

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PIERRE MOUSSA

Itération des polynômes et propriétés d'orthogonalité

Annales de l'I. H. P., section A, tome 44, n° 3 (1986), p. 315-325

[<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1986__44_3_315_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1986__44_3_315_0)

© Gauthier-Villars, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Itération des polynômes et propriétés d'orthogonalité

par

Pierre MOUSSA

Service de Physique Théorique, C. E. N. Saclay,
91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

RÉSUMÉ. — On considère l'action d'un changement de variable polynomial sur une mesure à support réel ou complexe, et on étudie la transformation correspondante de l'ensemble des polynômes orthogonaux associés. Un rôle particulier est joué par les mesures laissées invariantes par la transformation polynomiale, dont le support est l'ensemble de Julia de la transformation. Les polynômes orthogonaux associés à ces mesures constituent une généralisation naturelle des polynômes classiques de Tchebycheff.

ABSTRACT. — We consider a polynomial change of variable acting on a measure with real or complex support. The corresponding transformation of the set of orthogonal polynomials is analyzed. A particular emphasis is given on the invariant measures under the polynomial transformation, which have support on the Julia set. The orthogonal polynomials associated with these invariant measures are natural generalisations of the classical Chebyshev polynomials.

I. INTRODUCTION

On assiste actuellement à un vif regain d'intérêt pour l'étude des transformations polynomiales du plan complexe. Les ensembles invariants, connus depuis Fatou et Julia [1] sont maintenant facilement visualisés et leurs propriétés fractales sont mises en évidence [2] [3]. Les ité-

rations des transformations polynomiales montrent toute la complexité que peut comporter un système dynamique non linéaire, qu'on aurait *a priori* considéré comme le plus « simple » que l'on puisse concevoir [4] [5]. Sur les ensembles invariants, on peut définir des mesures particulièrement intéressantes [6], et l'objet de cette communication est de décrire les propriétés des polynômes orthogonaux associés. Si l'on ne veut pas se restreindre au cas où l'ensemble de Julia de la transformation est réel, il nous faut utiliser des méthodes de variable complexe, ce qui explique la présentation peu orthodoxe de la transformation des mesures qui fait l'objet de la section II. En effet le changement de variable polynomial a un inverse multivalué, ce qui crée une ambiguïté dans la définition de la transformation des mesures. Dans la section III, on montrera que cette ambiguïté peut être levée de façon à engendrer des propriétés très simples de transformation des polynômes orthogonaux et des relations de récurrence à trois termes associées. Dans la section IV, on précisera les propriétés des mesures invariantes et des polynômes orthogonaux associés, et on indiquera la relation avec les fractions continues presque périodiques. En conclusion on mentionnera quelques problèmes ouverts, ainsi que les applications à la physique théorique. Ce travail résulte de collaborations tour à tour avec D. Bessis, M. L. Mehta, J. Bellissard, G. A. Baker [7] [8] [9] [10] [11], et s'est déroulé parallèlement aux travaux de M. Barnsley, J. S. Geronimo, A. N. Harrington [12] [13] [14] [15]. Quelques points ont pu être clarifiés grâce à des discussions avec D. Bessis et J. S. Geronimo.

II. TRANSFORMATION POLYNOMIALE DES MESURES

Considérons tout d'abord un polynôme $T(z)$ de degré d , à coefficients réels, unitaire (le coefficient de degré d est égal à un), ayant la propriété suivante : il existe un intervalle S , fermé borné de l'axe réel, tel que $\forall x \in S$ on ait $y_i \in S$ pour toute solution $y_i = T_i^{(-1)}(x)$, $i = 1, 2, \dots, d$, de l'équation $T(y) = x$. Sous cette hypothèse, l'ensemble de Julia [1] [5] du polynôme est réel. Si maintenant on considère une mesure à support dans S , on peut associer à T la transformation suivante sur les mesures : $\mu \rightarrow \mu^T$, définie par l'action sur une fonction mesurable f arbitraire :

$$\int_S f(x) d\mu^T(x) = \sum_{i=1}^d \int_S \gamma_i(x) f(T_i^{-1}(x)) d\mu(x). \quad (1)$$

