

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. NEVEU

Harmonicité des moments d'une fonction aléatoire

Annales de l'I. H. P., section B, tome 5, n° 1 (1969), p. 13-29

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1969__5_1_13_0

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Harmonicité des moments d'une fonction aléatoire

par

J. NEVEU

Institut Henri Poincaré
Université de Paris (*)

RÉSUMÉ. — On montre que pour une fonction aléatoire réelle harmonisable définie sur $\mathbf{R}$, soit $(\xi_t, t \in \mathbf{R})$, l'espace hilbertien engendré par les monômes $\xi_{t_1} \dots \xi_{t_n}$ (n fixé; $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R}$) est isomorphe à un espace hilbertien de mesures sur $\mathbf{R}^n$. On étudie en particulier le cas des fonctions aléatoires stationnaires.

SUMMARY. — For a real harmonizable random function defined on $\mathbf{R}$, say $(\xi_t, t \in \mathbf{R})$, the Hilbert space generated by the monomials $\xi_{t_1} \dots \xi_{t_n}$ (n fixed; $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R}$) is isomorphic to a Hilbert space of measure on $\mathbf{R}^n$. Special attention is given to the case of stationary random functions.

1. INTRODUCTION

Une fonction aléatoire réelle (en abrégé f. a. r.) sur $\mathbf{R}$, soit $\xi = (\xi_t, t \in \mathbf{R})$, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est dite harmonisable d'ordre n si ses moments d'ordre n , soient $E(\xi_{t_1} \dots \xi_{t_n})$, existent et peuvent s'exprimer comme les valeurs en $(t_1, \dots, t_n)$ de la transformée de Fourier d'une

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications », dépendant de la Section n° 2 « Théories Physiques et Probabilités », associée au CNRS.

mesure bornée sur $\mathbb{R}^n$. On sait que cette définition est inspirée par le cas des f. a. r. stationnaires et continues dans L^2 qui sont harmonisables d'ordre 2 en vertu d'un théorème de Bochner; on sait aussi que dans ce cas le sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ engendré par les $\xi_i(t \in \mathbb{R})$ est naturellement isomorphe à l'espace fonctionnel $L^2(\mathbb{R}, \nu_\xi)$ associé à la mesure spectrale ν_ξ de la f. a. r. considérée.

Nous montrons dans ce travail [proposition 2.2] que pour toute f. a. r. harmonisable d'ordre $2n$ il existe un espace hilbertien formé de mesures bornées sur $\mathbb{R}^n$, soit M_n , qui est naturellement isomorphe au sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$ engendré par les monômes $\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}$ ($t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$). Dans le cas où la f. a. r. harmonisable d'ordre $2n$ est stationnaire, nous établissons dans un 2^e paragraphe que le flot $(\theta_t, t \in \mathbb{R})$ des translations associé à la f. a. r. stationnaire ξ induit dans l'espace M_n le groupe des multiplications des mesures par les fonctions

$$\exp \left[2\pi i t \left(\sum_1^n x_m \right) \right] \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Les résultats que nous avons obtenus complètent notamment ceux de Sinai.

On notera que notre définition de l'harmonicité d'ordre n diffère un peu de celle introduite originellement par Fortet [I]: une f. a. r. de la classe Φ_n au sens de [I] est une f. a. r. harmonisable de tout ordre $\leq n$ au sens de notre définition. Cette modification s'imposait pour pouvoir énoncer la proportion suivant laquelle une fonction harmonisable d'ordre $2n$ est automatiquement harmonisable d'ordre n .

Nous terminerons cette introduction en énonçant le résultat suivant qui est fondamental pour la suite; ce résultat est connu [0] et nous n'en rappelons la démonstration que pour permettre une étude plus facile de l'ensemble de notre travail.

PROPOSITION 1.1. — *Soit $(E, \mathcal{J})$ un espace mesurable et soit Λ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de fonctions mesurables bornées à valeurs complexes définies sur $(E, \mathcal{J})$; on suppose que pour toute mesure complexe bornée λ sur $(E, \mathcal{J})$, on ne peut avoir $\lambda(f) = 0$ pour tout $f \in \Lambda$ que si la mesure λ est nulle. Soit μ une mesure complexe bornée sur $(E, \mathcal{J})^2$, hermitienne et de type positif sur Λ c'est-à-dire telle que :*

$$\int_{E^2} \mu(dx dy) f(x) \overline{f(y)} \geq 0 \quad \forall f \in \Lambda.$$

On note m la mesure positive bornée sur $(E, \mathcal{J})$ définie par

$$m(F) = |\mu|(E \times F) \quad (F \in \mathcal{J})$$

avec

$$|\mu| = (\operatorname{Re} \mu)^+ + (\operatorname{Re} \mu)^- + (\operatorname{Im} \mu)^+ + (\operatorname{Im} \mu)^-.$$

Il existe alors un espace de Hilbert unique sur $\mathbb{C}$, soit $M_\mu(E, \mathcal{J})$ formé de mesures complexes bornées sur $(E, \mathcal{J})$ tel que :

a) toute mesure $v \in M_\mu(E, \mathcal{J})$ est absolument continue par rapport à m ; en outre sa densité appartient à $L^2_C(E, \mathcal{J}, m)$ et vérifie

$$\left\| \frac{dv}{dm} \right\|_{L^2(m)} \leq \|v\|_{M_\mu};$$

b) pour tout $f \in L^2_C(E, \mathcal{J}, m)$ (donc pour tout $f \in \Lambda$) la mesure complexe bornée μ_f définie par :

$$\mu_f(F) = \int_{E \times F} f(x) \mu(dx dy)$$

appartient à M_μ et le produit scalaire de M_μ est tel que $\langle v, \mu_f \rangle = v(\bar{f})$ pour toute mesure $v \in M_\mu$;

c) le sous-espace vectoriel $[\mu_f, f \in \Lambda]$ de M_μ et a fortiori le sous-espace vectoriel $[\mu_f, f \in L^2_C(E, \mathcal{J}, m)]$ sont denses dans M_μ .

