ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. TORTRAT

Lois tendues et convolutions dénombrables dans un groupe topologique X

Annales de l'I. H. P., section B, tome 2, nº 4 (1965-1966), p. 279-298

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1966__2_4_279_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. II, n° 4, 1966, p. 279-298.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Lois tendues et convolutions dénombrables dans un groupe topologique X [1]

par

A. TORTRAT
(Institut H. Poincaré).

Ce travail est la suite de [7] que nous complétons en ce qui concerne l'étude ($n \to \infty$) des convolutions (dénombrables, de lois μ_n tendues),

$$(0) \qquad \nu_n = \mu_1 \ldots \mu_n$$

(partie II), ajoutant celle (partie III) des lois μ telles qu'il existe des translations (à droite, par exemple) a_n rendant la famille $\{ \mu^n \}$ uniformément tendue [2]. Dans la partie I nous revenons sur des problèmes généraux préliminaires concernant la définition de la convolution dans un demi-groupe topologique (dans [7] nous avons étendu sans discussion la présentation donnée dans [*2*] pour le cas compact) et sur la représentation comme mesures produit des lois invariantes pour un sous-groupe compact H, dans un groupe topologique X (dans [*6*] nous avons présenté ce point de vue sans justification détaillée).

Rappelons qu'à ces problèmes est essentiellement attaché le nom de B. M. Kloss, faisant suite aux précurseurs que furent MM. P. Levy et Y. Kawada-K. Ito; ces derniers envisageaient respectivement le cercle puis un groupe compact et Kloss le cas compact dans [*3*] et quelques problèmes du cas « représentable » pour X localement compact dans [*4*]. Un des intérêts de la méthode « directe » est d'éliminer l'hypothèse de locale compacité (comme de compacité) en étudiant des ensembles U. T. de lois et d'écarter l'appareil difficile des transformées de Fourier; les résultats

(1) X est séparé, donc complètement régulier, suivant des axiomes couramment adoptés.
(2) Par abréviation, nous écrirons U. T.

ainsi obtenus, appliqués aux espaces vectoriels topologiques (séparés) les plus généraux, ne paraissent pas triviaux. Il serait d'autre part intéressant de poser les problèmes complémentaires : étudier des convergences (CV.) $\nu_n \to \nu$ (ν_n quelconques, ou $\nu_n \in (1)$, ou $\nu_n = \mu^n a_n$, ou μ^n) qui ne soient pas U. T. On peut aussi envisager des extensions à certains demi-groupes, ce que nous avons essayé dans [*8*].

M. Csiszár s'est posé les mêmes questions que nous en ce qui concerne le principe de CV., après translations convenables, de (0), dans un travail en cours de parution. Nous citons quelques-unes de ses idées et quelques résultats; cette confrontation nous a permis une simplification concernant l'autre problème, celui des $\mu^n a_n$ équitendues, qui nous paraît devoir susciter encore des recherches.

I. — CONVOLUTIONS DANS UN DEMI-GROUPE ET REPRÉSENTATION DES LOIS H-INVARIANTES DANS UN GROUPE

1. Soient μ et μ' deux lois dans (X, $\mathcal{B}$) demi-groupe topologique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_a$ la tribu de Baire, « engendrée » par les fonctions continues bornées ($f \in \mathcal{C}$). Soit φ l'application

$$y \times y' \xrightarrow{\varphi} yy'$$

de $\widehat{X} = Y \times Y'$ dans X, Y et Y' étant espaces (identiques à X) de représentation de μ et μ', avec leurs tribus boréliennes et $\widehat{\mathcal{A}}$ la tribu produit dans $\widehat{X}$; $\widehat{\mathcal{B}}$ désigne la tribu borélienne dans $\widehat{X}$ et $\widehat{\mathcal{A}}_{\mu \times \mu'}$, la tribu $\widehat{\mathcal{A}}$ complétée (pour la loi $\mu \times \mu'$, de même $\mathcal{B}_\mu$, ...).

Rappelons les définitions : μ *est tendue si* $\exists$ des compacts K_ε avec $\mu K_\varepsilon > 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ arbitraire), la fonction linéaire $\mu f = \int f d\mu$ (définie sur $\mathcal{C}$, positive donc continue pour la topologie de la convergence uniforme : $\| f \| = \sup\limits_{x \in X} f(x)$) *est dite tendue* si $\exists K_\varepsilon$, tel que $\mu f \geqslant 1 - \varepsilon$ pour toute $f \in \mathcal{C}$, $f \supset K_\varepsilon$: $f \supset K$ signifie $f(x) \geqslant 1_K(x)$ et on peut se borner à des f prenant leurs valeurs dans [0, 1]. μ est K-régulière si

(1) $$\mu B = \sup_{K \subset B} \mu K \qquad K \text{ compact, } B \in \mathcal{B},$$

et à toute Tf fonction linéaire positive ($\geqslant 0$ pour $f \geqslant 0$) sur $\mathcal{C}$, tendue, correspond μK-régulière unique $\left(\text{régularisée de } \mu_0 \text{ si } Tf = \int f\, d\mu_0\right)$, lorsque X est complètement régulier (C. R.), définie par (1), et F désignant un ensemble fermé :

$$(1') \qquad \mu F = \inf_{f \supset F} \mu f.$$

Par support ω_μ de μ nous désignons un ensemble fermé de $\mu = 1$. Lorsque X est à base dénombrable de voisinages, ou lorsque μ est K-régulière (ou τ-continue et régulière par rapport aux fermés), on peut, et nous le ferons toujours, appeler support l'ensemble unique intersection de tous les $F \ni \mu F = 1$, c'est l'ensemble des « valeurs possibles » x pour μ ($\mu U(x) > 0$ pour tout voisinage ouvert $U(x)$ de x).

Proposition 1. — X étant un demi-groupe topologique,

a) Si X est à base dénombrable de voisinages, $\widehat{\mathcal{B}} = \widehat{\mathcal{A}}$: la tribu borélienne de $Y \times Y'$ coïncide avec la tribu produit (des tribus boréliennes) et en particulier $\varphi^{-1}\mathcal{B} \subset \widehat{\mathcal{A}}$.

b) S'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ et pour $\mu(\mu')$ des fermés $F_\varepsilon(F'_\varepsilon)$ à bases dénombrables de voisinages de mesures $\mu(\mu') > 1 - \varepsilon$, par exemple si μ et μ' sont tendues suivant des K_ε qui sont tels, on a

$$\widehat{\mathcal{A}} \subset \widehat{\mathcal{B}} \subset \widehat{\mathcal{A}}_{\mu \times \mu'}, \qquad \text{en particulier } \varphi^{-1}\mathcal{B} \subset \widehat{\mathcal{A}}_{\mu \times \mu'}.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que tout ouvert $\mathcal{O}$ dans $\widehat{X}$ appartient à $\mathcal{A}$ (ou $\mathcal{A}_{\mu \times \mu'}$).

a) V, V′ désignant des ouverts appartenant à des bases dénombrables pour Y, Y′, les $V \times V'$ forment une telle base de voisinages dans $\widehat{X}$; tout $y \times y'$ dans $\mathcal{O}$, $\in$ un tel $V \times V'$ qu'on peut choisir $\subset \mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ est donc U dénombrable de tels $V \times V'$, donc $\in \mathcal{A}$.

b) Soit $\widehat{F}_\varepsilon = F_\varepsilon \times F'_\varepsilon$, fermé dans $\widehat{X}$; $\mathcal{O} \cap \widehat{F}_\varepsilon$ est (même raisonnement que ci-dessus) $\cap$ dénombrable de $\{ V \times V' \} \cap \widehat{F}_\varepsilon$ donc, $\widehat{X} - \bigcup_i \widehat{F}_{\varepsilon_i}$ étant (pour $\varepsilon_i \nearrow 0$) $\mu \times \mu'$ nul, et de $\mathcal{A}$, on a $\mathcal{O} \in \mathcal{A}_{\mu \times \mu'}$.

