ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. LAGUEL

Sur l'hamiltonien effectif associé à l'opérateur de Schrödinger magnétique avec potentiel périodique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 60, nº 2 (1994), p. 189-210

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1994__60_2_189_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 60, n° 2, 1994, p. 189-210. *Physique théorique*

Sur l'hamiltonien effectif associé à l'opérateur de Schrödinger magnétique avec potentiel périodique

par

M. LAGUEL

Département de Mathématiques,
Bâtiment 425, Université de Paris-XI,
91405 Orsay Cedex, France

RÉSUMÉ. — On considère l'opérateur de Schrödinger

$$P_B = \sum_{j=1}^{n} (D_{x_j} + A_j^B)^2 + V$$

est un potentiel périodique relativement à un réseau Γ de $\mathbf{R}^n$, A est un potentiel magnétique et B un champ magnétique faible et constant. Helffer et Sjöstrand [HS89] ont montré que le symbole $g(z, \theta, B)$ associé à l'hamiltonien effectif défini au voisinage d'un niveau d'énergie z_0 est de classe C^∞ en B et analytique en θ. On montre ici que le symbole g est un symbole analytique classique formel, avec B jouant le rôle de paramètres semi-classiques.

Mots clés : Opérateur de Schrödinger, champ magnétique, hamiltonien effectif, symbole analytique classique formel.

ABSTRACT. — We consider the Schrödinger operator

$$P_B = \sum_{j=1}^{n} (D_{x_j} + A_j^B)^2 + V$$

where V is periodic with respect to a lattice Γ of $\mathbf{R}^n$, A is a magnetic potential and B a weak and constant magnetic field. Helffer and Sjöstrand [HS89] have proved that the symbol $g(z, \theta, B)$ associated to the effective Hamiltonian defined near any energy level z_0 is C^∞ in B and analytic with

Classification A.M.S. : 33 J 10, 35 S 05, 35 C 20, 35 Q 40.

respect to θ. We prove here that the symbol g is an analytic classical formal symbol, with B playing the role of semi-classical parameters.

Key words : Schrödinger operator, magnetic field, effective hamiltonian, analytic classical formal symbol.

1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉS DES RÉSULTATS

Dans cette article on examine les propriétés d'analyticité pour l'opérateur pseudo-différentiel associé à l'opérateur de Schrödinger périodique avec un champ magnétique. On généralise les résultats obtenus dans [LS92].

La notion de l'hamiltonien effectif est ancienne en physique (*voir* les références citées dans [Bu87] et [HS90]). Du point de vue plus mathématique [Gu-Ra-Tr88] et [Bu87] ont fait des constructions de type W.K.B. pour l'opérateur de Schrödinger périodique perturbé par des champs extérieurs à variations lentes. Dans leurs travaux, en particulier dans celui de [Bu87] apparaît un hamiltonien effectif pseudo-differentiel. Des réductions des propriétés spectrales à celle des hamiltoniens effectifs ont été étudié par [Bu87], [Ne89], [HS90], [G-M-S], et [Di93], et comme applications [HS89], [Di93] ont obtenus des résultats sur la densité d'état et sur la répartition des valeurs propres. Il serait également très intéressant d'utiliser des hamiltoniens effectifs pour étudier les résonances (*voir* [Kl93], [Ge89]).

Le premier problème est alors d'établir des propriétés d'analyticité convenables pour l'hamiltonien effectif pour pouvoir utiliser par la suite de l'analyse microlocale analytique. Cet article consiste en une étape dans cette direction où nous regardons le cas particulier où la perturbation est donnée par un champ magnétique faible et constant.

Soit $b=(b_{j,k})_{1 \leq j, k \leq n}$ une matrice réelle et antisymétrique. On définit le champ magnétique B par :

$$\mathrm{B}=\frac{1}{2}\sum_{j}\sum_{k} b_{j,k}\, dx_j \wedge dx_k, \tag{1.1}$$

auquel on associe la 1-forme $\mathrm{A}(x)$:

$$\mathrm{A}(x)=\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k^{\mathrm{B}}(x)\, dx_k \tag{1.2}$$

où $A_k^B = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} b_{j,k} x_j$, $x \in \mathbf{R}^n$. Il est facile de vérifier que : $dA = B$.

On identifie dans toute la suite B avec b. On note $H_m^B(\mathbf{R}^n)$, l'espace :

$$H_m^B(\mathbf{R}^n) = \{ u \in L^2(\mathbf{R}^n);\ (D_x + A(x))^\alpha u \in L^2(\mathbf{R}^n),\ \textit{pour tout}\ \alpha \in \mathbf{N}^n,\ |\alpha| \leqq m \}$$

où $D_x = \left(\frac{1}{i} \partial_{x_1}, \ldots, \frac{1}{i} \partial_{x_n} \right)$ et où on utilise la notation standard des multi-indices.

Soit V un potentiel réel de classe C^∞ et Γ-périodique :

$$V(x+\gamma) = V(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \forall \gamma \in \Gamma \tag{1.3}$$

où Γ est un réseau de la forme $\bigoplus_{j=1}^{n} \mathbf{Z} e_j$, avec $e_1, e_2, \ldots, e_n$ formant une base de $\mathbf{R}^n$.

Considérons l'opérateur de Schrödinger magnétique :

$$P_{B,V} = \sum_{i=1}^{n} (D_{x_j}(x) + A_j^B)^2 + V \tag{1.4}$$

que l'on note, pour simplifier, P_B. Il est essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. On note aussi P_B son extension auto-adjointe de domaine $H_2^B(\mathbf{R}^n)$. La théorie de Floquet montre que l'opérateur P_0 est unitairement équivalent à l'intégrale directe $\int_{\mathbf{R}^{n*}/\Gamma^*} P_\theta \, d\theta$, où Γ^* désigne le réseau dual de Γ :

$$\Gamma^* = \{ \gamma^*;\ \gamma \cdot \gamma^* \in 2\pi \mathbf{Z} \}$$

et P_θ est la réalisation de P_0 sur H_θ :

$$H_\theta = \{ u \in L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}^n);\ u(x+\gamma) = e^{i\gamma \cdot \theta} u(x),\ x \in \mathbf{R}^n,\ \gamma \in \Gamma \}.$$

Soit $H_\theta^2 = H_\theta(\mathbf{R}^n) \cap H^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}^n)$, où $H^2(\mathbf{R}^n)$ est l'espace de Sobolev usuel. On a pour z_0 fixé dans $\mathbf{R}$:

THÉORÈME 1.1 [HS90]. – *Il existe* $N \in \mathbf{N}$ *et des fonctions analytiques* $\psi_j : \mathbf{R}^{n*}/\Gamma^* \mapsto H_\theta$, $1 \leqq j \leqq N$ *linéairement indépendantes telles que pour tout* $\theta \in \mathbf{R}^{n*}/\Gamma^*$ *le problème de Grushin suivant :*

$$(P_\theta - z_0) u + R_\theta^- u^- = v, \qquad R_\theta^+ u = v^+$$

admet une unique solution $(u, u^-) \in H_\theta^2 \times \mathbf{C}^N$ *pour tout* $(v, v^+) \in H_\theta \times \mathbf{C}^N$. *Ici on a posé* $(R_\theta^+ u)(j) = \langle u, \psi_j(\theta) \rangle$, $R_\theta^- u^-(x, \theta) = \sum_j u_j^- \psi_j(x, \theta)$, *où* $\langle\ ,\ \rangle$ *désigne le produit scalaire usuel dans* H_θ.

On associe à la suite $(\psi_j)_{1\leqq j\leqq N}$, la suite de fonctions $(\phi_j)_{1\leqq j\leqq N}$ donnée par :

$$\phi_j(x)=\frac{1}{\operatorname{vol}(\mathbf{R}^{n*}/\Gamma^*)}\int_{\mathbf{R}^{n*}/\Gamma^*}\psi_j(x,\theta)\,d\theta. \tag{1.5}$$

En utilisant l'analyticité en θ des fonctions ψ_j, $1\leqq j\leqq N$, on obtient, à partir de (1.5), la décroissance exponentielle des ϕ_j, $1\leqq j\leqq N$:

$$|\phi_j(x)|\leqq c_0\,e^{-(\langle x\rangle/c_0)} \tag{1.6}$$

pour tout $1\leqq j\leqq N$ et $x+\mathbf{R}^n$. Ici $\langle x\rangle$ désigne $(1+|x|^2)^{1/2}$.

On pose :

$$\phi^{B}_{\alpha,j}=e^{(i/2)\langle B,\,x\wedge\alpha\rangle}\phi_j(x-\alpha),\qquad 1\leqq j\leqq N,\quad \alpha\in\Gamma,\quad x\in\mathbf{R}^n \tag{1.7}$$

$$(R^B_+u)(\alpha)=(\langle u,\phi^B_{\alpha,j}\rangle)_{1\leqq j\leqq N},\qquad u\in L^2(\mathbf{R}^n) \tag{1.8}$$

$$R^B_-(u^-)=\sum_{1\leqq j\leqq N}\ \sum_{\alpha\in\Gamma}u^-_{\alpha,j}\phi^B_{\alpha,j},\qquad u^-=(u^-_{\alpha,j})\in l^2(\Gamma,\mathbf{C}^N). \tag{1.9}$$

En utilisant (1.6), on montre que $R^B_+\in\mathscr{L}(L^2(\mathbf{R}^n),l^2(\Gamma,\mathbf{C}^N))$ et $R^B_-\in\mathscr{L}(l^2(\Gamma,\mathbf{C}^N),L^2(\mathbf{R}^n))$.

Soit z_0 fixé dans $\mathbf{R}$ et soit $\mathscr{P}_n$ l'opérateur défini pour $z\in\mathbf{C}$, par :

$$\mathscr{P}_B=\begin{pmatrix}P_B-z & R^B_-\\ R^B_+ & 0\end{pmatrix}:H^B_2\times l^2\to L^2\times l^2. \tag{1.10}$$

On a alors (*cf.* [HS90]) le :

Théorème 1.2. — *Pour* (z, B) *dans un voisinage* $\mathscr{V}$ *de* $z_0\times\{0\}$ *dans* $\mathbf{C}\times\mathbf{R}^{N_0}$ *on a :*

(i) *L'opérateur* $\mathscr{P}_B:H^{\operatorname{Re}B}_2\times l^2\mapsto L^2\times l^2$, *est bijectif, et il est borné en norme par une constante indépendante de* (z, B).

(ii) *Son inverse* $\mathscr{E}_B$:

$$\mathscr{E}_B=\begin{pmatrix}E(B,z) & E_+(B,z)\\ E_-(B,z) & E_{-+}(B,z)\end{pmatrix}\in\mathscr{L}(L^2\times l^2,H^B_2\times l^2)$$

est uniformément borné par rapport à (z, B). *La matrice de l'hamiltonien effectif* (¹) $E_{-+}(B,z)$ *est donné par :*

$$E_{-+}(B,z,\alpha,\beta)=e^{(i/2)\langle B,\,\alpha\wedge\beta\rangle}f(B,z,\alpha-\beta),\qquad \alpha,\beta\in\Gamma \tag{1.11}$$

où, $f(B,z,.)$ *est une fonction de* Γ *à valeurs dans l'ensemble des matrices d'ordre* N, *de classe* C^∞ *en* B, *holomorphe en* z, *et vérifiant :*

$$\exists\,\eta>0;\quad \forall\gamma\in\mathbf{N}^{N_0},\quad |\partial^\gamma_B f(B,z,\alpha)|\leqq c_\gamma\,e^{-\eta\langle\alpha\rangle}. \tag{1.12}$$

(¹) Un opérateur proche a été introduit par Bellissard [Bel87] et G. Nenciu [Ne89] dans le cas d'une bande simple.