Démonstration. — A tout $f \in \Lambda$ associons la mesure μ_f définie par la formule du (b) ci-dessus et désignons par $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel $(\mu_f, f \in \Lambda)$ de mesures ainsi obtenu. Le théorème de Fubini montre que l'on a, quels que soient $f, g \in \Lambda$:

$$\int_E \int_E \mu(dx dy) f(x) \overline{g(y)} = \mu_f(\bar{g}) = \bar{\mu}_g(f)$$

(la 2^e égalité s'obtient en tenant compte de ce que $\overline{\mu(dx dy)} = \mu(dy dx)$, ce qui est une conséquence du caractère hermitien positif de μ). En notant $\langle \mu_f, \mu_g \rangle$ l'expression précédente, on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}$ puisque cette expression ne dépend manifestement de f et de g que par l'intermédiaire de μ_f et μ_g et puisque par hypothèse cette expression est non négative si $f = g$. En outre ce produit scalaire est séparé car $\langle \mu_f, \mu_f \rangle = 0$ entraîne par l'inégalité de Schwarz que $\mu_f(\bar{g}) = \langle \mu_f, \mu_g \rangle = 0$ pour tout $g \in \Lambda$, donc que $\mu_f = 0$ par l'hypothèse faite sur Λ . Nous désignerons alors par M l'espace de Hilbert abstrait obtenu par complétion de $\mathcal{M}$ en notant par i l'application injective canonique de $\mathcal{M}$ dans M .

L'application $f \rightarrow \mu_f$ de Λ dans $\mathcal{M}$ est telle que :

$$\begin{aligned} \|\mu_f\|^2 &= \int_E \int_E \mu(dxdy) f(x) \overline{f(y)} \\ &\leq \int_E \int_E |\mu|(dxdy) \frac{1}{2} [|f(x)|^2 + |f(y)|^2] \\ &= m(|f|^2); \end{aligned}$$

elle est donc continue du sous-vectoriel Λ de $L^2_c(E, \mathcal{F}, m)$ dans $\mathcal{M}$. D'autre part Λ est dense dans $L^2_c(m)$; en effet pour tout $h \in L^2_c(m)$ orthogonal à Λ la mesure $h \cdot m$ s'annule sur Λ , donc s'annule identiquement ce qui implique que $h = 0$ dans $L^2_c(m)$. On en déduit l'existence d'une application de norme ≤ 1 de $L^2_c(m)$ dans M , soit u , telle que $u(f) = i(\mu_f)$ si $f \in \Lambda$. Comme $u[L^2_c(m)]$ est un sous-vectoriel dense de M puisqu'il contient $u(\Lambda) = i(\mathcal{M})$, l'application conjuguée u^* de M dans $L^2_c(m)$ est injective et nous permet d'identifier tout élément v de M à la mesure $u^*(v) \cdot m$ sur $(E, \mathcal{F})$; l'espace de Hilbert M devient ainsi un espace de mesures complexes bornées sur $(E, \mathcal{F})$ absolument continues par rapport à m de densités de normes L^2_c inférieures aux normes dans M des mesures respectives. L'identification précédente implique que l'on a pour tout $f \in L^2_c(m)$ et tout $v \in M$,

$$v(\overline{f}) = \langle v, u(f) \rangle_M.$$

Remarquons ensuite que pour tout $f \in \Lambda$, l'identification précédente associe la mesure μ_f à l'élément $i(\mu_f)$ de M ; en effet si $g \in \Lambda$ on a :

$$i(\mu_f)[\overline{g}] = \langle i(\mu_f), u(g) \rangle_M = \langle \mu_f, \mu_g \rangle_{\mathcal{M}} = \mu_f(\overline{g})$$

et par suite $i(\mu_f) = \mu_f$ puisque la mesure $i(\mu_f) - \mu_f$ s'annule sur Λ . Il résulte donc de la construction de M que $\{\mu_f, f \in \Lambda\}$ est dense dans l'espace de mesures M .

Pour achever la démonstration de la proposition il reste à établir la propriété (a). Or si $f \in \Lambda$ cette propriété est claire puisque compte tenu de l'identification de $u(f) = i(\mu_f)$ à la mesure μ_f , on a, quel que soit $v \in M$:

$$v(\overline{f}) = \langle v, u(f) \rangle_M = \langle v, \mu_f \rangle_M.$$

Si $f \in L^2_c(m)$ sans appartenir à Λ , on peut encore définir la mesure μ_f par la formule de la proposition (cette mesure ne dépend effectivement que de la classe d'équivalence de f par rapport à m) et le théorème de Fubini montre que l'on a $\mu_f(\overline{g}) = \overline{\mu_g(f)}$ pour tout $g \in \Lambda$ mais alors, comme :

$$\overline{\mu_g(f)} = \overline{\langle \mu_g, u(f) \rangle_M} = \langle u(f), u(\overline{g}) \rangle_M = u(f)[\overline{g}]$$

on voit que $u(f)$ s'identifie encore à la mesure μ_f .