Dans cette équation, les $T_i^{-1}(x)$ sont les branches inverses du polynôme

et les $\gamma_i(x)$ des fonctions mesurables arbitraires, soumises à la contrainte :

$$\sum_{i=1}^d \gamma_i(x) = 1. \quad (2)$$

Supposons pour simplifier que les diverses branches inverses appliquées à S sont disjointes : $T_i^{-1}S \cap T_j^{-1}S = \emptyset$ si $i \neq j$. En fait les seules intersections possibles sont les points où $T'(x) = 0$ qu'on supposera de mesure nulle par rapport à μ . On a alors :

$$\mu^T(T_i^{-1}E) = \int_E \gamma_i(x) d\mu(x) \quad (3)$$

pour tout ensemble $E \subset S$ mesurable, d'où, en utilisant (2) :

$$\mu^T(T^{-1}E) = \mu(E). \quad (4)$$

L'équation (4) est donc insuffisante pour définir μ^T , il faut en plus se donner les poids $\gamma_i(x)$ des branches inverses. Le choix le plus simple est : $\gamma_i(x) = \frac{1}{d}, \forall i$, et il permet de définir une mesure transformée ayant même poids sur toutes les branches inverses (mesure dite équilibrée, en anglais « balanced » [13]).

La fonction génératrice $g(z)$ associée à la mesure μ est :

$$g(z) = \int_S \frac{d\mu(x)}{z-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{z^{n+1}}, \quad (5)$$

où les μ_n sont les moments de la mesure :

$$\mu_n = \int_S x^n d\mu(x). \quad (6)$$

On définit de façon analogue $g^T(z)$ et les moments μ_n^T pour la mesure transformée. On a alors, d'après (1) :

$$g^T(z) = \int_S \frac{d\mu^T(x)}{z-x} = \int_S \frac{W(z, x)}{T(z)-x} d\mu(x), \quad (7)$$

où l'on pose :

$$\sum_i \frac{\gamma_i(x)}{z - T_i^{-1}(x)} = \frac{W(z, x)}{T(z)-x}. \quad (8)$$

$W(z, x)$ est un polynôme de degré $(d-1)$ en z , donc le coefficient de plus haut degré est égal à 1, à cause de (2). Nous allons nous restreindre au cas où les coefficients de ce polynôme ne dépendent pas de x : $W(z, x) \equiv W(z)$, ce qui permet de donner à (7) la forme de l'équation fonctionnelle :

$$g^T(z) = W(z)g(T(z)). \quad (9)$$

Cette forme correspond au choix suivant des poids $\gamma_i(x)$:

$$\gamma_i(x) = \frac{W(T_i^{-1}(x))}{T'(T_i^{-1}(x))}. \quad (10)$$

Le choix $W(z) = \frac{1}{d} T'(z)$ conduit à la mesure équilibrée mentionnée plus haut.

Lorsque l'ensemble de Julia de T n'est pas réel, il faut substituer aux considérations précédentes des arguments portant sur des intégrales de contour. Partons tout d'abord d'une fonction $g(z)$ supposée analytique dans un voisinage de l'infini et admettant un développement en série de la même forme que la deuxième expression de (5). On associe alors à g une forme linéaire sur les fonctions analytiques $f(z)$ bornées à l'infini en intégrant sur un cercle assez grand Γ pour être dans le domaine d'analyticité de g . La quantité $\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} f(z)g(z)dz$ remplace alors $\int f(x)d\mu(x)$ et s'y identifie dans le cas où g est de la forme (5). Les équations (1) et (7) sont remplacées par (cf. (8)) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} f(z)g^T(z)dz &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=1}^d \oint_{\Gamma} \gamma_i(z)f(T_i^{-1}(z))g(z)dz \\ g^T(z) &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} \frac{W(z, z')}{T(z) - z'} g(z')dz' \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

sous l'hypothèse que les fonctions poids γ_i ainsi que la fonction W définie en (8) soient analytiques par rapport à leurs variables respectives. Si on fait pour les fonctions poids le choix indiqué en (10) on aura de même que précédemment l'équation fonctionnelle (9), où, rappelons-le, $W(z)$ est un polynôme unitaire de degré $(d - 1)$ en z .