On associe à $E_{-+}(B, z)$ un opérateur pseudo-différentiel sur $\mathbf{R}^m$, $\mathrm{Op}^w(g(l^B))$, où la fonction g est donnée par :

$$g(\theta, B, z) = \sum_{\alpha \in \Gamma} e^{i \cdot \alpha \cdot \theta} f(B, z, \alpha) \tag{1.13}$$

où

$$\alpha . \theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \theta_i, \qquad \theta \in \mathbf{R}^n.$$

La forme linéaire l^B est donnée par $l^B(x, \xi) = (l_1^B(x, \xi), \ldots, l_n^B(x, \xi))$, où les $l_j^B(x, \xi)$ sont des formes linéaires réelles, indépendantes, définies sur $T^* \mathbf{R}^m$ et vérifiant :

$$\{ l_j, l_k \} = b_{j, k}, \qquad \forall j, k$$

Ici $\{\ ,\ \}$ désigne le crochet de Poisson et Op^w la quantification de Weyl de symbole g. (*cf.* [H89] pour plus de détails.)

Le but de ce travail est de donner un résultat permettant de mieux contrôler la taille des constantes c_γ définies dans le théorème 1.2, et d'estimer toutes les dérivées, par rapport à B, du symbole $g(\theta, B, z)$, pour (z, B) dans un voisinage de $z_0 \times \{0\}$ dans $\mathbf{C} \times \mathbf{R}^{N_0}$, avec $N_0 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Pour cela, on étend le champ magnétique B à un champ magnétique complexe $\tilde{B}$, et on établit des estimations, pour l'opérateur $P_{\tilde{B}}$ et son inverse $\mathscr{E}_{\tilde{B}}$, dans des espaces à poids exponentiels convenables. Le résultat est alors obtenu à l'aide d'une formule de Stokes.

Notre résultat s'énonce comme suit :

THÉORÈME 1.3. — *Il existe un voisinage* Ω de $z_0 \times \{0\}$ *dans* $\mathbf{C} \times \mathbf{R}^{N_0}$ *tel que la matrice de l'harmiltonien effectif* $E_{-+}(B, z)$ *associé à l'opérateur de Schrödinger magnétique* (1.4) *y soit de la classe de Gevrey* 2 *en* B. *Plus précisément : il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $\gamma \in \mathbf{N}^{N_0}$ *et* (z, B) *dans* Ω :

$$|\partial_B^\gamma E_{-+}(B, z, \alpha, 0)| \leqq C^{|\gamma|+1} (\gamma !)^2 e^{-\langle \alpha \rangle / C}.$$

On a posé : $\gamma ! = \gamma_1 ! \ldots \gamma_{N_0} !$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{N_0})$.

COROLLAIRE 1.4. — *Il existe un voisinage* Ω *de* $\{z_0\} \times \mathbf{R}^{n*}/\Gamma^* \times \{0\}$ *dans* $\mathbf{C} \times ((\mathbf{R}^{n*}/\Gamma^*) + i\,\mathbf{C}^{n*}) \times \mathbf{R}^{N_0}$ *tel que le symbole* $g(z, \theta, B)$ *défini dans* (1.13) *est holomorphe en* (z, θ) *et* C^∞ *en* B *pour* $(z, \theta, B) \in \Omega$. *De plus, il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $\gamma \in \mathbf{N}^{N_0}$ *et* (z, θ, B) *dans* Ω *:*

$$|\partial_B^\gamma g(z, \theta, B)| \leqq C^{|\gamma|+1} (\gamma !)^2.$$

En écrivant le développement de Taylor $g(z, \theta, B) \sim \sum_{\gamma \in \mathbf{N}^{N_0}} g_\gamma(\theta, z) B^\gamma$, on trouve que $g_\gamma(\theta, z) \leqq C^{|\gamma|+1} \gamma !$, en analogie avec les symboles classiques formels (*voir* par ex. [Sjo82]).

Notons que le résultat a déjà été démontré en dimension 2 [LS92].

2. RÉGULARITÉ ET ESTIMATION DE L'OPÉRATEUR DE GRUSCHIN $\mathscr{P}_{\tilde{B}}$ DANS LE CAS D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE COMPLEXE

Soit $b=(b_{j,k})_{1 \leqq j \leqq k}$ une matrice complexe, non nulle et antisymétrique. On note par $\tilde{b}$ la matrice dont les coefficients sont donnés par :

$$\tilde{b}_{j,k} = \Re e\, b_{j,k} + i(\Im m\, b_{j,k})\,\chi(\langle x \rangle \Im m\, b_{j,k}), \qquad 1 \leqq j, k \leqq n \tag{2.1}$$

où χ est une fonction dans $C_0^\infty(\mathbf{R})$, $0 \leqq \chi \leqq 1$, vérifiant :

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & si \quad |t| \leqq \dfrac{1}{3c_1} \\ 0 & si \quad |t| \geqq \dfrac{1}{2c_1} \end{cases}.$$

Ici c_1 est une constante positive qui sera choisie plus loin. On notera, dans tout ce qui suit, E_1 le support de χ.

On associe à $\tilde{b}$ le champ magnétique $\tilde{B}$ et la 1-forme $A^{\tilde{B}}$ en remplaçant b par $\tilde{b}$ dans (1.1), (1.2). On identifie $\mathbf{C}^{N_0}$ à $\mathbf{R}^{2N_0}$ et on note, pour $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_{N_0}) \in \mathbf{N}^{2N_0}$:

$$\frac{\partial^\beta}{(\partial b)^\beta} = \partial_b^\beta \tag{2.2}$$

la dérivation réelle correspondante.

LEMME 2.1. – *Pour tout* $\beta \in \mathbf{N}^{2N_0}$, $\beta \neq 0$, *il existe* $d>0$ *tel que pour tout* b *dans* $\mathbf{C}^{N_0}$ *et tout* $\gamma \in \mathbf{N}^n$, $|\gamma| \leqq 1$:

$$|\partial_x^\gamma \partial_b^\beta A_k^{\tilde{B}}| \leqq d \langle x \rangle^{|\beta|+|\gamma|}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ *et tout* $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Preuve. – On écrit $A_k^{\tilde{B}} = A_k^{\Re e\, B} + A_k^{\tilde{B} - \Re e\, B}$ et on vérifie d'abord les estimations voulues pour $A_k^{\Re e\, B}$ qui est une forme bilinéaire en $(x, \Re e\, b)$. Ensuite on observe que $A_k^{\tilde{B} - \Re e\, B}$ est une somme de termes

$$i \frac{x_j}{\langle x \rangle} f(\langle x \rangle (\Im m\, b_{j,k}))$$

où $f \in C_0^\infty$ est donnée par $f(t) = t\chi(t)$. La vérification de l'estimation voulue pour $A_k^{\tilde{B} - \Re e\, B}$ devient alors claire. □

LEMME 2.2. – *Pour tout* $c>0$, *il existe* $\tilde{c}>0$ *tel que pour tout* b, b' *dans* $\mathbf{C}^{N_0}$, *tout* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *et* $m \in \{1, 2\}$ *on a :*

$$\| e^{-(\langle x \rangle / c)} \bar{\partial}_{b_i} A_k^{\tilde{B}} \|_{\mathscr{L}(H_m^{\Re e\, B'}, H_{m-1}^{\Re e\, B'})} \leqq \tilde{c}\, e^{-(1/\tilde{c}\, |\Im m\, b_i|)} \tag{2.3}$$

Ici $\bar{\partial}_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial \Re e\, z} + i \dfrac{\partial}{\partial \Im m\, z} \right)$.

Preuve. — Pour tout $b=(b_{j,l})_{1\leq j<l\leq n}$ et pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$:

$$\bar\partial_{b_{j,l}}A_k^{\tilde B}=\begin{cases} 0, & si\quad k\notin\{j,l\}\\ \frac{1}{2}x_j(1-g(\langle x\rangle\,\mathfrak{Im}\,b_{j,k})), & si\quad k=l\\ -\frac{1}{2}x_l(1-g(\langle x\rangle\,\mathfrak{Im}\,b_{l,k})), & si\quad k=j\end{cases}\tag{2.4}$$

où $g(t)=(t\chi(t))'$.

Comme les supports de χ, χ', et χ'' sont inclus dans E_1, on a :

$$|\bar\partial_{b_{j,l}}A_k^{\tilde B}|=\mathcal{O}(\langle x\rangle),\quad \text{et pour } p\in\{1,\ldots,n\},\ |\partial_{x_p}\bar\partial_{b_{j,l}}A_k^{\tilde B}|=\mathcal{O}(1),$$

uniformément pour b dans $\mathbf{C}^{N_0}$. Les supports de $(\bar\partial_{b_{j,l}}A_k^{\tilde B})$ et de $(\partial_{x_p}\bar\partial_{b_{j,l}}A_k^{\tilde B})$ étant inclus dans $E_{j,l}=\left\{x\in\mathbf{R}^n;\ \langle x\rangle\,|\,\mathfrak{Im}\,b_{j,l}|\geq\frac{1}{3c_1}\right\}$, on a la majoration :

$$\|D_x^\alpha(e^{-(\langle x\rangle/c)}\bar\partial_{b_{j,l}}A_k^{\tilde B})\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}\leq\tilde c\,e^{-(1/\tilde c\,|\,\mathfrak{Im}\,b_{j,l}|)},\tag{2.5}$$

pour tout $\alpha\in\mathbf{N}^n$, $|\alpha|<1$.

(2.3) est une conséquence de (2.5). □

Le lemme suivant résulte du lemme 2.1.

LEMME 2.3. — *Pour tout $0<c'<c$ et $\gamma\in\mathbf{N}^{2N_0}$, il existe $d>0$ tel que pour tout $j\in\{1,\ldots,n\}$, $m\in\{1,2\}$ et tout b, b' dans $\mathbf{C}^{N_0}$:*

$$\|\partial_b^\gamma(e^{\langle x\rangle/c}(D_{x_j}+A_j^{\tilde B})e^{-(\langle x\rangle/c')})\|_{\mathscr{L}(H_m^{\mathfrak{Re}\,B'},\,H_{m-1}^{\mathfrak{Re}\,B'})}$$
$$=\|e^{(\langle x\rangle/c)-(\langle x\rangle/c')}\partial_b^\gamma A_j^{\tilde B}\|_{\mathscr{L}(H_m^{\mathfrak{Re}\,B'},\,H_{m-1}^{\mathfrak{Re}\,B'})}\leq d.$$

On associe à $\tilde B$ la suite de fonctions $\phi_{\alpha,j}^{\tilde B}$ obtenues en remplaçant B par $\tilde B$ dans (1.7). Soit $c_0>0$ (resp. c_1) définie dans (1.6) (resp. 2.1). Nous avons :

LEMME 2.4. — *Il existe une constante* M *positive telle que pour tout $c_1>M$ on ait: pour tout $c>2c_0$, $0<c'<c$ et pour tout $\gamma\in\mathbf{N}^{2N_0}$, il existe $d>0$ tel que pour tout $b\in\mathbf{R}^{2N_0}$, on a :*

$$|e^{(\langle\alpha\rangle/c)-(\langle x\rangle/c')}\partial_b^\gamma\phi_{\alpha,j}^{\tilde B}(x)|\leq d\,e^{-((\langle x\rangle+\langle\alpha\rangle)/d)}\tag{2.6}$$

respectivement

$$|e^{(\langle x\rangle/c)-(\langle x\rangle/c')}\partial_b^\gamma\phi_{\alpha,j}^{\tilde B}(x)|\leq d\,e^{-((\langle x\rangle+\langle\alpha\rangle)/d)}\tag{2.7}$$

pour tout $j\in\{1,\ldots,N\}$ et tout $x\in\mathbf{R}^n$ et $\alpha\in\Gamma$.

