ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

STÉPHANE GROGNET

Entropies des flots magnétiques

Annales de l'I. H. P., section A, tome 71, nº 4 (1999), p. 395-424
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1999__71_4_395_0>

© Gauthier-Villars, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 71, n° 4, 1999, p. 395-424. *Physique théorique*

Entropies des flots magnétiques

par

Stéphane GROGNET[1]

Université de Nantes, Département de Mathématiques, U. M. R. 6629,
2, rue de la Houssinière, BP 92208, F-44322 Nantes cedex 03, France

Article received on 20 May 1998, revised 25 September 1998

ABSTRACT. – A small enough magnetic field on a compact riemannian manifold with negative curvature generates an Anosov perturbation of the geodesic flow. The topological entropy ratio is explicitly bounded. The entropy of the Liouville measure admits an Osserman–Sarnak estimate. In dimension two, for a magnetic field which is small and regular enough, and has zero mean, the flow can be parametrized by the action of the lagrangian. The topological entropy is shown to be greater than the Liouville metric entropy, unless the magnetic field is zero and the Gauss curvature is constant; this extends a theorem of Katok known for the geodesic flow. © Elsevier, Paris

RÉSUMÉ. – Un champ magnétique assez petit sur une variété riemannienne compacte à courbure strictement négative engendre une perturbation Anosov du flot géodésique. Le rapport des entropies topologiques est encadré numériquement. L'entropie de la mesure de Liouville admet une estimation à la Osserman–Sarnak. Sur une surface, pour un champ magnétique assez petit et régulier, de moyenne nulle, le flot magnétique peut être reparamétré par l'action du lagrangien. Son entropie topologique ne coïncide avec celle de la mesure de Liouville que si le champ magnétique est nul et la courbure de Gauss constante, ce qui renforce un théorème de Katok connu pour le flot géodésique. © Elsevier, Paris

[1] E-mail : grognet@math.univ-nantes.fr.

1. INTRODUCTION

Sur une variété riemannienne (M, g) orientée, compacte et sans bord, on appelle *champ magnétique* une section antisymétrique b du fibré $TM \otimes T^{\star}M$. Sa donnée est équivalente à celle d'une 2-forme β par la relation

$$\beta(\xi_1, \xi_2) = \langle b \cdot \xi_1, \xi_2 \rangle \quad \text{pour } \xi_1, \xi_2 \in TM.$$

La trajectoire d'une particule ponctuelle de charge et masse unités, soumise à la force magnétique, est décrite par une courbe c de $\mathbf{R}$ dans la variété M. On note $T = dc/dt$ le vecteur vitesse et D la dérivation covariante. La courbe vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$D_T T = b \cdot T \quad \text{ou } \mathcal{D}T = 0,$$

en notant $\mathcal{D}$ l'opérateur $D_T - b$. À une condition initiale $v = dc/dt\ (0)$ sur le fibré tangent unitaire T^1M, le *flot magnétique (paramétré par la longueur)* ψ associe $\psi_t v = dc/dt\ (t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ [16,27]. Dans le cas où le champ magnétique est nul, le flot magnétique coïncide avec le flot géodésique φ_t.

Dans tout la suite on note $\widetilde{M}$ le revêtement universel de M et on exige que le champ magnétique b soit de classe $\mathcal{C}^1$ et irrotationnel, c'est-à-dire que la 2-forme β associée soit fermée. On note λ ou λ^g la mesure de volume riemannien sur T^1M normalisée pour avoir une masse totale un. C'est la mesure de Liouville préservée par tous les flots magnétiques [16, 27].

La stabilité structurelle des flots d'Anosov assure l'hyperbolicité de certains flots magnétiques en courbure négative ; des conditions numériques explicites ont été dégagées. Si le flot magnétique est de type Anosov, nécessairement la norme L^2 du champ magnétique b est assez petite [27]. Inversement, une majoration (3) de la norme $\mathcal{C}^1$ du champ magnétique b en fonction de la courbure entraîne le caractère Anosov du flot [16]. Le comportement du flot magnétique diffère de celui du flot géodésique en deux points : les orbites ne peuvent pas être parcourues dans les deux sens, et les espaces stables ne sont jamais différentiables [28].

Si la courbure est pincée : $-k_0^2 \leqslant K \leqslant -k_1^2 < 0$, et si la norme uniforme du champ magnétique b est strictement inférieure à k_1, alors le flot magnétique est orbite-équivalent au flot géodésique et les relevées de ses orbites sur le revêtement universel sont des quasi-géodésiques [16] :

plus précisément, il existe une constante C_1 strictement positive telle que toute orbite $c(t)$ paramétrée à vitesse un vérifie :

$$C_1|t_1 - t_2| \leqslant d\big(c(t_1), c(t_2)\big) \leqslant |t_1 - t_2|. \tag{1}$$

Pour décrire le mouvement d'une particule de charge $\mu \in \mathbf{R}$, il suffit de prendre le champ μb. Gabriel et Miguel Paternain [27] ont démontré que l'application $h(g, \mu b)$ qui à la charge μ associe l'entropie topologique du flot magnétique, présente un maximum local avec concavité stricte, au voisinage de $\mu = 0$:

$$h(g, 0) > h(g, \mu b);$$

c'est l'entropie topologique $h(g, 0)$ du flot géodésique. De plus l'entropie topologique est une fonction strictement décroissante de $|\mu|$ sur l'intervalle où le flot est de type Anosov [29].

Anthony Manning [22] a construit une *entropie volumique* sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ d'une variété riemannienne (M, g) sans bord. Si la variété M est compacte, ce nombre minore l'entropie topologique du flot géodésique et lui est égal quand la courbure est négative. Sous une hypothèse sur les champs de Jacobi qui généralise la négativité de la courbure, le flot magnétique admet une entropie volumique et elle est égale à son entropie topologique (Théorème 2.1). La formule (1) permet de minorer l'entropie topologique et de retrouver une partie des résultats de G. et M. Paternain.

THÉORÈME 2.2. – *Sur une variété compacte M munie d'un champ magnétique b et d'une métrique g à courbure pincée $-k_0^2 \leqslant K \leqslant -k_1^2 < 0$ vérifiant*

$$\frac{5}{4}\|b\|_\infty^2 + \|Db\|_\infty < k_1^2,$$

l'entropie topologique du flot magnétique se situe dans l'encadrement :

$$h(g, 0)\sqrt{1 - \frac{\|b\|_\infty^2}{k_1^2}} \leqslant h(g, b) \leqslant h(g, 0).$$

La formule de Pesin [30] permet d'exprimer l'entropie $h_\lambda(g, b)$ de la mesure de Liouville du flot magnétique en fonction des espaces instables (Théorème 3.1). L'évaluation de l'entropie de la mesure de Liouville en termes géométriques est connue pour le flot géodésique φ_t : quand la courbure sectionnelle est négative (au sens large), l'entropie $h_\lambda(g, 0)$

de la mesure de Liouville pour le flot géodésique est minorée par une intégrale dépendant du tenseur de courbure, avec égalité si et seulement si la variété est localement symétrique [13,23,2]. Quand la métrique g est sans points conjugués, l'entropie $h_\lambda(g,0)$ est majorée par une intégrale dépendant du tenseur de courbure, avec égalité si et seulement si la variété est localement symétrique. Plus précisément ; dans les cas d'égalité, la métrique g vérifie le long des géodésiques la relation différentielle de parallélisme :

$$D_{\varphi_t v}\, R(\varphi_t v, \bullet)\varphi_t v = 0, \quad \text{pour } v \in T^1M,\ t \in \mathbf{R},$$

qui entraîne la locale symétrie de g [2]. La minoration de l'entropie de la mesure de Liouville est encore valable pour le flot géodésique d'une variété de Finsler compacte réversible à endomorphisme de Jacobi négatif ; en cas d'égalité la métrique est riemannienne, localement symétrique à courbure négative [12]. Le flot magnétique ne découle pas d'une métrique de Finsler réversible puisque les orbites ne peuvent être parcourues dans les deux sens. En fonction des données géométriques, l'entropie $h_\lambda(g,b)$ de la mesure de Liouville pour le flot magnétique peut être majorée grossièrement (Proposition 3.2), et minorée plus finement :

THÉORÈME 3.2. – *Sous les hypothèses du Théorème 2.2, l'entropie $h_\lambda(g,b)$ de la mesure de Liouville pour le flot magnétique satisfait :*

$$h_\lambda(g,b) \geqslant \int_{v\in T^1M} \operatorname{tr}\sqrt{-\tfrac{3}{4}(\Pi b)^2 - R(v,\bullet)v + \tfrac{1}{2}\big(D_\bullet bv + {}^{\mathrm{t}}(D_\bullet bv)\big)}\, d\lambda(v),$$

et en cas d'égalité, le champ magnétique vérifie le long de toute orbite la relation différentielle :

$$\begin{cases} \Pi\mathcal{D}b - D_\bullet b\cdot\psi_t v + {}^{\mathrm{t}}D_\bullet b\cdot\psi_t v = 0 \\ \textit{et} \\ \mathcal{D}\mathcal{P} = -\tfrac{1}{2}\Pi b\mathcal{P} + \tfrac{1}{2}\mathcal{P}\Pi b \end{cases} \qquad \textit{pour } v\in T^1M,\ t\in\mathbf{R},$$

en notant Π la projection orthogonale sur le sous-espace orthogonal à $\psi_t v$, $\mathcal{D}$ l'opérateur $D_{\psi_t v} - b$ et

$$\mathcal{P} = \tfrac{1}{2}\Pi\mathcal{D}b + \tfrac{3}{4}(\Pi b)^2 - D_\bullet b\cdot\psi_t v + R(\psi_t v,\bullet)\psi_t v.$$