A partir de la fonction analytique $g(z)$ on peut définir les moments par une intégrale de contour qui remplace (6) :

$$\mu_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} \frac{g(z)dz}{z^{n+1}} \quad (12)$$

et on peut définir formellement des polynômes orthogonaux de la façon suivante :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} P_n(z)P_m(z)g(z)dz = h_n \delta_{mn}. \quad (13)$$

Le polynôme $P_n(z)$ est unitaire de degré n et les h_n sont les déterminants de Hadamard construits avec les coefficients μ_n : $h_n = \det(M)$ où M est une matrice à $(n + 1)$ dimensions dont les éléments de matrices sont $M_{ij} = \mu_{i+j}$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$. Les polynômes $P_n(z)$ sont alors bien définis

si tous les h_n sont différents de zéro [16], et les $P_n(z)$ ne sont rien d'autre que les dénominateurs des approximants de Padé $[n - 1/n]$ au développement de $g(z)$ au voisinage de l'infini [17], qu'on peut définir par la propriété :

$$g(z) - [n - 1/n]_g(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right). \quad (14)$$

Ces polynômes orthogonaux satisfont à une relation de récurrence à trois termes :

$$P_{n+1}(x) = (x - A_n)P_n(x) - R_n P_{n-1}(x) \quad (15)$$

avec :

$$R_n = h_n/h_{n-1}, \quad A_n = \frac{1}{2i\pi h_n} \oint z P_n^2(z) g(z) dz. \quad (16)$$

Ces coefficients sont également reliés au développement en fraction continue de $g(z)$.

$$g(z) = 1/(z - A_0 - R_1/(z - A_1 - \dots (z - A_n - R_{n+1}/(z - A_{n+1} - \dots)) \dots)). \quad (17)$$

Lorsque la mesure $d\mu(x)$ à support réel est positive, alors les coefficients R_n sont tous positifs et $g(z)$ est une fonction de Stieltjes [17].

Remarquons pour conclure que le produit scalaire (13) n'est pas hermitien. On trouvera des études utilisant des produits scalaires hermitiens dans les références [12] [13] [18].

III. TRANSFORMATION DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Considérons l'équation fonctionnelle (9) et les approximants de Padé [14] aux deux fonctions g et g^T figurant dans les deux membres. On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME. — Si les fonctions g et g^T sont reliées par la relation $g^T(z) = W(z)g(T(z))$ où W et T sont deux polynômes unitaires de degré $(d - 1)$ et d respectivement, on a alors la relation suivante entre les approximants de Padé :

$$[dn - 1/dn]_{g^T}(z) = W(z)[n - 1/n]_g(T(z)). \quad (18)$$

La preuve résulte de la simple comparaison des développements des deux membres de (9) au voisinage de l'infini, à cause de l'unicité des approximants de Padé.

COROLLAIRE. — Soient Q_n^g et P_n^g les numérateurs et les dénominateurs respectifs de l'approximant de Padé $[n - 1/n]_g$, on a :

$$Q_{dn}^{g^T}(z) = W(z)Q_n^g(T(z)), \quad (19)$$

et
$$P_{dn}^{g^T}(z) = P_n^g(T(z)). \quad (20)$$

Pour obtenir une sous-suite des polynômes orthogonaux (au sens de l'équation (13)) associés à g^T , il suffit donc de substituer $T(z)$ à z dans les polynômes orthogonaux associés à z .