Preuve. — Pour tout $\gamma\in\mathbf{N}^{2N_0}$, $k\in\{1,\ldots,N\}$, $\alpha\in\Gamma$ et $x\in\mathbf{R}^n$, on a :

$$\partial_b^\gamma\phi_{\alpha,k}^{\tilde B}(x)=\left(\prod_{l=1}^{N_0}\partial_{b_l}^{\gamma_l}e^{(i/2)\,b_l\langle e_l x\wedge\alpha\rangle}\right)\phi_k(x-\alpha),\qquad b\in\mathbf{R}^{2N_0}.\tag{2.8}$$

D'autre part :

$$\partial_{b_l}^{\gamma_l} e^{(i/2)\tilde{b}_l \langle e_l,\, x\wedge\alpha\rangle} = \text{Comb. lin. finie de termes de la forme :}$$

$$(\langle e_l,\ x\wedge\alpha\rangle)^{\gamma_l^1}\,[\partial_{\mathfrak{Im}\, b_l}^{\gamma_l^2(1)}(\chi(\langle x\rangle\, \mathfrak{Im}\, b_l)\, \mathfrak{Im}\, b_l)]\dots$$

$$[\partial_{\mathfrak{Im}\, b_l}^{\gamma_l^2(k)}(\chi(\langle x\rangle\, \mathfrak{Im}\, b_l)\, \mathfrak{Im}\, b_l)]\,(\langle e_l,\ x\wedge\alpha\rangle)^k\, e^{(i/2)\tilde{b}_l\langle e_l,\, x\wedge\alpha\rangle} \quad (2.9)$$

où $\gamma_l=(\gamma_l^1,\ \gamma_l^2)$, $\gamma_l^2(1)+\dots+\gamma_l^2(k)=\gamma_l^2$, $0\leqq k\leqq\gamma_l^2$.

De plus pour $s\in\mathrm{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}|\partial_{\mathfrak{Im}\, b_l}^{s}[(\mathfrak{Im}\, b_l)\,\chi(\langle x\rangle\, \mathfrak{Im}\, b_l)]| &= |s\,\chi^{(s-1)}(\langle x\rangle\, \mathfrak{Im}\, b_l)\,\langle x\rangle^{s-1}\\ &\quad+\langle x\rangle^s(\mathfrak{Im}\, b_l)\,\chi^{(s)}(\langle x\rangle\, \mathfrak{Im}\, b_l)|\\ &=\mathcal{O}_s(1)\,\langle x\rangle^{s-1}.\end{aligned} \quad (2.10)$$

Observons que pour tout $l\in\{1,\dots,\mathrm{N}_0\}$, on a :

$$|\langle e_l,\ x\wedge\alpha\rangle|\leqq|x-\alpha|\min(|x|,\ |\alpha|) \quad (2.11)$$

par suite, en utilisant la définition de χ, on obtient pour tout $1\leqq l\leqq\mathrm{N}_0$:

$$|e^{(i/2)\tilde{b}_l\langle e_l,\, x\wedge\alpha\rangle}|\leqq e^{1/2\,|\mathfrak{Im}\, b_l|\,|\chi(\langle x\rangle\, \mathfrak{Im}\, b_l)|\,|\langle e_l,\, x\wedge\alpha\rangle|}\leqq e^{|x-\alpha|/4c_1}.$$

D'où en choisissant $c_1>\mathrm{M}=\mathrm{N}_0\, c_0$ on obtient à partir de (2.9) :

$$\left|\prod_{l=1}^{\mathrm{N}_0}\partial_{b_l}^{\gamma_l} e^{(i/2)\tilde{b}_l\langle e_l,\, x\wedge\alpha\rangle}\right|=\mathcal{O}_\gamma(1)\,\langle x-\alpha\rangle^{|\gamma|}\langle x\rangle^{|\gamma|}e^{\langle x-\alpha\rangle/2c_0}. \quad (2.12)$$

Il en résulte à partir de (2.8) que :

$$\begin{aligned}|\partial_b^\gamma\phi_{\alpha,j}^{\tilde{\mathrm{B}}}(x)| &=\mathcal{O}_\gamma(1)\,\langle x-\alpha\rangle^{|\gamma|}\langle x\rangle^{|\gamma|}e^{-(\langle x-\alpha\rangle/2c_0)}\\ &=\mathcal{O}_{\gamma,d_1}(1)\,\langle x\rangle^{|\gamma|}e^{-(\langle x-\alpha\rangle/d_1)},\quad \text{pour tout } d_1>2c_0.\end{aligned}$$

Et donc pour tout $c'>c''$, on a :

$$\begin{aligned}&|e^{(\langle\alpha\rangle/c)-(\langle x\rangle/c')}\partial_b^\gamma\phi_{\alpha,j}^{\tilde{\mathrm{B}}}(x)|\\ &\qquad=\mathcal{O}_{\gamma,d_1}(1)\,e^{\langle\alpha\rangle/c}e^{-(\langle x\rangle/c'')}e^{-(\langle\alpha\rangle/d_1)}e^{\langle x\rangle/d_1},\end{aligned} \quad (2.13)$$

avec $c'<c''<c$.

D'où (2.6) en choisissant $\max(2c_0,\ c'')<d_1<c$. L'inégalité (2.7) est obtenue d'une manière analogue. □

On définit les opérateurs $\mathrm{P}_{\tilde{\mathrm{B}}}$, $\mathrm{R}_+^{\tilde{\mathrm{B}}}\ \mathrm{R}_-^{\tilde{\mathrm{B}}}$, en remplaçant B par $\tilde{\mathrm{B}}$ dans (1.4), (1.8) et (1.9) et on introduit l'opérateur :

$$\mathscr{P}_{\tilde{\mathrm{B}}}=\begin{pmatrix}\mathrm{P}_{\tilde{\mathrm{B}}}-z & \mathrm{R}_-^{\tilde{\mathrm{B}}}\\ \mathrm{R}_+^{\tilde{\mathrm{B}}} & 0\end{pmatrix}$$

z étant fixé dans $\mathbf{C}$. Soit $\mathcal{K}$ un compact dans $\mathbf{C}$ et soient c_0, c_1, et $M>0$ données dans le lemme précédent. Nous avons alors :

PROPOSITION 2.5. — *Pour tout $c>2c_0$, $0<c'<c$, l'application $\mathcal{H}_{c,c'}$, définie pour b' fixé dans $\mathbf{C}^{N_0}$, z fixé dans $\mathcal{K}$ et $c_1>M$, par :*

$$\mathcal{H}_{c,c'}: \quad \mathbf{R}^{2N_0} \mapsto \mathcal{L}(H_2^{\Re e\, B'} \times l^2,\ L^2 \times l^2)$$

$$b \mapsto e^{\langle\ \rangle/c} \mathcal{P}_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/c')}$$

est de classe C^∞ en b, de plus, pour tout $\gamma \in \mathbf{N}^{2N_0}$ on a :

$$\| (\partial_b^\gamma \mathcal{H}_{c,c'})(b) \|_{\mathcal{L}(H_2^{\Re e\, B'} \times l^2,\ L^2 \times l^2)} = \mathcal{O}_{\gamma,c,c'}(1)$$

indépendamment de c_1, b, b' et z.

Preuve. — Soit $\gamma \in \mathbf{N}^{2N_0}$. On déduit à partir de l'inégalité (2.6), que l'opérateur $\partial_b^\gamma (e^{\langle\ \rangle/c} R_+^{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/c')})$ est un opérateur de Hilbert Schmidt qui appartient à $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n),\ l^2(\Gamma))$ et que sa norme est indépendante de b dans $\mathbf{R}^{2N_0}$ et de $c_1>M$.

D'une manière analogue une estimation identique de la norme de l'opérateur $\partial_b^\gamma (e^{\langle\ \rangle/c} R_-^{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/c')})$, prise dans $\mathcal{L}(l^2(\Gamma),\ L^2(\mathbf{R}^n))$ est obtenue à partir de (2.7).

D'autre part, on a d'après le lemme 2.3 :

$$\| \partial_b^\gamma (e^{\langle\ \rangle/c} (D_{x_j} + A_j^{\tilde{B}})^2\, e^{-(\langle\ \rangle/c')}) \|_{\mathcal{L}(H_2^{\Re e\, B'},\ L^2)} = \mathcal{O}_{\gamma,c,c'}(1)$$

indépendamment de b dans $\mathbf{R}^{2N_0}$ et de b' dans $\mathbf{C}^{N_0}$.

V étant Γ-périodique et z dans $\mathcal{K}$, on a :

$$\| e^{(\langle\ \rangle/c) - (\langle\ \rangle/c')} (V - z) \|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} = \mathcal{O}_{c,c'}(1),\quad 0<c'<c$$

ainsi, pour tout $0<c'<c$:

$$\| \partial_b^\gamma (e^{\langle\ \rangle/e} P_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/c')}) \|_{\mathcal{L}(H_2^{\Re e\, B'},\ L^2)} = \mathcal{O}_{\gamma,c,c'}(1)$$

indépendamment de b et b'.

Par conséquent, l'application $\mathcal{H}_{c,c'}$ ainsi que toutes ses dérivées $\partial_b^\gamma \mathcal{H}_{c,c'}$ sont bien définies de $\mathbf{R}^{2N_0}$ dans $\mathcal{L}(H_2^{\Re e\, B'} \times l^2,\ L^2 \times l^2)$. De plus

$$\| \partial_b^\gamma \mathcal{H}_{c,c'}(b) \|_{\mathcal{L}(H_2^{\Re e\, B'} \times l^2,\ L^2 \times l^2)} = \mathcal{O}_{\gamma,c,c'}(1) \tag{2.14}$$

indépendamment de b et b'.

