ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. GILLOIS

Note sur la variance et la covariance génotypiques entre apparentés

Annales de l'I. H. P., section B, tome 2, nº 4 (1965-1966), p. 349-352

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1966__2_4_349_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. II, n° 4, 1966, p. 349-352. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Note sur la variance et la covariance génotypiques entre apparentés

par

M. GILLOIS
Station centrale de Génétique animale,
Centre national de Recherches zootechniques,
Jouy-en-Josas (Seine-et-Oise), France.

SOMMAIRE. — Limite de la simplification des expressions de la variance et de la covariance génotypiques entre apparentés quelconques dans une population panmictique introduite par la relation :

$$E_p(D^2) = [E_c(D)]^2.$$

Dans notre travail intitulé : la « Relation d'identité en génétique » (M. Gillois, 1964) nous avons calculé — chapitre II, pages 54 à 75 (1) — les expressions théoriques de la variance et de la covariance génotypiques entre apparentés quelconques appartenant à une population panmictique.

Si le caractère quantitatif et héréditaire considéré est conditionné par un seul locus multiallélique, c'est-à-dire par un nombre quelconque de classes d'isoaction homologues, ces expressions sont :

$$\text{(E1)} \qquad \mathrm{VAR}(Z_I) = 2(1 + f_I)E(X^2) + 4f_I E_c(XD) + (1 - f_I)E_p(D^2) + f_I E_c(D^2) - f_I^2[E_c(D)]^2.$$

$$\text{(E2)} \qquad \mathrm{COV}(Z_I Z_J) = 4\varphi_{IJ}E(X^2) + (4\partial_1 + \partial_2 + \partial_3 + \partial_4 + \partial_5)E_c(XD) + (\partial_9 + \partial_{12})E_p(D^2) + \partial_1 E_c(D^2) + (\partial_6 - f_I f_J)[E_c(D)]^2.$$

Pour la définition des variables aléatoires se reporter à la « Relation d'identité en génétique » (M. Gillois, 1964).

(1) Chap. II, pages 52 à 63 dans M. GILLOIS, 1964, Relation d'identité en Génétique. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, sect. B, vol. II, n° 1, p. 1-94.

Dans le cas plus restreint où le nombre de classes d'isoaction est de deux, cas du biallélisme, nous démontrons pages 64 et 74 ([2]) que :

$$\text{(E3)} \qquad E_p(D^2) = [E_c(D)]^2.$$

Cette relation permet alors une simplification des expressions de la variance et de la covariance génotypiques en effectuant une mise en facteur commun des coefficients d'identité multiplicateurs de $E_p(D^2)$ et de $E_c(D)^2$. Mais cette relation cesse d'être vraie d'une part s'il s'agit de plusieurs classes d'isoaction homologues, d'autre part, si plusieurs classes d'homologues indépendantes (c'est-à-dire plusieurs loci indépendants) sont en cause.

Seules les expressions (E1) et (E2) de la variance et de la covariance génotypiques sont générales dans le cas d'un seul locus multiallélique.

Dans le cas d'un caractère polyfactoriel conditionné par un grand nombre de loci multialléliques dont l'indice d'énumération serait α, ces expressions sont les suivantes :

$$\text{(E4)} \quad \mathrm{VAR}(Z_I) = 2(1+f_I)\Big[\sum_\alpha E(X_\alpha^2)\Big] + 4f_I\Big[\sum_\alpha E_c(X_\alpha D_\alpha)\Big] + (1-f_I)\Big[\sum_\alpha E_p(D_\alpha^2)\Big] + f_I\Big[\sum_\alpha E_c(D_\alpha^2)\Big] - f_I^2\Big[\sum_\alpha E_c(D_\alpha)\Big]^2.$$

$$\text{(E5)} \quad \mathrm{COV}(Z_I Z_J) = 4\varphi_{IJ}\Big[\sum_\alpha E(X_\alpha^2)\Big] + (4\partial_1 + \partial_2 + \partial_3 + \partial_4 + \partial_5)\Big[\sum_\alpha E_c(X_\alpha D_\alpha)\Big] + (\partial_9 + \partial_{12})\Big[\sum_\alpha E_p(D_\alpha^2)\Big] + \partial_1\Big[\sum_\alpha E_c(D_\alpha^2)\Big] + (\partial_6 - f_I f_J)\Big[\sum_\alpha E_c(D_\alpha)\Big]^2.$$

Il y a donc nécessité de remplacer l'expression malheureuse suivante de la page 110 ([3]) de la « Relation d'identité en génétique ».

« Nous avons toujours la relation

$$E_p(D^2) = [E_c(D)]^2 \text{ »}$$

par

« La relation

$$E_p(D^2) = [E_c(D)]^2$$

n'est vraie que dans le cas d'un caractère conditionné par un seul locus biallélique. »

En conséquence, la dernière phrase de la page 64 ([4]) doit être supprimée.