Nous allons montrer que ces équations permettent de donner un algorithme [9] pour calculer les coefficients A_n^T et R_m^T de la fraction continue de g^T à partir des coefficients A_n et R_m de la fraction continue de g . En effet, on introduit à cet effet la matrice de Jacobi tridiagonale H , dont les seuls éléments non nuls sont pour $i = 0, 1, 2, \dots$:

$$\left. \begin{aligned} H_{ii} &= A_i \\ H_{i,i+1} &= 1 \\ H_{i+1,i} &= R_{i+1} \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Si l'on définit le vecteur colonne $\psi(x)$ par sa composante ψ_n , avec

$$\psi_n(x) = P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

alors la relation de récurrence à trois termes (15) s'écrit en termes matriciels :

$$H\psi(x) = x\psi(x). \quad (23)$$

Enfin si on définit l'opérateur D (« décimation » d'ordre d) par l'action :

$$(D\psi)_n = \psi_{dn}, \quad (24)$$

l'équation (20) revêt alors une forme matricielle particulièrement simple [10]:

$$DT(H^T) = HD \quad (25)$$

où H^T est défini à partir des coefficients de g^T de la même façon que H est défini en (21) à partir des coefficients de g .

Une analyse un peu fastidieuse montre que (25) permet de calculer par récurrence les coefficients A_n^T et R_m^T . Plus précisément, l'élément de matrice ligne n , colonne $(n-1)d$ de l'équation (25) donne pour $n \geq 1$ la relation :

$$R_{dn}^T R_{dn-1}^T \dots R_{d(n-1)+1}^T = R_n. \quad (26)$$

Cette relation permet de calculer R_{dn}^T connaissant les R^T d'ordre inférieur ainsi que les R_n . L'élément de matrice $(n, (n-1)d+2k)$ de (25) permet de calculer R_{dn+k}^T , $k = 1, 2, \dots, d-1$ et de même, l'élément de matrice $(n, (n-1)d+2k+1)$ permet de calculer A_{dn+k}^T , pour $k = 0, 1, \dots, (d-1)$. Une difficulté apparaît pour la ligne 0 : l'équation (25) demande que soient connus les premiers coefficients : $A_0^T, A_1^T, \dots, A_{p-1}^T, R_1^T, R_2^T, \dots, R_{p-1}^T$ pour

$d = 2p$ pair et $A_0^T, A_1^T, \dots, A_{p-1}^T, R_1^T, R_2^T, \dots, R_p^T$, pour $d = (2p + 1)$ impair. Soit en tout $(d - 1)$ conditions. Mais les valeurs d'initialisation de ces coefficients ne dépendent pas de la fonction $g(z)$ et peuvent être obtenus en calculant directement le développement de la fraction continue particulière $g^T(z) = W(z)/T(z)$.

A titre d'exemple, on peut expliciter les relations pour $d = 2$, avec :

$$\left. \begin{aligned} T(z) &= z^2 + \alpha z + \beta \\ W(z) &= z + a \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

On obtient :

$$\left. \begin{aligned} R_{2n}^T R_{2n-1}^T &= R_n & n \geq 1 \\ A_{2n}^T + A_{2n-1}^T + \alpha &= 0 & n \geq 1 \\ (A_{2n}^T)^2 + R_{2n} + R_{2n+1} + \alpha A_{2n}^T + \beta &= A_n & n \geq 0 \\ A_{2n}^T + A_{2n+1}^T + \alpha &= 0 & n \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

avec la convention $R_0^T = 0$ et l'initialisation $A_0^T = (a - \alpha)$. Ces relations de récurrence expriment les R_n^T et les A_n^T comme des fractions rationnelles dans les coefficients des polynômes W et T et dans les coefficients R_n et A_n .