Jusqu'à présent nous avons considéré les dérivées en b au sens formel. Nous allons les étudier au sens des opérateurs bornés. Pour cela observons, d'abord, que pour tout $u \in H_2^{\Re e\, B'} \times l^2$, et $\phi \in L^2 \times l^2$ on a pour tout $\gamma \in \mathbf{N}^{2n_0}$:

$$\partial_b^\gamma (\langle \mathcal{H}_{c,c'}(b) u,\ \phi \rangle) = \langle \partial_b^\gamma \mathcal{H}_{c,c'}(b) u,\ \phi \rangle$$

où les dérivées $\partial_b^\gamma \mathcal{H}_{c,c'}$ (qui apparaissent dans le second membre de l'égalité) sont prises au sens formel. Ainsi de l'identité suivante :

$$| \langle (\mathcal{H}_{c,c'}(b+h) - \mathcal{H}_{c,c'}(b)) u,\ \phi \rangle | = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} \langle \mathcal{H}_{c,c'}(b + \mathrm{th}) u,\ \phi \rangle\, dt \right|$$

on obtient, à partir de (2.14), pour $|h|$ assez petit :

$$\| \mathscr{H}_{c,c'}(b+h) - \mathscr{H}_{c,c'}(b) \|_{\mathscr{L}(\mathrm{H}_2^{\Re e\,\mathrm{B}'} \times l^2, \mathrm{L}^2 \times l^2)} = \mathcal{O}_{\gamma,c,c'}(|h|)$$

d'où la continuité de l'application

$$\mathbf{R}^{2\mathrm{N}_0} \ni b \to \mathscr{H}_{c,c'}(b) \in \mathscr{L}(\mathrm{H}_2^{\Re e\,\mathrm{B}'} \times l^2, \mathrm{L}^2 \times l^2),$$

où $b' \in \mathbf{C}^{\mathrm{N}_0}$ est fixé. De même la continuité faible de $\nabla_b \mathscr{H}_{c,c'}$ (les dérivées étant prises au sens formel) et l'identité :

$$|\langle (\mathscr{H}_{c,c'}(b+h) - \mathscr{H}_{c,c'}(b))u, \phi \rangle| = \left| \int_0^1 \langle h.\nabla_b \mathscr{H}_{c,c'}(b+\mathrm{th})u, \phi \rangle dt \right|$$

montrent que l'application $\mathbf{R}^{2\mathrm{N}_0} \ni b \to \mathscr{H}_{c,c'}$ est différentiable pour la topologie uniforme et vérifie $\| \partial_{b_i} \mathscr{H}_{c,c'}(b) \|_{\mathscr{L}(\mathrm{H}_2^{\Re e\,\mathrm{B}'} \times l^2, \mathrm{L}^2 \times l^2)} = \mathcal{O}_{c,c'}(1)$, pour tout $1 \leqq i \leqq 2\mathrm{N}_0$.

En itérant le même argument, on montre que l'application :

$$\mathbf{R}^{2\mathrm{N}_0} \ni b \to \mathscr{H}_{c,c'}(b) \in \mathscr{L}(\mathrm{H}_2^{\Re e\,\mathrm{B}'} \times l^2, \mathrm{L}^2 \times l^2)$$

est de classe C^∞ et vérifie $\| \partial_b^\gamma \mathscr{H}_{c,c'}(b) \|_{\mathscr{L}(\mathrm{H}_2^{\Re e\,\mathrm{B}'} \times l^2, \mathrm{L}^2 \times l^2)} = \mathcal{O}_{\gamma,c,c'}(1)$, pour tout $\gamma \in \mathrm{N}^{2\mathrm{N}_0}$. □

Soit $\mathscr{A} \subset \{1, \ldots, \mathrm{N}_0\}$. On note card $\mathscr{A}$ par $|\mathscr{A}|$ et on pose $\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}} = \prod_{i \in \mathscr{A}} \bar{\partial}_{b_i}$, où pour tout $1 \leqq i \leqq \mathrm{N}_0$, $\bar{\partial}_{b_i}$ sont définis comme dans le lemme 2.2.

PROPOSITION 2.6. — *Soient* M, c, c', c_0 *comme dans le lemme* 2.4. *Alors il existe* $d>0$ *tel que pour tout* $\mathscr{A} \subset \{1, \ldots, \mathrm{N}_0\}$ *et pour tout* $c_1 > \mathrm{M}$:

$$\| \bar{\partial}_b^{\mathscr{A}} \mathscr{H}_{c,c'}(b) \|_{\mathscr{L}(\mathrm{H}_2^{\Re e\,\mathrm{B}'} \times l^2, \mathrm{L}^2 \times l^2)} \leqq d \exp\left(-\frac{1}{d} \sum_{i \in \mathscr{A}} \frac{1}{|\Im m\, b_i|} \right)$$

pour tout b, b' *dans* $\mathbf{C}^{\mathrm{N}_0}$.

Preuve. — Soit $\mathscr{A} \subset \{1, \ldots, \mathrm{N}_0\}$. On a pour tout $j \in \{1, \ldots, \mathrm{N}\}$:

$$\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}} \phi_{\alpha,j}^{\tilde{\mathrm{B}}}(x) = \left(\frac{i}{2}\right)^{|\mathscr{A}|} [\prod_{k \in \mathscr{A}} (\bar{\partial}_{b_k} \tilde{b}_k) \langle e_k, x \wedge \alpha \rangle] \phi_{\alpha,j}^{\tilde{\mathrm{B}}}(x) \qquad (2.15)$$

pour tous $x \in \mathbf{R}^n$ et $\alpha \in \Gamma$. Et pour tout $k \in \{1, \ldots, \mathrm{N}_0\}$:

$$\bar{\partial}_{b_k} \tilde{b}_k = \frac{1}{2}(1 - g(\langle x \rangle \Im m\, b_k))$$

où g est donnée par (2.4). Ainsi pour tout $\mathscr{A} \subset \{1, \ldots, \mathrm{N}_0\}$ on a :

$$\mathrm{supp}\,(\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}} \phi_{\alpha,j}^{\tilde{\mathrm{B}}}) \subset \left\{ x \in \mathbf{R}^n;\ \forall k \in \mathscr{A};\ \langle x \rangle |\Im m\, b_k| \geqq \frac{1}{3c_1} \right\} = \mathrm{E}_{\mathscr{A}}. \quad (2.16)$$

Les inégalités (2.6) respectivement (2.7) montrent que les opérateurs $\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}}(e^{\langle\ \rangle/c}\mathrm{R}_+^{\tilde{\mathrm{B}}}(b)\,e^{-(\langle\ \rangle/c')})$ respectivement $\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}}(e^{\langle\ \rangle/c}\mathrm{R}_-^{\tilde{\mathrm{B}}}(b)\,e^{-(\langle\ \rangle/c')})$ sont des opérateurs de Hilbert Schmidt. De plus d'après (2.16) chacun d'eux vérifie :

$$\|\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}}(e^{\langle\ \rangle/c}\mathrm{R}_+^{\tilde{\mathrm{B}}}(b)\,e^{-(\langle\ \rangle/c')})\|_{\mathscr{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n),\, l^2(\Gamma))} \leqq d_3 \exp\left(-\frac{1}{d_3}\sum_{i\in\mathscr{A}}\frac{1}{|\mathfrak{Im}\, b_i|}\right)$$

$$\|\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}}(e^{\langle\ \rangle/c}\mathrm{R}_-^{\tilde{\mathrm{B}}}(b)\,e^{-(\langle\ \rangle/c')})\|_{\mathscr{L}(l^2(\Gamma),\, \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n))} \leqq d_3 \exp\left(-\frac{1}{d_3}\sum_{i\in\mathscr{A}}\frac{1}{|\mathfrak{Im}\, b_i|}\right).$$

Par ailleurs, avec $c' < c'' < c$, on a :

- Pour tout $i \in \{1, \ldots, \mathrm{N}_0\}$:

$$\bar{\partial}_{b_i}(e^{\langle\ \rangle/c}\mathrm{P}_{\tilde{\mathrm{B}}}(b)\,e^{-(\langle\ \rangle/c')})$$
$$= \sum_{1\leqq j\leqq n}(e^{(\langle\ \rangle/c)-(\langle\ \rangle/c'')}\,\bar{\partial}_{b_i}\mathrm{A}_j^{\tilde{\mathrm{B}}})(e^{\langle\ \rangle/c''}(\mathrm{D}_{x_j}+\mathrm{A}_j^{\tilde{\mathrm{B}}})\,e^{-(\langle\ \rangle/c')})$$
$$+\sum_{1\leqq j\leqq n}(e^{\langle\ \rangle/c}(\mathrm{D}_{x_j}+\mathrm{A}_j^{\tilde{\mathrm{B}}})\,e^{-(\langle\ \rangle/c'')})(e^{(\langle\ \rangle/c'')-(\langle\ \rangle/c')}\,\bar{\partial}_{b_i}\mathrm{A}_j^{\tilde{\mathrm{B}}})$$

●● Pour $i \neq l$, $l \in \{1, \ldots, \mathrm{N}_0\}$:

$$\bar{\partial}_{b_i,\, b_l}^2(e^{\langle\ \rangle/c}\mathrm{P}_{\tilde{\mathrm{B}}}(b)\,e^{-(\langle\ \rangle/c')})$$
$$= \sum_{1\leqq j\leqq n}(e^{(\langle\ \rangle/c)-(\langle\ \rangle/c'')}\,\bar{\partial}_{b_i}\mathrm{A}_j^{\tilde{\mathrm{B}}})(e^{(\langle\ \rangle/c'')-(\langle\ \rangle/c')}\,\bar{\partial}_{b_l}\mathrm{A}_j^{\tilde{\mathrm{B}}})$$
$$+\sum_{1\leqq j\leqq n}(e^{(\langle\ \rangle/c'')-(\langle\ \rangle/c')}\,\bar{\partial}_{b_l}\mathrm{A}_j^{\tilde{\mathrm{B}}})(e^{(\langle\ \rangle/c)-(\langle\ \rangle/c'')}\,\bar{\partial}_{b_i}\mathrm{A}_j^{\tilde{\mathrm{B}}})$$

●●● Pour tout $\mathscr{A} \subset \{1, \ldots, \mathrm{N}_0\}$ tel que $|\mathscr{A}| \geqq 3$:

$$\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}}(e^{\langle\ \rangle/c}\mathrm{P}_{\tilde{\mathrm{B}}}\,e^{-(\langle\ \rangle/c')}) = 0.$$

D'où, à partir du lemme 2.2 et du lemme 2.3, on a :

$$\|\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}}(e^{\langle\ \rangle/c}\mathrm{P}_{\tilde{\mathrm{B}}}\,e^{-(\langle\ \rangle/c')})\|_{\mathscr{L}(\mathrm{H}_2^{\mathfrak{Re}\,\mathrm{B}'},\, \mathrm{L}^2)} \leqq d_4 \exp\left(-\frac{1}{d_4}\sum_{i\in\mathscr{A}}\frac{1}{|\mathfrak{Im}\, b_i|}\right).$$

Les constantes d_3, d_4 sont indépendantes de $c_1 > \mathrm{M}$ et de b et b' dans $\mathbf{C}^{\mathrm{N}_0}$. □

3. INVERSIBILITÉ DE L'OPÉRATEUR DE GRUSCHIN $\mathscr{P}_{\tilde{B}}$ DANS LE CAS D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE COMPLEXE ET ESTIMATION DE SON INVERSE

Soit z_0 fixé dans $\mathbf{R}$, et $c_1>0$ donné dans la définition de $\tilde{b}$ [*cf.* (2.1)]. En supposant c_1 assez grand nous avons :

PROPOSITION 3.1. — *Il existe un voisinage* $\mathscr{W}$ *de* $z_0\times\{0\}$ *dans* $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^{N_0}$ *et une constante* $M>0$ *tels que pour tout* $(z, b)\in\mathscr{W}$, *et pour tout* $f\in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ *vérifiant*

$$(*)\qquad |\nabla f|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}+|\Delta f|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}\leqq\frac{1}{M}$$

nous avons :

(i) *L'opérateur* $e^f\mathscr{P}_{\tilde{B}}e^{-f}$ *qui envoie* $H_2^{\mathfrak{Re}\,B}\times l^2$ *dans* $L^2\times l^2$ *est uniformément bornée par rapport à* z, b, f, *et bijectif avec un inverse* $\mathscr{E}_{\tilde{B},f}$ *uniformément borné.*