Sur une variété compacte sans bord de dimension quelconque, l'entropie topologique $h(g_0,0)$ du flot géodésique issu d'une métrique g_0 à courbure constante strictement négative (une métrique hyperbolique) est égale

à l'entropie $h_\lambda(g_0, 0)$ de sa mesure de Liouville. Sur les surfaces [19,20], les deux entropies diffèrent pour toute métrique g à courbure variable, et de plus pour toute métrique hyperbolique g_0 de même volume total que g, Anatole Katok a établi (Théorème 4.2) :

$$h(g, 0) > h(g_0, 0) = h_\lambda(g_0, 0) > h_\lambda(g, 0).$$

En dimension supérieure à trois [3–7], si la variété M admet une métrique localement symétrique g_0 de courbure strictement négative, pour toute métrique g à courbure négative sur M et de même volume total, les entropies topologiques des flots géodésiques vérifient

$$h(g, 0) \geqslant h(g_0, 0)$$

avec égalité si et seulement si les métriques sont isotopes, c'est-à dire s'il existe un difféomorphisme de M homotope à l'identité qui envoie g sur g_0.

Sur une surface riemannienne (M, g) orientée, compacte et sans bord, la donnée d'un champ magnétique est équivalente à celle d'une application à valeurs scalaires κ par la relation $b = \kappa \mathcal{R}_{\pi/2}$ où $\mathcal{R}_{\pi/2}$ désigne la rotation d'angle $\pi/2$ dans les plans tangents. Sur une surface à courbure $-k^2$ constante munie d'un champ magnétique κ constant de valeur absolue stictement inférieure à k, il résulte de ce qui précède que les deux entropies coïncident avec la valeur $\sqrt{k^2 - \kappa^2}$ [27], voir [1].

On se place sur une surface riemannienne (M, g) à courbure K strictement négative, munie d'un champ magnétique κ tel que le coefficient de l'équation des champs de Jacobi $q(v) = K + \kappa^2 - \langle \nabla\kappa, \mathcal{R}_{\pi/2} v\rangle$ soit pincé : $-q_0^2 \leqslant q \leqslant -q_1^2 < 0$ (condition (13), voir [16]).

THÉORÈME 4.4. – *L'entropie $h_\lambda(g, \kappa)$ de la mesure de Liouville pour le flot magnétique satisfait* :

$$\int_{T^1M} \left(-q(v)\right)^{1/2} d\lambda(v) \leqslant h_\lambda(g, \kappa) \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{vol} M} \int_M -(K + \kappa^2)\, d\mathrm{vol}\right)^{1/2}.$$

Si l'une des inégalités est en fait une égalité, alors le champ magnétique κ et la courbure K sont constants.

Afin d'obtenir des résultats de rigidité comparables à ceux qui existent pour le flot géodésique, on suppose que le champ magnétique $\beta = \kappa \mathrm{vol}_g$ est de classe C^3 et dérive d'un *potentiel magnétique* α co-exact et de

norme uniforme strictement inférieure à un (c'est possible si la moyenne du champ magnétique est nulle et sa norme C^1 assez petite). Le lagrangien choisi reste strictement positif et le flot magnétique Φ *paramétré par l'action du lagrangien* est de contact (Proposition 4.3). Ses espaces stables sont de classe C^1. L'entropie de la mesure de Liouville $h_\lambda(g,\kappa)$ ne change pas ; l'entropie topologique $H(g,\kappa)$ dépasse celle du flot géodésique. Quand κ est nul, le potentiel α est nul et le flot Φ coïncide avec le flot géodésique φ.

THÉORÈME 4.8. – *Les entropies topologiques vérifient les encadrements :*

$$\frac{h(g,0)}{1-\|\alpha\|_\infty} \geqslant H(g,\kappa) \geqslant h(g,0) \geqslant h(g,\kappa) \geqslant h(g,0)\sqrt{1-\frac{\|\kappa\|_\infty^2}{\min_M(-K)}}.$$

L'entropie de la mesure de Liouville du flot magnétique est strictement inférieure à celle des flots géodésiques découlant des métriques de même volume total et de courbure constante (Théorème 4.9). Les estimations précédentes et le théorème de Katok entraînent :

THÉORÈME 4.10. – *L'entropie topologique $H(g,\kappa)$ du flot magnétique paramétré par l'action du lagrangien est strictement supérieure à l'entropie $h_\lambda(g,\kappa)$ de la mesure de Liouville, sauf si le champ magnétique κ est nul, et la courbure de Gauss de la métrique g, constante.*

La propriété minimisante des trajectoires du flot magnétique avec la démonstration du théorème de Katok permettent une estimation qui entraîne l'essentiel des résultats (Théorème 4.7).

Dans toute la suite, on suppose que la courbure K de la métrique g est strictement négative donc pincée : $-k_0^2 \leqslant K \leqslant -k_1^2 < 0$. On note π toutes les fibrations construites naturellement sur la variété M ou son revêtement universel $\widetilde{M}$ à partir du fibré tangent, et i le produit intérieur des formes différentielles par les champs de vecteurs. Sauf précision en dimension deux, on suppose le champ magnétique assez petit pour qu'existe la constante $q_1 > 0$ définie par la relation :

$$q_1^2 = \min\left(-K - \left(\frac{5}{4}\|b\|^2 + \|Db\|\right)\circ\pi\right), \tag{2}$$

où le minimum est pris sur le fibré des 2-plans tangents à M. Cette condition est vérifiée en particulier si

$$\frac{5}{4}\|b\|_\infty^2 + \|Db\|_\infty < k_1^2. \tag{3}$$

Sous l'hypothèse précédente, le flot est de type Anosov, deux points du revêtement universel sont joints dans un ordre donné par une unique trajectoire du champ magnétique, et l'on dispose de formules de comparaison des champs de Jacobi qui rendent les calculs plus aisés qu'avec le seul caractère Anosov [16].

2. ENTROPIE TOPOLOGIQUE

Sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ de la variété M, on note d la distance riemannienne, $V(x,r)$ le volume riemannien de la boule fermée $B(x,r)$ de centre x et de rayon r et $\widehat{V}(x,r)$ le volume riemannien de l'image $\widehat{B}(x,r)$ de la boule fermée de centre 0_x et de rayon r par l'exponentielle du flot magnétique :

$$V(x,r) = \operatorname{vol} B(x,r), \quad B(x,r) = \{y \in \widetilde{M} \mid d(x,y) \leqslant r\},$$
$$\widehat{V}(x,r) = \operatorname{vol} \widehat{B}(x,r), \quad \widehat{B}(x,r) = \{\pi\psi_t v \in \widetilde{M} \mid v \in T_x^1\widetilde{M},\ 0 \leqslant t \leqslant r\}.$$

Pour tous $x \in \widetilde{M}$ et r réel positif, on a les inégalités :

$$\widehat{B}(x,r) \subset B(x,r) \quad \text{et} \quad \widehat{V}(x,r) \leqslant V(x,r).$$

La *quasi-inégalité triangulaire* présentée dans le lemme suivant remplace l'inégalité triangulaire utilisée dans la définition l'entropie volumique du flot géodésique.

LEMME 2.1. – *Soit x, y, z un triangle du revêtement universel $\widetilde{M}$ tel que (yz) soit une géodésique et (yx), (zx) soient deux trajectoires du flot magnétique. Les longueurs respectives des segments $[yx]$ et $[zx]$ étant notées r et r', on a la relation :*

$$|r - r'| \leqslant C \cdot d(y,z) \quad \textit{avec } C = \sqrt{1 + \frac{\|b\|_\infty^2}{q_1^2}}$$

et q_1 défini dans la formule (2). De plus, tout point p du segment $[yx]$ vérifie $d(p,[zx]) \leqslant C \cdot d(y,z)$.

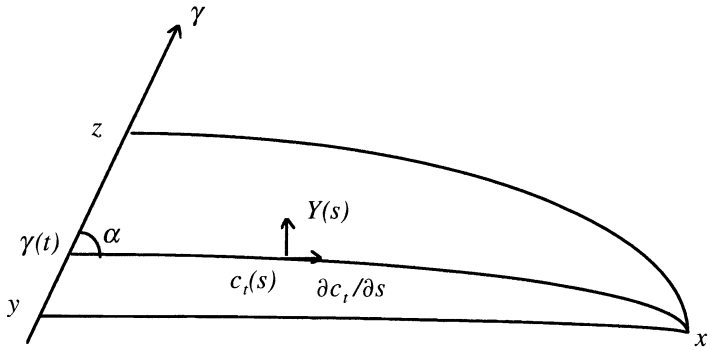

FIG. 1.