IV. MESURES INVARIANTES ET POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Considérons les itérations successives de l'équation (9), que l'on notera :

$$g^{(n+1)}(z) = W(z)g^{(n)}(T(z)) \quad (29)$$

où les fonctions $g^{(n)}(z)$ admettent un développement au voisinage de l'infini :

$$g^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^{(n)} / z^{k+1} \quad (30)$$

On vérifie aisément que la suite des $g^{(n)}(z)$ converge au sens des séries formelles vers une solution de l'équation fonctionnelle :

$$\left. \begin{aligned} g(z) &= W(z)g(T(z)) \\ g(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k / z^{k+1} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

déterminée uniquement par une condition de normalisation, par exemple :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zg(z) = \mu_0 = 1 \quad (32)$$

On a alors le résultat suivant, qui est une variante des résultats classiques [7] [5] [9] :

THÉORÈME. — La série formelle déterminée par les équations (31) et (32), où $W(z)$ et $T(z)$ sont des polynômes unitaires de degrés respectifs $(d-1)$ et d , représente une fonction analytique dans un voisinage du point à l'infini.

En effet, considérons la fonction $g^{(0)}(z) = 1/(z - z_0)$ où z_0 est un point de l'ensemble de Julia de T . La suite des fonctions $zg^{(n)}(z)$ qui s'en déduit par la relation (29), peut être uniformément bornée en module par une constante K indépendante de n et de z , pour $|z| > R$ assez grand. Cette borne est possible, parce que les pôles de $zg^{(n)}(z)$ sont situés sur les pré-images de z_0 , c'est-à-dire restent dans l'ensemble de Julia, et cet ensemble est borné. La suite $zg^{(n)}(z)$ converge donc vers une fonction analytique dans le voisinage du point à l'infini. L'équation fonctionnelle permet de prolonger analytiquement cette fonction à tout le bassin d'attraction du point à l'infini, mais on obtient une fonction multivaluée avec point de branchement à toutes les valeurs z du bassin d'attraction pour lesquelles $T^{(n)}(z)$ à un *extremum* pour au moins une valeur de $n \geq 1$.

Considérons les approximations de Padé $[n-1/n]$ au développement de la fonction g définie par (31) et (32). Les relations (19) et (20) nous donnent le résultat suivant :

THÉORÈME. — Soient Q_n et P_n les numérateurs et dénominateurs respectifs de l'approximation de Padé $[n-1/n]$ à la fonction g définie en (31) et (32). Ils satisfont les relations :

$$Q_{dn}(z) = W(z)Q_n(T(z)) \quad (33)$$

$$P_{dn}(z) = P_n(T(z)). \quad (34)$$

En itérant (34) on obtient :

$$P_{d^k n}(z) = P_n(T^{(k)}(z)) \quad (35)$$

et pour $n = 1$:

$$P_{d^k}(z) = P_1(T^{(k)}(z)) = T^{(k)}(z) - A_0 \quad (36)$$

où A_0 est le premier coefficient du développement en fraction continue de g . En fait si $T(z) = z^d + t_1 z^{d-1} + \dots$, $W(z) = z^{d-1} + w_1 z^{d-2} + \dots$, on a $A_0 = (w_1 - t_1)$. Dans le cas où $w_1 = t_1$, on a :

$$T^{(k)}(z) = P_{d^k}(z) \quad (37)$$

ce qui établit que les itérés eux-mêmes forment une sous-suite de la suite des polynômes orthogonaux.

L'algorithme pour calculer les coefficients de la fraction continue se recopie à partir de (21) (24) et (25) et la matrice de Jacobi satisfait :

$$DT(H) = HD. \quad (38)$$

Cette dernière relation permet de calculer par récurrence les A_n et R_n à partir des conditions d'initialisation mentionnées dans la section précédente.

