donc polonais et σ-compact), $\mathscr{B}$ sa tribu borélienne, et Ω l'espace de toutes les mesures de Radon dans $(E, \mathscr{B})$, c'est-à-dire des ω finies sur les compacts (*) (on prendra pour $E_n \uparrow E$ des compacts intérieurs les uns aux autres). Alors Ω est polonais pour la convergence vague des ω et la distance associée est la suivante :

$$(8) \qquad (\omega, \omega') = \sum_{1}^{\infty} \frac{|\omega f_i - \omega' f_i|}{2^i \{1 + |\omega f_i - \omega' f_i|\}},$$

ou $\{f_i\}$ est un ensemble dénombré convenable de fonctions continues nulles hors d'un E_n, permettant d'approcher uniformément toutes les autres telles fonctions. L'existence de μ^0 et les relations (4), (4'), (5), (5') sont donc assurées pour toute loi μ invariante et satisfaisant à (H_2). (Si ρ est finie sur des *fermés* $E'_n \uparrow E$, on peut supposer ces E'_n compacts, ρ est donc de Radon *si* de tels E'_n existent) (**).

Preuve.

A) Le caractère complet de Ω pour la structure uniforme définie par la convergence des ωf pour chaque $f \in \mathscr{C}^K$ (: f continue à support compact), soit $\omega_\alpha f - \omega_{\alpha'} f \to 0$, est bien connu et résulte de ce que la limite, soit Tf est une forme linéaire positive sur $\mathscr{C}^K$.

Formons ainsi une famille $\mathscr{F}'$, dénombrable, de fonctions $\geqq 0$ de $\mathscr{C}^K$, permettant d'approcher toute autre telle fonction : $\{x_i\}$ étant une suite dense, $B_{i,k}$ étant la boule ouverte de centre x_i, de rayon 2^{-k} (soit

$$\{x : (x, x_i) < 2^{-k}\},$$

pour la distance dans E), à chaque telle boule B on associe les fonctions $f_{B,n}$

(*) Alors E étant métrique et σ-compact, on a $\omega A = \sup_{K \subset A} \omega K$ (K compact).

(**) Il faut ajouter que $\mathscr{L}$ est la tribu borélienne de cet espace polonais, ce qui assure, suivant Prohorov, la compacité de toute loi μ définie sur $\mathscr{L}$.

valant $1 - n(x, \mathrm{B})$ si $(x, \mathrm{B}) < \frac{1}{n}$ et 0 sinon. Prenant les $\frac{p}{q} f_{\mathrm{B},n}$ (tous p, q entiers > 0), et $f \equiv 0$, nous obtenons la famille $\mathscr{F}_0$ dénombrable. On peut alors former ainsi successivement les familles (dénombrables) $\mathscr{F}_n$, avec $\mathscr{F}_{n+1} = \mathscr{F}_n^*$: $\mathscr{F}^*$ est l'ensemble des g, g^+, g^- avec $g = f_1 - f_2$, $f_1, f_2 \in \mathscr{F}$. Alors, par exemple $\inf(f_1, f_2) = f_1 - (f_2 - f_1) \in \mathscr{F}^{**}$, et il est immédiat que $\mathscr{F} = \bigcup_0^\infty \mathscr{F}_n$ est dénombrable, stable pour les opérations latticielles et vectorielles sur le corps des rationnels. Pour chaque compact K, la fermeture de $\mathscr{F}$ (pour les f restreintes à K) pour la convergence uniforme sur K, égale $\mathscr{C}^{\mathrm{K}}$, suivant un lemme connu (cf. Loomis), puisque cette famille « latticielle » approche tout couple de valeurs dans K.