(ii) *Si on note* $\mathscr{E}_{\tilde{B}}=\mathscr{E}_{\tilde{B},0}$, *alors* $e^f\mathscr{E}_{\tilde{B}}e^{-f}$ *opérant sur* $C_0^\infty\times l_0^2$ *se prolonge en un opérateur de* $L^2\times l^2$ *dans* $H_2^{\mathfrak{Re}\,B}\times l^2$ *noté aussi* $e^f\mathscr{E}_{\tilde{B}}e^{-f}$, *qui coïncide avec* $\mathscr{E}_{\tilde{B},f}$. *Ici* l_0^2 *désigne l'espace des éléments de* l^2 *nuls en dehors d'un borné.*

Preuve. — (i) La constante c_1 étant supposée assez grande, nous avons pour tout $j\in\{j, \ldots, n\}$, $\alpha\in\mathbf{N}^n$ et $|\alpha|\leqq 1$ et $b\in\mathbf{C}^{N_0}$:

$$\begin{aligned}\|D_x^\alpha(A_j^{\tilde{B}}-A_j^{\mathfrak{Re}\,B})\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}&\\ &=\left\|D_x^\alpha\left(\sum_{k=1}^n \mathfrak{Im}\,b_{k,j}\chi(\langle x\rangle\mathfrak{Im}\,b_{k,j})x_k\right)\right\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}\\ &=\mathscr{O}\left(\frac{1}{c_1}+|B|\right)\end{aligned}\tag{3.1}$$

ce qui entraîne, pour tout $m\in\{1, 2\}$, $j\in\{1, \ldots, n\}$ et $b\in\mathbf{C}^{N_0}$:

$$\|A_j^{\tilde{B}}-A_j^{\mathfrak{Re}\,B}\|_{\mathscr{L}(H_m^{\mathfrak{Re}\,B},\,H_{m-1}^{\mathfrak{Re}\,B})}=\mathscr{O}\left(\frac{1}{c_1}+|B|\right)\tag{3.2}$$

et alors :

$$\|(D_{x_j}+A_j^{\tilde{B}})\|_{\mathscr{L}(H_m^{\mathfrak{Re}\,B},\,H_{m-1}^{\mathfrak{Re}\,B})}=\mathscr{O}\left(1+\frac{1}{c_1}+|B|\right).\tag{3.3}$$

Comme pour tout $j\in\{1, \ldots, n\}$ on a :

$$\begin{aligned}(D_{x_j}+A_j^{\tilde{B}})^2-(D_{x_j}+A_j^{\mathfrak{Re}\,B})^2&\\ &=(A_j^{\tilde{B}}-A_j^{\mathfrak{Re}\,B})^2+(A_j^{\tilde{B}}-A_j^{\mathfrak{Re}\,B})(D_{x_j}+A_j^{\mathfrak{Re}\,B})\\ &\qquad+(D_{x_j}+A_j^{\mathfrak{Re}\,B})(A_j^{\tilde{B}}-A_j^{\mathfrak{Re}\,B}),\end{aligned}$$

on voit que $(P_{\tilde{B}} - P_{\Re e\, B}) \in \mathscr{L}(H_2^{\Re e\, B}, L^2)$; de plus :

$$\| P_{\tilde{B}} - P_{\Re e\, B} \|_{\mathscr{L}(H_2^{\Re e\, B}, L^2)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c_1} + |B|\right). \tag{3.4}$$

Pour tout $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$:

$$e^f P_{\tilde{B}} e^{-f} - P_{\Re e\, B} = (P_{\tilde{B}} - P_{\Re e\, B}) + \sum_{1 \leqq j \leqq n} 2i(\partial_{x_j} f)(D_{x_j} + A_j^{\tilde{B}}) + \Delta f - |\nabla f|^2$$

ainsi, moyennant (3.3), (3.4) et (*) (et supposons que $M \geqq 1$) on a :

$$\| e^f P_{\tilde{B}}\, e^{-f} - P_{\Re e\, B} \|_{\mathscr{L}(H_2^{\Re e\, B}, L^2)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c_1} + |B| + \frac{1}{M}\right). \tag{3.5}$$

Posons :

$$g_{\alpha, j}^{\tilde{B}}(x) = (e^{f(\alpha) - f(x)}\, e^{(i/2)\langle \tilde{B},\, x \wedge \alpha \rangle} - e^{(i/2)\langle \Re e\, B,\, x \wedge \alpha \rangle})\, \phi_j(x - \alpha),$$

On a alors :

$$|g_{\alpha, j}^{\tilde{B}}(x)| = |e^{f(\alpha) - f(x) - (1/2)\sum_{k<l} \Im m\, b_{k,l}\, \chi(\langle x \rangle \Im m\, b_{k,l}) \langle e_{k,l},\, x \wedge \alpha \rangle} - 1|\, |\phi_j(x - \alpha)|,$$

où : $e_{k,l} = dx_k \wedge dx_l$.

D'où :

$$|g_{\alpha, j}^{\tilde{B}}(x)| \leqq |f(\alpha) - f(x) - \frac{1}{2} \sum_{k<l} \Im m\, b_{k,l}\, \chi(\langle x \rangle \Im m\, b_{k,l}) \langle e_{k,l},\, x \wedge \alpha \rangle|$$

$$\int_0^1 e^{t\,|f(\alpha) - f(x) - (1/2)\sum_{k<l} \Im m\, b_{k,l}\, \chi(\langle x \rangle \Im m\, b_{k,l}) \langle e_{k,l},\, x \wedge \alpha \rangle|}\, dt\, |\phi_j(x - \alpha)|$$

$$\leqq c_0 \left(|x - \alpha|\, \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} + \frac{n(n-1)}{4c_1} |x - \alpha| \right)$$
$$\times\, e^{[|x-\alpha|\, \|\nabla f\|_{L^\infty} + n(n-1)/4c_1)|x-\alpha|]}\, e^{-(|x-\alpha|/c_0)}$$

$$\leqq c_0 |x - \alpha| \left(\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} + \frac{n(n-1)}{4c_1} \right) e^{-|x-\alpha|[(1/c_0) - (n(n-1)/4c_1) - \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)}]}.$$

Par hypothèse c_1 est assez grand. Si on suppose de plus que M est suffisamment grand, on a alors :

$$\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} + \frac{n(n-1)}{4c_1} \leqq \frac{1}{2c_0}$$

et on obtient :

$$|g_{\alpha, j}^{\tilde{B}}(x)| \leqq c' \varepsilon\, e^{-|x-\alpha|/c'},$$

avec $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut en fonction de M et de c_1.

Ceci entraîne que pour tout $(\alpha, \beta) \in \Gamma^2$ et pour tout $j, k \in \{1, \ldots, N\}$, on a

$$|\langle g_{\alpha, j}^{\tilde{B}}, g_{\beta, k}^{\tilde{B}} \rangle| \leqq c' \varepsilon^2 e^{-(|\alpha-\beta|/c')} \tag{3.6}$$

Notons par $\mathcal{A}_+$ l'opérateur $e^f \mathrm{R}_+^{\widetilde{\mathrm{B}}} e^{-f} - \mathrm{R}_+^{\Re e\,\mathrm{B}}$. La matrice de l'opérateur $\mathcal{A}_+ \mathcal{A}_+^*$ est donnée par la matrice $(a_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ avec

$$a_{\alpha,\beta} = ((a_{j,k})_{1 \leqq j,k \leqq \mathrm{N}})_{\alpha,\beta} = [(\langle g_{\alpha,j}^{\widetilde{\mathrm{B}}}, g_{\beta,k}^{\widetilde{\mathrm{B}}} \rangle)_{j,k}]_{\alpha,\beta}.$$

On obtient par le lemme de Schur et (3.6) que :

$$\| \mathcal{A}_+ \|_{\mathscr{L}(\mathrm{L}^2, l^2)} \leqq \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{3.7}$$

Une estimation analogue est obtenue (de la même manière) pour l'opérateur $e^f \mathrm{R}_-^{\widetilde{\mathrm{B}}} e^{-f} - \mathrm{R}_-^{\Re e\,\mathrm{B}}$.

On en déduit [moyennant (3.5)] que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\mathrm{M}(\varepsilon) > 0$ et un voisinage $\mathscr{V}(\varepsilon)$ de 0 dans $\mathbf{C}^{\mathrm{N}_0}$ tels que pour tout $(z, b) \in \mathbf{C} \times \mathscr{V}(\varepsilon)$ et tout $f \in \mathrm{C}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ vérifiant :

$$\| \nabla f \|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^n)} + \| \Delta f \|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^n)} \leqq \frac{1}{\mathrm{M}(\varepsilon)}$$

nous avons pour $c_1 > \mathrm{M}(\varepsilon)$:

$$\| e^f \mathscr{P}_{\widetilde{\mathrm{B}}} e^{-f} - \mathscr{P}_{\Re e\,\mathrm{B}} \|_{\mathscr{L}(\mathrm{H}_2^{\Re e\,\mathrm{B}} \times l^2, \mathrm{L}^2 \times l^2)} \leqq \varepsilon.$$

Comme l'opérateur $\mathscr{P}_{\Re e\,\mathrm{B}}$ qui envoie $\mathrm{H}_2^{\Re e\,\mathrm{B}} \times l^2$ dans $\mathrm{L}^2 \times l^2$ est uniformément borné pour $(z, \Re e\,\mathrm{B})$ dans un voisinage $\mathscr{W}_0$ de $z_0 \times \{0\}$ dans $\mathbf{C} \times \mathbf{R}^{\mathrm{N}_0}$ et qu'il est bijectif (*cf.* [HS90]), on a *i*).

(ii) Notons $\mathscr{E}_{\widetilde{\mathrm{B}}}$ l'inverse de $\mathscr{P}_{\widetilde{\mathrm{B}}}$. Soient $\mathscr{W}$ et $\mathrm{M}_0 > 0$ donnés dans (*i*), alors pour $(z, b) \in \mathscr{W}$ et f bornée vérifiant $|\nabla f|_{\mathrm{L}^\infty} + |\Delta f|_{\mathrm{L}^\infty} \leqq \dfrac{1}{\mathrm{M}_0}$, l'opérateur $\mathscr{E}_{\widetilde{\mathrm{B}}, f}(z) = e^f \mathscr{E}_{\widetilde{\mathrm{B}}} e^{-f}$ est l'inverse à gauche, donc l'inverse de $e^f \mathscr{P}_{\widetilde{\mathrm{B}}} e^{-f}$, et vérifie :

$$\| \mathscr{E}_{\widetilde{\mathrm{B}}, f}(z) v \|_{\mathrm{H}_2^{\Re e\,\mathrm{B}} \times l^2} \leqq \mathrm{C} \| v \|_{\mathrm{L}^2 \times l^2}$$

où la constante $\mathrm{C} > 0$ est indépendante de (z, b) et f. Ainsi, pour tout $v \in \mathrm{C}_0^\infty \times l_0^2$, on a :

$$\| e^f \mathscr{E}_{\widetilde{\mathrm{B}}} v \|_{\mathrm{H}_2^{\Re e\,\mathrm{B}} \times l^2} \leqq \mathrm{C} \| e^f v \|_{\mathrm{L}^2 \times l^2}. \tag{3.8}$$

En fait cette inégalité reste vraie si f est non bornée; considérons la suite de fonctions :

$$f_\nu(x) = f(x)\, \chi\left(\frac{f(x)}{\nu}\right), \qquad \nu = 1, 2 \ldots$$

où χ est une fonction dans $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ qui vaut 1 au voisinage de l'origine.