Pour le degré 2, équation (27), on obtient (cf. (28)) :

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= 0, & A_0 &= (a - \alpha) \\ A_{2n} &= (a - \alpha), & A_{2n+1} &= -a \\ R_{2n} + R_{2n+1} &= -\beta + A_n - \alpha A_{2n} - A_{2n}^2 \\ R_{2n} R_{2n-1} &= R_n & n &\geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

La mesure équilibrée associée au cas particulier $T(z) = z^2 - \lambda$, $W(z) = z$, donne [7] [12]

$$A_n = 0, \quad R_0 = 0, \quad R_{2n} + R_{2n+1} = \lambda, \quad R_{2n} R_{2n-1} = R_n. \quad (40)$$

Une propriété très intéressante de ces relations de récurrence est la propriété de presque périodicité [7] [10] [11] :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{p2^k + s} = R_s. \quad (41)$$

vérifiée pour λ réel > 2 , et uniformément par rapport à p et s pour λ réel > 3 . Il est naturel de formuler la *conjecture* suivante :

Les coefficients R_n et A_n sont presque périodiques lorsque l'ensemble de Julia de T est réel et lorsque tous les zéros de la dérivée $T'(z)$ sont à l'extérieur de l'ensemble de Julia.

Remarquons pour terminer que la relation (34) est une généralisation des propriétés des polynômes classiques de Tchebycheff $T_n(z)$, définis par $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$. En fait pour $T(z) = z^2 - 2$, $W(z) = z$, on obtient $P_n(z) = 2T_n\left(\frac{z}{2}\right)$.

V. CONCLUSION

Nous avons montré par des arguments essentiellement algébriques les propriétés d'orthogonalité des suites de polynômes itérés. Nous avons considéré des polynômes unitaires, mais en fait on peut déduire des considérations similaires pour des polynômes orthonormés : $\hat{P}_n = (h_n)^{-1/2} P_n$ qui satisfont eux aussi à l'équation (34). D'autre part les polynômes que nous avons considérés s'obtiennent en quelque sorte par prolongement analytique sur les coefficients de T et W , à partir du cas où l'ensemble de Julia est réel, ce qui permet d'obtenir un algorithme complet pour les coefficients de la fraction continue. Un tel algorithme n'existe pas pour la famille de polynômes orthonormés, au sens d'un produit scalaire hermitien [12] [13] [18], pour lesquels la propriété (36) (37) est cependant vérifiée. Enfin dans nos considérations algébriques les questions de la

positivité de la mesure du (cas réel) et de l'existence d'une valeur au bord de la fonction $g(z)$ sur l'ensemble de Julia ne jouent aucun rôle. Ces questions n'en restent pas moins posées.

Les récents développements de la théorie des phénomènes critiques et des transitions de phases en physique statistique, connus sous le nom de théorie du groupe de renormalisation, conduisent essentiellement à l'étude des comportements singuliers par l'intermédiaire d'équations fonctionnelles analogues à (9). Un problème ouvert est donc l'étude au voisinage d'un point fixe répulsif a tel que $T(a) = a$, $|T'(a)| > 1$, des solutions d'équations du type (9). S'il est facile d'extraire un comportement dominant du type $g(z) \sim (z - a)^\alpha$, $\alpha = -\ln(W(a))/T'(a)$, il est bien plus délicat de donner un sens à cette formule pour un point fixe complexe et d'effectuer une étude fine du voisinage du point fixe [19].

Nos considérations s'appliquent aux modèles pour lesquels on sait exprimer la renormalisation par une transformation polynomiale ou rationnelle. Parmi les exemples, citons le spectre de vibration des certaines structures fractales, et de certaines chaînes (masses et ressorts) presque périodiques, ainsi que les transitions de phases pour des modèles de spin sur réseaux dits hiérarchiques, on trouvera des références explicites dans les articles [19] [20].