On en déduit le

THÉORÈME I-1. — La convolution $\mu\mu'$ est définie, sur $\mathcal{B}$, et dans les conditions de la proposition 1 (*a)* ou *b)*), par l'image de la mesure produit $\mu \times \mu'$ définie sur $\widehat{\mathcal{A}}$, ou $\widehat{\mathcal{A}}_{\mu \times \mu'}$ (cas *b)*), soit (théorème de Fubini)

$$(2) \quad \mu\mu' B = \mu \times \mu' \{ \varphi^{-1} B \} = \int \mu'(x^{-1}B)\mu(dx) = \int \mu(By^{-1})\mu'(dy) \quad B \in \mathcal{B}$$

ou

$$(2') \qquad \mu\mu' f = \int_{Y\times Y'} f(yy')\mu(dy)\mu'(dy') = \int \mu(dx)\int f(xy)\mu'(dy)$$
$$= \int \mu'(dy)\int f(xy)\mu(dx), \qquad f\ \mathcal{B} \text{ mesurable et bornée}:$$

Les ensembles $x^{-1}B = \{ y : xy \in B \}$ (ou $By^{-1} = \{ x : xy \in B \}$) appartiennent à $\mathcal{B}$; les fonctions $\mu'(x^{-1}B)$ ($\mu(By^{-1})$) sont en général $\mathcal{B}_\mu(\mathcal{B}_{\mu'})$ mesurables, mais $\mathcal{B}$ mesurables dans le cas *a)*. De même dans (2′) $f(xy)$ est $\mathcal{B}$ mesurable, son intégrale p. r. à $\mu(dx)$ ou $\mu'(dy)$ est $\mathcal{B}_{\mu'}$, ou $\mathcal{B}_\mu$, mesurable (sauf le cas *a)* où elle est $\mathcal{B}$ mesurable).

La convolution ainsi définie est associative :

$$(3) \qquad \mu\mu'\mu'' f = \int_{Y\times Y'\times Y''} f(yy'y'')\mu(dy)\mu'(dy')\mu''(dy'').$$

Lorsqu'on n'est pas dans le cas *a)* ou *b)*, on a la

Proposition 2. — Pour des lois μ, μ' tendues, les fonctions (de $\varphi^{-1}\mathcal{C}$)

$$f(y \times y') = f(yy'), \qquad f \in \mathcal{C}$$

sont $\widehat{\mathcal{A}}_{\mu\times\mu'}$ mesurables; il est équivalent de dire que

$$\varphi^{-1}\mathcal{B}_a \subset \widehat{\mathcal{A}}_{\mu\times\mu'}.$$

De même la tribu de Baire de $\widehat{X}$ est dans $\widehat{\mathcal{A}}_\nu$ pour toute loi ν tendue dans $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{A}})$ et contient $\varphi^{-1}\mathcal{B}_a$.

Démonstration. — $\exists$ des recouvrements finis de K_ε, K'_ε par des ouverts V, V′ tels que l'oscillation de $f(y \times y')$ sur chaque $V \times V'$ soit $< \eta$: f est donc approchée uniformément sur $\widehat{K}_\varepsilon = K_\varepsilon \times K'_\varepsilon$ par des fonctions simples $\widehat{\mathcal{A}}$ mesurables et $\widehat{X} - \bigcup_i \widehat{K}_{\varepsilon_i}$ (pour $\varepsilon \searrow 0$) $\in \widehat{\mathcal{A}}$ et est $\mu \times \mu'$ nul, d'où la conclusion.

THÉORÈME I-2. — Pour des lois μ, μ' tendues, la convolution $\mu\mu'$ est une opération associative : $\mu\mu'$ est définie sur $\mathcal{B}_a$ par

$$(4) \qquad \mu\mu' B = \int \mu'(x^{-1}B)\mu(dx) = \int \mu(By^{-1})\mu'(dy), \qquad B \in \mathcal{B}_a$$

et satisfait donc à

$$(4') \qquad \mu\mu' f = \int \mu(dx)\int f(xy)\mu'(dy) = \int \mu'(dy)\int f(xy)\mu(dx),$$

$f\ \mathcal{B}_a$ mesurable, en particulier $f \in \mathcal{C}$.

Lorsque X est C. R. et que μ et μ' sont régularisées, $\mu\mu'$ est prolongeable à $\mathcal{B}$ suivant (1), (1') (pour μ, μ'K-régulières) et lorsque X est un groupe topologique, on peut remplacer $\mathcal{B}_a$ par $\mathcal{B}$ dans (4) et (4') et toutes les fonctions intégrées dans (4), (4') sont $\mathcal{B}$ mesurables.

Démonstration. — La première partie résulte de la proposition 2 (et du théorème de Fubini). Bien sûr les $f \in \mathcal{C}$ sont $\mathcal{B}_a$ mesurables et suffisent à définir $\mu\mu'$.

La deuxième partie résulte de ce que $f' \supset Fy^{-1}$ équivaut à $f'(y') = f(y'y)$ et $f \supset F$, alors

$$\mu(Fy^{-1}) = \inf_{f' \supset Fy^{-1}} \mu f' = \inf_{f \supset F} \int f(y'y)\mu(dy') = \inf_{f \supset F} g_f(y)$$

avec :
$$g_f(y) = \int f(y'y)\mu(dy') \in \mathcal{C}\,;$$

d'où

$$\mu\mu'F = \inf_{f \supset F} \int g_f(y)\mu'(dy) = \int \mu(Fy^{-1})\mu'(dy)$$

car la fonction (de g_f semi-continue supérieurement et bornée) $\mu'g$ admet le passage à la limite suivant les ensembles filtrants décroissants (μ' étant régulière et $\mu'f$ tendue donc τ-continue) [3]. (4) vaut donc pour l'algèbre des $\sum_1^I (F_i - F_i')$ engendrée par les fermés et est stable pour les limites monotones donc vaut pour tout $B \in \mathcal{B}$. De plus $\mu(Fy^{-1})$ est $\mathcal{B}$-mesurable (semi-continue supérieurement), donc aussi les fonctions intégrées dans (4), (4') pour $B \in \mathcal{B}$ ou f $\mathcal{B}$-mesurable.

REMARQUES. — Que les sections de $f(y \times y') = f(yy')$ soient $\mathcal{B}$ mesurables lorsque f l'est ne nous permet pas d'affirmer que $f(y \times y')$ est $\mathcal{A}_{\mu \times \mu'}$ mesurable.

Dans le cas où X n'est pas un groupe, nous pouvons seulement affirmer, puisque $f \supset F \Rightarrow f'(y') = f(y'y) \supset Fy^{-1} \Rightarrow \mu(Fy^{-1}) \leqslant \inf_{f \supset F} g_f(y)$ que

$$\mu\mu'F = \int_{f \supset F} \inf g_f(y)\mu'(dy) \geqslant \int \mu(Fy^{-1})\mu'(dy)\,;$$

de même

$$\mu\mu'\mathcal{O} \leqslant \int \mu(\mathcal{O}y^{-1})\mu'(dy),$$

et (4) n'est assuré que pour les F de frontière $\mu\mu'$ nulle (si $F \notin \mathcal{B}_a$). Bien noter que pour des lois tendues, $g_f(y)$ est toujours de $\mathcal{C}$ avec f (cf. [*2*] ou [*7*]).

---

[3] Cf. J. NEVEU, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, proposition II-7-3, ou HENNEQUIN-TORTRAT (Masson, 1965) § 11-5 (9°-4).