Alors :

$$\nabla f_\nu = \tilde{\chi}\left(\frac{f}{\nu}\right) \nabla f$$

avec $\tilde{\chi}(t)=\chi(t)+t\chi'(t)$, et pour tout $\alpha\in\mathbf{N}^n$, $|\alpha|=2$,

$$\partial^\alpha f_\nu=\tilde{\chi}\left(\frac{f}{\nu}\right)(\partial^\alpha f)+\frac{1}{\nu}\tilde{\chi}'\left(\frac{f}{\nu}\right)(\partial f)^\alpha$$

où $(\partial f)^\alpha=(\partial_{x_1} f)^{\alpha_1}\ldots(\partial_{x_n} f)^{\alpha_n}$.

Soit $f\in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ telle que $|\nabla f|_{L^\infty}+|\Delta f|_{L^\infty}$ soit suffisamment petit pour que :

$$|\nabla f_\nu|_{L^\infty}+|\Delta f_\nu|_{L^\infty}\leqq\frac{1}{M_0},\quad \text{pour tout } v\in\mathbf{N}.$$

On obtient alors d'après (3.8), pour tout $v\in C_0^\infty\times l_0^2$:

$$\| e^{f_\nu}\,\mathscr{E}_{\tilde{B}}\, v\|_{H_2^{\mathfrak{Re}\,B}\times l^2}\leqq C\,\| e^{f_\nu} v\|_{L^2\times l^2},$$

comme, pour ν assez grand $f_\nu=f$ sur le support de v, on a :

$$\| e^{f_\nu}\,\mathscr{E}_{\tilde{B}}\, v\|_{H_2^{\mathfrak{Re}\,B}(\mathbf{R}^n)\times l^2(\Gamma)}\leqq C\,\| e^{f} v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)\times l^2(\Gamma)}.$$

D'où pour $K_1\times K_2\subset\subset \mathbf{R}^n\times\Gamma$ et ν assez grand, on obtient aussi :

$$\| e^{f}\,\mathscr{E}_{\tilde{B}}\, v\|_{H_2^{\mathfrak{Re}\,B}(K_1)\times l^2(K_2)}\leqq C\,\| e^{f} v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)\times l^2(\Gamma)}.$$

Par conséquent :

$$\| e^{f}\,\mathscr{E}_{\tilde{B}}\, v\|_{H_2^{\mathfrak{Re}\,B}(\mathbf{R}^n)\times l^2(\Gamma)}\leqq C\,\| e^{f} v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)\times l^2(\Gamma)}$$

ou d'une manière équivalente : pour tout $v\in C_0^\infty\times l_0^2$:

$$\| e^{f}\,\mathscr{E}_{\tilde{B}}\, e^{-f} v\|_{H_2^{\mathfrak{Re}\,B}\times l^2}\leqq C\,\| v\|_{L^2\times l^2}.$$

[la constante $C>0$ est indépendante de (z, b) dans $\mathscr{W}$ et f vérifiant $(*)$].

L'opérateur $e^f\,\mathscr{E}_{\tilde{B}}\,e^{-f}$ est alors borné sur $C_0^\infty\times l_0^2$ muni de la norme de $L^2\times l^2$ à valeurs dans $H_2^{\mathfrak{Re}\,B}\times l^2$, avec une norme uniforme en f vérifiant $(*)$ et (z, b) dans $\mathscr{W}$. Par densité, il se prolonge en un opérateur $E_f^{\tilde{B}}$, que l'on note aussi par $e^f\,\mathscr{E}_{\tilde{B}}\,e^{-f}$ de $L^2\times l^2$ dans $H_2^{\mathfrak{Re}\,B}\times l^2$, uniformément borné en (z, b) dans $\mathscr{W}$ et f vérifiant $(*)$.

Il reste à montrer que $E_f^{\tilde{B}}$ est l'inverse de $f^f\,\mathscr{P}_{\tilde{B}}\,e^{-f}$.

Pour $v\in C_0^\infty\times l_0^2$ on a $e^{-f}v\in L_0^2\times l_0^2$, donc pour (z, b) dans $\mathscr{W}$ et f vérifiant $(*)$:

$$(e^f\,\mathscr{P}_{\tilde{B}}\,e^{-f})(e^f\,\mathscr{E}_{\tilde{B}}\,e^{-f})v=e^f\,\mathscr{P}_{\tilde{B}}\,\mathscr{E}_{\tilde{B}}\,e^{-f}v=e^f e^{-f}v=v.$$

$$\underbrace{e^f\,\mathscr{P}_{\tilde{B}}\,\underbrace{e^{-f}\,\underbrace{e^f\,\mathscr{E}_{\tilde{B}}\,\underbrace{e^{-f})v}_{\in L_0^2\times l_0^2}}_{\in H_2^{\mathfrak{Re}\,B}\times l^2}}_{}}_{\in H_2^{\mathfrak{Re}\,B}\times l^2\ \text{(d'après ce qui précède)}}$$

Grâce à la continuité de $e^f\,\mathscr{P}_{\tilde{B}}\,e^{-f}$ et $E_f^{\tilde{B}}$, on trouve la même identité pour $v\in L^2\times L^2$. $\square$

PROPOSITION 3.2. — *Il existe un voisinage* $\mathscr{W}=\mathscr{W}_1\times\mathscr{W}_2$ *de* $z_0\times\{0\}$, *dans* $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^{N_0}$, *et une constante* $M>0$, *tels que pour tout* $c>M$, *et tout* $0<c'<c$, *l'application* $\mathscr{G}_{c,c'}$ *definie, pour z fixé dans* $\mathscr{W}_1$, *b' fixé dans* $\mathscr{W}_2$, *et* $c_1>M$ *par :*

$$\mathscr{G}_{c,c'}:\quad \mathscr{W}_2\mapsto\mathscr{L}(L^2\times l^2,\, H_2^{\Re e\, B'}\times l^2)$$
$$b\mapsto e^{\langle\ \rangle/c}\,\mathscr{E}_{\tilde{B}}\,e^{-(\langle\ \rangle/c')}$$

est de classe C^∞ *en b. De plus pour tout* $\gamma\in\mathbf{N}^{2N_0}$ *:*

$$\|\partial_b^\gamma\mathscr{G}_{c,c'}(b)\|_{\mathscr{L}(L^2\times l^2,\, H_2^{\Re e\, B'}\times l^2)}=\mathcal{O}_{\gamma,c,c'}(1),$$

indépendamment de b, b' et de c_1.

Preuve. — Observons tout d'abord que, pour tout $c>0$,

$$e^{(\langle\ \rangle/c)}\in\mathscr{L}(H_2^{\Re e\, B_1},\, H_2^{\Re e\, B_2})$$

uniformément en b_1, b_2 dans un voisinage $\mathscr{V}_1$ de 0 borné.

Rappelons (proposition 3.1 et remarque 3.2) qu'il existe un voisinage $\mathscr{W}$ de $z_0\times\{0\}$, dans $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^{N_0}$, et une constante $M_0>0$ tels que pour tout $c>M_0$ et pour tout (z, b) dans $\mathscr{W}$, on a pour $c_1>M_0$:

$$\|e^{\langle\ \rangle/c}\,\mathscr{E}_{\tilde{B}}\,e^{-(\langle\ \rangle/c)}\|_{\mathscr{L}(H_2^{\Re e\, B}\times l^2,\, L^2\times l^2)}=\mathcal{O}(1)$$

indépendamment de (z, b), de c (et de c_1).

Posons $\mathscr{W}=\mathscr{W}_1\times\mathscr{W}_2$, et fixons $c_1>M$. Soient b_1, b_2 dans $\mathscr{W}_2$, z dans $\mathscr{W}_1$, et c, c' deux constantes positives telles que $c>M=\max(M_0, 2c_0)$ et $0<c'<c$ [c_0 est donnée par (1.6)]. On a pour $c_1>M_0$, fixé :

$$\begin{aligned}e^{\langle\ \rangle/c}(\mathscr{E}_{\tilde{B}_1}-\mathscr{E}_{\tilde{B}_2})\,e^{-(\langle\ \rangle/c')}&\\ \times(e^{\langle\ \rangle/c}\,\mathscr{E}_{\tilde{B}_1}\,e^{-(\langle\ \rangle/d_1)})&[e^{\langle\ \rangle/d_1}(\mathscr{P}_{\tilde{B}_2}-\mathscr{P}_{\tilde{B}_1})\,e^{-(\langle\ \rangle/d_2)}]\\ &\times(e^{\langle\ \rangle/d_2}\,\mathscr{E}_{\tilde{B}_2}\,e^{-\langle\ \rangle/c'})\end{aligned}\tag{3.9}$$

où d_1, d_2 sont tels que $\max(M, c')<d_2<d_1<c$.

Pour tout b' fixé dans $\mathscr{W}_2$, la norme du premier facteur, respectivement du dernier facteur du membre de droite de (3.9), prise chacunes d'elles dans $\mathscr{L}(L^2\times l^2,\, H_2^{\Re e\, B'}\times l^2)$, est indépendante de b_1, respectivement de b_2 dans $\mathscr{W}_2$.

La norme du terme du milieu, prise dans $\mathscr{L}(H_2^{\Re e\, B'}\times l^2,\ \times L^2\times l^2)$, est un $\mathcal{O}(|b_2-b_1|)$ (*voir* proposition 2.5), d'où la continuité de l'application $\mathscr{G}_{c,c'}$.

Posons $b_j=(b_j^i)_{1\leq i\leq N_0}\in\mathscr{W}_2$, $j\in\{1, 2\}$, et remplaçons dans (3.9) b_2 par $b_1+\Delta\Re e\, b_1^i\, e_i$, avec i fixé.

On obtient, en divisant les deux membres de (3.9) par $\Delta\Re e\, b_1^i$ et en passant à la limite quand $|\Delta\Re e\, b_1^{(i)}|$ tend vers 0 :

$$\begin{aligned}\partial_{\Re e\, b_1^i}(e^{\langle\ \rangle/c}\,\mathscr{E}_{\tilde{B}_1}\,e^{-(\langle\ \rangle/c')})&=(e^{\langle\ \rangle/c}\,\mathscr{E}_{\tilde{B}_1}\,e^{-(\langle\ \rangle/d_1)})\\ &\times[\partial_{\Re e\, b_1^i}(e^{\langle\ \rangle/d_1}\,\mathscr{P}_{\tilde{B}_1}\,e^{-(\langle\ \rangle/d_2)})](e^{\langle\ \rangle/d_2}\,\mathscr{E}_{\tilde{B}1}\,e^{-(\langle\ \rangle/c')})\end{aligned}$$

où d_1, d_2, c et c' sont choisis comme dans (3.9). Les dérivées $(\partial_{\Re e\, b_1^i})_{1 \leqq i \leqq N_0}$ sont prises au sens de la norme.