Démonstration. – Soient :

(i) $\gamma(t)$ la géodésique (yz) paramétrée à vitesse un, telle que $\gamma(0) = y$ et $\gamma(d(y,z)) = z$,

(ii) $c_t(s)$ la variation d'orbites du flot magnétique paramétrées à vitesse un, passant par x au temps 0 et par $\gamma(t)$ au temps $-r(t)$,

(iii) $\theta(t)$ l'angle entre $d\gamma/dt$ et c_t au point $\gamma(t)$,

(iv) $J_t(s) = \partial c_t/\partial t(s) = x_t(s)\partial c_t/\partial s(s) + Y(s)$ le champ de Jacobi de la variation c_t avec $Y \perp \partial c_t/\partial s(s)$.

Pour simplifier on peut supposer l'application r positive. On noteé la dérivation par rapport à s. Dériver la relation $\gamma(t) = c_t(-r(t))$ fournit :

$$\frac{dr}{dt}(t) = x_t\big(-r(t)\big) - \cos\theta(t), \qquad \|Y(-r(t))\| = \sin\theta(t).$$

L'équation des champs de Jacobi du flot magnétique ([16], équations (8)–(10)) entraîne

$$x_t(s) = \int_0^s \left\langle Y, b \cdot \frac{\partial c_t}{\partial s} \right\rangle, \qquad \big(\|Y\|^2\big)'' \geqslant 2q_1\|Y\|^2,$$

et donc

$$\frac{\|Y(\sigma)\|}{\|Y(\tau)\|} \leqslant \mathrm{e}^{q_1(\tau-\sigma)} \quad \text{si } 0 \geqslant \sigma \geqslant \tau;$$

d'où

$$\big|x_t(s)\big| \leqslant \frac{\|b\|_\infty}{q_1}\|Y(s)\| \quad \text{pour } s \leqslant 0.$$

On obtient $|dr/dt| \leqslant \sqrt{1 + \|b\|_\infty^2/q_1^2}$. La dernière assertion du lemme découle des inégalités :

$$d(c_0(s), [zx]) \leqslant \int_0^{d(y,z)} \left\| \frac{\partial c_t}{\partial t}(s) \right\| dt \leqslant d(y,z)\sqrt{1 + \frac{\|b\|_\infty^2}{q_1^2}}. \quad \square$$

Le Lemme 2.1 valide la démonstration d'Anthony Manning [22] en présence de champ magnétique :

THÉORÈME 2.1. – *Pour $x \in \widetilde{M}$, le quotient* $\log \widehat{V}(x,r)/r$ *admet une limite quand le rayon r tend vers l'infini ; cette limite est indépendante du centre x considéré et on l'appelle* entropie volumique *du flot magnétique ψ. Elle est égale à son entropie topologique $h(g,b)$.*

Pour tout point x de $\widetilde{M}$ et tout réel positif r, on a :

$$B(x, rC_1) \subset \widehat{B}(x,r) \subset B(x,r). \tag{4}$$

La constante C_1 de l'équation (1) est minorée par le cosinus d'un angle qui ne dépasse pas $2\arctan(k_1/\|b\|_\infty - \sqrt{k_1^2/\|b\|_\infty^2 - 1})$ [16], soit $C_1 \geqslant \sqrt{1 - \|b\|_\infty^2/k_1^2}$. Ainsi, l'équation (4) entraîne le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. – *L'entropie topologique du flot magnétique se situe dans l'encadrement*

$$h(g,0)\sqrt{1 - \frac{\|b\|_\infty^2}{k_1^2}} \leqslant h(g,b) \leqslant h(g,0).$$

Remarque. – On retrouve le fait que l'entropie associée au champ magnétique μb présente un point critique maximal en $\mu = 0$ [27].

3. ENTROPIE DE LA MESURE DE LIOUVILLE

3.1. Champs de Jacobi et équations de Ricatti

Les outils décrits brièvement ici sont introduits dans [16]. Pour un vecteur $v \in T^1M$ on note Π la projection orthogonale sur l'orthogonal de $\psi_t v$ dans TM, $c(t)$ la courbe $\pi\psi_t v$, et $\mathcal{D}$ l'opérateur $D_{\psi_t v} - b(c(t))$ sur les champs de tenseurs définis le long de c. Soit $(E_0(0), \ldots, E_{n-1}(0))$ une base orthonormée directe de l'espace vectoriel tangent $T_{\pi(v)}M$

vérifiant $E_0(0) = v$. On considère l'équation différentielle ordinaire : $\mathcal{D}V = 0$, pour des champs de vecteurs $V(t)$ définis le long de l'orbite de v. Pour tout i, il existe une unique solution $V(t) = E_i(t)$ telle que $V(0) = E_i(0)$. Le champ $(E_0(t), \ldots, E_{n-1}(t))$ est un champ de bases orthonormées le long de la courbe c.

Un champ de jacobi J le long de l'orbite de v :

$$J = xE_0 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i E_i$$

vérifie, puisque les courbes solutions sont paramétrées à vitesse un :

$$x' + \langle b \cdot J, \psi_t v \rangle = 0.$$

La projection Π est invariante par $\mathcal{D}$, et les champs d'endomorphismes de l'espace orthogonal à l'orbite de v peuvent être identifiés à des applications de $\mathbf{R}$ dans l'espace de matrices carrées $\mathcal{M}(\mathbf{R}, n-1)$. Le déterminant, la trace, la transposition, les parties symétrique et antisymétrique se définissent naturellement. Sous l'hypothèse $q_1 > 0$ où q_1 est défini dans la formule (2), le flot magnétique possède le caractère Anosov [16]. On note $E^U(v)$ et $E^S(v)$ les espaces respectivement instable et stable en un élément $v \in T^1M$. On note $Y_+(v,t)$, $Y_-(v,t)$ les résolvantes des composantes orthogonales des champs de Jacobi respectivement instable et stable le long de l'orbite de v. Ce sont les solutions de l'équation :

$$\mathcal{D}^2 Y + A\mathcal{D}Y + BY = 0,$$

avec

$$\begin{cases} A = \Pi b, \\ BY = -D_Y b\psi_t v + \Pi D_{\psi_t v} bY + \langle Y, b\psi_t v \rangle b\psi_t v + R(\psi_t v, Y)\psi_t v, \end{cases} \tag{5}$$

qui vérifient

$$Y_+(v,0) = \mathrm{Id}, \quad Y_+(v,-\infty) = 0, \quad Y_-(v,0) = \mathrm{Id}, \quad Y_-(v,+\infty) = 0.$$

Sur l'espace vectoriel des matrices symétriques on utilise l'ordre issu des formes quadratiques. L'opérateur $\mathcal{D}$ est éventuellement noté avec une apostrophe pour alléger l'écriture. On appelle G le champ de matrices

spéciales orthogonales solution de l'équation différentielle

$$\mathcal{D}G = -\frac{1}{2}A \cdot G \quad \text{avec } G(v,0) = \mathrm{Id} \tag{6}$$

où la matrice antisymétrique A est définie dans la formule (5). Si la matrice Y est une résolvante de la composante orthogonale des champs de Jacobi, le champ de matrices obtenu par la transformation d'Abel $Z = G^{-1}Y$ est solution de l'équation de Sturm–Liouville :

$$Z'' + \mathcal{Q} \cdot Z = 0 \quad \text{avec } \mathcal{Q} = G^{-1}\left(-\tfrac{1}{2}\mathcal{D}A - \tfrac{1}{4}A^2 + B\right)G, \tag{7}$$

où les matrices A et B sont définies dans la formule (5). Si l'on suppose que la résolvante Y est à valeurs dans le groupe linéaire, comme le sont Y_+ et Y_-, on peut considérer le champ $V = Z' \cdot Z^{-1}$. Il est solution de l'équation de Ricatti :

$$V' + V^2 + \mathcal{Q} = 0.$$

Les parties symétrique $\mathcal{S}$ et antisymétrique $\mathcal{A}$ de la solution V de l'équation de Ricatti vérifient l'équation :

$$\begin{cases} \mathcal{S}' + \mathcal{S}^2 + \mathcal{A}^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{Q} + {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q}) = 0, \\ \mathcal{A}' + \mathcal{S}\mathcal{A} + \mathcal{A}\mathcal{S} + \frac{1}{2}(\mathcal{Q} - {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q}) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

La relation de cocycle $V_+(v,t) = V_+(\psi_t v, 0)$ autorise la notation $V_+(v)$ à la place de $V_+(v,0)$.

3.2. Estimation de l'entropie de la mesure de Liouville

La mesure de Liouville normalisée sur le fibré unitaire tangent T^1M est notée λ.