2. FONCTIONS ALÉATOIRES RÉELLES HARMONISABLES

DÉFINITION 2.1. — Une f. a. r. $[\xi_t, t \in \mathbb{R}]$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et dont le paramètre varie dans $\mathbb{R}$ est dite harmonisable d'ordre n si $\xi_t \in L_C^n(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et s'il existe en outre une mesure complexe bornée μ_n sur $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$E \left[\prod_{i=1}^n \xi_{t_i} \right] = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(2\pi i \langle t, x \rangle) \mu_n(dx)$$

pour tout $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. La mesure μ_n est appelée la mesure spectrale d'ordre n de la f. a. r. $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$.

Comme une mesure complexe bornée sur $\mathbb{R}^n$ est univoquement déterminée par sa transformation de Fourier on voit sans peine a) que la mesure μ_n attachée à la f. a. r. $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ par la définition précédente est univoquement déterminée par cette f. a. r. : b) que la mesure μ_n est invariante par le groupe symétrique des permutations de coordonnées de $\mathbb{R}^n$: c) que la mesure μ_n vérifie $\overline{\mu_n(dx)} = \mu_n(-dx)$ relativement à la symétrie $x \rightarrow -x$ de $\mathbb{R}^n$.

On désignera par Λ_n l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des polynômes trigonométriques complexes sur $\mathbb{R}^n$ et par X_n l'unique application linéaire de Λ_n dans l'espace des variables aléatoires complexes telle que :

$$X_n(\exp[2\pi i \langle t, \dots \rangle]) = \prod_{i=1}^n \xi_{t_i} \quad t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Il est alors clair que la fonction $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ est harmonisable d'ordre n si et seulement si $X_n(f) \in L_C^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour tout $f \in \Lambda_n$ et s'il existe une mesure complexe bornée μ_n sur $\mathbb{R}^n$ telle que $E[X_n(f)] = \mu_n(f)$ pour tout $f \in \Lambda_n$.

La proposition suivante est une conséquence directe de la proposition 1.1 du paragraphe 1.

PROPOSITION 2.2. — On suppose que la f. a. r. $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ est harmonisable d'ordre $2n$. Si μ_{2n} désigne la mesure spectrale d'ordre $2n$ de cette f. a. r., la mesure $\tilde{\mu}_{2n}$ définie par $\tilde{\mu}_{2n}(dx dy) = \mu_{2n}[dx(-dy)]$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est hermitienne positive par rapport à l'espace Λ_n . On définit la mesure positive m_n sur $\mathbb{R}^n$ en posant $m_n(F) = |\mu_{2n}|(F \times \mathbb{R}^n)$.

Il existe alors un espace de Hilbert M_n formé de mesures complexes bor-

nées sur $\mathbb{R}^n$ et une application linéaire isométrique $\tilde{X}_n$ de M_n SUR le sous-espace fermé H_n de $L^2_C(\Omega, \mathcal{A}, P)$ engendré par les produits

$$\prod_1^n \xi_{t_m} [t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n]$$

tels que :

a) toute mesure $\nu \in M_n$ est absolument continue par rapport à m_n et sa densité vérifie

$$\left\| \frac{d\nu}{dm_n} \right\|_{L^2(m_n)} \leq \| \nu \|_{M_n};$$

b) quel que soit $f \in L^2_C(m_n)$, la mesure complexe bornée μ_f sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\mu_f(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \tilde{\mu}_{2n}(dx, \cdot)$$

appartient à M_n et on a $\langle \nu, \mu_f \rangle_{M_n} = \nu(\bar{f})$ pour toute mesure $\nu \in M_n$;

c) le sous-vectoriel $[\mu_f, f \in \Lambda_n]$ de M_n est dense dans M_n et pour tout $f \in \Lambda_n$ on a $\tilde{X}_n(\mu_f) = X_n(f)$.

Pour tout f dans $L^2_C(m_n)$ n'appartenant pas à Λ_n , on conviendra de poser $X_n(f) = \tilde{X}_n(\mu_f)$.

On prendra garde pour la suite que les fonctions $\frac{d\mu_f}{dm_n}$ et f ($f \in L^2(m_n)$) sont en général distinctes [c'est seulement si la mesure $\tilde{\mu}_{2n}(dxdy)$ était concentrée sur $\{x_i = y_i (1 \leq i \leq n)\}$ que ces 2 fonctions seraient confondues].