2. Soit H un sous-groupe compact d'un groupe topologique X, $m = m_H$ la loi de Haar portée par H définie sur $\mathcal{B}$ par $m_H B = m_H(B \cap H)$, E l'espace quotient X/H des classes à gauche eH, $e \in E$ étant identifiée à un élément $e \in X$, de cette classe (arbitrairement fixé dans chaque classe). Si μ est K-régulière, sur $\mathcal{B}$, la formule de convolution

$$\mu m B = \int m(x^{-1}B)\mu(dx)$$

se réduit à

$$\mu m B = \int_E m(B_e)\mu(de) = \int_E m(B_e)\mu_E(de), \tag{5}$$

$B_e \in \mathcal{B}.H$ étant la e-section de B; en effet, vu l'invariance de m, on a

$$x = e \times h \Rightarrow x^{-1}B = \{y : hy \in B_e\}$$

et

$$m(x^{-1}B) = m\{h' : hh' \in B_e\} = mB_e.$$

On sait qu'à la projection μ_E de μ sur E correspond la tribu cylindrique $\mathcal{B}_E \subset \mathcal{B}$ engendrée par les ouverts cylindriques $\bigcup_{x \in \mathcal{O}} xH$, $\mathcal{O}$ ouvert de X, qui définissent la topologie quotient dans E et la tribu borélienne dans E que nous identifions avec $\mathcal{B}_E$ (son image inverse dans X, pour la projection). D'après ce qui a été vu au n° 1, $m(x^{-1}B)$ est $\mathcal{B}$ mesurable et ne dépend que de $e(x{=}eh)$ donc est $\mathcal{B}_E$ mesurable : ainsi (5) définit, quelle que soit la loi μ sur $\mathcal{B}$, une loi ν sur $\mathcal{B}$; mais nous affirmons que cette loi est m-invariante à droite : $\mu m = \mu$, seulement si μ est K-régulière, ou si X, ou ω_μ, ou des F_ε pour μ sont à bases dénombrables de voisinages :

Proposition 3. — Toute loi μK-régulière définit par convolution avec m_H une loi m_H-invariante (ou H-invariante) à droite; cette loi qu'on peut appeler H-régularisée de μ est bien définie par la loi marginale K-régulière μ_E et peut être considérée, suivant la formule (5), comme la loi produit $\mu_E \times m_H$, pour toute représentation de X comme produit $E \times H$. La condition de K-régularité (de μ) peut être remplacée, par exemple, par l'existence de fermés F_ε (avec $\mu F_\varepsilon > 1 - \varepsilon$) à bases dénombrables de voisinages.

REMARQUE. — Dans [7] nous avons étudié l'équation

$$\nu\nu' = \nu, \tag{6}$$

ν étant supposé K-régulière, et utilisé la formule (4), ainsi que le support ω_ν, comme ensemble des valeurs possibles. Pour cela, il faut ou supposer

ν'K-régulière, ou montrer que ν' est tendue (et la régulariser), mais sans utiliser (4) (cf. la proposition 6) dans [7]); il suffit pour cela d'entendre (6) au sens

$$(6') \qquad \nu f = \int \nu'(dy) \int f(xy)\nu(dx) \qquad f \in \mathcal{C}$$

Plus généralement nous devons énoncer ainsi la proposition 6 (de [7]) :

Proposition 4. — Soit $\{\mu_\alpha\}$ une famille U. T. (suivant les K_ε) de lois dans un groupe topologique X; les lois $\mu_{\alpha\alpha'}$, s'il en existe, vérifiant

$$\mu_{\alpha'} f = \int \mu_{\alpha\alpha'}(dy) \int f(xy)\mu_\alpha(dx) \qquad f \in \mathcal{C},$$

sont U. T. suivant les $K_\varepsilon^{-1}.K_\varepsilon$ (pour 2ε). Régularisant toutes ces lois, on a alors

$$\mu_\alpha \mu_{\alpha\alpha'} = \mu_{\alpha'} \qquad \text{au sens (4)}$$

Démonstration. — Soit $g \in \mathcal{C}$, à valeurs dans [0, 1] et $g \supset K^{-1}K (K = K_\varepsilon)$; posons $f(z) = \inf_{y \in K^{-1}z} g(y)$, on a $f(z) = 1$ pour tout $z \in K$ et $f(xy) \leqslant g(y)$ pour tout $x \in K$, d'où

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leqslant \mu_{\alpha'} f \\ &= \int \mu_\alpha(dx) \int f(xy)\mu_{\alpha\alpha'}(dy) \leqslant \varepsilon + \int_K \mu_\alpha(dx) f(xy)\mu_{\alpha\alpha'}(dy) \leqslant \varepsilon + \mu_{\alpha\alpha'} g. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

II. — PRINCIPE DE CONVERGENCE D'UNE CONVOLUTION DÉNOMBRABLE

Rappelons (cf. [*1*] ou [7]) qu'étant donnée une telle convolution

$$(7) \qquad \mu_1 \ldots \mu_n \ldots, \qquad \nu_n = \mu_1 \ldots \mu_n, \qquad \nu_{nn'} = \mu_{n+1} \ldots \mu_{n'}$$

vaut le théorème de 0 ou 1 de Paul Lvéy : ou $\sup_x \nu_n x(K) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, pour tout compact K, ou bien il existe des constantes a_n telles que l'ensemble $\{\nu_n a_n\}$, donc l'ensemble des $a_n^{-1}\nu_{nn'}a_{n'}$ soient U. T. Remplaçant μ_n par $a_{n-1}^{-1}\mu_n a_n$ (sauf μ_1 remplacée par $\mu_1 a_1$), nous pouvons donc supposer, dans ce deuxième cas, que la famille ν_n (ou $\nu_{nn'}$) est U. T.

Alors le principe de CV. de Kloss, partiellement démontré dans [*3*] (X étant un groupe compact), vaut également :

THÉORÈME II. — Si la famille $\{\nu_n = \mu_1 \ldots \mu_n\}$, dans X groupe topologique est U. T. suivant des K_ε métrisables (soit : à bases dénombrables de voisinages), par exemple si e a dans G une base dénombrable de voisinages, alors il existe des constantes a_n telles que la convergence suivante (en loi) ait lieu (les $\nu_n a_n$ étant également U. T. suivant des compacts K_ε métrisables) :

$$\mu_1 \ldots \mu_n a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \nu. \tag{8}$$

Remarques. — Nous avons énoncé cette proposition, en note p. 235, dans [7]. Depuis, M. Csiszár nous a communiqué une extension de (8) en ce sens : la suite a_n peut être choisie de telle sorte que, pour chaque k, les suites $\nu_{kn} a_n$ convergent. Nous indiquerons brièvement plus loin l'ingénieuse méthode de l'auteur, valable dès que e, unité de X, possède une base dénombrable de voisinages (dans [*1*], l'auteur suppose X localement compact *et* à base dénombrable de voisinages, donc polonais (métrisable, séparable, complet) et σ-compact, mais sa méthode a valeur générale. Elle repose sur la définition d' « idempotents de queue » (« tail-idempotents ») que nous retrouverons d'une autre façon, moins systématique.

Proposition 5. — Dans tout groupe topologique X, les lois limites (soit $\nu \in D$) pour la famille supposée U. T. $\{ \nu_n = \mu_1 \ldots \mu_n \}$ sont translatées les unes des autres; plus précisément, pour tout couple ν, ν' d'entre elles, il existe des sous-groupes compacts H, H′ maximaux (pouvant se réduire à $\{ e \}$), invariant à droite respectivement ν et ν' tels que l'ensemble compact

$$\{ x : \nu' = \nu x \},$$

H-invariant à gauche, est contenu dans $\{ x : x^{-1} H x = H' \}$ (4). S'il se réduit à H, la suite ν_n converge.

Démonstration. — Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux filtres (sur l'ensemble des entiers > 0) suivant lesquels $\nu_n \xrightarrow{\mathcal{F}} \nu$ et $\nu_n \xrightarrow{\mathcal{F}'} \nu'$, les ensembles $\{ n \times n' : n < n', n \in E \in \mathcal{F}, n' \in E' \in \mathcal{F}' \}$ forment un filtre, car aucun d'eux n'est vide (chaque E, E′ étant infini) donc toute intersection finie d'entre eux égale celui qui correspond à $\cap$ E et $\cap$ E′. On déduit donc, de $\nu_{n'} = \nu_n \nu_{nn'}$, si λ est limite de $\nu_{nn'}$ suivant un filtre plus fin convergeant,

$$\nu' = \nu \lambda$$

et, symétriquement

$$\nu = \nu' \lambda'.$$

(4) Noter que ce dernier ensemble est une classe à droite pour le plus grand sous-groupe $G \supset H$ (et H′) dans lequel H est normal.