PROPOSITION 3.1. – *La somme des exposants de Lyapounoff positifs (avec multiplicité) de λ-presque tout élément v de T^1M vaut :*

$$\chi_+(v) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log \det Y_+(v,t).$$

Démonstration. – Pour λ-presque tout $v \in T^1M$ et pour $\zeta \in E^U(v)$, grâce à l'isomorphisme entre champs de Jacobi et TT^1M ([16], ou [14] 3.45 p. 121 pour le flot géodésique), l'exposant de Lyapounoff (positif)

associé à ζ est :

$$\chi_+(v,\zeta) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2t} \log\left(\|J_+(v,t)\|^2 + \|\mathcal{D}J_+(v,t)\|^2\right)$$

où J_+ est le champ de Jacobi instable de condition initiale $J_+(0)$ égale à la composante horizontale ξ de ζ. Le champ de Jacobi s'écrit

$$J_+ = x_+E_0 + Y_+\Pi\xi \quad \text{avec } x_+(t) = \int_{-\infty}^{t} \langle bY_+\Pi\xi, E_0\rangle.$$

Il vient :

$$\frac{x_+(t)^2 + x_+'(t)^2}{\|Y_+\Pi\xi\|^2} \leqslant \|b\|_\infty\left(1 + \frac{1}{q_1^2}\right),$$

et comme $\mathcal{D}Y_+ \cdot Y_+^{-1}$ est borné ([16], Section 6.2, notamment les Lemmes 6.3 et 6.4), il existe une constante C telle que :

$$\|Y_+\Pi\xi\|^2 \leqslant \|J_+(v,t)\|^2 + \|\mathcal{D}J_+(v,t)\|^2 \leqslant C\ \|Y_+\Pi\xi\|^2.$$

On a donc

$$\chi_+(v,\zeta) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\|Y_+\Pi\xi\|.$$

Le théorème d'Oseledets [30] permet de conclure. □

Puisque la mesure de Liouville est absolument continue par rapport à Lebesgue, on peut appliquer la formule de Pesin [2,13,23,30] :

$$h_\lambda(g,b) = \int_{T^1M} \chi_+(v)\, d\lambda(v).$$

La relation

$$\log\det Y_+(v,t) = \log\det\left(G(v,t)^{-1}Y_+(v,t)\right) = \int_0^t \operatorname{tr} V_+(\psi_s v)\, ds$$

avec le théorème ergodique de Birkhoff entraîne le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. – *L'entropie $h_\lambda(g,b)$ de la mesure de Liouville pour le flot magnétique vaut* :

$$h_\lambda(g,b) = \int_{T^1M} \operatorname{tr} V_+(v)\, d\lambda(v).$$

Cette formule permet une majoration grossière et une minoration plus fine de l'entropie de la mesure de Liouville en fonction de données géométriques. Le champ de matrices de Ricatti V_+ se décompose en partie symétrique $\mathcal{A}_+$ et antisymétrique $\mathcal{S}_+$ selon les notations de la Section 3.1. On note $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ le produit scalaire sur l'espace de Hilbert des champs L^2 sur T^1M à valeurs dans l'espace des applications linéaires sur l'espace horizontal orthogonal : étant donnés W_1, W_2 tels que $W_1(v)$ et $W_2(v) \in \mathcal{L}(v^\perp)$ pour tout $v \in T^1M$, il vaut

$$\langle\langle W_1, W_2\rangle\rangle = \int_{T^1M} \operatorname{tr}\big({}^{\mathrm{t}}W_1 \cdot W_2\big)\, d\lambda.$$

Le produit scalaire

$$\langle\langle \mathrm{Id}, V_+\rangle\rangle = \langle\langle \mathrm{Id}, \mathcal{S}_+\rangle\rangle = h_\lambda(g,b) \tag{9}$$

permet une première estimation.

PROPOSITION 3.2. – *L'entropie $h_\lambda(g,b)$ de la mesure de Liouville pour le flot magnétique satisfait* :

$$h_\lambda(g,b) \leqslant (n-1)\sqrt{\left(\frac{1}{4q_1}\|\mathcal{Q} - {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q}\|_\infty\right)^2 + \frac{1}{n-1}\int_{T^1M} -\operatorname{tr}\mathcal{Q}\, d\lambda},$$

où la constante q_1 est définie dans la formule (2).

Démonstration. – Si l'on note X le champ générateur du flot magnétique ψ, l'application

$$\operatorname{tr}\mathcal{S}'_+ = L_X \operatorname{tr}\mathcal{S}_+$$

a une intégrale nulle sur T^1M. L'inégalité de Cauchy–Schwarz appliquée à l'équation (9) entraîne :

$$h_\lambda(g,b)^2 \leqslant (n-1)\langle\langle \mathcal{S}_+, \mathcal{S}_+\rangle\rangle = (n-1)\int_{T^1M} \operatorname{tr}\big(-\mathcal{Q} - \mathcal{A}_+^2\big)\, d\lambda$$

d'après la formule (8). Le Lemme 6.3 de [16] permet de contrôler la norme linéaire de la matrice $\mathcal{A}_+$:

$$\|\mathcal{A}_+\| \leqslant \frac{1}{2q_1}\left\|\frac{1}{2}(\mathcal{Q} - {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q})\right\|_\infty .$$

Or on a

$$\left|\mathrm{tr}(\mathcal{A}_+^2)\right| \leqslant (n-1)\|\mathcal{A}_+\|^2,$$

d'où le résultat. □

Pour la minoration de l'entropie on utilise l'opération $\sqrt{\ }$ qui à un opérateur symétrique défini positif associe son unique racine carrée symétrique définie positive. L'opérateur $\mathcal{D}$, le projecteur orthogonal Π sur l'orthogonal de $\psi_t v$, la transposition sont définis dans la Section 3.1.

THÉORÈME 3.2. – *Si la constante $q_1 > 0$ définie dans la formule* (2) *existe, l'entropie $h_\lambda(g,b)$ de la mesure de Liouville pour le flot magnétique satisfait* :

$$h_\lambda(g,b) \geqslant \int_{T^1M} \mathrm{tr}\sqrt{-\tfrac{1}{2}(\mathcal{Q} + {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q})}\, d\lambda(v),$$

ce qui peut être aussi noté

$$h_\lambda(g,b) \geqslant \int_{T^1M} \mathrm{tr}\sqrt{-\tfrac{3}{4}(\Pi b)^2 - R(v,\bullet)v + \tfrac{1}{2}\big(D_\bullet bv + {}^{\mathrm{t}}(D_\bullet bv)\big)}\, d\lambda(v),$$

et en cas d'égalité, le champ magnétique vérifie le long de toute orbite la relation différentielle :

$$\mathcal{Q} = {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q} \quad \textit{et} \quad \mathcal{D}\mathcal{Q} = 0,$$

qui peut être aussi notée

$$\begin{cases} \Pi\mathcal{D}b - D_\bullet b\psi_t v + {}^{\mathrm{t}}D_\bullet b\psi_t v = 0 \\ \textit{et} \\ \mathcal{D}\mathcal{P} = -\tfrac{1}{2}\Pi b\mathcal{P} + \tfrac{1}{2}\mathcal{P}\Pi b \end{cases} \qquad \textit{pour } v \in T^1M,\ t \in \mathbf{R},$$

avec $\mathcal{P} = \frac{1}{2}\Pi\mathcal{D}b + \frac{3}{4}(\Pi b)^2 - D_\bullet b\psi_t v + R(\psi_t v,\bullet)\psi_t v$.

Démonstration. – Le Lemme 6.4 de [16] implique que le spectre de $\mathcal{S}_+$ est contenu dans un segment inclus dans $]0, +\infty[$. Cette matrice est donc toujours inversible. L'application

$$\operatorname{tr}(\mathcal{S}'_+ \cdot \mathcal{S}_+{}^{-1}) = L_X \log\det \mathcal{S}_+$$

a une intégrale nulle sur T^1M. La formule (8) entraîne

$$\mathcal{S}'_+\mathcal{S}_+{}^{-1} + \mathcal{S}_+ + \mathcal{A}_+^2\mathcal{S}_+{}^{-1} + \tfrac{1}{2}(\mathcal{Q} + {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q})\mathcal{S}_+{}^{-1} = 0, \tag{10}$$

et après intégration il vient

$$h_\lambda(g,b) + \int_{T^1M} \operatorname{tr}(\mathcal{A}_+^2\mathcal{S}_+{}^{-1} + \tfrac{1}{2}(\mathcal{Q} + {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q})\mathcal{S}_+{}^{-1})\, d\lambda(v) = 0.$$