Dans le cas plus général d'un caractère soumis à une influence génétique

---

([2]) Chap. II, pages 58 et 63 : *Id.*
([3]) Chap. II, page 86 : *Id.*
([4]) Chap. II, page 58 : *Id.*

maternelle cette simplification ne peut pas être utilisée, aussi les expressions de la variance et de la covariance génotypiques présentées pages 82 et suivantes ([5]) s'écrivent, sans mise en facteur commun, comme suit :

$$
\begin{aligned}
\text{(E6)}\quad \mathrm{VAR}(P_I) &= 2(1+f_I)\Big[\sum_{\alpha} E(X_\alpha^2)\Big] + 4f_I\Big[\sum_{\alpha} E_c(X_\alpha D_\alpha)\Big] \\
&+ (1-f)\Big[\sum_{\alpha} E_p(D_\alpha^2)\Big] + f_I\Big[\sum_{\alpha} E_c(D_\alpha)\Big] - f_I^2\Big[\sum_{\alpha} E_c(D_\alpha)\Big]^2 \\
&+ 2(1+f_N)\Big[\sum_{\beta} E(\mathcal{X}_\beta^2)\Big] + 4f_N\Big[\sum_{\beta} E_c(\mathcal{X}_\beta \mathcal{D}_\beta)\Big] + (1-f_N)\Big[\sum_{\beta} E_p(\mathcal{D}_\beta^2)\Big] \\
&+ f_N\Big[\sum_{\beta} E_c(\mathcal{D}_\beta^2)\Big] - f_N^2\Big[\sum_{\beta} E_c(\mathcal{D}_\beta)\Big]^2 \\
&+ 2(A4)\Big[\sum_{\alpha=\beta} E(X_\alpha \mathcal{X}_\beta)\Big] + 2(\overset{<}{B}4)\Big[\sum_{\alpha=\beta} E_c(X_\alpha \mathcal{D}_\beta)\Big] + 2(\overset{>}{B}4)\Big[\sum_{\alpha=\beta} E_c(\mathcal{X}_\beta D_\alpha)\Big] \\
&+ 2(C4)\Big[\sum_{\alpha=\beta} E_p(D_\alpha \mathcal{D}_\beta)\Big] + 2(D4)\Big[\sum_{\alpha=\beta} E_c(D_\alpha \mathcal{D}_\beta)\Big] \\
&+ (\vartheta_{6,IN} - 2f_I f_N)\Big[\sum_{\alpha=\beta} E_c(D_\alpha)\cdot E_c(\mathcal{D}_\beta)\Big].
\end{aligned}
$$

Dans cette expression $(C4) = \vartheta_{9,IN} + \vartheta_{12,IN}$.

$$
\begin{aligned}
\text{(E7)}\quad & \mathrm{COV}(P_I P_J) \\
&= (A1)\Big[\sum_{\alpha} E(X_\alpha^2)\Big] + (B1)\Big[\sum_{\alpha} E_c(X_\alpha D_\alpha)\Big] + (C1)\Big[\sum_{\alpha} E_p(D_\alpha^2)\Big] \\
&+ (D1)\Big[\sum_{\alpha} E_c(D_\alpha^2)\Big] + (\vartheta_{6,IJ} - f_I f_J)\Big[\sum_{\alpha} E_c(D_\alpha)\Big]^2 \\
&+ (A2)\Big[\sum_{\beta} E_c(\mathcal{X}_\beta^2)\Big] + \Big[\sum_{\beta} E_c(\mathcal{X}_\beta \mathcal{D}_\beta)\Big] + (C2)\Big[\sum_{\beta} E_p(\mathcal{D}_\beta^2)\Big] \\
&+ (D2)\Big[\sum_{\beta} E_c(\mathcal{D}_\beta^2)\Big] + (\vartheta_{6,NQ} - f_N f_Q)\Big[\sum_{\beta} E_c(\mathcal{D}_\beta)\Big]^2 \\
&+ (A3 + A5)\Big[\sum_{\alpha=\beta} E(X_\alpha \mathcal{X}_\beta)\Big] + (\overset{<}{B}3 + \overset{<}{B}5)\Big[\sum_{\alpha=\beta} E_c(X_\alpha \mathcal{D}_\beta)\Big] \\
&+ (\overset{>}{B}3 + \overset{>}{B}5)\Big[\sum_{\alpha=\beta} E_c(\mathcal{X}_\beta D_\alpha)\Big] + (C3 + C5)\Big[\sum_{\alpha=\beta} E_p(D_\alpha \mathcal{D}_\beta)\Big] \\
&+ (D3 + D5)\Big[\sum_{\alpha=\beta} E_c(D_\alpha \mathcal{D}_\beta)\Big] \\
&+ (\vartheta_{6,IQ} + \vartheta_{6,JN} - f_I f_Q - f_J f_N)\Big[\sum_{\alpha=\beta} E_c(D_\alpha)\cdot E_c(\mathcal{D}_\beta)\Big].
\end{aligned}
$$

([5]) Chap. II, page 68 et suivantes : *Id.*

Dans cette expression

$$\begin{aligned}
(C1) &= \vartheta_{9,IJ} + \vartheta_{12,IJ}\\
(C2) &= \vartheta_{9,NQ} + \vartheta_{12,NQ}\\
(C3) &= \vartheta_{9,IQ} + \vartheta_{12,IQ}\\
(C5) &= \vartheta_{9,JN} + \vartheta_{12,JN}.
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

M. GILLOIS, La relation d'identité en génétique. *Thèse Fac. Sciences*, Paris, 1964, 294 p.

M. GILLOIS, Relation d'identité en génétique : 1. Postulats et axiomes mendéliens, 2. Corrélation génétique dans le cas de dominance. *Ann. Inst. Henri Poincaré*. sect. B, vol. II, n° 1, 1965, p. 1-94.