On a donc $\nu = \nu.\lambda\lambda'$, $\nu' = \nu.\lambda'\lambda$; soit (supposant toutes ces lois, tendues, régularisées) $\omega_{\lambda\lambda'}$ et $\omega_{\lambda'\lambda}$ qui engendrent des sous-groupes compacts $\overline{\mathrm{H}}$ et $\overline{\mathrm{H}}'$ de X, invariant à droite respectivement ν et ν'. Mais cela implique, vu $\omega_\lambda x' \subset \overline{\mathrm{H}}$ pour tout $x' \in \omega_{\lambda'}$, $\lambda = \Lambda\, x'^{-1}$, avec $\omega_\Lambda \subset \overline{\mathrm{H}}$, donc

$$\nu' = \nu\Lambda x'^{-1} = \nu x'^{-1}$$

pour tout $x' \in \omega_{\lambda'}$, et symétriquement. L'ensemble $\{ x : \nu' = \nu x \}$ comprend donc ω_λ et $\omega_{\lambda'}^{-1}$ et si H et H' sont les sous-groupes de l'énoncé, on a $\mathrm{H}x = x\mathrm{H}'$ pour tous ces x. ■

Remarque. — M. Csiszár obtient ainsi un « idempotent de queue ». Si

$$\nu_n = \nu_{0n} \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \nu^{(0)},$$

on peut pour un filtre plus fin obtenir $\nu_{1n} \rightarrow \nu^{(1)}$ (qui entraîne $\mu_1\nu^{(1)} = \nu^{(0)}$), on peut donc, en recommençant, affirmer l'existence d'un filtre suivant lequel chaque suite $\nu_{kn} \rightarrow \nu^{(k)}$ et même le choisir tel que ces $\nu^{(k)}$ eux-mêmes CV. suivant le même filtre vers une limite ν^∞ qui, on le voit immédiatement, invarie à droite chaque $\nu^{(k)}$ et est idempotente. A chaque $\nu^{(k)}$ associons H_k, sous-groupe maximal invariant $\nu^{(k)}$; on a

(9) $\mathrm{H}_k \searrow \mathrm{H}$ et m_H loi de Haar sur H est l'idempotent $\lim\limits_{k \nearrow \infty} \nu^{(k)}$

($x \in \mathrm{H} \Rightarrow \nu^{(k)}x = \nu^{(k)} \Rightarrow \nu^\infty = \nu^\infty x$ et comme ν^∞ invarie à droite chaque $\nu^{(k)}$, $\nu^\infty = m_\mathrm{H}$). Il existe également un filtre sur l'ensemble des couples $(k \times n)$ tel que $\nu_{k,n} \rightarrow \nu^\infty$, suivant ce filtre.

Le lemme suivant est fondamental pour la suite :

Lemme 1. — Si les K_ε (une suite de $\mathrm{K}_{\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i \searrow 0$) sous-tendant $\{ \nu_n \}$ sont métrisables, l'ensemble L (compact) des lois K-régulières (sur X, $\mathcal{B}$) sous-tendues par ces mêmes K_ε, en particulier l'ensemble (compact) D des lois limites pour $\{ \nu_n \}$ est à base dénombrable de voisinages, donc, étant compact, métrisable et séparable.

On peut vérifier, directement, que chaque $\nu \in \mathrm{L}$ est à base dénombrable de voisinages, ce qui nous suffirait pour la suite, mais il est préférable de prouver que sa structure uniforme est à base dénombrable. Notons que L est séparé car $\mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow \mu_1 f \neq \mu_2 f$ pour une f de $\mathcal{C}$ et les voisinages (ouverts) $\{ \mu : | \mu f - \mu_1 f | < \varepsilon \}$, $\{ \mu : | \mu f - \mu_2 f | < \varepsilon \}$ sont disjoints pour ε assez petit.

Sur chaque K (de la suite $\mathrm{K}_{\varepsilon_i}$), il existe une algèbre dénombrable de fonctions continues (définies sur K), approchant toute fonction continue (définie sur K) uniformément et arbitrairement. D'où pour l'ensemble des K_{ε_i} relatif à L une famille dénombrable $\{f_i\}$ de fonctions $\in \mathcal{C}$, car chaque fonction continue, définie sur K, peut être prolongée en une fonction de $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire définie sur tout X et continue) : la démonstration de [0], p. 84 (théorème d'Urysohn) pour X normal et un fermé, vaut pour X C. R. et un compact.

Alors les ensembles de $L \times L$:

$$\left\{ \mu \times \mu' : |\mu f_i - \mu' f_i| < \frac{1}{2_j} \right\}, \tag{11}$$

sont des entourages de la structure uniforme de L et engendrent, par les intersections finies, une base dénombrable de tels entourages. Ceux-ci correspondent bien à la topologie de la CV. en loi dans L puisque étant $f \in \mathcal{C}$ et $\mu \in L$, il existe f_i telle que $|f - f_i| < \varepsilon$ sur K_ε, donc (supposant par exemple, ce qui n'est pas une restriction, que ces fonctions prennent leurs valeurs dans [0, 1]) :

$$|\mu f - \mu' f| \leqslant 2\varepsilon + \left| \int_{K_\varepsilon} f d\mu - f d\mu' \right|$$
$$\leqslant 4\varepsilon + \left| \int_{K_\varepsilon} f_i d\mu - f_i d\mu' \right| \leqslant 6\varepsilon + |\mu f_i - \mu' f_i|.$$

Ainsi pour μ fixé, on a bien $\mu' \to \mu$ suivant le filtre des voisinages de μ défini par la base dénombrable d'entourages qu'engendrent ceux de (11). ■

Démonstration du théorème II. — Soit $\nu_0 \in D$.

A) Soit U_i une base dénombrable, dans L, de voisinages de ν_0, et $\nu_1 = \nu_0 x$. Les $U_i x$ forment une base de voisinages de ν_1, car

$$\mu \times f = \nu f_x \qquad \text{avec} \qquad f_x(y) = f(yx),$$

et tout ensemble E' de L :

$$E' = \left\{ \nu' : |\nu' f_i - \nu x f_i| < \frac{1}{2^j} \right\} = \left\{ \nu x : |\nu f_{ix} - \nu_0 f_{ix}| < \frac{1}{2^j} \right\}$$

contient Ux, donc leurs intersections finies qui forment une base de voisinages de $\nu_0 x$ contiennent aussi un Ux. ■

Pour la suite, il suffisait d'ailleurs de savoir que chaque Ux est voisinage (ouvert)de $\nu_0 x$:

B) Considérons, dans la fermeture $\overline{D} = \{ \ldots \nu_n \ldots, D \}$ de $\{\nu_n\}$, $\overline{D} \cap \bigcup_x U_i x = \mathcal{O}_i$, la réunion étant prise sur l'ensemble des x tels que

$\nu_0 x \in D$; $\bar{D} - \mathcal{O}_i$ est un compact qui ne contient qu'un nombre fini de ν_n : $\nu_n \in$ un $U_i x$ au moins, pour tout $n \geqslant N_i$ et pour j assez grand ν_n n'appartient à aucun $U_j x$, sinon on aurait $\nu_n \in \cap\, \mathcal{O}_i = D$, donc $\nu_n = \nu_0 x_n$ et on peut exclure de tels ν_n (le choix de a_n ne posant plus de problèmes, c'est x_n). Pour chaque n, il existe donc $j(n)$, augmentant indéfiniment avec n, tel que

$$N_{j-1} \leqslant n < N_j \qquad \text{ou} \qquad \nu_n \in \mathcal{O}_{j-1} \qquad \text{et} \qquad \nu_n \notin \mathcal{O}_j,$$

il suffit de choisir $a_n =$ un des x_n^{-1} tels que $\nu_n \in U_{j-1} x_n$, pour avoir $\nu_n a_n \in \mathcal{O}_{j-1}$ soit $\nu_n a_n \to \nu$.