Démonstration. — Dès que $\xi_t \in L^2_C$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, les v. a. $X_n(f)$ appartiennent à L^2 pour tout $f \in \Lambda_n$ en vertu des inégalités de Hölder. On montre ensuite facilement que pour tout couple $f, g \in \Lambda_n$:

$$\begin{aligned} E[X_n(f) \overline{X_n(g)}] &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mu_{2n}(dxdy) f(x) \overline{g(-y)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\mu}_{2n}(dxdy) f(x) \overline{g(y)} \end{aligned}$$

en considérant d'abord le cas de fonctions exponentielles

$$f(x) = \exp(2\pi i \langle s, x \rangle), \quad g(y) = \exp(2\pi i \langle t, y \rangle)$$

et en étendant ensuite le résultat par linéarité en f et anti-linéarité en g . La formule ainsi établie montre que $\tilde{\mu}_{2n}$ est hermitienne positive par rap-

port à Λ_n et comme toute mesure complexe bornée sur R^n ne peut s'annuler sur Λ_n sans être nulle, la proposition est applicable à l'espace Λ_n et à la mesure $\tilde{\mu}_{2n}$. L'existence de l'espace de Hilbert M_n avec les propriétés énoncées ci-dessus résultent donc de la proposition citée. En outre comme X_n est une application linéaire isométrique du sous-espace dense Λ_n de M_n dans $L^2_C(\Omega, \mathcal{A}, P)$, le prolongement isométrique de X_n à M_n , soit $\tilde{X}_n$, possède les propriétés énoncées dans la proposition ci-dessus.

COROLLAIRE 2.3. — *La f. a. r. $(\xi_t, t \in R)$ est harmonisable d'ordre n dès qu'elle est harmonisable d'ordre $2n$. En outre si μ_n est la mesure spectrale d'ordre n la mesure $\bar{\mu}_n$ appartient à l'espace M_n , vérifie $\|\bar{\mu}_n\|_{M_n} \leq 1$ ainsi que :*

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}_n(v)] &= \langle v, \bar{\mu}_n \rangle_{M_n} & \text{pour tout } v \in M_n, \\ E[X_n(f)] &= \mu_n(f) & \text{pour tout } f \in L^2(R^n, m_n). \end{aligned}$$

Démonstration. — La forme linéaire sur M_n que définit $E[\tilde{X}_n(\cdot)]$ est de norme inférieure à 1 puisque :

$$E[\tilde{X}_n(v)] \leq [E(|\tilde{X}_n(v)|^2)]^{1/2} = \|v\|_{M_n}.$$

Comme M_n est un espace de Hilbert, il existe une mesure dans M_n , soit ε_n , telle que :

$$E[\tilde{X}_n(v)] = \langle v, \varepsilon_n \rangle \quad (v \in M_n)$$

En particulier on a donc pour tout $f \in \Lambda_n$:

$$E[X_n(f)] = \langle \mu_f, \varepsilon_n \rangle = \bar{\varepsilon}_n(f)$$

et cela montre que la f. a. r. $(\xi_t, t \in R)$ est harmonisable d'ordre n , la mesure μ_n associée étant égale à $\bar{\varepsilon}_n$.

Remarques. — 1) Il résulte de l'invariance de la mesure μ_{2n} par les permutations de coordonnées de R^{2n} : a) que la mesure m_n et que toute mesure $\nu \in M_n$ est invariante par les permutations de coordonnées de R^n : b) que pour tout $f \in L^2(m_n)$, la mesure μ_f ne dépend de f que par la fonction symétrisée

$$\hat{f}(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(x_{\sigma_1} \dots x_{\sigma_n})$$

puisque $\mu_f = \hat{\mu}_f$. On en déduit l'inégalité $\|\mu_f\|_{M_n} \leq \|\hat{f}\|_{L^2(m_n)}$ qui améliore l'inégalité $\|\mu_f\|_{\hat{M}_n} \leq \|f\|_{L^2(m_n)}$ trouvée précédemment.

2) Si la mesure $\tilde{\mu}_{2n}$ est portée par $B \times R^n$ pour un borélien B de R^n , alors

la mesure positive m_n sur $\mathbb{R}^n$ est portée par B et toute mesure $\nu \in M_n$ est aussi portée par B (puisque $\nu \ll m_n$).

3) Si la f. a. r. $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ est harmonisable d'ordre $2n$ et $2p$ (n, p entiers positifs distincts), l'image de la restriction à H_n du projecteur orthogonal de $L^2_c(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur H_p par les isométries $\tilde{X}_n$ de M_n sur H_n et $\tilde{X}_p$ de M_p sur H_p est un opérateur linéaire contractant de M_n dans M_p , soit A_{np} . Pour tout $\nu \in M_n$, $\tilde{X}_p(A_{np}\nu)$ est donc la projection orthogonale sur H_p de $\tilde{X}_n(\nu)$ et on a la formule :

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}_n(\nu) \overline{\tilde{X}_p(\sigma)}] &= E[\tilde{X}_p(A_{np}\nu) \tilde{X}_p(\sigma)] \\ &= \langle A_{np}(\nu), \sigma \rangle_{M_p} \end{aligned}$$

pour tout $\nu \in M_n$ et tout $\sigma \in M_p$. Remarquons que l'opérateur A_{pn} de M_p dans M_n (défini de manière analogue à A_{np}) n'est autre que l'opérateur conjugué A_{np}^* .

Si la f. a. r. $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ est harmonisable d'ordres $2n$, $2p$ et $n+p$ et si les espaces M_n et M_p sont donnés, il est facile de voir que la donnée de l'opérateur A_{np} et celle de la mesure μ_{n+p} sont équivalentes. On montre en effet facilement que si $f \in \Lambda_n$ et $g \in \Lambda_p$ on a :

$$E[X_n(f) \overline{X_p(g)}] = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^p} \mu_{n+p}(dx dy) f(x) \overline{g(-y)}$$

tandis que la formule de l'alinéa précédent montre que :

$$\begin{aligned} E[X_n(f) \overline{X_p(g)}] &= \langle A_{np}(\mu_f^{(n)}), \mu_g^{(p)} \rangle_{M_p} \\ &= A_{np}(\mu_f^{(n)})(g) \end{aligned}$$

L'égalité que l'on en déduit pour tout $f \in \Lambda_n, g \in \Lambda_p$:

$$A_{np}(\mu_f^{(n)})(\bar{g}) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^p} \mu_{n+p}(dx dy) f(x) \overline{g(-y)}$$

montre bien que μ_{n+p} et A_{np} se déterminent l'un l'autre.