B) E_n étant choisi (comme il a été dit) compact, et intérieur à E_{n+1} on peut modifier chaque $f \geqq 0$ et de $\mathscr{F}$ (soit $f \in \mathscr{F}^*$) hors de E_n de façon à être nulle hors de E_{n+1} et à ne pas dépasser dans $\mathrm{E}_{n+1} - \mathrm{E}_n$, $\lambda = \sup_{x \in \mathrm{F}_r \mathrm{E}_n} f(x)$ ($\mathrm{F}_r =$ « frontière »). Il suffit pour cela, g_n étant une fonction à valeurs dans $[0,1]$, nulle hors de E_{n+1}, valant 1 dans E_n, de prendre, *hors de* E_n, $\inf(\lambda g_n, f)$ au lieu de f. Sur $\mathrm{F}_r\mathrm{E}_n$, la fonction $\inf(\lambda g_n, f)$ égale f, et elle est continue dans E, d'où la continuité de la fonction ainsi modifiée. Faisant cela pour chaque n, et ajoutant les g_n, nous obtenons la famille $\mathscr{F}'$ dénombrable $\{f_i\}$ de fonctions $\geqq 0$ et de $\mathscr{C}^{\mathrm{K}}$. Nous définissons avec ces f_i, la distance (μ, μ') suivant (8).

Il faut vérifier que cette distance définit la structure uniforme dite en A) ou que si μ_i est une suite telle que $(\mu_i, \mu_j) \xrightarrow[i,j \to \infty]{} 0$, alors $\mu_i f$ est une suite convergente pour chaque $f \in \mathscr{C}^{\mathrm{K}}$. Or d'une part $\mu_i g_n$ converge (chaque n) donc on a $\mu_i \mathrm{E}_n \leqq \mathrm{M}_n$ et si $f \in \mathscr{C}^{\mathrm{K}}$ a son support dans E_n et est $\geqq 0$ il existe $f' \in \mathscr{F}$ avec $|f' - f| < \varepsilon$ dans E_n, donc *a fortiori* il existe $f_i (= f'^+$ dans $\mathrm{E}_n)$ telle que $|f - f_i| < \varepsilon$ dans E_n, on a donc

$$|\mu_j f - \mu_j f_i| < \varepsilon \mathrm{M}_n + \int_{\mathrm{E}_{n+1} - \mathrm{E}_n} f_i d\mu_j < \varepsilon \mathrm{M}_n + \varepsilon \mathrm{M}_{n+1},$$

tout j, compte tenu de ce que f étant nulle sur $\mathrm{F}_r\mathrm{E}_n$, f_i y est $< \varepsilon$.

Puisque ε est arbitraire, l'oscillation asymptotique de $\mu_j f$ est bien nulle. On notera de plus que si $\mu f_i = \mu' f_i$, on a $\mu f = \mu' f$ sur $\mathscr{C}^{\mathrm{K}}$ donc $\mu = \mu'$, et que l'inégalité triangulaire est bien vérifiée pour la distance (8) car :

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leqq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \qquad (a, b \geqq 0).$$

C) La séparabilité de Ω pour cette distance est aussi vérifiée. π désignant un partage fini de E (dans $\mathscr{B}$) :

$$E = \sum_1^I A_i,$$

et ω étant un point de Ω, soit α_π la mesure $\sum_1^I \omega A_i \delta(x_i)$, où x_i est un point quelconque de A_i, pris dans une suite fixée, dense dans E. Suivant le filtre dont les éléments sont tous les partages plus fins qu'un partage donné, α_π converge vers ω, car $\alpha_\pi A = \omega A$ dès que π est plus fin que $\{A, A^c\}$ (avec A borné). Puisque les voisinages de ω sont dénombrables, on peut donc trouver une suite de tels α_π convergeant vers ω, et modifier arbitrairement peu les coefficients ωA_i de facon à les rendre rationnels, sans changer cette convergence. Les mesures $\sum_1^I r_i \delta(x_i)$, avec r_i rationnels sont dénombrables, et denses dans Ω. ■