Remarque. — Indiquons le principe de la méthode de M. Csiszár. Soit suivant la remarque faite plus haut et (vu l'hypothèse K_ε métrisables donc l'existence des bases $U_i(\nu)$ pour chaque ν), une sous-suite n_k telle que

$$\nu_{nn_k} \to \nu^{(k)} \qquad \text{et} \qquad \nu^{(n_k)} \to m = m_H.$$

Mais, point essentiel, on peut choisir $\nu^{(n_k)}$ dans $U_1(m)$, puis n_k, tel que $\nu_{n_k\, n_{k'}} \in U_1(m)$ (voisinage ouvert de m donc de $\nu^{(n_k)}$) d'où une sous-suite que nous notons de même, telle que

$$\nu_{n_k\, n_{k+1}} \to m. \tag{12}$$

On en déduit des ouverts de X, $G_i \supset H$, tels que

$$\nu_{n_k\, n_{k+1}} G_i > 1 - \varepsilon_i, \qquad \text{tout } k > k_i. \tag{12'}$$

Mais sous l'*hypothèse que e a une base dénombrable*, on peut choisir

$$\bigcap_{1}^{\infty} G_i = H \quad (\varepsilon_i \searrow 0)$$

et définir a_n par

$$\nu_{n_k m} a_m G_i > 1 - \varepsilon_i \qquad n_{k_i} \leqslant m < n_{k_i+1}.$$

On vérifie alors (par l'absurde) que ce choix entraîne $\nu_{kn} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu^{(k)}$, pour tout k. L'idempotent de queue m_H est alors unique, pour la suite $\nu'_n = \nu_n a_n$. Si H se réduit à $\{ e \}$, le critère de Cauchy de la CV. en mesure est satisfait pour la suite ν_n.

L'auteur de [*1*] montre que, dans tous les cas, la suite $\nu_n a_n$ ainsi choisie CV. presque sûrement modulo H, c'est-à-dire en projection sur l'espace quotient X/H, ce qui résout très élégamment le problème des rapports entre CV. en loi, en probabilité et p. s. (5).

(5) Dans [*1*] le problème qui suit n'est pas abordé.

III. — ÉTUDE DE LA SUITE $\mu^n a_n$ SUPPOSÉE UNIFORMÉMENT TENDUE

1. Rappelons que pour la suite $\{\mu^n\}$ elle-même le résultat est simple : elle n'est U. T. que si μ a son support dans un groupe compact H et dans le cas présent notre problème est de trouver un tel H, de le caractériser par rapport à ω_μ de façon à expliquer pourquoi la suite $\mu^n a_n$ est U. T. Nous ne cernons la question des rapports entre ω_μ et H sous une forme assez précise qu'à travers les problèmes suivants :

Hypothèse P_1. — Nous dirons que l'espace $(X, \mathcal{B})$ satisfait à la propriété (ou hypothèse P_1) P_1, lorsqu'étant deux familles L et L' de lois U. T., telles que les $\mu' \in L'$ soient de la forme $x\mu y$, $\mu \in L$ (x, y variant avec μ), les lois adhérentes à L' soient de la forme $\lambda = a\nu b$, ν étant adhérente à (: limite pour) L.

Il est immédiat que $X \in P_1$, si X est compact, ou si le groupe X est abélien.

On peut poser l'hypothèse précédente sous une forme plus particulière d'étude plus facile et également intéressante pour la suite. Si on utilise, suivant la remarque de la page 286 et la méthode de M. Csiszár, l'existence d'une suite (si les K sont métrisables) ou d'un filtre de $\nu_{k,n} = a_k^{-1}\mu^{n-k}a_n$ CV. vers l'idempotent de queue $m_{\widehat{H}}$.

Hypothèse P'_1. — Si une suite U. T. (ou un filtre) de lois ρ_k CV. vers $m_{\widehat{H}}$ (loi de Haar sur $\widehat{H}$) et si une suite U. T. (ou un filtre) de $a_k\rho_k b_k$ CV. vers une limite ν, on a $\nu = am_H b$ (soit $m_H ab$, avec $H = a\widehat{H}a^{-1}$).

Hypothèse P_2. — Nous dirons que X satisfait à la propriété P_2 si, pour tout sous-groupe compact H, la relation $aH \subset Hb$ entraîne $aH = Hb$ ($= Ha$).

Cette propriété, comme P_1, ne pose de problème que lorsque X n'est pas abélien.

LEMME 2. — P_2 est satisfaite lorsque X est compact.

Il nous suffit d'adapter la méthode de Numakura (cf. [5], lemme 2) à l'extension suivante : X étant un demi-groupe compact et simplifiable (donc en fait un groupe) et F étant fermé, on a

(13) $$aFc \subset F \Rightarrow aFc = F.$$

Il existe des points d'accumulation u, v, pour les suites respectives a^n, c^n. On a $u\mathrm{F}v \subset \cap\, a^n\mathrm{F}c^n$, car si $x \in \mathrm{F}$, $y = uxv$, tout voisinage $\mathrm{W}(y) \supset \mathrm{U}x\mathrm{V}$, U et V étant voisinages de u, v, donc $\mathrm{W}(y)$ contient des $a^nxc^n \in a^n\mathrm{F}c^n$, donc $y \in$ tout $a^n\mathrm{F}c^n$. Inversement $\cap\, a^n\mathrm{F}c^n \subset u\mathrm{F}v$, car $y = a^nx_nb^n$, tout n, entraîne, X étant compact et F fermé, $y = uxv$. Alors $ua\mathrm{F}cv = u\mathrm{F}'v$, avec $\mathrm{F}' = a\mathrm{F}c$, soit $u\mathrm{F}'v = \bigcap_{2}^{\infty} a^n\mathrm{F}c^n = a\mathrm{F}v$ (car $a^n\mathrm{F}c^n \searrow$, vu l'hypothèse $a\mathrm{F}c \subset \mathrm{F}$), donc simplifiant à gauche par a, à droite par c, $a\mathrm{F}c = \mathrm{F}$. ■

LEMME 3. — Si une loi ν portée par le sous-groupe compact H adhère à une famille U. T. $\{ \mu^p a_p \}$, il existe des a'_n telles que les $\mu^p a'_n$ soient toutes dans H ($n = 1, 2, \dots$).

Démonstration. — A) Soit $\mathcal{O}$ un voisinage (ouvert) de H qui soit une réunion de classes à droite ($\mathcal{O}_\mathrm{U} = \bigcup_{x \in \mathrm{U}} \mathrm{H}x$, U voisinage ouvert de e); l'intersection de tous ces $\mathcal{O}_\mathrm{U}$ est H et on sait que la topologie quotient pour (X/H est séparée) (: X/H est espace de Hausdorff).