On majore comme dans [23] la quantité

$$\int_{T^1M} \operatorname{tr}\sqrt{-\tfrac{1}{2}(\mathcal{Q} + {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q})}\, d\lambda(v) = \left\langle\left\langle \sqrt{\mathcal{S}_+}\,,\ \sqrt{-\tfrac{1}{2}(\mathcal{Q} + {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q})\mathcal{S}_+{}^{-1}}\right\rangle\right\rangle$$

grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz par la racine carrée de :

$$h_\lambda(g,b) \int_{T^1M} \operatorname{tr}\left\{\sqrt[{}^{\mathrm{t}}]{-\tfrac{1}{2}(\mathcal{Q} + {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q})\mathcal{S}_+{}^{-1}}\sqrt{-\tfrac{1}{2}(\mathcal{Q} + {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q})\mathcal{S}_+{}^{-1}}\right\} d\lambda(v),$$

ce qui donne après permutation circulaire

$$\begin{aligned}&\left(\int_{T^1M} \operatorname{tr}\sqrt{-\tfrac{1}{2}(\mathcal{Q} + {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q})}\, d\lambda(v)\right)^2\\ &\qquad \leqslant h_\lambda(g,b) \int_{T^1M} \operatorname{tr}\left(-\tfrac{1}{2}(\mathcal{Q} + {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q})\mathcal{S}_+{}^{-1}\right) d\lambda(v),\end{aligned}$$

puis en utilisant l'équation (10)

$$\begin{aligned}&\left(\int_{T^1M} \operatorname{tr}\sqrt{-\tfrac{1}{2}(\mathcal{Q} + {}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q})}\, d\lambda(v)\right)^2\\ &\qquad \leqslant h_\lambda(g,b)\left(h_\lambda(g,b) + \int_{T^1M} \operatorname{tr}(\mathcal{A}_+^2\mathcal{S}_+{}^{-1})\, d\lambda(v)\right),\end{aligned}$$

et avec permutation circulaire

$$\left(\int_{T^1M} \operatorname{tr}\sqrt{-\tfrac{1}{2}(\mathcal{Q}+{}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q})}\,d\lambda(v)\right)^2$$
$$\leqslant h_\lambda(g,b)\left(h_\lambda(g,b)+\int_{T^1M}\operatorname{tr}\left(\sqrt{\mathcal{S}_+^{-1}}\mathcal{A}_+^2\sqrt{\mathcal{S}_+^{-1}}\right)d\lambda(v)\right).$$

La première partie du théorème découle des propriétés des matrices.

Remarque. – Si A est une matrice antisymétrique, et S une matrice symétrique définie positive, alors la matrice

$$\sqrt{S}^{-1}\cdot A^2\cdot\sqrt{S}^{-1}$$

est symétrique négative, et sa trace est nulle si et seulement si A est nulle.

En cas d'égalité, le champ $\mathcal{A}_+$ est identiquement nul. D'après l'équation (8) ceci entraîne la symétrie des matrices $\mathcal{Q}$. D'autre part le cas d'égalité de Cauchy–Schwarz assure l'existence d'un réel a tel que

$$\sqrt{\mathcal{S}_+}=a\sqrt{-\mathcal{Q}\cdot\mathcal{S}_+^{-1}}.$$

Sachant que l'intégrale de $\mathcal{S}'_+$ sur T^1M est nulle, l'équation (8) force la valeur $a=1$. Le champ $\mathcal{S}'_+$ est donc identiquement nul. En résumé, le champ $\mathcal{Q}$ vérifie les équations :

$$\mathcal{Q}={}^{\mathrm{t}}\mathcal{Q}\quad\text{et}\quad\mathcal{D}\mathcal{Q}=0.$$

La valeur de $\mathcal{Q}$ dans l'équation (7) permet d'exprimer la condition directement en fonction des premiers jets de la métrique et du champ magnétique :

$$\mathcal{D}(G\mathcal{Q}G^{-1})=-\tfrac{1}{2}A(G\mathcal{Q}G^{-1})+0+(G\mathcal{Q}G^{-1})\tfrac{1}{2}A$$

grâce à la définition (6) de l'isométrie G. L'injection des équations (5) et (7) donne la forme finale, sachant que :

$$\mathcal{D}\Pi=\Pi\mathcal{D},\quad D_{\psi_t v}b=\mathcal{D}b+b^2\quad\text{et}\quad(\Pi b)^2=\Pi b^2+\langle\bullet,b\psi_t v\rangle b\psi_t v$$

donnent

$$B(v,t)=-D_\bullet b\psi_t v+\Pi\mathcal{D}b+(\Pi b)^2+R(\psi_t v,\bullet)\psi_t v,$$

et

$$\mathcal{P} = -\tfrac{1}{2}\mathcal{D}A - \tfrac{1}{4}A^2 + B = \tfrac{1}{2}\Pi\mathcal{D}b + \tfrac{3}{4}(\Pi b)^2 - D_\bullet b\psi_t v + R(\psi_t v, \bullet)\psi_t v.$$

□

4. LES SURFACES

Des comparaisons d'entropies globales et infinitésimales sur des flots de contact et des flots géodésiques finslériens ont été obtenus par Jeffrey Boland en dimension quelconque [9]. Quand la variété compacte M est une surface orientée, diverses estimations peuvent être approfondies.

4.1. Données riemanniennes

Dans toute la suite, la surface compacte M, orientée, sans bord, est supposée de caractéristique d'Euler strictement négative et munie d'une métrique riemannienne lisse g. On note vol_g ou vol le volume riemannien sur M (ou son revêtement universel $\widetilde{M}$), $\mathcal{R}_{\pi/2}$ la rotation d'angle $\pi/2$ dans les fibres du fibré vectoriel tangent, $\kappa \in \mathcal{C}^3(M, \mathbf{R})$ le champ magnétique, avec $\beta = \kappa \cdot \mathrm{vol}$ et $b = \kappa \cdot \mathcal{R}_{\pi/2}$. En vertu du théorème de Gauss–Bonnet, toute métrique à courbure constante sur M est de type hyperbolique.

THÉORÈME 4.1 (Équivalence conforme [20]). – *Il existe une unique application lisse ρ de M dans $]0, +\infty[$ telle que la métrique riemannienne $g_0 = \rho g$ soit de courbure strictement négative constante et de même volume total que la métrique g.*

On définit le *coefficient de conformité*

$$\rho_g = \frac{1}{\mathrm{vol}_g M} \int_M \rho^{\frac{1}{2}}\, d\mathrm{vol}_g = \frac{1}{\mathrm{vol}_{g_0} M} \int_M \rho^{-\frac{1}{2}}\, d\mathrm{vol}_{g_0}.$$

Ce coefficient est strictement inférieur à un si et seulement si la courbure de g n'est pas constante, et vaut un si et seulement si les deux métriques sont égales (d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz).

L'entropie topologique des métriques à courbure constante coïncide avec l'entropie de leur mesure de Liouville. Le théorème d'Anatole Katok que l'on se propose d'étendre aux flots magnétiques affirme que cette propriété caractérise les métriques à courbure constante.

THÉORÈME 4.2 ([20]). – *Les entropies topologiques des deux flots géodésiques vérifient l'inégalité :*

$$h(g,0) \geqslant \frac{h(g_0,0)}{\rho_g},$$

et les deux entropies sont égales si et seulement si les deux métriques sont égales.

Si la métrique g est sans points focaux, alors les entropies des mesures de Liouville des deux flots vérifient :

$$h_\lambda(g_0,0) = h(g_0,0) \geqslant \frac{h_\lambda(g,0)}{\rho_g},$$

et les deux entropies sont égales si et seulement si les deux métriques sont égales.

L'inégalité

$$h(g,0) \geqslant h_\lambda(g,0)$$

est stricte sauf si $g = g_0$.

Étant données deux métriques riemanniennes g_1, g_2 sur la surface M on définit

$$[g_1 : g_2] = \int_{v \in T^1_{g_1} M} \|v\|_{g_2} \, d\lambda^{g_1}(v).$$

On a l'identité [19,20] :

$$[g : g_0] = [g_0 : g] = \rho_g.$$

4.2. Choix d'un potentiel magnétique

Sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ de la surface M, la forme $\beta = \kappa \mathrm{vol}$ est exacte parce que fermée. La compacité de la surface M permet de borner l'éventuel potentiel. Sur la surface M, la 2-forme $\beta = \kappa \mathrm{vol}$ est exacte si et seulement si $\int_M \beta = 0$ [15]. Le lagrangien $l(v) = \|v\| - \alpha(v)$ est strictement positif quand la norme uniforme de α est strictement inférieure à un. Celle-ci peut être contrôlée en fonction de la norme C^1 de κ.

Dans toute la suite, la forme champ magnétique $\beta = \kappa \mathrm{vol}$ sur la surface compacte M est supposée exacte. On cherche un potentiel magnétique

particulier α, dont la norme uniforme soit contrôlée par la norme $\mathcal{C}^1$ du champ magnétique. La divergence ou codifférentielle, adjoint de la différentielle pour le produit scalaire L^2 des formes différentielles, est notée δ. On rappelle le théorème fondamental de décomposition ([14] p. 193, [31] p. 223) :

THÉORÈME 4.3 (Hodge). – *L'espace $\Omega(M)$ des formes différentielles admet la décomposition orthogonale* :

$$\Omega(M) = \operatorname{Im} d \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} \delta \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} \Delta .$$

La forme champ magnétique β admet une unique primitive coexacte α ; c'est celle de norme L^2 minimale. On peut estimer sa norme uniforme quand le champ magnétique est de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $\gamma = f \cdot \mathrm{vol}$ une 2-forme dont la divergence vaut α. Son laplacien est égal à β. Comme la forme volume est parallèle, ceci équivaut à $\Delta f = \kappa$. La théorie des opérateurs différentiels elliptiques [21,31] offre le résultat suivant :

PROPOSITION 4.1. – *Il existe pour tout réel s une unique solution f de l'équation $\Delta f = \kappa$ dans l'espace de Sobolev $H^s(M)$, et il existe une constante strictement positive A telle que*

$$\|f\|_{H^s} \leqslant A \cdot \|\kappa\|_{H^{s-2}}.$$

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ si $s > 2$ et il existe une constante strictement positive B telle que :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} \leqslant B \cdot \|f\|_{H^s}.$$

Pour $s \leqslant 3$ il existe une constante strictement positive C_1 telle que :

$$\|\kappa\|_{H^{s-2}} \leqslant C_1 \cdot \|\kappa\|_{\mathcal{C}^1}.$$

En résumé il existe une unique forme différentielle α primitive coexacte du champ magnétique $\beta = \kappa \mathrm{vol}$ et il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\alpha\|_{\mathcal{C}^0} \leqslant C \cdot \|\kappa\|_{\mathcal{C}^1}. \tag{11}$$

Un théorème de régularité [31, Théorème 6.5, p. 223] précise que si la fonction κ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors le potentiel α aussi.