Remarque. — Si Ω est seulement l'espace des mesures ω finies à distance finie dans E polonais, on voit facilement que, pour la convergence des ωf sur $\mathscr{C}^b$ ensemble des fonctions continues nulles hors d'une partie bornée, chaque ω a une base dénombrable de voisinages, et Ω est séparable. Mais la distance qu'on peut ainsi définir pour $\omega' \to \omega$ par des $|\omega' f - \omega f|$, l'est avec des f qui dépendent de ω (liées aux ensembles de frontière ω-nulle), et n'est donc pas adaptable à la structure uniforme de Ω. Si on fixe arbitrairement ces f (ou des $E_n \uparrow E$ pour se ramener à des distances entre restrictions bornées des ω) on fausse la définition de la convergence et ne peut plus démontrer le caractère complet de Ω.

IV. μ INDÉFINIMENT DIVISIBLE ET LES « REPRÉSENTATIONS DE POISSON »

Lorsque μ est indéfiniment divisible (: les lois $\mu_{A_1 \ldots A_I}$ de $\prod_1^I \omega A_i$ dans $[0, \infty[^I$, les A_i étant dans un même E_n, sont telles), on sait que μ s'écrit $e(F)$ (cf. [3] pour $\mathscr{B}$ à base dénombrable et [6] pour le cas général), où F est une mesure dans $(\Omega, \mathscr{L})$ bornée hors des $\{\omega : \omega A_i < \varepsilon_i, i = 1, \dots I\}$. Cela signifie (abstraction faite d'une translation ω_0) que

$$\mu_{A_1 \dots A_I} = e(F_{A_1 \dots A_I}),$$

$F_{A_1 \dots A_I}$ étant la projection de F, c'est-à-dire la mesure définie par $(\Omega, \mathscr{L}, F)$ et l'application $\omega \to \prod_1^I \omega A_I$ de Ω dans $[0, \infty[^I$. Plus précisément la fonction caractéristique de la loi $\mu_{A_1 \dots A_I}$ est

$$\exp\left\{\int (e^{i\sum_1^I t_j x_j} - 1)\right\} \qquad F_{A_1 \dots A_I}(\dots dx_j \dots).$$

Nous prenons ici pour Ω l'ensemble de toutes les mesures ω finies sur chaque E_n.

A F *on peut associer* (comme à μ) la mesure :

$$G(L, A) = \int_L \omega A dF(\omega) ;$$

On notera que la loi marginale, projection dans E, correspondante, est la même, ρ que celle de $\nu(.,.)$, car c'est, pour A,

$$\int_\Omega \omega A dF(\omega) = \int_0^\infty x dF_A(x)$$

et on sait que $e(F_A)$ étant ici définie sans translation, cette intégrale est la moyenne de la variable aléatoire $X_A (\in R_+)$ de loi $e(F_A)$ (car c'est, au facteur i près, la dérivée à l'origine de la deuxième fonction caractéristique Log $\varphi_A(t)$, donc $\frac{1}{i}\varphi'_A(0)$, égale à la moyenne de X_A, dont l'existence est assurée par cela même, X_A étant $\geqq 0$).

Supposons μ *invariante* (à droite), ρ l'est, nous le savons, et F aussi, car :

$$F_{A_1 \dots A_I} = \lim_{n\infty} e(n\mu^{1/N}_{A_1 \dots A_I}),$$

donc l'invariance de μ entraîne celles des $\mu^{1/n}_{A_1 \dots A_I})$, donc des $F_{A_1 \dots A_I}$ donc de F.