On a $\lim \mu^p a_p(\mathcal{O}) = 1$, la limite étant prise suivant le filtre $\mathcal{F}$ CV. vers ν (6), donc il existe des N_k tels que

$$\mu^p a_p(\mathcal{O}) > 1 - \frac{1}{2^k}, \qquad \text{tout } p \geqslant \mathrm{N}_k \text{ et } p \in \mathrm{E}_k \in \mathcal{F}.$$

Vu (4), qui vaut ici pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$, la non-croissance de la fonction de concentration à droite entraîne l'existence pour tout n de constantes $y_{n,k}$ telles que

$$\mu^n \{ \mathcal{O}y_{,nk} \} < 1 - \frac{1}{2^k}, \quad \text{tout } n \quad \left(y_{n,k} = a_n^{-1} \text{ pour } n \in \mathrm{E} \text{ et } n \geqslant \mathrm{N}_k\right).$$

B) Laissons maintenant n fixe, posons $y_{n,k} = x_k$ et

$$\mathrm{A}_u = \lim_{\mathrm{K} \nearrow \infty} \bigcap_{\mathrm{K}}^{\infty} \mathcal{O}_\mathrm{U} x_k \Rightarrow b'_n \mu^n \mathrm{A}_u = 1.$$

$\mathrm{A} = \bigcap_{\mathrm{U}} \mathrm{A}_\mathrm{U}$ se compose d'une (seule) classe à droite $\mathrm{H}a'$, car c'est une réunion de telles classes et si $y, y' \in \mathrm{A}$, indexant les U (par i), on a $y = h_iu_ix_k$, $y' = h'_iu'_ix_k$, pour tout $k \geqslant \mathrm{K}_i\,(y, y')$, soit

$$yy'^{-1} = h_iu_iu_i'^{-1}h_i'^{-1} \in \mathrm{HU}_i\mathrm{U}_i^{-1}\mathrm{H}.$$

---

(6) H étant compact et X C. R. $\exists f$ séparant H et $\complement\, \mathcal{O}$ ($f \in [0,1]$, $f = 0$ hors de $\mathcal{O}$, 1 sur H) et des $\mathcal{O} \supset \mathcal{O}' \supset \mathrm{H}$ ($\mathcal{O}' = \{ x : f > a \}$, a de continuité pour $\nu(\mathcal{O}')$) tels que $\nu \{ \mathrm{F}_r\mathcal{O}' \} = 0$.

Or (7) $\bigcap\limits_i \mathrm{HU}'_i\mathrm{H} = \mathrm{H}$, avec $\mathrm{U}'_i = \mathrm{U}_i\mathrm{U}_i^{-1}$, car les U'_i constituent une base de voisinages de e s'il en est ainsi pour les U_i et, H étant compact $\mathrm{UH} \supset \mathrm{HU}^*$ (chaque $x \in \mathrm{H}$ a un voisinage $x\mathrm{U}_x \subset \mathrm{UH}$, d'où un recouvrement fini de H par $\mathrm{U}_{x_1}, \ldots, \mathrm{U}_{x_\mathrm{K}}$, contenu dans UH et de même un $\mathrm{HU}^* \subset \mathrm{UH}$ avec $\mathrm{U}^* = \bigcap\limits_1^{\mathrm{K}} \mathrm{U}_{x_\mathrm{K}}$) et *a fortiori* $\mathrm{UH} \supset \mathrm{HU}^*\mathrm{H}$ donc

$$\mathrm{H} = \cap\, \mathrm{U}_i^*\mathrm{H} \supset \cap\, \mathrm{HU}_i^*\mathrm{H} \supset \cap\, \mathrm{HU}'_j\,\mathrm{H}$$

(puisque chaque U_i^* contient un U'_j).

Ainsi $yy'^{-1} \in \mathrm{H}$ et $\mathrm{H}y = \mathrm{H}y'$ ■.

C) La topologie quotient étant séparée, il existe, d'après ce qui précède, pour tout $x \notin \mathrm{H}a'$, un $\mathcal{O}_\mathrm{U}x_k$ et un voisinage de x disjoints, et ce, pour des k arbitrairement grands, donc toutes les valeurs possibles pour μ^n sont dans $\mathrm{H}a'$ et, cette loi étant tendue (et régularisée), $\mathrm{H}a'$ est bien de mesure 1. ■

Remarque. — On rencontre les difficultés suivantes pour étendre ce lemme au cas d'une famille $\{ b_p\mu^p a_p \}$ U. T. :

Supposons e à base dénombrable de voisinages, on a

$$\mu^\mathrm{N}(b_\mathrm{N}\mathcal{O}c_\mathrm{N}) > 1 - \frac{1}{2^k} \qquad \text{pour tout } \mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}(\mathrm{U}, k),\ \mathcal{O} = \mathrm{HU},$$

d'où

$$\mu^n(b_\mathrm{N}\mathcal{O}c'_{n,k}) > 1 - \frac{1}{2^k} \qquad \text{pour tout } n, \text{ et un } \mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}(\mathrm{U}, k) = \mathrm{N}_{i,k}\ ;$$

prenant $\mathrm{N}_k = \sup\limits_{i \leqslant k} \mathrm{N}_{i,k}$, on a donc

$$\mu^n(b_{\mathrm{N}_k}\mathcal{O}_i c'_{i,n,k}) > 1 - \frac{1}{2^k}, \qquad k \geqslant i,\ \mathrm{N}_k > n,$$

soit

$$\mu^n\mathrm{A}_n = 1\ ; \qquad \mathrm{A}_n = \bigcap_i \mathrm{A}_{n,i},$$

avec

$$\mathrm{A}_{n,i} = \underline{\lim}\ b_{\mathrm{N}_k}\mathcal{O}_i c'_{i,n,k} = \lim_{\mathrm{K}\nearrow\infty} \nearrow\ \mathrm{A}_{n,i,\mathrm{K}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}_{n,i,\mathrm{K}} = \bigcap_{\mathrm{K}}^{\infty} b_{\mathrm{N}_k}\mathcal{O}\, c'_{i,n,k}.$$

Chaque $b_{\mathrm{N}_k}\mathrm{HU}_i c'_{i,n,k}$ s'écrit $\mathrm{H}_k b_{\mathrm{N}_k}\mathrm{U}_i c'_{i,n,k}$, avec $\mathrm{H}_k = b_{\mathrm{N}_k}\mathrm{H}b_{\mathrm{N}_k}^{-1}$ et est un voisinage de la classe $\mathrm{H}_k c''_{i,n,k}$ pour $c''_{i,n,k} = b_{\mathrm{N}_k}c'_{i,n,k}$.

---

(7) Nous devons la démonstration suivante de ce point, valable en toute généralité, à M. Csiszár.

On en déduit que chaque A_n est une réunion de classes à droite pour

$$\underline{H} = \underline{\lim}\, H_k = \lim_{K \nearrow \infty} \nearrow \bigcap_{K}^{\infty} H_k;$$

$\underline{H}$ est un sous-groupe de X et si y, $y' \in A$ on a (comme en C) ci-dessus) pour chaque i

$$\left.\begin{array}{l} y = h_{k,i} b_{N_k} u_{k,i} c'_{i,k} \\ y' = h'_{k,i} b_{N_k} u'_{k,i} c'_{i,k} \end{array}\right\} \text{tout } k \geqslant K_i \text{ et } h_{k,i}, h'_{k,i} \in H_k,$$

soit

$$yy'^{-1} = h_{k,i} z_{k,i} h'^{-1}_{k,i} \qquad \text{avec} \qquad z_{k,i} = b_{N_k} u_{k,i} u'_{k,i} b^{-1}_{N_k} \qquad (\text{tout } k \geqslant K_i),$$

ou

$$(14) \qquad yy'^{-1} \in H_k U'_{k,i} H_k, \qquad \text{tout } i \text{ et } k \geqslant K_i \left(U'_{k,i} = b_{N_k} U_i U_i^{-1} b^{-1}_{N_k}\right).$$

(14) pose deux problèmes :

Hypothèse P_3. — H étant un sous-groupe compact, le sous-groupe $\underline{H} = \underline{\lim}\, b_k H b_k^{-1}$ est à fermeture $\underline{\underline{H}}$ compacte (sans hypothèses concernant les constantes b_k), *lim* étant ici entendu au sens ensembliste $\{ h : h \in H_k$ pour tout $k \geqslant N(h) \}$.

Mais même si $X \in P_3$, il n'est pas en général sûr que les $U'_{k,i} (k \geqslant K_i)$ forment une base de voisinages de e; si cela est, on peut espérer que (14) $\Rightarrow y\underline{\underline{H}} = y'\underline{\underline{H}}$, soit $\mu^p a'_p \subset \underline{\underline{H}}$ (pour des a'_p convenables).