3. FONCTIONS ALÉATOIRES STATIONNAIRES HARMONISABLES

Une f. a. r. $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est dite stationnaire si la loi de probabilité qu'elle induit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, soit $P_\xi = P \mid (\xi_t, t \in \mathbb{R})^{-1}$, est invariante par le groupe $(\theta_t, t \in \mathbb{R})$ des translations de coordonnées de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Si en outre toute fonction mesurable sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ invariante par le groupe $(\theta_t, t \in \mathbb{R})$ est p. s. constante pour P_ξ , la f. a. r. stationnaire donnée est dite ergodique. Nous simplifierons les notations sans nuire à la généralité en supposant

dans la suite que la f. a. r. $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ est celle formée par les coordonnées de $\mathbb{R}^n$.

Le théorème de Bochner de représentation des fonctions définies positives implique, comme il est bien connu, qu'une f. a. r. stationnaire $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ est harmonisable d'ordre 2 dès que $\xi_t \in L^2_{\mathbb{C}}$ pour tout (= pour un) $t \in \mathbb{R}$ et que l'application $t \rightarrow \xi_t$ de $\mathbb{R}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}$ est continue. Plus exactement il existe une mesure positive bornée sur $\mathbb{R}$, soit ν_{ξ} telle que :

$$E(\xi_s \xi_t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i(t-s)z} \nu_{\xi}(dz) \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

ce qui signifie que la mesure spectrale d'ordre 2, soit μ_2 , associée à la f. a. r. $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ est concentrée sur la seconde bissectrice $[x + y = 0]$ de $\mathbb{R}^2$. La première partie de la proposition suivante rappelle (cf. [1]) que ce dernier résultat sur le support de μ_2 n'est pas particulier à l'ordre 2.

PROPOSITION 3.1. — *Si la f. a. r. stationnaire $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ est harmonisable d'ordre n , la mesure μ_n sur $\mathbb{R}^n$ associée est portée par l'hyper-plan*

$$\left\{ \sum_1^n x_m = 0 \right\}.$$

Si la f. a. r. stationnaire $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ est harmonisable d'ordre $2n$, on a pour toute mesure ν de l'espace de Hilbert M_n :

$$\tilde{X}_n(\nu) \circ \theta_t = \tilde{X}_n(\chi_t^n \cdot \nu)$$

et pour toute fonction $f \in L^2_{\mathbb{C}}(m_n)$:

$$X_n(f) \circ \theta_t = X_n(\chi_t^n f)$$

quel que soit $t \in \mathbb{R}$, à condition de définir la fonction χ_t^n sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\chi_t^n(x) = \exp \left[2\pi i t \left(\sum_1^n x_m \right) \right].$$

Démonstration. — Si $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ est harmonisable d'ordre n , on a quels que soient $s \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \exp [2\pi i \langle s, x \rangle] \chi_t(x) \mu(dx) &= E \left[\prod_1^n \xi_{s_m+t} \right] \\ &= E \left(\prod_1^n \xi_{s_m} \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp 2\pi i \langle s, x \rangle \mu_n(dx) \end{aligned}$$

On en conclut que $\chi_t^n \cdot \mu_n = \mu_n$ sur $\mathbf{R}^n$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, ce qui n'est possible que si μ_n est concentrée sur

$$\left\{ \sum_1^n x_m = 0 \right\}.$$

Pour toute f. a. r. stationnaire $(\xi_t, t \in \mathbf{R})$ on vérifie immédiatement que $X_n(f) \circ \theta_t = X_n(\chi_t^n f)$ pour tout $n \geq 1$, $t \in \mathbf{R}$ et pour toute fonction $f \in \Lambda_n$. Si la f. a. r. stationnaire $(\xi_t, t \in \mathbf{R})$ est harmonisable d'ordre $2n$, le sous-espace H_n de $L_C^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est invariant par le groupe des transformations unitaires $Z \rightarrow Z \circ \theta_t (t \in \mathbf{R})$ et on peut donc considérer le groupe $(T_t, t \in \mathbf{R})$ de transformations unitaires de M_n , image de groupe $[\theta_t, t \in \mathbf{R}]$ par l'isométrie $\tilde{X}_n$ de M_n sur H_n ; on a par définition :

$$\tilde{X}_n(T_t v) = \tilde{X}_n(v) \circ \theta_t \quad (t \in \mathbf{R}, v \in M_n).$$

Montrons que $T_t v = \chi_t^n \cdot v$.

En vertu de $X_n(f) = \tilde{X}_n(\mu_f) (f \in \Lambda_n)$, l'égalité $X_n(f) \circ \theta_t = X_n(\chi_t^n f)$ peut encore s'écrire $T_t \mu_f = \mu_{\chi_t^n \cdot f} (f \in \Lambda_n)$. On a alors quels que soient $v \in M_n$ et $f \in \Lambda_n$:

$$\begin{aligned} T_t v(\bar{f}) &= \langle T_t v, \mu_f \rangle_{M_n} \\ &= \langle v, T_{-t} \mu_f \rangle_{M_n} \\ &= \langle v, \mu_{\chi_{-t}^n \cdot f} \rangle_{M_n} = v[\bar{\chi}_{-t}^n f] \end{aligned}$$

comme $\bar{\chi}_{-t}^n = \chi_t^n$, on a bien démontré que $T_t v = \chi_t^n \cdot v$ pour tout $v \in M_n$.