Le potentiel co-exact α s'annule quand le champ magnétique b s'annule. Un choix de potentiel α exact mais pas nul (donc pas co-exact) modifierait l'entropie topologique H définie plus loin ; dans ce cas l'objet d'étude serait le potentiel magnétique et non plus le champ magnétique.

4.3. Paramétrage du flot magnétique par l'action du lagrangien

Dans toute la suite, le champ magnétique κ est supposé de classe $\mathcal{C}^3$ (pour la variation seconde du lagrangien) et sa norme $\mathcal{C}^1$ assez petite (en utilisant la formule (11)) pour que la norme uniforme du potentiel co-exact α soit strictement inférieure à un. Le lagrangien homogène reste strictement positif sur les vecteurs non nuls. Les notations pour le changement de paramétrage du flot sont celles de William Parry [25]. Soient :

(i) a la norme uniforme du potentiel α,
(ii) HM le fibré homogène des demi-droites tangentes à la surface M, identifié au fibré tangent unitaire T^1M,
(iii) $l(v) = \|v\| - \alpha(v)$ le lagrangien sur le fibré tangent TM,
(iv) ψ le flot magnétique paramétré à vitesse un sur le fibré HM engendré par le champ de vecteurs $X(\kappa)$,
(v) k l'application égale à $1/l$,
(vi) $\mathcal{L}(v,t) = \int_0^t l(\psi_s v)\,ds$ l'action de l pour $v \in T^1M$, $t \in \mathbf{R}$.

Le flot Φ sur le fibré HM engendré par le champ $kX(\kappa)$ a les mêmes orbites que le flot ψ. En notant $\tau(v,t) = \int_0^t k(\Phi_s v)\,ds$ l'action de k pour $v \in T^1M$, $t \in \mathbf{R}$, on obtient les quatre relations :

$$\Phi_t v = \psi_{\tau(v,t)} v, \qquad \psi_t v = \Phi_{\mathcal{L}(v,t)} v,$$

$$(1-a)t \leqslant \mathcal{L}(v,t) \leqslant (1+a)t, \qquad \frac{t}{1+a} \leqslant \tau(v,t) \leqslant \frac{t}{1-a}. \tag{12}$$

Il est à remarquer que le lagrangien l est homogène de degré 1, donc son intégrale d'action le long de toute courbe de classe $\mathcal{C}^1$ dans M est indépendante du choix du paramétrage. Les orbites du lagrangien $\frac{1}{2}\|v\|^2 - \alpha(v)$ sont paramétrées à vitesse constante. À vitesse un, elles coïncident avec celles de l. Sur la surface M ou son revêtement universel $\widetilde{M}$, quand le coefficient de l'équation des champs de Jacobi [16]

$$q(v) = K + \kappa^2 - \langle \nabla\kappa, \mathcal{R}_{\pi/2}\psi_t v\rangle$$

est supposé pincé :

$$-q_0^2 \leqslant q \leqslant -q_1^2 < 0, \tag{13}$$

le comportement ressemble à celui du flot géodésique en courbure négative. L'hypothèse (13) entraîne l'existence d'une constante $k_1 > 0$ telle que $K \leqslant -k_1^2 < 0$ et $\|\kappa\|_\infty < k_1$.

PROPOSITION 4.2. – *Sous l'hypothèse* (13), *les orbites du flot magnétique sont des minimums stricts de l'action du lagrangien, parmi des courbes à extrémités fixes ou bien parmi des courbes périodiques.*

Démonstration. – La méthode utilisée pour le flot géodésique [14, pp. 114 à 118], convient. Soient $\varepsilon > 0$, $L > 0$ et

$$c : [-\varepsilon, +\varepsilon] \times [0, L] \to M \quad (s, t) \mapsto c_s(t)$$

une C^3-famille de courbes telle que c_0 soit une trajectoire du flot magnétique de longueur L. Les courbes sont supposées à extrémités fixes ou bien périodiques. Les dérivées partielles sont notées :

$$\frac{\partial c_s}{\partial t} = T, \qquad \frac{\partial c_s}{\partial t} = S.$$

La dérivée de l'action du lagrangien sur la courbe :

$$\mathcal{L}(c_s) = \int_0^L l(T)\, dt$$

vaut

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(c_s) = \left[\left\langle S, \frac{T}{\|T\|}\right\rangle - \alpha(S)\right]_0^L - \int_0^L \left\langle S, \frac{D_T T}{\|T\|} - bT\right\rangle dt$$

après intégration par parties. Le premier terme est nul dans les deux cas de figure. La nullité du deuxième terme en $s = 0$ correspond à l'équation des trajectoires $D_T T = bT$. La dérivée seconde vaut

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}(c_s) = \int_0^L \Bigg(-\frac{\langle T, D_T S\rangle^2}{\|T\|^3} + \frac{\|D_T S\|^2}{\|T\|} + \frac{\frac{\partial}{\partial t}\langle T, D_S S\rangle}{\|T\|} - \frac{\langle D_T T, D_S S\rangle}{\|T\|}$$
$$- \frac{R(S, T, S, T)}{\|T\|} - \langle -bT, D_S S\rangle - \langle S, D_S(-bT)\rangle \Bigg) dt.$$

En $s = 0$ on a

$$D_T T = bT, \quad \|T\| = 1.$$

Avec les notations $\partial/\partial t = '$, $N = \mathcal{R}_{\pi/2} T$ et $S = xT + yN$, les Sections 4 et 7 de [16] fournissent l'égalité (en $s = 0$) :

$$D_T S = (x' - \kappa y)T + (y' + \kappa x)N.$$

Donc les deux premiers termes de l'intégrande donnent $(y' + \kappa x)^2$, le troisième terme donne une intégrale nulle, les quatrième et sixième termes se compensent, le cinquième vaut $-y^2 K$, et (en $s = 0$) on a

$$D_S(-bT) = \kappa(y' + \kappa x)T - (x\kappa' + y\langle \nabla\kappa, N\rangle + \kappa x' - \kappa^2 y)N.$$

Il vient :

$$\left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=0} \mathcal{L}(c_s) = [\kappa x y]_0^L + \int_0^L (-qy^2 + y'^2)\, dt.$$

La nullité du premier terme avec l'hypothèse (13) entraîne $d^2/ds^2\ \mathcal{L}(c_0) > 0$. □

4.4. Dynamique

Les notations de cette section sont largement inspirées de celles de Patrick Foulon [11]. On note :

(i) la décomposition horizontal-vertical

$$T_v TM = T_{\pi(v)}M \times \{0\} \overset{\perp}{\oplus} \{0\} \times T_{\pi(v)}M$$

de l'espace tangent à l'espace tangent à la surface M, associée à la connexion riemannienne,

(ii) TT^1M le fibré tangent au fibré unitaire,

$$T_v T^1 M = T_{\pi(v)}M \times \{0\} \overset{\perp}{\oplus} \{0\} \times v^\perp,$$

(iii) $X(\kappa)$ le champ générateur du flot magnétique ψ ; évalué en $v \in T^1M$ il vaut :

$$X(\kappa)^v = (v, \kappa\mathcal{R}_{\pi/2} v), \quad \text{avec} \quad X(0)^v = (v, 0),$$

(iv) H_0 le champ horizontal sur le fibré unitaire T^1M :

$$H_0^v = (\mathcal{R}_{\pi/2}v, 0),$$

(v) Y_0 le champ vertical sur le fibré unitaire T^1M :

$$Y_0^v = (0, \mathcal{R}_{\pi/2}v),$$

(vi) $(\overline{X(0)}, \overline{H_0}, \overline{Y_0})$ le champ de bases du fibré cotangent $T^\star T^1M$, duales des bases orthonormées $(X(0), H_0, Y_0)$ du fibré tangent TT^1M,

(vii) $(X(\kappa)^\star, H_0^\star, Y_0^\star)$ le champ de bases du fibré cotangent $T^\star T^1M$, duales des bases $(X(\kappa), H_0, Y_0)$ du fibré tangent TT^1M,

(viii) $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ les images réciproques respectives des formes α et β par la projection $\pi : T^1M \to M$; la différentielle de $\widetilde{\alpha}$ est $\widetilde{\beta}$.

