

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JACQUES AZEMA

MARIE DUFLO

DANIEL REVUZ

Note sur la mesure invariante des processus de Markov récurrents

Annales de l'I. H. P., section B, tome 3, n° 4 (1967), p. 397-402

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1967__3_4_397_0

© Gauthier-Villars, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Note sur la mesure invariante des processus de Markov récurrents

par

Jacques AZEMA, Marie DUFLO et Daniel REVUZ
(Institut Henri Poincaré).

0. Étant donné un processus de Markov X à valeur dans un espace E et satisfaisant à l'hypothèse (A) de Hunt (cf. [6]), nous avons défini dans [1] la notion de récurrence suivante :

Un point x est dit récurrent si presque toutes les trajectoires partant de ce point récurrent dans tout voisinage fin de x . On a montré que x était récurrent si et seulement si la valeur en x du potentiel de toute fonction borélienne bornée ne pouvait être que 0 ou l'infini. On dit qu'un point x conduit à un point y si, partant de x , et pour tout voisinage fin V de y , on a une probabilité positive de visiter V . Si x est récurrent et si x conduit à y , alors y est récurrent et conduit à x . On peut donc définir des classes d'équivalence d'états récurrents que l'on appellera classes récurrentes du processus X .

Sous l'hypothèse (L) de Meyer ([7]) on sait associer à chaque classe récurrente C_i un ensemble presque borélien D_i jouissant des propriétés suivantes :

D_i contient C_i , et D_i et D_j sont disjoints dès que $i \neq j$.

Partant d'un point x de D_i , presque toutes les trajectoires ne sortent pas de D_i .

Dans la suite nous étudierons le processus restreint à une telle classe que l'on notera D .

Dans [2] nous avons démontré le résultat suivant : il existe une mesure μ ,

σ -finie portée par D invariante par le semi-groupe P_t associé au processus ; cette mesure est la seule mesure excessive pour P_t concentrée sur D .

Nous allons dans cette note présenter deux résultats indépendants qui précisent des propriétés de régularité de cette mesure. Les notations seront celles de [1] et [2].

I. — MESURE INVARIANTE DES PROCESSUS A RÉVOLVENTE FORTEMENT FELLÉRIENNE

1.0. On peut se demander à quelle condition la mesure invariante dont nous avons montré l'existence dans [2] est une mesure de Radon. Il n'en est pas toujours ainsi. Mais il en est ainsi dans le cas des processus à résolvante fortement fellérienne. La classe conservative D est l'ensemble des points où une fonction invariante prend la valeur 1 ; c'est donc dans ce cas un ensemble fermé.

Il est clair que si D est localement compacte pour la topologie induite par E , on peut définir sur D un processus de Hunt ayant mêmes trajectoires et même fonction de transition.

Dans toute la suite de ce paragraphe nous supposons donc $D = E$. Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème : Si X est à résolvante fortement fellérienne la mesure invariante est une mesure de Radon.

1.1. Soit $a(x)$ une fonction positive bornée, borélienne et finement continue telle que :

$$\int_E a(x) \mu(dx) > 0$$

nous poserons :

$$A_t^{(a)} = \int_0^t a(X_s) ds$$

Le changement de temps associé sera noté $\tau_t^{(a)}$ et la résolvante correspondante ${}^{(a)}V^\lambda$. Soit :

$${}^{(a)}V^\lambda f(x) = E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_{\tau_t^{(a)}}) dt = E_x \int_0^\infty e^{-\lambda A_t^{(a)}} (f_a)(X_t) dt$$

On a alors le lemme :

LEMME : Si le processus X est à résolvante fortement fellérienne et si f est une fonction finement continue, borélienne et bornée, ${}^{(a)}V^\lambda f$ est une fonction continue.