Si les $G(., E_n)$ *sont compactes*, et $\mathscr{L}$ à base dénombrable, la proposition 1 4° et la démonstration, inchangée, de la proposition 2 assurent l'existence de la mesure de probabilité F^0 telle que :

$$G(L, A) = \int_A F^0(L_{-x})\rho(dx), \qquad F^0\Omega = 1. \tag{9}$$

Subsiste aussi inchangée la démonstration de Mecke que (4), (9) et $\mu = e(\mathrm{F})$ entraînent :

(10) $$\mu^0 = \mu * \mathrm{F}^0.$$

Cette preuve est basée sur une transformation de l'expression

$$\int g(\omega_{-x}, x)\omega(dx)\mu(d\omega) \qquad \left((4') = \int g(\omega, x)\rho(dx)\mu^0(d\omega)\right)$$

qui tient compte de $\mu = e(\mathrm{F})$ soit $\omega = \Sigma\omega_i$, les ω_i étant les points d'un processus de Poisson dans Ω, défini par F elle-même (F est σ-finie si $\mathscr{B}$ est à base dénombrable). Cette transformation exprime une propriété générale des processus de Poisson : désignons par $(\Omega', \mathscr{L}', \mu')$ l'espace de probabilité de ce processus considéré comme mesure aléatoire dans Ω : $\omega' = \{\ldots \omega_i \ldots\}$, alors :

$$\int g(\omega', \omega)\omega'(d\omega)\mu'(d\omega') = \int g(\omega' + \delta_\omega, \omega)\mathrm{F}(d\omega)\mu'(d\omega'),$$

avec $$\omega' + \delta_\omega = \{\ldots \omega_i, \omega\} \ (*).$$

Ainsi :

PROPOSITION 4. — Si $\mu = e(\mathrm{F})$ est invariante à droite, satisfait à (H_2) et si les mesures, sur $\mathscr{L}$, $\int_{\mathrm{L}} \omega \mathrm{E}_n \mathrm{F}(d\omega)$ et μ sont compactes, alors les mesures (de probabilité) de Palm associées à μ et F (existent et) sont liées par la relation $\mu^0 = \mu * \mathrm{F}^0$. L'hypothèse de compacité est satisfaite pour les ω de Radon dans E localement compact et σ-compact.

« **Représentation de Poisson** »

Celle-ci est liée à une représentation de F sous la forme :

(11) $$\mathrm{FL} = \int \mathrm{Q}_x(\mathrm{L}_{-x})m(dx),$$

où les Q_x sont des mesures *de probabilité* dans Ω.

(11) implique que le processus de Poisson ci-dessus (ω' de loi μ') peut être ainsi construit : on considère les x_i d'un processus de Poisson dans E, défini par la mesure m (il n'est pas ici besoin d'invariance), et leur associe des $(\omega_i)_{x_i}$, où les ω_i sont choisis indépendamment dans Ω suivant les lois Q_{x_i}. F est la mesure image, pour $\omega \times x \to \omega_x$ de la mesure $\mathrm{Q}_x(d\omega) \times m(dx)$,

(*) On adjoint aux points points ω_i de Ω constituant ω', le point ω lui aussi de Ω.

et cette application (projection de $\Omega \times E$ dans Ω) conserve le caractère Poissonnien d'un processus ponctuel.

Ainsi : μ est la loi de $\Sigma(\omega_i)_{x_i}$, c'est bien $e(F)$.

Cette représentation, dans le cas Q_x indépendant de x et m (donc F et μ) invariante, a été introduite par J. Neymann pour représenter les ensembles de galaxies : les x_i sont les « centres » des galaxies composantes, et Q est la loi aléatoire commune à ces galaxies rapportées à leur centre. Goldman a repris ce point de vue (« Cluster Poisson process ») pour des ω ponctuelles, dans R^n, pour F donc $\mu = e(F)$ invariante, et étudié des rapports entre le support de μ dans Ω et celui de F.

Les conditions imposées à F (on suppose m σ-finie, F l'est donc aussi) ne concernent pas l'existence de la loi indéfiniment divisible $e(F)$, toujours acquise si la valeur $+\infty$ est permise aux ω (car une série de mesures aléatoires à termes indépendants (dans Ω) est toujours convergente), mais à assurer par exemple la condition (C de Kingman) :

$$\mu\{\omega : \omega E_n < \infty\} \neq 0, \qquad \text{chaque } n.$$

Ces conditions sont alors : $\{\omega : \omega E_n > \eta\}$ est F fini, et ces mesures F_{E_n} intègrent x au voisinage de 0.