Les deux champs de bases duales sont liés par la relation :

$$X(\kappa)^\star = \overline{X(0)}, \quad H_0^\star = \overline{H_0}, \quad Y_0^\star = \overline{Y_0} - \kappa\overline{X(0)}, \quad \overline{Y_0} = Y_0^\star + \kappa X(\kappa)^\star.$$

La *forme caractéristique* d'un flot d'Anosov est celle qui vaut un sur le champ générateur et s'annule sur les espaces stables et instables. La forme caractéristique $A = \overline{X(0)}$ du flot géodésique est de contact. Le *champ caractéristique* d'une forme de contact $\mathcal{A}$ est l'unique champ Ξ qui vérifie

$$i_\Xi \mathcal{A} = 1 \quad \text{et} \quad i_\Xi d\mathcal{A} = 0;$$

le flot qu'il engendre est le *flot caractéristique* de la forme de contact $\mathcal{A}$ [24]. Le resultat suivant n'est pas original, il est détaillé ici par souci de cohérence.

PROPOSITION 4.3. – *La forme égale à la dérivée du lagrangien par rapport à la vitesse* :

$$\widehat{A} = \frac{\partial l}{\partial v} = A - \widetilde{\alpha}$$

est une forme de contact, et son flot caractéristique est Φ.

Démonstration. – On effectue le produit de degré maximal :

$$\widehat{A} \wedge d\widehat{A} = (A - \widetilde{\alpha}) \wedge (dA - \widetilde{\beta}) = A \wedge dA - \widetilde{\alpha} \wedge dA - A \wedge \widetilde{\beta} + \widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\beta}.$$

Les formes A, $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ s'annulent sur l'espace vertical donc les deux derniers termes sont nuls. Puisque $dA = d\overline{X(0)} = -\overline{H_0} \wedge \overline{Y_0}$ et comme

la composante de $\widetilde{\alpha}$ sur $\overline{X(0)}$ (et donc sur $X(\kappa)^\star$) vaut $\widetilde{\alpha}(X(\kappa))$, il vient au-dessus de tout $v \in T^1M$

$$\widehat{A} \wedge d\widehat{A} = \big(1 - \alpha(v)\big) A \wedge dA. \tag{14}$$

Le champ générateur du flot paramétré par l'action du lagrangien vaut :

$$\Xi = kX(\kappa) = \frac{1}{1-\alpha(v)} X(\kappa) = \frac{1}{i_{X(\kappa)}\widehat{A}} X(\kappa),$$

donc

$$i_\Xi \widehat{A} = 1.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} i_{X(\kappa)} d\widehat{A} &= i_{X(0)+\kappa Y_0}\big(-\overline{H_0} \wedge \overline{Y_0}\big) - i_{X(0)+\kappa Y_0)}\big(\kappa \overline{X(0)} \wedge \overline{H_0}\big) \\ &= \kappa \overline{H_0} - \kappa \overline{H_0} = 0 \end{aligned}$$

permet de valider la dernière condition. □

Dans toute la suite, la courbure K de la métrique g est supposée strictement négative donc pincée : $-k_0^2 \leqslant K \leqslant -k_1^2 < 0$, et l'hypothèse (13) vérifiée. Le flot ψ est de type Anosov [16] et les orbites du flot Φ relevé au revêtement universel $\widetilde{M}$ minimisent l'action du lagrangien. Le théorème d'Anosov–Sinai [25] assure que le flot Φ est aussi de type Anosov et que les feuilletages centre-stables (respectivement centre-instables) des deux flots coïncident. Chaque classe d'homotopie libre des lacets contient une unique orbite du flot Φ puisque c'est le cas pour le flot ψ [16] et cette orbite est le seul lacet minimisant l'action du lagrangien dans la classe d'homotopie.

Dans une variété de dimension $2n+1$ munie d'une structure de contact, une sous-variété de dimension n est dite *legendrienne* si les formes qui définissent la structure de contact s'annulent sur ses espaces tangents [24]. Les variétés stables et instables du flot Φ sont legendriennes ([17], Lemme 18.3.7).

Les espaces centre-stables et centre-instables du flot ψ (et de Φ) sont de classe C^1 (Proposition 7.2 de [16]). Les espaces stables (respectivement instables) du flot Φ sont formés par intersections transverses avec la structure de contact $\mathrm{Ker}A$ et sont donc de classe C^1. Ce n'est pas vrai pour le flot paramétré par la longueur [28].

Jeffrey Boland ([9], Théorème 6.36) a démontré en dimension quelconque l'égalité des exposants de Lyapounoff entre les deux paramétrages du flot magnétique. Le résultat qui suit est détaillé pour le confort de lecture.

PROPOSITION 4.4. – *La mesure de probabilité*

$$\nu = \widehat{A} \wedge d\widehat{A} = l \cdot \lambda^g$$

est invariante et ergodique pour le flot Φ. Son entropie est la même que celle de la mesure de Liouville λ^g pour le flot ψ.

Démonstration. – La mesure de Liouville λ^g est *réflexive*, c'est-à-dire invariante par l'antipodie $v \mapsto -v$. Par conséquent, la moyenne de toute 1-forme est nulle. L'égalité

$$\int_{v \in T^1M} l(v)\, d\lambda^g(v) = \int_{v \in T^1M} \big(1 - \alpha(v)\big)\, d\lambda^g(v) = 1$$

permet d'utiliser la formule d'Abramov citée dans la Section 1 de [25]. □

Les résultats de la Section 3 peuvent être appliqués.

THÉORÈME 4.4. – *L'entropie $h_\lambda(g, \kappa)$ de la mesure de Liouville pour le flot magnétique satisfait* :

$$\int_{T^1M} \big(-q(v)\big)^{1/2}\, d\lambda(v) \leqslant h_\lambda(g, \kappa) \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{vol} M} \int_M -\big(K + \kappa^2\big)\, d\mathrm{vol}\right)^{1/2}.$$

Si l'une des inégalités est en fait une égalité, alors le champ magnétique κ et la courbure K sont constants.

Démonstration. – On a toujours

$$\mathcal{A} = 0_{\mathbf{R}} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q} = q.$$

La majoration se déduit de la Proposition 3.2 en remarquant que dans l'intégrale le terme qui dépend de la fibre disparaît. En cas d'égalité la fonction q est invariante par le flot donc constante. L'indépendance de q par rapport à la fibre donne $\nabla\kappa = 0$ donc le champ magnétique κ est constant, et par suite la courbure sectionnelle est aussi constante. La minoration se lit dans le Théorème 3.2. L'égalité a lieu si et seulement si l'application q est constante et on conclut par le même argument. □

Sur une surface hyperbolique la présence d'un champ magnétique fait baisser l'entropie de la mesure de Liouville. On retrouve un résultat démontré en dimension quelconque par Jeffrey Boland ([9], Corollaire 6.38).

PROPOSITION 4.5. – *Quand la courbure de Gauss de la métrique g_0 est constante et le champ magnétique κ non nul, l'entropie $h_\lambda(g_0,\kappa)$ de la mesure de Liouville des flots magnétiques ψ et Φ est strictement inférieure à celle du flot géodésique $h_\lambda(g_0,0)$.*

Démonstration. – Le Théorème 4.4 entraîne la majoration :

$$h_\lambda(g_0,\kappa)^2 \leqslant \int_{T^1M} -(K+\kappa^2)\,d\lambda = h_\lambda(g_0,0)^2 - \frac{1}{2\pi}\int_M \kappa^2\,d\mathrm{vol}.$$

Le dernier terme est strictement négatif. □

4.5. Entropie topologique

Pour tout réel strictement positif T on note :

(i) $P_g(T)$ le nombre de géodésiques périodiques de longueur inférieure à T,

(ii) $P_{g,\kappa}(T)$ le nombre d'orbites périodiques du flot magnétique ψ de longueur inférieure à T,

(iii) $Q_{g,\kappa}(T)$ le nombre d'orbites périodiques du flot magnétique Φ d'action inférieure à T,

(iv) $\Omega(x,r)\subset\widetilde{M}$ la boule *gauche* (fermée) $\{\pi\Phi_t v \mid v\in T^1_xM,\ 0\leqslant t\leqslant r\}$ pour $x\in\widetilde{M}$ et $r>0$.

Les travaux de Rufus Bowen sur les flots d'Anosov peuvent être appliqués aux flots magnétiques.

THÉORÈME 4.5 ([8]). – *L'entropie topologique $H(g,\kappa)$ du flot Φ est égale au taux de croissance du nombre d'orbites périodiques $Q_{g,\kappa}$:*

$$H(g,\kappa) = \lim_{T\to\infty}\frac{\log Q_{g,\kappa}(T)}{T}.$$

Ceci peut être considéré comme un corollaire du résultat suivant. La démonstration du Théorème 2.1 (voir [22]), s'y adapte sans difficulté (dans le cas des métriques de Finsler réversibles, voir [10]).

THÉORÈME 4.6. – *Pour $x\in\widetilde{M}$, le quotient* $\log\mathrm{vol}\,\Omega(x,r)/r$ *admet une limite quand le rayon r tend vers l'infini ; cette limite est indépen-*

dante du centre x considéré et est appelée entropie volumique *du flot Φ. Elle est égale à l'entropie topologique $H(g,\kappa)$.*

De ceci découle une première comparaison d'entropies entre flots ; comme dans la Section 4.3, la norme uniforme du potentiel magnétique α est notée a.