Démonstration : Nous pouvons définir un semi-groupe Q_t sur l'espace des fonctions presque boréliennes bornées en posant :

$$h \rightarrow Q_t h(x) = E_x[e^{-\lambda A_t^{(a)}} h(X_t)]$$

Il est clair que ${}^{(a)}V^\lambda f$ est le potentiel de la fonction, fa relatif au semi-groupe Q_t et comme ${}^{(a)}V^\lambda$ est un opérateur borné, si $fa \in \tilde{B}_0(Q)$ espace des fonctions sur lequel Q_t est faiblement continu alors on aura :

$${}^{(a)}V^\lambda f \in \mathcal{D}_{\tilde{A}(Q)}$$

où $\tilde{A}(Q)$ est le générateur infinitésimal faible de Q_t et $\mathcal{D}_{\tilde{A}(Q)}$ son domaine.

Or d'une part $fa \in \tilde{B}_0(Q)$ car :

$$\|Q_t fa\| \leq \sup_{x \in E} E_x[e^{-\lambda A_t^{(a)}} |fa|(X_t)] \leq \|a\| \|f\|$$

et lorsque $t \downarrow 0$, $e^{-\lambda A_t^{(a)}}(fa)(X_t) \rightarrow (fa)(x)$ en restant borné par $\|a\| \|f\|$ donc

$$Q_t fa(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (fa)(x)$$

Mais si $\tilde{U}^\lambda$ désigne la résolvante de Q , on obtient par calcul élémentaire, pour f mesurable bornée :

$$U^\lambda f - U^\lambda f = \lambda U^\lambda [a \tilde{U}^\lambda f]$$

Donc Q est fortement fellérien et les fonctions de $\mathcal{D}_{\tilde{A}(Q)}$ sont continues.

1.2. Démonstration du théorème. Nous supposons maintenant que a est une fonction positive continue à support dans un compact K . Soit M l'ensemble des mesures de Radon positives à support dans K et de masse 1. M est un sous-ensemble convexe de la sphère unité de l'espace des mesures de Radon sur E . M est faiblement fermé, donc faiblement compact.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ l'application :

$$v \rightarrow \lambda v {}^{(a)}V^\lambda$$

envoi M dans M , et elle est linéaire et continue. En effet posons :

$$\begin{aligned} 0 &= \{a > 0\} \\ \lambda^{(a)}V^\lambda(x, 0) &= \lambda E_x \int_0^\infty e^{-\lambda A_t^{(a)}} 1_0(X_t) dA_t^{(a)} \\ &= \lambda E_x \int_0^\infty e^{-\lambda A_t^{(a)}} dA_t^{(a)} = 1. \end{aligned}$$

Donc si $v \in M$:

$$\lambda v^{(a)}V^\lambda(0) = \int_K v(dx) \lambda^{(a)}V^\lambda(x, 0) = 1$$

et si

$$A \cap 0 = \emptyset \quad \lambda v^{(a)}V^\lambda(A) = 0.$$

D'autre part soit $\mathcal{F}_\alpha$ un filtre de mesures ν_α sur M , convergeant faiblement vers une mesure ν . Comme K est fermé dans E qui est normal, toute fonction f continue sur K se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ continue et bornée sur E et d'après le lemme $^{(a)}V^\lambda \tilde{f}$ est continue.

Donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\lim_{\mathcal{F}_\alpha} \langle \lambda v^{(a)}V^\lambda, f \rangle = \lim_{\mathcal{F}_\alpha} \langle \nu_\alpha, \lambda^{(a)}V^\lambda f \rangle = \langle \nu, \lambda^{(a)}V^\lambda f \rangle = \langle \lambda v^{(a)}V^\lambda, f \rangle$$

On peut donc appliquer le théorème de Markov-Kakutani (cf. [4]) et l'on conclut qu'il existe dans M un élément invariant par les opérateurs $\lambda^{(a)}V^\lambda$. Mais d'après la proposition II.3 de [2] cette mesure est proportionnelle à $a\mu$. Donc pour toute fonction a continue à support compact a est une mesure de Radon bornée. μ est donc une mesure de Radon.