THÉORÈME III-1. — Si le groupe topologique X satisfait à P'_1 et si la suite $\mu^n a_n$ est U. T., alors il existe un idempotent de queue de support $\widehat{H}$ et des a'_n telles que

$$(15) \qquad \mu^n a'_n \subset H = a\widehat{H}a^{-1}.$$

En effet, P'_1 entraîne (cf. la remarque précédant la définition de P'_1)

$$\nu = a m_{\widehat{H}} b = m_H ab,$$

pour une quelconque loi ν limite pour $\{ \mu^u a_n \}$ et le lemme 3 s'applique avec $H = a\widehat{H}a^{-1}$. ■

REMARQUE. — Si on n'utilise pas la notion d'idempotent de queue, on obtient un résultat plus faible concernant ν et la même relation (15), sous l'hypothèse plus forte P_1 :

THÉORÈME III-1′. — Si le groupe topologique X satisfait à P_1 et si la suite $\mu^n a_n$ est U. T., alors les lois limites ν pour la famille $\{\mu^n a_n\}$ sont de la forme $\nu = \sigma x$, avec $\sigma^2 = \sigma c$. Le support de σc^{-1} engendre un sous-groupe compact H et les ν ont leur support dans une classe à droite $Hx'(x' = cx)$, tandis que, σ étant H-invariante à droite, celui de σ est une réunion de classes yH contenue dans la classe Hc.

En effet, d'après P_1 les lois λ de la démonstration de la proposition 5, appliquée à $\mu^n a_n$, limites pour $\{\nu_{nm} = a_n^{-1}\mu^{m-n}a_m = a_n^{-1}.\mu^{m-n}a_{m-n}.a_{m-n}^{-1}a_m\}$, sont de la forme $b\nu_0 yb'$, donc $\nu = \nu_0\lambda = \nu_0 b\nu_0 yb' = \nu_0 z$, soit pour $\sigma = \nu_0 b$:

$$\sigma^2 = \sigma c \qquad \text{avec} \qquad b^{-1}yb'z^{-1}b = c \qquad \text{et} \qquad \nu = \sigma x(x = b^{-1}z).$$

L'application du lemme 3 donne à nouveau (15).

THÉORÈME III-2. — Si le groupe topologique X satisfait à P_1' et P_2, en particulier s'il est abélien, pour toute suite $\mu^n a_n$ U. T., il existe un compact H, plus petit sous-groupe compact satisfaisant à (16) :

$$\omega_\mu \subset Ha = aH \tag{16}$$

et on a

$$\mu^n a^{-n} \to m_H. \tag{16'}$$

Démonstration. — On a $\nu = m_H ab$ (si ν est limite pour $\mu^n a_n$), d'après P_1'; m_H est donc limite U. T. de lois $\mu^n a_n(ab)^{-1}$ donc $\mu' = \mu m_H$ est limite U. T. de lois

$$\mu^{n+1}a_{n+1}.a_n' \qquad \text{avec} \qquad a_n' = a_{n+1}^{-1}a_n(ab)^{-1}.$$

Les a_n' sont donc dans un même compact et on en déduit $\mu' = \nu' a' = m_H a''$, et puisque le support de μ' est une réunion de H-classes à gauche égale à une classe à droite Ha'', $P_2 \Rightarrow Ha'' = a''H$ et (vu $\mu' = \mu m_H)\omega_\mu \subset Ha''$.

(15) s'ensuit car $\mu^n a_n(ab)^{-1} = \mu^n a''^{-n}x_n \to m_H$ et $\mu'' a''^{-n} \subset H$; toutes les lois limites pour $\mu^n a''^{-n}$ sont donc de la forme $m_H x \subset H$, donc égales à m_H (cf. [3]). H est le plus petit, sinon $\mu^n a''^{-n}$ convergerait vers $m_{H'}$ avec H′ strictement contenu dans H. ■

REMARQUE. — Partant du théorème III-1′ (c'est-à-dire avec l'hypothèse plus forte $X \in P_1$), on déduit de P_2 $\sigma = m_H c$; mais $\nu_0 = \sigma b^{-1} = m_H cb^{-1}$ est limite de lois $\mu^n a_n$, donc m_H de lois $\mu^n a_n'$ et on aboutit aux mêmes conclusions que ci-dessus.

THÉORÈME III-3. — Dans tout espace vectoriel topologique séparé, pour toute loi tendue non dégénérée μ, on a

$$(17) \qquad \sup_x \mu^n x(\mathrm{K}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

en conséquence la fonction de concentration Q_μ ($Q_\mu(\mathrm{B}) = \sup_x \mu x(\mathrm{B})$) décroît (strictement) par convolution avec ν^n (ν tendue) pour tout $n \geqslant n_0$:

$$Q_{\mu\nu^n} \not\equiv Q_\mu, \text{ pour tout } n \geqslant n_0.$$

Sinon, en effet (cf. [7], théorème 4 et proposition 12) les $\nu^n a_n$ seraient U. T. pour des a_n convenables; or, H ne peut être que $\{ e \}$ et μ impropre vu (15). Notons que lorsqu'un tel espace X est en outre localement convexe, on a $n_0 = 1$: toute convolution (propre) fait décroître Q_μ, comme pour X = la droite réelle; sinon, en effet, toutes les « projections » de ν seraient impropres : pour tout $x^* \in \mathrm{X}$, on aurait $x^*(\nu) =$ cte (p. s.), d'où $\omega_\nu = a$, les $x^*(x)$ suffisant pour définir chaque point $x \in \mathrm{X}$.

Signalons aussi le problème de l'unicité de la fonction de concentration : Q_μ, définie sur $\mathcal{B}$, définit-elle μ à une translation près ?

2. Étude de l'hypothèse P'_1.

— Bornons-nous au cas particulier où $\rho_k = m_{\mathrm{H}}$, soit celui de ce problème :

Étudier les lois limites ν pour la famille, supposée U. T., des $m_n c_n = a_n m_{\mathrm{H}} b_n$, avec $m_n = m_{\mathrm{H}_n}$, $\mathrm{H}_n = a_n \mathrm{H} a_n^{-1}$, $c_n = a_n b_n$.

L'hypothèse P'_1 équivaut en ce cas à : $\nu = a m_{\mathrm{H}} b = m_{\mathrm{H}'} c$ avec $\mathrm{H}' = a\mathrm{H}a^{-1}$.

THÉORÈME III-4. — Dans tout espace topologique C. R., tel que chaque point admette une base dénombrable de voisinages, la CV. de la suite ν_n vers ν (ou celle suivant un filtre à base dénombrable, alors équivalente à celle d'une sous-suite) entraîne entre les supports ω_n des ν_n et ω de ν :

$$(18) \qquad \omega \subset \underline{\lim}\, \omega_n, \qquad \underline{\lim}\, \omega^n = \{ x : \exists x_n \to x, \quad \text{avec } x_n \in \omega_n \}.$$

Démonstration. — Soit en effet $z \in \omega_\nu$ et $\nu_n \overset{\mathcal{F}}{\to} \nu$, c'est-à-dire que pour tout U, voisinage de z, il existe $\mathrm{U}' \subset \mathrm{U}$, de frontière ν-nulle (prendre f continue, nulle en z, égale à 1 hors de U et $\mathrm{U}' = \{ x : f(x) < a < 1 \}$) avec $\nu_n \mathrm{U}' \overset{\mathcal{F}}{\to} \nu \mathrm{U}' > 0$, donc il existe $\mathrm{E}_\mathrm{U} \in \mathcal{F}$ tel que $\nu_n \mathrm{U} > \eta > 0$ pour tout $n \in \mathrm{E}_\mathrm{U}$: c'est-à-dire que chaque U coupe tous les ω_n pour $n \in \mathrm{E}_\mathrm{U}$. Si $\{ \mathrm{U}_i \}$ est une base dénombrable, soit $\mathrm{U}_i \searrow \{ z \}$, on peut supposer $\mathrm{E}_i \nearrow$ et choisir $x_n \in \omega_n \cap \mathrm{E}_i$ pour tous les $n \in \mathrm{E}_i$ et $n \notin \mathrm{E}_{i+1}$; on a $x_n \to z$ pour le filtre engendré par la base $\{ E_i \}$; donc $z \in \underline{\lim}\, \omega_n$ (suivant $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ est à base dénombrable). ■

LEMME 4. — Si dans le groupe topologique X, ν est une loi limite, suivant un filtre $\mathcal{F}$, pour les lois $m_{H_n} c_n$ supposées U. T., m_{H_n} étant loi de Haar sur un sous-groupe (compact) H_n, on a, désignant par H_0 le sous-groupe (compact) maximal invariant ν à gauche :

$$H_0 \supset \overline{\lim_{\mathcal{F}}}\, H_n, \tag{19}$$

$\overline{\lim_{\mathcal{F}}}$ désignant l'adhérence suivant $\mathcal{F}$ de $\{ H_n \}$, c'est-à-dire l'ensemble des h tels qu'il existe $h_n \in H_n$ avec h adhérent, suivant $\mathcal{F}$, à $\{ h_n \}$.