Quant à l'égalité $X_n(f) \circ \theta_t = X_n(\chi_t^n f)$ que l'on a démontrée ci-dessus lorsque $f \in \Lambda_n$, on l'étend facilement par un passage à la limite à tout $f \in L_C^2(m_n)$ puisque Λ_n est dense dans $L^2(m_n)$ et que l'application X_n de $L_C^2(m_n)$ dans $L_C^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est contractante.

On pourra remarquer que lorsque $v = \mu_f (f \in L^2(m_n))$ l'égalité

$$\tilde{X}_n(v) \circ \theta_t = \tilde{X}_n(\chi_t^n \cdot \mu_f)$$

de la proposition 3.1 s'écrit encore

$$X_n(f) \circ \theta_t = \tilde{X}_n(\chi_t^n \cdot \mu_f);$$

en comparant avec la formule

$$X_n(f) \circ \theta_t = X_n(\chi_t^n \cdot f),$$

on voit donc que $\chi_t^n \cdot \mu_f = \mu_{\chi_t^n \cdot f}$ pour tout $f \in L^2(m_n)$. Cette identité est d'ailleurs facile à vérifier directement sur la définition des μ_f .

COROLLAIRE 3.2. — Si la f. a. r. stationnaire $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ est ergodique et harmonisable d'ordre $2n$, la v. a. $\tilde{X}_n(v)$ est constante pour toute mesure v de M_n portée par l'hyperplan

$$\left(\sum_1^n x_m = 0 \right)$$

de $\mathbb{R}^n$ et on a plus précisément : $\tilde{X}_n(v) = \langle v, \bar{\mu}_n \rangle$ où μ_n désigne la mesure spectrale d'ordre n . En particulier si f est une fonction de $L^2(m_n)$ nulle en dehors de l'hyperplan précédent on a $X_n(f) \stackrel{p.s.}{=} \mu_n(f)$.

Démonstration. — Si la mesure v de M_n est concentrée sur l'hyperplan

$$\left\{ \sum_1^n x_m = 0 \right\},$$

on a $\chi_t^n \cdot v = v$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ il résulte alors de la proposition précédente que $\tilde{X}_n(v)$ est invariante par le groupe $(\theta_t, t \in \mathbb{R})$ donc que $\tilde{X}_n(v)$ est p. s. constante en vertu de l'ergodicité de la f. a. r. $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$. On a alors

$$\tilde{X}_n(v) = E[\tilde{X}_n(v)]$$

et la fin de l'énoncé du corollaire résulte du corollaire 2.3.

LEMME 3.3. — On suppose que la f. a. r. stationnaire $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ est harmonisable d'ordre $2n$ et on définit la mesure positive λ_n sur $\mathbb{R}$ comme la projection orthogonale dans $\mathbb{R}^n$ de m_n sur la droite $\{x_1 = \dots = x_n\}$. Plus précisément on pose :

$$\int_{\mathbb{R}} g(z) \lambda_n(dz) = \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\sum_1^n x_i\right) m_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\sum_1^n x_i\right) |\mu_{2n}|(dxdy).$$

Il existe alors une famille mesurable $(\tilde{\mu}_{2n}(z, \cdot), z \in \mathbb{R})$ de mesures complexes bornées sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ portées respectivement par les sous-espaces

$$\left\{ x, y : \sum_1^n x_m = \sum_1^n y_m = z \right\},$$

hermitiennes et de type positif relativement à l'espace Λ_n , telles que :

$$\tilde{\mu}_{2n} = \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(dz) \tilde{\mu}_{2n}(z, \cdot).$$

La famille de mesures $[\tilde{\mu}_{2n}(z, \cdot)]$ est unique à une λ -équivalence près. En outre l'ensemble des z pour lesquels $\tilde{\mu}_{2n}(z, \cdot) = 0$ est négligeable.

Démonstration. — Pour tout couple $f, g \in L^2_C(m_n)$ on a :

$$\begin{aligned} E[X_n(f) \circ \theta_t \overline{X_n(g)}] &= E[X_n(\chi_t^n f) \overline{X_n(g)}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left[2\pi i t \left(\sum_1^n x_m \right) \right] f(x) \overline{g(y)} \tilde{\mu}_{2n}(dx dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(2\pi i t z) v_{f,g}(dz) \end{aligned}$$

à condition de définir la mesure $v_{f,g}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$v_{f,g}(dz) = \int \int_{\left\{ \sum_1^n x_m \in dz \right\}} f(x) \overline{g(y)} \tilde{\mu}_{2n}(dx dy).$$

Il est clair que l'application $f, g \rightarrow v_{f,g}$ de $L^2(m_n) \times L^2(m_n)$ dans l'espace des mesures complexes bornées sur $\mathbb{R}$ est linéaire en f , anti-linéaire en g ; le théorème de Bochner entraîne en outre que les mesures $v_{f,f}$ sont positives (puisque leurs transformées de Fourier sont définies positives).