II. — ÉTUDE DE LA SINGULARITÉ DES FONCTIONS DE TRANSITION PAR RAPPORT A LA MESURE INVARIANTE

2.0. Soit $P_t(x, A)$ la fonction de transition du processus X . Nous écrivons sa décomposition de Lebesgue par rapport à μ :

$$P_t(x, \cdot) = P_t^0(x, \cdot) + P_t^1(x, \cdot)$$

où $P_t^1(x, \cdot)$ est la composante singulière. Une application classique du théorème des Martingales montre que la fonction $x \rightarrow P_t^1(x, A)$ est mesu-

table quel que soit le borélien A . Dans [5], Doob montre que $P_t^1(x, \cdot)$ vérifie l'équation de Chapman-Kolmogoroff et que la fonction :

$$t \rightarrow P_t^1(x, D)$$

est une fonction décroissante. Nous poserons

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_t^1(x, D) ;$$

$g(x)$ est clairement mesurable.

Doob montre que la condition $g(x) = 0$ permet d'obtenir certains théorèmes de convergence. Nous allons montrer ici que cette condition est toujours réalisée pour les processus de Markov récurrents dès que la fonction de transition $P_t(x, \cdot)$ possède une partie absolument continue.

2.1. Théorème. — Étant donnée une classe conservative D , il n'y a que deux cas possibles :

— ou bien pour tout réel positif t :

$$P_t^1(x, D) = 1 \quad \mu\text{-presque sûrement sur } D,$$

— ou bien :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t^1(x, D) = 0$$

pour tout x de D .

Démonstration :

La fonction $1 - g$ est surmédiane car ;

$$\begin{aligned} P_s[1 - g](x) &= 1 - \int P_s^0(x, dy) - \int P_s^1(x, dy)g(y) \\ &= 1 - g(x) - \int P_s^0(x, dy)g(y) \leq 1 - g(x) \end{aligned}$$

Donc d'après la proposition III.3 de [2], $1 - g$ est égale μ -presque sûrement sur D à une constante $1 - a$ et $1 - g \geq 1 - a$ partout comme P_t^1 vérifie l'équation de Chapman-Kolmogoroff, on a en appliquant le théorème de Lebesgue :

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{s \rightarrow \infty} P_{t+s}^1(x, D) = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_D P_t^1(x, dy) P_s^1(y, D) \\ &= \int_D P_t^1(x, dy) g(y) \leq a P_t^1(x, D) \end{aligned}$$

d'où en passant à la limite :

$$g(x) \leq ag(x)$$

pour tout x de D .

Donc $a \leq a^2$ et comme $a \leq 1$ on a $a = 1$ ou $a = 0$. Dans le second cas on a $g(x) \leq ag(x) = 0$ partout sur D .

Remarque : Dans le premier cas, l'ensemble $\{g < 1\}$ est un ensemble transient (cf. [3]). Il peut ne pas être vide.

Supposons par exemple que D est réunion d'un cercle et d'un point isolé $\{x_0\}$. Le processus partant d'un point du cercle étant la translation uniforme sur le cercle ; le processus partant de $\{x_0\}$ y reste un temps exponentiel puis saute en un point dont la loi est une loi diffuse sur le cercle. Dans ce cas $P_t^1(x, D) = 1$ pour tout t et tout x du cercle ; mais $P_t^0(x_0, D) = 1$ pour tout t .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AZEMA, J., KAPLAN-DUFLO M. et REVUZ D. — Récurrence fine des processus de Markov. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*. Vol. II, n° 3, 1966, p. 185-220.
 - [2] AZEMA J., KAPLAN-DUFLO M. et REVUZ D. — Mesure invariante sur les classes récurrentes des processus de Markov. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw Geb*, t. 8, 1967, p. 157-181.
 - [3] AZEMA J., KAPLAN-DUFLO M. et REVUZ D. — Fonctionnelles additives des processus de Markov récurrents. *C. R. Acad. Sci. de Paris*, t. 264, p. 1142-1145.
 - [4] BOURBAKI. — *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. II. Hermann.
 - [5] DOOB J. L. — *Asymptotic properties of Markoff transitions probabilities*. T. A. M. S., t. 63, 1948, p. 393-421.
 - [6] HUNT G. A. — Markov Processes and Potentials. *Ill. J. of Maths.*, t. 1, 1957, p. 46-93, p. 316-369 ; t. 2, 1958, p. 151-213.
 - [7] MEYER P. A. — Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov. *Ann. Inst. Fourier*, t. 12, 1962, p. 125-230.
-