Mais, partant de $\mu = e(F)$ donnée, trouver une représentation (11) se révèle plus difficile, et va nous imposer l'hypothèse suivante (discutée ensuite) (H_3). On a (pour l'espace Ω considéré)

$$\Omega \leftrightarrow \Omega_0 \times E, \qquad \mathscr{L} \leftrightarrow \mathscr{L}_0 \times \mathscr{B} \qquad (\Omega_0 \in \mathscr{L}),$$

l'isomorphisme étant celui défini par $\omega_0 \times x \leftrightarrow (\omega_0)_x$.

LEMME 4. — (H_3) nécessite que les ω soient apériodiques (: $\omega_x = \omega$ est impossible pour $x \neq e$). Une condition nécessaire et suffisante à l'existence de $\Omega_0 \in (H_3)$ est alors, si E est métrisable, l'existence d'une fonction $\xi(\omega)$ de Ω dans E telle que $\xi(\omega_x) = \xi(\omega)x$ (: $\Omega_0 = \{\omega : \xi(\omega) = e\}$).

Preuve. — Deux classes de translatées : $\{\omega_x\}$, $\{\omega'_x\}$ (x parcourant E) devant être confondues ou sans élément commun la nécessité de l'apériodicité est évidente. On a alors $\omega_0 = \omega_{-\xi(\omega)}$ où $\xi(\omega)$ est mesurable $\mathscr{L}$ puisque mesurable comme projection de $\omega_0 \times \xi(\omega)$ dans E. Inversement, étant donné $\xi(\omega)$ mesurable et satisfaisant à $\xi(\omega_x) = \xi(\omega)x$, posons

$$\Omega_0 = \{\omega : \xi(\omega) = e\}$$

e étant à base dénombrable de voisinages, on a $\Omega_0 \in \mathscr{L}$. L'application $\omega \times \xi \to \omega_{-\xi}$ étant mesurable, de $\Omega \times E$ dans Ω, et celle $\omega \to \omega \times \xi(\omega)$ l'étant également (de Ω dans $\Omega \times E$), $\omega \to \omega_0$ l'est aussi. C'est-à-dire,

$\mathscr{L}_0$ désignant la restriction de $\mathscr{L}$ à Ω_0, que $\mathscr{L}_0 \times \mathscr{B} \subset \mathscr{L}$. Mais l'application $\omega_0 \times x \to (\omega_0)_x$ de $\Omega_0 \times E$ sur Ω est mesurable (l'étant de $\Omega_0 \times E$ dans $\Omega \times E$, puis de $\Omega \times E$ dans Ω), donc $\mathscr{L}_0 \times \mathscr{B} \supset \mathscr{L}$, donc $\mathscr{L}_0 \times \mathscr{B} = \mathscr{L}$.

Exemple. — E est un espace vectoriel localement convexe à base dénombrable de voisinages, et Ω est l'ensemble des ω ayant une moyenne $\xi(\omega)$, au sens faible (donc nécessairement apériodiques) :

$$y \in E^* \Rightarrow \langle y, \xi(\omega) \rangle = \int y(x)\omega(dx). \tag{12}$$

Remarques. — L'hypothèse (12) est restrictive. Mais on notera que (H_3) pourrait ne concerner qu'un sous-espace Ω_F (de Ω) portant F et non nécessairement $\mu = e(F)$. Ce pourrait être par exemple, Ω^b, partie de Ω constituée des ω à support borné (cette partie est mesurable : $\in \mathscr{L}$). Pour μ la stationnarité est incompatible avec le fait d'être portée par Ω^b, mais ce ne l'est pas pour F (si $F\Omega = \infty$); le processus de Poisson stationnaire défini par la mesure ρ dans E en est un exemple, où F est portée par des ω réduits à $\delta(x)$, l'image de F dans E étant ρ.