Il est aisé de voir que les mesures $v_{f,g}[f, g \in L^2_C(m_n)]$ sont absolument continues par rapport à λ_n . Réciproquement tout borélien $B \subset \mathbb{R}$ tel que $v_{f,f}(B) = 0$ pour tout $f \in L^2(m_n)$ est négligeable pour λ_n . On a en effet

$$|v_{f,g}(B)|^2 \leq v_{f,f}(B) v_{g,g}(B) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} 1_B(\sum x_m) f(x) \overline{g(y)} \tilde{\mu}_{2n}(dx dy) = 0$$

pour tout couple $f, g \in L^2_C(m_n)$; or cela n'est possible que si $\tilde{\mu}_{2n} = 0$ sur $(\sum x_m \in B) \times \mathbb{R}^n$ ou ce qui est équivalent si $\lambda_n(B) = 0$.

Il ne reste plus alors pour démontrer le lemme qu'à utiliser la technique classique de désintégration des mesures. On écrira d'abord la mesure bornée $\tilde{\mu}_{2n}$ comme l'intégrale sur $\mathbb{R}$ par rapport à λ_n d'une famille mesurable $(\tau_z, z \in \mathbb{R})$ de mesures bornées portées respectivement par

$$\left\{ \sum_1^n x_m = z \right\},$$

soit :

$$\tilde{\mu}_{2n}(\cdot) = \int_{\mathbf{R}} \lambda_n(dz) \tau_z(\cdot).$$

Comme la mesure $\tilde{\mu}_{2n}$ est portée par l'hyperplan

$$\left\{ \sum_1^n x_m = \sum_1^n y_m \right\},$$

il en est de même de presque toutes les mesures τ_z , donc de toutes les mesures τ_z après une modification inessentielle de la famille $\{\tau_z\}$. D'après une formule du début de la démonstration on a pour tout couple $f, g \in L^2_C(m_n)$:

$$v_{f,g}(dz) = \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \overline{g(y)} \tau_z(dx dy) \cdot \lambda_n(dz).$$

Comme la mesure $v_{f,f}$ est positive quel que soit f , la fonction mesurable de z égale à l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \overline{f(y)} \tau_z(dx dy)$$

est p. s. positive. On pourra donc trouver un ensemble négligeable de z en dehors duquel l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \overline{f(y)} \tau_z(dx dy)$$

soit positive quel que soit f dans l'ensemble dénombrable des polynômes trigonométriques à paramètres rationnels, donc par continuité, quel que soit $f \in \Lambda_n$. Il ne reste plus alors qu'à modifier τ_z en 0 pour tout z de l'ensemble négligeable précédent et à appeler cette modification $\tilde{\mu}_{2n}^z$ pour que le lemme soit complètement démontré.

PROPOSITION 3.4. — *La f. a. r. stationnaire $(\xi_t, t \in \mathbf{R})$ est supposée harmonisable d'ordre $2n$. On désigne comme précédemment par M_n l'espace de mesures sur $\mathbf{R}^n$ associé à la mesure hermitienne positive $\tilde{\mu}_{2n}$ et on désigne par $M_n^z (z \in \mathbf{R})$ les espaces de Hilbert de mesures sur $\mathbf{R}^n$ associés respectivement aux mesures hermitiennes positives $\tilde{\mu}_{2n}(z, \cdot)$ d'une désintégration de μ_{2n} (voir lemme précédent); les mesures ν de M_n^z sont toutes portées par l'hyper-*

plan $\left\{ \sum_1^n x_m = z \right\}$. On a $\dim (M_n^z) \geq 1$ p. s. $[\lambda]$.

Toute mesure ν de M_n s'écrit alors d'une et essentiellement d'une seule manière sous la forme :

$$\nu = \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(dz) \nu_z$$

où $[\nu_z, z \in \mathbb{R}]$ est une famille mesurable de mesures sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\nu_z \in M_n^z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ et où λ_n est la mesure introduite dans le lemme précédent ; en outre on a, quels que soient $\nu, \nu' \in M_n$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \langle \nu, \nu' \rangle_{M_n} &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(dz) \langle \nu_z, \nu'_z \rangle_{M_n^z}, \\ \chi_t^n \cdot \nu &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(dz) e^{2\pi i t z} \nu_z \end{aligned}$$

Inversement pour toute famille mesurable $(\nu_z, z \in \mathbb{R})$ de mesures sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\nu_z \in M_n^z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ et que

$$\int_{\mathbb{R}} \|\nu_z\|_{M_n^z}^2 \lambda_n(dz) < \infty,$$

la mesure

$$\nu = \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(dz) \nu_z$$

est bien définie et appartient à M_n .

La proposition précédente exprime que la désintégration des mesures de M_n relativement à l'application $\sum_1^n x_m$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et la mesure λ_n , définit un isomorphisme d'espaces de Hilbert entre M_n et l'intégrale hilbertienne des M_n^z , soit :

$$M_n \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} M_n^z \lambda_n(dz).$$

Démonstration. — Les mesures ν de M_n^z sont portées par l'hyperplan

$$\left\{ \sum_1^n x_m = z \right\}$$

en vertu de la remarque 2, p. 19 puisque la mesure $\tilde{\mu}_{2n}^z$ est portée par

$$\left\{ \sum_1^n x_m = z \right\} \times \mathbb{R}^n.$$

On remarquera aussi que presque aucun des espaces M_n^z n'est dégénéré (c'est-à-dire n'est de dimension 0) puisque d'après le lemme précédent $\tilde{\mu}_{2n}^z \neq 0$ p. s. (λ_n) .