En effet, on a $h_{n_\alpha} \to h$ (suivant un filtre plus fin que $\mathcal{F}$), donc

$$h_{n_\alpha} . m_{H_{n_\alpha}} c_{n_\alpha} = m_{H_{n_\alpha}} c_{n_\alpha} \to h\nu = \nu \to h \in H_0. \tag{I}$$

Pour justifier (I) il faut noter que dans tout demi-groupe topologique C. R., la bicontinuité de la convolution qui suppose en général les facteurs U. T. vaut sans restriction concernant les facteurs dégénérés : ici $h_{n_\alpha} \to h$. Cela résulte de l'équicontinuité des $\int_X f(xy) m_n c_n(dy)$ en chaque point (ici h), lorsque les $m_n c_n$ sont U. T. (cf. [2] ou [7], p. 224). D'où

Proposition 4. — Si ν adhère à la famille $\{ m_n \}$ de lois de Haar supposée U. T. dans le groupe topologique métrisable X, on a, ne gardant des m_n qu'une sous-suite CV. vers ν (qui existe alors vu le lemme 1),

$$\nu = m_{H_0} \qquad \text{avec} \qquad H_0 = \lim H_n; \tag{20}$$

il faut entendre $H_0 = \lim H_n$ au sens topologique : $H_0 = \underline{\lim}\, H_n = \overline{\lim}\, H_n$ avec $(h_n \in H_n)$

$$\underline{\lim}\, H_n = \{ h : \exists h_n \to h \}, \qquad \overline{\lim}\, H_n = \{ h : \exists h_{n_i} \to h \}.$$

En effet, lorsque $c_n = e$, on a $\nu = \nu^2$, donc $\nu = m_{H_0}$ avec (vu (19) et (20))

$$\overline{\lim}\, H_n \subset H_0 \subset \underline{\lim}\, H_n. \quad ■$$

Il est à présumer que (20) suffit à la CV. des m_{H_n} vers m_{H_0} dans le cas où $H_n = a_n H a_n^{-1}$, et il resterait pour justifier P_1' à montrer que, en ce cas, $H_0 = aHa^{-1}$ (pour des m_n U. T.).

Pour le cas $c_n \neq e$, nous avons seulement :

Proposition 5. — Si dans le groupe topologique métrisable X, la suite U. T. $m_n c_n$ CV. vers ν, H_0-invariante à gauche, on a

$$H_0 \supset \overline{\lim}\, H_n \qquad \text{et} \qquad \omega_\nu = \bigcup_{X} H_0 x \subset \underline{\lim}\, (H_n c_n).$$

REMARQUE 1. — $A = \underline{\lim}\,(H_n c_n)$ est $\underline{H}$ invariant à gauche, avec $\underline{H} = \underline{\lim}\, H_n$ car $a = \lim h_n c_n$ et $h = \lim h'_n \Rightarrow ha = \lim h''_n c_n$ avec $h''_n = h'_n h_n$, donc $hA \subset A$.

REMARQUE 2. — S'il était assuré que les c_n admettent un point limite c (sous les hypothèses de la proposition 5) on en déduirait $\nu = m_{H_0} c$, avec $H_n \to H_0$ et l'hypothèse P'_1 concernant le cas de la proposition 5 (le cas $\rho_k = m$) serait ramenée au cas de la proposition 4 : démontrer que

$$\lim_n aHa_n^{-1} = aHa^{-1}.$$

REMARQUE 3. — On voit immédiatement que pour une suite $\nearrow$ de sous-groupes compacts H'_n, la limite H'_0 est la fermeture du sous-groupe $H' = \cup H'_n$, et si $m_{H_0} H' = 1$ (H_0 supposé compact), alors

(21) $$m_{H'_n} A \to m_{H'_0} A \text{ pour tout borélien A.}$$

REMARQUE 4. — De même si $H_n \searrow H_0$, $m_n H_0$ croît avec n et si la limite ($n \nearrow \infty$) est > 0, elle vaut 1 et (21) est vérifiée.

Les remarques 3 et 4 peuvent aider à étudier la CV. de m_{H_n} vers m_{H_0}, en prenant pour H'_n les $\bigcap_{n}^{\infty} a_p H a_p^{-1}$ et $H'_n \nearrow \underline{H} \subset \lim H_n = H_0$; $\underline{H}$ est donc ici à fermeture compacte (avec notations de l'hypothèse P_3).

REMARQUE 5. — Exemple de groupe non abélien X satisfaisant à P_2, P_3. Prenons pour X le groupe R_2 des rotations dans le plan : $(\gamma, \theta) = x \in X$ est la rotation de centre γ, d'angle θ; il faut ajouter les translations; chaque voisinage $U(e)$ de l'identité e comprend les translations $< \delta$ et les rotations avec $|\gamma| < M$ et $|\theta| < \varepsilon$, pour δ, M et ε assez petits.

Les seuls sous-groupes compacts H sont les parties compactes des sous-groupes abéliens $\gamma = \text{cte}$. Considérons un tel H, les rotations de cHc^{-1} ont pour centre le transformé de γ par c (et même angle que l'élément h de H); ainsi $cHc^{-1} \cap H = e$ ou H. Donc si H se compose de toutes les rotations de centre γ, H n'a pas de classe bilatère autre que lui-même et dans tous les cas $cH \subset Hc \Rightarrow cH = Hc$; $R_2 \in P_2$. De même $R_2 \in P_3$ puisqu'une $\underline{\lim}\, c_n H c_n^{-1}$ (au sens ensembliste) égale e ou H suivant qu'il existe ou non une infinité de $c_n \in H$.

ABRÉVIATIONS

C. R. Complètement régulier.
CV. Convergence, ...
Fr A Frontière de (l'ensemble) A.
U. T. Uniformément tendures.

BIBLIOGRAPHIE

[*0*] BOURBAKI, *Topologie générale*. Chapitre IX, Act. Sci. et Indust., 1045.

[*1*] CSISZAR, On infinite products of random elements and infinite convolutions of probability distributions on locally compacts groups. To appear in *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 1965.

[*2*] U. GRENANDER, Probabilities on algebraic structures, Stockholm, 1963.

[*3*] B. M. KLOSS, Probability distributions on bicompact topological groups. *Teoriya Veroyatnostei* (S. I. A. M. traduction), t. IV, nº 2, 1959, p. 237-270.

[*4*] B. M. KLOSS, Stable distributions on a class of locally compact groups. *Ibid.* t. VII, nº 3, 1962, p. 237-257.

[*5*] K. NUMAKURA, On bicompact semi-groups. *Math. J. Okayama Univ.*, 1952, p. 99-108.

[*6*] A. TORTRAT, Lois tendues, convergence en probabilité et équation $P * P' = P$. *C. R. A. S.*, 258, 1964, p. 3813-3816.

[*7*] A. TORTRAT, Lois de probabilité sur un espace topologique complètement régulier et produits infinis à termes indépendants dans un groupe topologique. *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. I, nº 3, 1965, p. 217-237.

[*8*] A. TORTRAT, Lois de probabilité dans les demi-groupes topologiques complètement simples. *C. R. A. S.*, t. 260, 1965, p. 4408-4411.

(Manuscrit reçu le 17 janvier 1966).