De la même manière (et sous les mêmes hypothèses), on montre :

$$\forall\, 1 \leqq i \leqq N_0, \quad \partial_{\Im m\, b_1^i}(e^{\langle\ \rangle/c}\, \mathscr{E}_{\tilde{B}_1}\, e^{-(\langle\ \rangle/c')}) \\ = (e^{\langle\ \rangle/c}\, \mathscr{E}_{\tilde{B}_1}\, e^{-(\langle\ \rangle/d_1)})\, [\partial_{\Im m\, b_1^i}(e^{\langle\ \rangle/d_1}\, \mathscr{P}_{\tilde{B}_1}\, e^{-(\langle\ \rangle/d_2)})]\, (e^{\langle\ \rangle/d_2}\, \mathscr{E}_{\tilde{B}_1}\, e^{-(\langle\ \rangle/c')})$$

Itérant ces arguments, on obtient la proposition en remarquant que d'une manière générale, pour tout $\gamma \in \mathbf{N}^{2N_0}$, on a :

$\partial_b^\gamma\, \mathscr{G}_{c,c'}(b) =$ combinaison linéaire finie de termes de la forme :

$$(e^{\langle\ \rangle/c_1}\, \mathscr{E}_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/c_2)})\, [\partial_b^{\gamma_1}(e^{\langle\ \rangle/c_2}\, \mathscr{P}_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/c_3)})]\, (e^{\langle\ \rangle/c_3}\, \mathscr{E}_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/c_4)}) \dots \\ \times (e^{\langle\ \rangle/c_k}\, \mathscr{E}_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/c_{k+1})})\, [\partial_b^{\gamma_k}(e^{\langle\ \rangle/(c_{k+1})}\, \mathscr{P}_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/(c_{k+2}))})] \\ \times (e^{\langle\ \rangle/c_{k+2})}\, \mathscr{E}_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/c')}) \quad (3.10)$$

où $\gamma_1 + \dots + \gamma_k = \gamma$. La suite $(c_j)_{1 \leqq j \leqq k+2}$ est une suite strictement décroissante de réels positifs : $c = c_1 > c_2 > \dots > c_{k+2} > \max(\mathrm{M}, c')$. □

Soient $\mathrm{M} > 0$, $\mathscr{W} = \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$ donnés dans la proposition précédente et $c_1 > \mathrm{M}$ fixé, nous avons alors :

Proposition 3.3. – *Soient c, c' comme dans la proposition précédente. Alors il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $z \in \mathscr{W}_1$* et b, b' *dans $\mathscr{W}_2$ on a pour tout $\mathscr{A} \subset \{1, \dots, N_0\}$:*

$$\| \bar{\partial}_b^{\mathscr{A}}\, \mathscr{G}_{c,c'} b) \|_{\mathscr{L}(L^2 \times l^2,\ H_2^{\Re e B'} \times l^2)} \leqq \mathrm{K} \exp\left(-\frac{1}{\mathrm{K}} \sum_{i \in \mathscr{A}} \frac{1}{|\Im m\, b_i|} \right)$$

(*La constante* $\mathrm{K} > 0$ *est indépendante de* c_1).

Preuve. – Pour tout $\mathscr{A} \subset \{1, \dots, N_0\}$ et $b \in \mathscr{W}_2$, on a :

$\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}}\, \mathscr{G}_{c,c'}(b) =$ comb. lin. finie de termes de la forme :

$$(e^{\langle\ \rangle/c_1}\, \mathscr{E}_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/c_2)})\, [\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}_1}(e^{\langle\ \rangle/c_2}\, \mathscr{P}_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/c_3)})]\, (e^{\langle\ \rangle/c_3}\, \mathscr{E}_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/c_4)}) \dots \\ \times (e^{\langle\ \rangle/c_k}\, \mathscr{E}_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/(c_{k+1}))})\, [\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}_k}(e^{(\langle\ \rangle/(c_{k+1}))}\, \mathscr{P}_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/(c_{k+2}))})] \\ \times (e^{(\langle\ \rangle/(c_{k+2}))}\, \mathscr{E}_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/c')}) \quad (3.11)$$

où la suite $(c_k)_{1 \leqq k \leqq |\mathscr{A}|}$ est choisie comme dans (3.10) et $(\mathscr{A}_i)_i$ est une suite de partie de $\mathscr{A}$ telles que $\mathscr{A} = \bigcup_{j=1}^{k} \mathscr{A}_j$, $\mathscr{A}_i \cap \mathscr{A}_j = \varnothing$, pour $i \neq j$.

La proposision 3.2 donne :

$$\| e^{\langle\ \rangle/c_j}\, \mathscr{E}_{\tilde{B}}\, e^{-(\langle\ \rangle/(c_{j+1}))} \|_{\mathscr{L}(L^2 \times l^2,\ H_2^{\Re e B'} \times l^2)} = \mathscr{O}_j(1).$$

On obtient alors l'estimation recherchée à partir de (3.11) en utilisant la proposition 2.6. □

4. PREUVE DU RÉSULTAT

4.1. Formule de Stokes

Soient $b=(b_i)_{1\leqq i\leqq N_0}\in\mathbb{C}^{N_0}$, et $\mathscr{A}$ une partie de $\mathscr{N}_0=\{1,\ldots,N_0\}$, on note :

$$\Omega^{\mathscr{A}}=\prod_{i\in\mathscr{A}}\Omega_i,\qquad \partial^{\mathscr{A}}\Omega=\prod_{i\in\mathscr{A}}\partial\Omega_i$$

$$L^{\mathscr{A}}(db)=\prod_{i\in\mathscr{A}}L(db_i)=\prod_{i\in\mathscr{A}}d(\Re e\, b_i)\wedge d(\Im m\, b_i)\ \text{et}\ db^{\mathscr{A}}=\prod_{i\in\mathscr{A}}db_i.$$

LEMME 4.1. Formule de Stokes. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach*, $\mathscr{W}$ *un ouvert dans* $\mathbb{C}^{N_0}$, $\Omega=\prod_{i=1}^{N_0}\Omega_i$ *un polydisque ouvert de* $\mathbb{C}^{N_0}$ *tel que* $\bar\Omega\subset\mathscr{W}$, *et* $f:\mathscr{W}\ni b\to f(b)\in\mathscr{L}(E,F)$ *de classe* C^∞ *dans* $\mathscr{W}$. *Alors pour tout* $b=(b_i)_{1\leqq i\leqq N_0}\in\Omega$ *on a :*

$$f(b)=\sum_{\substack{\mathscr{A}\cup\mathscr{B}=\mathscr{N}\\ \mathscr{A}\cap\mathscr{B}=\varnothing}}\left(\frac{1}{2i\pi}\right)^{|\mathscr{B}|}\left(\frac{-1}{\pi}\right)^{|\mathscr{A}|}\int_{\partial^{\mathscr{B}}\Omega\times\Omega^{\mathscr{A}}}\frac{\bar\partial_b^{\mathscr{A}}f(b')}{\prod_{i=1}^{N_0}(b'_i-b_i)}L^{\mathscr{A}\,(db')}(db')^{\mathscr{B}}$$

Preuve. — En dimension 1 le résultat découle de la formule de Stokes et de la régularité de f dans $\mathscr{W}$. Montrons le résultat, en dimension N_0, par récurrence. Supposons que le résultat est vrai en dimension $k<N_0$:

$$f(b)=\sum_{\substack{\mathscr{A}\cup\mathscr{B}=\mathscr{K}\\ \mathscr{A}\cap\mathscr{B}=\varnothing}}\left(\frac{1}{2i\pi}\right)^{|\mathscr{B}|}\left(\frac{-1}{\pi}\right)^{|\mathscr{A}|}$$
$$\times\int_{\partial^{\mathscr{B}}\Omega_{\mathscr{K}}\times\Omega_{\mathscr{K}}^{\mathscr{A}}}\frac{\bar\partial_b^{\mathscr{A}}f(b')}{\prod_{i=1}^{k}(b'_i-b_i)}L^{\mathscr{A}}(db')(db')^{\mathscr{B}}\qquad(\mathscr{R}_k)$$

où $b=(b_1,\ldots,b_k)\in\Omega_{\mathscr{K}}$, $\mathscr{K}=\{1,\ldots,k\}$, $\Omega_{\mathscr{K}}=\prod_{i\in\mathscr{K}}\Omega_i$ et où f est C^∞ dans un voisinage de $\bar\Omega_{\mathscr{K}}$.

Considérons f de classe C^∞ dans un voisinage de $\Omega_{\mathscr{K}'}$,

$$\mathscr{K}'=\{1,\ldots,k+1\},$$

et calculons

$$f(b_1,\ldots,b_{k+1}),\ k+1\leqq N_0.$$

On a d'après ce qui précède, pour tout $b=(b_1, \ldots, b_k)$ fixé :

$$f(b, b_{k+1}) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega_{k+1}} \frac{f(b, b'_{k+1})}{b'_{k+1}-b_{k+1}}\, db'_{k+1} - \frac{1}{\pi}\int_{\Omega_{k+1}} \frac{\bar{\partial}_{b'_{k+1}} f(b, b'_{k+1})}{b'_{k+1}-b_{k+1}}\, \mathrm{L}(db'_{k+1})$$

Par la relation de recurrence $(\mathscr{R}_k)$; on obtient, pour tout b'_{k+1} fixé :

$$\begin{aligned}
f(b, b_{k+1}) = {}& \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega_{k+1}} \frac{db'_{k+1}}{(b'_{k+1}-b_{k+1})}\Bigg[\sum_{\substack{\mathscr{A}\cup\mathscr{B}=\mathscr{K}\\ \mathscr{A}\cap\mathscr{B}=\varnothing}} \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^{|\mathscr{B}|}\left(-\frac{1}{\pi}\right)^{|\mathscr{A}|} \\
&\times \int_{\partial^{\mathscr{B}}\Omega_{\mathscr{K}}\times\Omega_{\mathscr{K}}^{\mathscr{A}}} \frac{\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}} f(b', b'_{k+1})}{\prod_{i=1}^{k}(b'_i-b_i)}\, \mathrm{L}^{\mathscr{A}}(db')(db')^{\mathscr{B}}\Bigg] \\
&- \frac{1}{\pi}\int_{\Omega_{k+1}} \Bigg(\bar{\partial}_{b'_{k+1}}\Bigg[\sum_{\substack{\mathscr{A}\cup\mathscr{B}=\mathscr{K}\\ \mathscr{A}\cap\mathscr{B}=\varnothing}} \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^{|\mathscr{B}|}\left(-\frac{1}{\pi}\right)^{|\mathscr{A}|} \\
&\times \int_{\partial^{\mathscr{B}}\Omega_{\mathscr{K}}\times\Omega_{\mathscr{K}}^{\mathscr{A}}} \frac{\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}} f(b', b'_{k+1})}{\prod_{i=1}^{k}(b'_i-b_i)}\, \mathrm{L}^{\mathscr{A}}(db')(db')^{\mathscr{B}}\Bigg]\Bigg) \frac{\mathrm{L}(db'_{k+1})}{(b'_{k+1}-b_{k+1})} \\
= {}& \sum_{\substack{\mathscr{A}\cup\mathscr{B}=\mathscr{K}\\ \mathscr{A}\cap\mathscr{B}=\varnothing}} \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^{|\mathscr{B}|+1}\left(-\frac{1}{\pi}\right)^{|\mathscr{A}|} \\
&\times \int_{\partial\Omega_{k+1}}\int_{\partial^{\mathscr{B}}\Omega_{\mathscr{K}}\times\Omega_{\mathscr{K}}^{\mathscr{A}}} \frac{\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}} f(b', b'_{k+1})}{\prod_{i=1}^{k+1}(b'_i-b_i)}\, \mathrm{L}^{\mathscr{A}}(db')(db')^{\mathscr{B}}\, db'_{k+1} \\
&+ \sum_{\substack{\mathscr{A}\cup\mathscr{B}=\mathscr{K}\\ \mathscr{A}\cap\mathscr{B}=\varnothing}} \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^{|\mathscr{B}|}\left(-\frac{1}{\pi}\right)^{|\mathscr{A}|+1} \\
&\times \int_{\Omega_{k+1}}\int_{\partial^{\mathscr{B}}\Omega_{\mathscr{K}}\times\Omega_{\mathscr{K}}^{\mathscr{A}}} \frac{\bar{\partial}_{b_{k+1}}\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}} f(b', b'_{k+1})}{\prod_{i=1}^{k+1}(b'_i-b_i)}\, \mathrm{L}^{\mathscr{A}}(db')(db')^{\mathscr{B}}\, \mathrm{L}(db'_{k+1}) \\
= {}& \sum_{\substack{\mathscr{A}\cup\mathscr{B}=\mathscr{K}'\\ \mathscr{A}\cap\mathscr{B}=\varnothing}} \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^{|\mathscr{B}|}\left(-\frac{1}{\pi}\right)^{|\mathscr{A}|}
\end{aligned}$$