De même pour les mesures complètement aléatoires de Kingman, qu'on obtient à partir du cas précédent en pondérant les $\delta(x)$: F a alors une image, par isomorphisme dans $E \times [0, \infty]$, et, sauf une partie F nulle de Ω, les supports $\underline{\omega}$ des ω sont réduits à un point.

Ainsi dans $E = R^n$, on supposera F portée par des ω dont le support est « borné du côté négatif » et prendra pour $\xi(\omega)$ le point extrême de ce support (du côté négatif, en ordonnant les indices des n coordonnées pour définir ξ uniquement). On vérifie que ξ est mesurable. Cette idée est dans [*1*] pour des ω ponctuelles.

PROPOSITION 5. — On suppose l'hypothèse (H_3) satisfaite par une partie Ω_F de Ω portant F ($: \Omega - \Omega_F$ est F-nulle), et la tribu $\mathscr{L}_F$ correspondante. On suppose que la projection m dans E est σ-finie ($mE'_n < \infty$, $E'_n \uparrow \infty$) et que les $F(d\omega_0 \times E'_n)$ dans Ω_0 sont compactes, $\mathscr{L}_0$ étant à base dénombrable. Alors (11) est satisfaite et donc la « représentation de Poisson » de μ existe. Si F (ou μ, c'est équivalent) est invariante, m l'est, et on peut supprimer l'hypothèse de compacité et prendre Q_x indépendant de x.

Preuve. — $F(d\omega_0 \times E'_n)$ étant compacte, et $\mathscr{L}_0$ à base dénombrable, les Q_x sont définies comme mesures de probabilités conditionnelles, pour $x \in D'_n = E'_{n+1} - E'_n$, suivant le théorème d'existence, d'Irjin. Ce sont des lois définies sur $\mathscr{L}_0$, et dans $\Omega_0 \times E$, F a pour image $Q_x(d\omega_0)m(dx)$, d'où (11) pour F dans Ω_F.

Supposons maintenant F donc m invariantes (à droite). Dans $\Omega_0 \times E$, la mesure image de F, soit $F(L_0 \times A)$ étant majorée par mA, égale

$$\int_A f(x)m(dx), \qquad \text{avec} \qquad f(x) = F(L_0 \times E \mid x).$$

A la translation y à droite dans Ω, correspond dans $\Omega_0 \times E$, pour $L_0 \times A$ le translaté $L_0 \times A_y$ et on a

$$\int_A f(x)m(dx) = \int_{A_y} f(x)m(dx) = \int_A f(x'y)m(dx')$$

vu l'invariance de m.

On a donc :

$$f(x) = f(xy)m \quad \text{p. s.} \quad (\text{chaque } y).$$

$f(xy)$ étant mesurable, dans $E \times E$, on a donc :

$$f(x) = f(xy)m \quad \text{p. s.} \quad (\text{presque tout } x),$$

soit f est p. s. constante.

Pour $\mathscr{L}_0$ à base dénombrable on peut donc définir Q, loi sur $\mathscr{L}_0$, avec

$$F(L_0 \times A) = QL_0 . mA \Rightarrow FL = \int Q(L_{-x})m(dx). \qquad \blacksquare$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] GOLDMAN J. R., *Infinitely divisible processes in* R^n. Preprint of the Department of Statistics of Harvard University.

[2] HALMOS R., *Measure theory* (Edition of 1956).

[3] LEE P. M., Infinitely divisible stochastic processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 7, 1967, 147-160.

[4] MECKE J., Stationäre zufällige masse auf lokalkompacten Abelschen Gruppen. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, IX-1, 1967, 36-58.

[5] RYLL-NARDZEWSKI, Remarks on processes of calls. *Proc. IV Berkeley Symposium*, 1961, **2**, 455-463.

[6] TORTRAT A., Sur la structure des lois indéfiniment divisibles dans les espaces vectoriels. A paraître dans *Z. Wrascheinlichkeitstheorie*, 1968.

(Manuscrit reçu le 1er octobre 1968).