RÉFÉRENCES

- [1] G. JULIA, Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *J. Math. Pur. Appl.*, t. 7, 1918, p. 503-529; P. FATOU, Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, t. 47, 1919, p. 161-271; t. 48, 1920, p. 33-94, t. 48, 1920, p. 208-314.
- [2] B. MANDELBROT, Fractal aspects of the iteration of $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$ for complex λ and z , *Annals N. Y. Acad. Sci.*, t. 357, 1980, p. 249-259; On the quadratic mapping $z \rightarrow z^2 - \mu$ for complex μ and z , the fractal structure of its M set, and scaling, *Physica*, t. 7D, 1983, p. 224-239.
- [3] D. SULLIVAN, Itération des fonctions analytiques complexes, *C. R. Acad. Sci., Paris*, Sér. I, t. 294, 1982, p. 301-303; *Quasi conformal homeomorphisms and dynamics I, II, III*, preprint IHES, 1982-1983.
- [4] A. DOUADY, J. H. HUBBARD, Itération des polynômes quadratiques complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I, t. 294, 1982, 123-126; A. DOUADY, *Systèmes dynamiques holomorphes*. Séminaire Bourbaki, n° 599, Astérisque, t. 105-106, 1983, p. 39-63.
- [5] P. BLANCHARD, Complex analytical dynamics on the Riemann sphere, *Bull. Amer. Math. Soc.* t. 11, 1984, p. 85-141.
- [6] H. BROUIN, Invariant sets under iteration of rational functions, *Ark. Mat.*, t. 6, 1965, p. 103-144; M. J. LJUBICH, Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere, *Ergod. Th. Dynam. Syst.*, t. 3, 1983, p. 351-385.
- [7] D. BESSIS, M. L. MEHTA, P. MOUSSA, Polynômes orthogonaux sur des ensembles de Cantor et itérations des transformations quadratiques, *C. R. Acad. Sci, Paris*, Sér. I, t. 293, 1981, p. 705-708.

- [8] D. BESSIS, M. L. MEHTA, P. MOUSSA, Orthogonal polynomials on a family of Cantor sets and the problem of iterations of quadratic mappings, *Lett. Math. Phys.*, t. **6**, 1982, p. 123-140.
- [9] D. BESSIS, P. MOUSSA, Orthogonality properties of iterated polynomial mappings, *Comm. Math. Phys.*, t. **88**, 1983, p. 503-529.
- [10] J. BELLISSARD, D. BESSIS, P. MOUSSA, Chaotic states of almost periodic Schrödinger operators, *Phys. Rev. Lett.*, t. **49**, 1982, p. 701-704.
- [11] G. BAKER, D. BESSIS, P. MOUSSA, A family of almost periodic Schrödinger operators, *Physica*, t. **124A**, 1984, p. 61-78.
- [12] M. BARNSLEY, J. GERONIMO, A. HARRINGTON, On the invariant sets of a family of quadratic maps. *Commun. Math. Phys.*, t. **88**, 1983, p. 479-501.
- [13] M. BARNSLEY, J. GERONIMO, A. HARRINGTON, Orthogonal polynomials associated with invariant measures on Julia sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **7**, 1982, p. 381-384.
- [14] M. BARNSLEY, J. GERONIMO, A. HARRINGTON, Infinite dimensional Jacobi matrices associated with Julia sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **88**, 1983, p. 625-630.
- [15] M. BARNSLEY, J. GERONIMO, A. HARRINGTON, Geometry, electrostatic measures and orthogonal polynomials on Julia sets for polynomials, *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, t. **3**, 1983, p. 509-520.
- [16] G. SZEGO, Orthogonal Polynomials, *Amer. Math. Soc. Colloquium Publ.*, t. **23**, 1939.
- [17] G. A. BAKER, *Essentials of Padé Approximants*, Academic Press, N. Y., 1975.
- [18] T. PITCHER, J. KINNEY, Some connections between ergodic theory and the iteration of polynomials, *Ark. Mat.*, t. **8**, 1968, p. 25-32.
- [19] D. BESSIS, J. GERONIMO, P. MOUSSA, Mellin transforms associated with Julia sets and physical applications, *J. Stat. Phys.*, t. **34**, 1984, p. 75-110; Complex spectral dimensionality on fractal structures, *J. Physique Lettres*, t. **44**, 1983, p. L977-L982.
- [20] P. MOUSSA, Un opérateur de Schrödinger presque périodique à spectre singulier associé aux itérations d'un polynôme, *Comptes Rendus de la RCP 25 du CNRS*, t. **34**, 1984, p. 43-66, Publ. IRMA, Strasbourg.

(Manuscrit reçu le 5 septembre 1985)