$$\times \int_{\partial^{\mathscr{B}}\Omega_{\mathscr{K}'}\cdot\Omega^{\mathscr{A}}{}_{\mathscr{K}'}} \frac{\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}} f(b', b'_{k+1})}{\prod_{i=1}^{k+1}(b'_i - b_i)} \mathrm{L}^{\mathscr{A}}(db')(db')^{\mathscr{B}}$$

où $\mathscr{K}' = \{1, \ldots, k+1\}$ $\square$

Preuve du théorème 1.3. — Soient $\mathscr{W} = \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$, $M > 0$, c, c' et $\mathscr{G}_{c,c'}$ comme dans la proposition 3.2. Notons $\Omega = \Omega_\rho$ un polydisque de centre 0 et de rayon ρ, tel que $\bar{\Omega}$ soit inclus strictement dans $\mathscr{W}_2$. Alors, d'après le lemme 4.1, pour $b \in \Omega \cap \mathbf{R}^{N_0}$ et $z \in \mathscr{W}_1$, on a :

$$\mathscr{G}_{c,c'}(b) = \sum_{\substack{\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = \mathscr{N}_0 \\ \mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \varnothing}} \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^{|\mathscr{B}|} \left(-\frac{1}{\pi}\right)^{|\mathscr{A}|} \int_{\partial^{\mathscr{B}}\Omega \times \Omega^{\mathscr{A}}} \frac{\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}} \mathscr{G}_{c,c'}(b')}{\prod_{i=1}^{N_0}(b'_i - b_i)} \mathrm{L}^{\mathscr{A}}(db')(db')^{\mathscr{B}}$$

(*voir* le lemme 4.1 pour les notations).

Ainsi, pour tout $\beta \in \mathbf{N}^{N_0}$ et tout $b \in \Omega \cap \mathbf{R}^{N_0}$:

$$\|\partial_b^\beta \mathscr{G}_{c,c'}(b)\|_{(1)} = \mathscr{O}(1) \prod_{j=1}^{N_0} (\beta_j!)$$
$$\times \sum_{\substack{\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = \mathscr{N}_0 \\ \mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \varnothing}} \int_{\partial^{\mathscr{B}}\Omega \times \Omega^{\mathscr{A}}} \frac{\|\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}} \mathscr{G}_{c,c'}(b')\|_{(1)}}{\prod_{i=1}^{N_0}|b'_i - b_i|^{\beta_i+1}} \mathrm{L}^{\mathscr{A}}(db')\,|(db')^{\mathscr{B}}|$$

où $\|\,.\,\|_{(1)}$ désigne la norme dans $\mathscr{L}(\mathrm{L}^2 \times l^2, \mathrm{H}_2 \times l^2)$ ($\mathrm{H}_2(\mathbf{R}^n) = \mathrm{H}^2(\mathbf{R}^n)$ est l'espace de Sobolev usuel).

D'après la proposition 3.3, il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\int_{\partial^{\mathscr{B}}\Omega \times \Omega^{\mathscr{A}}} \frac{\|\bar{\partial}_b^{\mathscr{A}} \mathscr{G}_{c,c'}(b')\|_{(1)}}{\prod_{i=1}^{N_0}|b'_i - b_i|^{\beta_i+1}} \mathrm{L}^{\mathscr{A}}(db')\,|(db')^{\mathscr{B}}|$$
$$\leqq K \int_{\partial^{\mathscr{B}}\Omega \times \Omega^{\mathscr{A}}} \frac{e^{(-(1/K)\sum_{i\in\mathscr{A}} 1/|\mathfrak{Im}\, b'_i|)}}{\prod_{i=1}^{N_0}|b'_i - b_i|^{\beta_i+1}} \mathrm{L}^{\mathscr{A}}(db')(db')^{\mathscr{B}}$$
$$\leqq K \left[\int_{\partial^{\mathscr{B}}\Omega} \frac{1}{\prod_{i\in\mathscr{B}}|b'_i - b_i|^{\beta_i+1}} |(db')^{\mathscr{B}}|\right]$$
$$\times \left[\int_{\Omega^{\mathscr{A}}} \frac{e^{(-(1/K)\sum_{i\in\mathscr{A}} 1/|\mathfrak{Im}\, b'_i|)}}{\prod_{i\in\mathscr{A}}|b'_i - b_i|^{\beta_i+1}} \mathrm{L}^{\mathscr{A}}(db')\right] = K\,[*]\,[**] \quad (4.1)$$

avec :

$$[**] \leqq \int_{\Omega^{\mathscr{A}}} \frac{e^{(-(1/K)\sum_{i\in\mathscr{A}} 1/|\mathfrak{Im}\, b'_i|)}}{\prod_{i\in\mathscr{A}} |\mathfrak{Im}\, b'_i|^{\beta_i+1}} L^{\mathscr{A}}(db') \leqq \prod_{i\in\mathscr{A}} C_{K,\rho}^{\beta_i+1} (\beta_i+1)^{\beta_i+1}.$$

L'intégrale [*] se majore encore plus facilement pour tout b dans un polydisque Ω' inclus strictement dans Ω et on trouve :

$$\sum_{\substack{\mathscr{A}\cup\mathscr{B}=\mathscr{N}_0\\ \mathscr{A}\cap\mathscr{B}=\varnothing}} \int_{\partial^{\mathscr{B}}\Omega\times\Omega^{\mathscr{A}}} \frac{\|\overline{\partial}_b^{\mathscr{A}} \mathscr{G}_{c,c'}(b')\|_{(1)}}{\prod_{i=1}^{N_0} |b'_i - b_i|^{\beta_i+1}} L^{\mathscr{A}}(db')\,|(db')^{\mathscr{B}}|$$

$$\leqq C_{(K,\rho)}^{|\beta|+1} \sum_{\mathscr{A}\subset\mathscr{N}_0} \prod_{i\in\mathscr{A}} (\beta_i+1)^{\beta_i+1}$$

$$\leqq C_{(K,\rho,N_0)}^{|\beta|+1} \prod_{1\leqq i\leqq N_0} (\beta_i+1)^{\beta_i+1}$$

$$\leqq \tilde{C}_{(K,\rho,N_0)}^{|\beta|+1} \prod_{1\leqq i\leqq N_0} \beta_i!$$

où la constante K est donnée par (4.1) et ρ est le rayon du polydisque Ω.

Ainsi, il existe $C>0$ tel que pour tout $\beta\in N^{N_0}$ et pour tout (z, b) dans $\mathscr{W}_1\times\Omega'$:

$$\|\partial_b^\beta \mathscr{G}_{c,c'}\|_{(1)} \leqq C^{|\beta|+1}(\beta!)^2$$

où $\beta! = \prod_{i=1}^{N_0} \beta_i!$, et $\beta=(\beta_i)_{1\leqq i\leqq N_0}$.

La matrice $(E_{-+}(B, z, \alpha, \gamma))_{\alpha,\gamma\in\Gamma}$ de l'hamiltonien effectif $E_{-+}(B, z)$ [de classe C^∞ en B (*cf.* proposition 3.2)] vérifie alors :

$$|e^{\langle\alpha\rangle/c}\partial_B^\beta E_{-+}(B, z, \alpha, \gamma)\, e^{-(\langle\gamma\rangle/c')}| \leqq \tilde{C}^{|\beta|+1}(\beta!)^2,$$
$$\forall \alpha, \gamma\in\Gamma, \quad \forall (z, b)\in\mathscr{W}_1\times\Omega'.$$

Le théorème 1.3 est obtenu en fixant $\gamma=0$. □

Le corollaire 1.4 est une conséquence immédiate du théorème 1.1 et du théorème 1.2.

REMERCIEMENTS

Je remercie J. Sjöstrand pour son aide précieuse.

RÉFÉRENCES

[Bel87] J. BELLISSARD, C*-Algebra in solide state physics, 2d-electrons in a uniform magnetic field, *Proceedings of the Warwick conference on operator algebras*, 1987.

[Bu87] V. S. BUSLAEV, Semiclassical approximation for equations with periodic coefficients, *Russian Math. Survey*, vol. **42**, 6, 1987, p.97-125.

[Di93] M. DIMASSI, Développements asymptotiques pour des perturbations lentes de l'opérateur de Schrödinger périodique, *Comm. in P.D.E.*, vol. **8**, 5 et 6, 1993, p. 771-803.

[Ge89] C. GÉRARD, Resonnance of a Hill operator perturbed by an exponnetially decreasing additive potential, *Comm. Math. Phys.*, vol. **126**, 1989, p. 263-290.

[G-M-S] C. GÉRARD, A. MARTINEZ et S. SJÖSTRAND, A Mathematical approach to the effective hamiltonian in perturbed periodic problems, *Comm. Math. Phys.* (à paraître).

[Gu-Ra-Tr88] J. C. GUILLOT, J. RALSTON et E. TRUBOWITZ, Semi-Classical Asymptotique in Solid State Physics, *Comm. in Math. Phys.*, vol. **116**, 1988, p. 401-415.

[HS89] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Equation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper, *Lecture Notes in Physics*, Springer, vol. **345**, 1989, p. 118-197.

[HS90] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, On diamagnetism and the Haas-van Alphen effect, *Annales de l'Institut Henri-Poincaré*, Physique Théorique, vol. **52**, 4, 1990, p. 303-375.

[Kl93] F. KLOPP, *Resonances for perturbation of a semi-classical periodic Schrödinger operator*, Preprint 93-15, Université d'Orsay, 1993.

[LS92] M. LAGUEL et A. SMAÏL, Sur l'hamiltonien effectif associé à l'opérateur de Schrödinger magnétique avec potentiel périodique en dimension 2, *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. **316**, série I, 1993, p. 685-689.

[Ne89] G. NENCIU, Bloch electrons in a magnetic field: rigourous justification of the Peierl-Onsager effective Hamiltonian, *Letters in Math. Phys.*, vol. **17**, 1989, p. 247-252.

[Sjo82] J. SJÖSTRAND, Singularités analytiques microlocales, *Astérisque*, Société Mathématique de France, vol. **95**, 1982.

(*Manuscrit reçu le* 4 *mars* 1993;
version corrigée reçue le 23 *juin* 1993.)