Pour tout $f \in \Lambda_n$, les mesures :

$$\mu_f^z = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \tilde{\mu}_{2n}(z; dx) \quad (z \in \mathbb{R})$$

forment une famille mesurable de mesures appartenant respectivement aux M_n^z et telle que :

$$\mu_f = \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(dz) \mu_f^z$$

en vertu de la formule du lemme précédent. En outre on a :

$$\mu_{\chi_{\mathbb{R}^n}}^z = \exp(2\pi i t z) \cdot \mu_f^z (f \in \Lambda_n, z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R})$$

puisque la mesure $\tilde{\mu}_{2n}(z; dx dy)$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est concentrée sur

$$\left\{ \sum_{i=1}^n x_i = z \right\}.$$

on a aussi la formule de produit scalaire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(dz) \langle \mu_f^z, \mu_g^z \rangle_{M_n^z} &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(dz) \mu_f^z(\bar{g}) \\ &= \mu_f(\bar{g}) = \langle \mu_f, \mu_g \rangle \end{aligned}$$

si $f, g \in \Lambda_n$.

Reformulons ce qui précède en introduisant l'intégrale hilbertienne

$$\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} M_n^z \lambda_n(dz),$$

c'est-à-dire l'espace de Hilbert formé par les classes d'équivalence de familles mesurables $(v_z, z \in \mathbb{R})$ de mesures sur $\mathbb{R}^n$ telles que $v_z \in M_n^z (z \in \mathbb{R})$ et que

$$\int_{\mathbb{R}} \|v_z\|_{M_n^z}^2 \lambda_n(dz) < \infty;$$

le produit scalaire de cet espace est défini par :

$$\langle \{v_z\}, \{v'_z\} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle v_z, v'_z \rangle \lambda_n(dz).$$

D'après ce qui précède la correspondance qui pour tout $f \in \Lambda_n$ associe la classe d'équivalence de la famille $\{\mu_f^z\}$ à la mesure μ_f est une application linéaire isométrique du sous-espace $\{\mu_f, f \in \Lambda_n\}$ dense de M_n dans l'intégrale hilbertienne $\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} M_n^z \lambda_n(dz)$; par prolongement M_n s'injecte isométriquement dans cette intégrale hilbertienne et si $(\sigma_z, z \in \mathbb{R})$ est l'image de σ , on a, pour tout $f \in \Lambda_n$:

$$\sigma(\bar{f}) = \langle \sigma, \mu_f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(dz) \langle \sigma_z, \mu_f^z \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(dz) \sigma_z(\bar{f})$$

c'est-à-dire :

$$\sigma = \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(dz) \sigma_z.$$

La première partie de la proposition est ainsi démontrée. Pour démontrer la partie inverse, il faut montrer que l'injection isométrique de M_n dans

$$\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} M_n^z \lambda_n(dz)$$

est surjective, donc que tout élément $(v_z, z \in \mathbb{R})$ de l'intégrale hilbertienne orthogonal à M_n est nul. Or pour une telle famille $(v_z, z \in \mathbb{R})$ orthogonale à M_n on a, pour tout $f \in \Lambda_n$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda_n(dz) e^{-2\pi i t z} v_z(\bar{f}) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_n(dz) \langle v_z, \mu_{\chi_t^f}^z \rangle = 0$$

on a donc $v_z(\bar{f}) = 0$ p. s. $[\lambda_n]$ pour tout $f \in \Lambda_n$ et cela entraîne que $v_z = 0$ pour presque tout $z \in \mathbb{R}$.

COROLLAIRE 3.5. — *Si la f. a. r. stationnaire $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ est harmonisable d'ordre $2n$, alors pour tout $v \in M_n$ la mesure spectrale de la f. a.*

$$\{ \tilde{X}_n(v) \circ \theta_t, t \in \mathbb{R} \}$$

est égale à $\|v_z\|^2 \cdot \lambda_n(dz)$, si

$$v = \int_{\mathbb{R}} v_z \lambda_n(dz)$$

est la désintégration de v donnée par la proposition précédente.

Démonstration. — On a en effet d'après la proposition précédente :

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}_n(v) \circ \theta_t \cdot \overline{\tilde{X}_n(v)}] &= \langle X_t^n \cdot v, v \rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}} \exp(2\pi itz) \langle v_z, v_z \rangle \lambda_n(dz). \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [0] N. ARONSZAJN, Theory of reproducing kernels. *Trans. A. M. S.*, **68**, 1950, 337-404.
- [1] A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*. Masson, 1953.
- [2] C. FOIAS, Sur les mesures spectrales qui interviennent dans la théorie ergodique. *J. Math. Mech.*, **13**, 1964, 639-658.
- [3] G. SINAÏ, Sur les mesures spectrales des processus stationnaires ergodiques. *Teoria Veroyatnosi i Primen.*, **8**, 1963, 463-469 [Trad. angl.: *Theory of Proba. and Applic.*, **8**, 1963, 429-436].
- [4] G. SINAÏ, Remarques sur les propriétés spectrales des systèmes dynamiques ergodiques. *Doklady*, **50**, 1963, 1235-1237 [Trad. angl.: *Russian Math. Surveys*, **18**, 1963, 37-50].

(Manuscrit reçu le 27 septembre 1968).