PROPOSITION 4.6. – *L'entropie topologique $H(g,\kappa)$ du flot magnétique paramétré par l'action du lagrangien satisfait :*

$$H(g,\kappa) \leqslant \frac{h(g,0)}{1-a}.$$

Démonstration. – La relation (12) entraîne pour $x \in \widetilde{M}$ et $r > 0$:

$$\Omega(x,r) \subset B\left(x, \frac{r}{1-a}\right).$$

L'inégalité de la proposition résulte du Théorème 4.6. □

La Section 4.6 donne une minoration de l'entropie $H(g,\kappa)$ inaccessible par cette méthode.

4.6. Rigidité entropique

Le premier résultat concerne deux couples métrique riemannienne-champ magnétique g_1, κ_1 et g_2, κ_2 vérifiant les hypothèses précédentes. Les objets associés à ces couples peuvent être indicés par 1 ou 2, par exemple le lagrangien $l_2(v) = \|v\|_{g_2} - \alpha_2(v)$.

THÉORÈME 4.7. – *Étant donnée une mesure réflexive ν, ergodique pour le flot magnétique ψ^{g_1,κ_1}, on a :*

$$H(g_2,\kappa_2) \geqslant \frac{h_\nu(g_1,\kappa_1)}{[g_1 : g_2]}.$$

Démonstration. – Le théorème ergodique de Birkhoff entraîne pour ν-presque tout $v \in T^1_{g_1}M$:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T l_2(\psi_t^1 v)\, dt = \int_{T^1_{g_1}M} l_2(v)\, d\nu(v) = [g_1 : g_2].$$

Sachant que les orbites périodiques du flot Φ minimisent l'action du lagrangien dans leur classe d'homotopie libre (Proposition 4.2), la démonstration d'Anatole Katok pour les flots géodésiques peut être appliquée fidèlement. □

On se donne un couple g, κ vérifiant les hypothèses précédentes. La mesure de Bowen–Margulis μ_g du flot géodésique associé à la métrique g est l'unique mesure d'entropie maximale [8,26]. Le résultat précédent est appliqué au cas $g_1 = g_2 = g$, $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = \kappa$ et $\nu = \mu_g$. L'entropie topologique du flot magnétique associé au champ κ et paramétré par la longueur est inférieure à celle du flot géodésique sous-jacent [29] ; une estimation du rapport est donnée par le Théorème 2.2. De tout cela découle le résultat suivant ; la Proposition 4.6 est rappelée dans la première inégalité.

THÉORÈME 4.8. – *Les entropies topologiques vérifient les encadrements* :

$$\frac{h(g,0)}{1-\|\alpha\|_\infty} \geqslant H(g,\kappa) \geqslant h(g,0) \geqslant h(g,\kappa) \geqslant h(g,0)\sqrt{1-\frac{\|\kappa\|_\infty}{k_1^2}}.$$

En prenant dans le Théorème 4.7 les couples $(g_1, \kappa_1) = (g, \kappa)$, $(g_2, \kappa_2) = (g_0, 0)$ où la métrique à courbure constante g_0 est comme dans la Section 4.1, et $\nu = \lambda^g$, on obtient :

THÉORÈME 4.9. – *L'inégalité* :

$$h(g_0, 0) \geqslant h_\lambda(g, \kappa)$$

est stricte sauf si $g = g_0$ *et* $\kappa = 0$.

Démonstration. – Le Théorème 4.7 fournit l'inégalité :

$$h(g_0, 0) \geqslant \frac{h_\lambda(g,\kappa)}{\rho_g}$$

Quand les deux entropies sont égales le coefficient de conformité ρ_g vaut un, ce qui implique $g = g_0$. On conclut par la Proposition 4.5. □

Le champ magnétique présente une forme de rigidité entropique analogue à celle du flot géodésique.

THÉORÈME 4.10. – *L'entropie topologique* $H(g,\kappa)$ *du flot magnétique paramétré par l'action du lagrangien est strictement supérieure à*

l'entropie $h_\lambda(g,\kappa)$ de la mesure de Liouville, sauf si le champ magnétique κ est nul, et la courbure de Gauss de la métrique g, constante.

Démonstration. – Les Théorèmes 4.8, 4.2, et la démonstration du Théorème 4.9 entraînent les inégalités :

$$H(g,\kappa) \geqslant h(g,0) \geqslant \frac{h(g_0,0)}{\rho_g} \geqslant \frac{h_\lambda(g,\kappa)}{\rho_g^2}$$

et on conclut comme pour le Théorème 4.9. □

RÉFÉRENCES

[1] V. ARNOL'D, Some remarks on flows of line elements and frames, *Sov. Math. Dokl.* 2 (1961) 562–564, traduit de *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 138 (1961) 255–257.

[2] W. BALLMANN and M. WOJTKOWSKI, An estimate for the measure theoretic entropy of geodesic flows, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* 9 (1989) 271–279.

[3] G. BESSON, G. COURTOIS et S. GALLOT, Le volume et l'entropie minimale des espaces localement symétriques, *Invent. Math.* 103 (1991) 417–445.

[4] G. BESSON, G. COURTOIS et S. GALLOT, Les variétés hyperboliques sont des minima locaux de l'entropie topologique, *Invent. Math.* 117 (1994) 403–445.

[5] G. BESSON, G. COURTOIS et S. GALLOT, Volumes, entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative, *C. R. Acad. Sci. Paris* 319 (1994) 81–84.

[6] G. BESSON, G. COURTOIS et S. GALLOT, Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative, *G. A. F. A.* 5 (1995) 731–799.

[7] G. BESSON, G. COURTOIS and S. GALLOT, Survey article: minimal entropy and Mostow's rigidity theorems, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* 16 (1996) 623–649.

[8] R. BOWEN, Periodic orbits for periodic flows, *Amer. J. Math.* 94 (1972) 1–30.

[9] J. BOLAND, The dynamics and geometry of contact Anosov flows, Ph.D. Thesis, Michigan Ann Arbor University, 1998. http ://www.math.lsa.umich.edu/~boland/research.html.

[10] D. EGLOFF, On the dynamics of uniform Finsler manifolds of negative flag curvature, *Ann. Global Anal. Geom.* 15 (1997) 101–116.

[11] P. FOULON, Géométrie des équations différentielles du second ordre, *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor.* 45 (1986) 1–28.

[12] P. FOULON, Locally symmetric Finsler spaces in negative curvature, *C. R. Acad. Sci., Paris* I 324 (1997) 1127–1132.

[13] A. FREIRE and R. MAÑÉ, On the entropy of the geodesic flow in manifolds without conjugate points, *Invent. Math.* 69 (1982) 359–392.

[14] S. GALLOT, D. HULIN and J. LAFONTAINE, *Riemannian Geometry* 2nd. Ed., Universitext, Springer, Berlin, 1987.

[15] C. GODBILLON, *Éléments de Topologie Algébrique*, Hermann, Paris, 1971, pp. 211–214.

[16] S. GROGNET, Flots magnétiques en courbure négative. À paraître dans *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*

[17] A. KATOK and B. HASSELBLATT, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[18] A. KATOK, Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms, *Publ. Math. l'IHES* 72 (1980) 137–173.

[19] A. KATOK, Entropy and closed geodesics, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* 2 (1982) 339–365.

[20] A. KATOK, Four applications to conformal equivalence to geometry and dynamics, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* 8* (1988) 139–152.

[21] P. MALLIAVIN, *Intégration et Probabilités-analyse de Fourier et Analyse Spectrale*, Masson, Paris, 1982, pp. 129–132.

[22] A. MANNING, Topological entropy for geodesic flows, *Ann. Math.* 110 (1979) 567–573.

[23] R. OSSERMAN and P. SARNAK, A new curvature invariant and entropy of geodesic flows, *Invent. Math.* 77 (1984) 455–462.

[24] M.-Y. PANG, The structure of Legendre foliations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 320 (1990) 417–455.

[25] W. PARRY, Synchronization of canonical measures for hyperbolic attractors, *Comm. Math. Phys.* 106 (1986) 267–275.

[26] W. PARRY and M. POLLICOTT, Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics, *Astérisque* 187–188 (1990) 1–268.

[27] G. and M. PATERNAIN, Anosov geodesic flows and twisted symplectic structures, in: Ledrappier et al. (Eds.), *Proc. 1st International Conference on Dynamical Systems*, Montevideo, Uruguay, 1995—a tribute to R. Mañe, Harlow, Longman, Pitman, *Res. Notes Math. Ser.* 362 (1996) 132–145.

[28] G. PATERNAIN, On the regularity of the Anosov splitting for twisted geodesic flows, *Math. Res. Lett.* 4 (1997) 871–888.

[29] G. and M. PATERNAIN, First derivative of topological entropy for Anosov geodesic flows in the presence of magnetic fields, *Nonlinearity* 10 (1997) 121–131.

[30] Y. PESIN, Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory, *Russ. Math. Surveys* 32 (1977) 55–114; from *Uspekhi Mat. Nauk* 32 (1977) 55–112.

[31] F. WARNER, *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups*, Springer, Berlin, 1983, Chapitre 6.