ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

B. HELFFER
D. ROBERT

Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 41, nº 3 (1984), p. 291-331
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1984__41_3_291_0>

© Gauthier-Villars, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 41, n° 3, 1984, p. 291-331. *Physique théorique*

Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique

par

B. HELFFER et D. ROBERT
Institut de Mathématiques et d'Informatique,
2, rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex

RÉSUMÉ. — Le modèle du problème étudié dans cet article est l'oscillateur anharmonique avec double puits symétriques :

$$P(h) = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^4 - x^2 .$$

Nous étudions en particulier les valeurs propres de $P(h)$, modulo $O(h^\infty)$, dans la bande d'énergie associée aux deux puits $(]-1/4,0[)$. Nous obtenons également des résultats près du minimum de l'énergie classique. La méthode utilisée repose sur un calcul symbolique et fonctionnel d'opérateurs dépendant du petit paramètre h et sur une théorie des opérateurs intégraux de Fourier apparentée à la méthode BKW et aux travaux de V. P. Maslov. Les outils utilisés sont suffisamment généraux pour traiter une classe assez large d'hamiltoniens possédant des symétries et ne sont pas limités au cas de la dimension 1.

ABSTRACT. — The typical problem treated in this paper concerns the anharmonic oscillator with symmetric double wells:

$$P(h) = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^4 - x^2$$

In particular we study, modulo $O(h^\infty)$, the eigenvalues of $P(h)$ in the energy band associated with the double wells (here: $]-1/4,0[$). We obtain also some results near the minimum of classical energy. The method uses a functional and symbolic calculus for h-dependent pseudo-differential ope-

84/03/291/41/$ 6,10/© Gauthier-Villars

rators and a Fourier Integral Theory which appear in the BKW method and in the Maslov theory. Our technics allow us to treat a large class of hamiltonians with symmetries and can be applied to cases of dimension > 1.

---

1. LE MODÈLE. INTRODUCTION

Soit l'hamiltonien quantique à un degré de liberté :

$$P(h) = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^4 - x^2$$

Le potentiel : $V(x) = x^4 - x^2$ atteint sa valeur minimale :

$$V_m = -\frac{1}{4} \qquad \text{pour} \qquad x_m = \pm \frac{1}{2}$$

et ce minimum est de Morse (i. e. ici $V''(x_m) > 0$).

Le potentiel présente deux puits symétriques. Considérons les niveaux d'énergie classique C_E :

$$C_E = p_0^{-1}(E) \qquad \text{avec} \qquad p_0(x, \xi) = \xi^2 + x^4 - x^2$$

On a :

pour $E < -1/4$ $\quad C_E = \emptyset$

$E = -1/4$ $\quad C_E = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(+\frac{1}{2}, 0\right) \right\}$

$-\frac{1}{4} < E < 0$ $\quad C_E = C_E^- \cup C_E^+$ (il y a deux composantes connexes)

$E = 0$ $\quad C_E$ est une courbe fermée avec un point double

$E > 0$ $\quad C_E$ est une courbe fermée simple.

La fonction p_0 a comme valeurs critiques : $-\frac{1}{4}$ et 0 et vérifie également $p_0(x, \xi) = p_0(-x, -\xi)$.

On sait que le spectre de P(h) est constitué d'une suite $(\lambda_j(h))_{j>0}$ de valeurs propres (rangées par ordre croissant) répétées suivant leur multiplicité (qui est finie) qui tend vers $+\infty$.

On se propose ici de préciser le comportement lorsque h tend vers 0 du spectre de P(h) (des cas plus généraux seront étudiés dans les paragraphes suivants).

Ce problème a été abordé depuis longtemps et notre étude dans le cas particulier n'apporte pas de résultats nouveaux du moins au fond du puits. On peut utiliser des techniques d'équations différentielles (cf. Titchmarsh [TIT], Voros [VOR]) mais on est alors souvent limité à l'ordre 2 et à la dimension d'espace 1. Une deuxième méthode d'approche est la méthode W. K. B. (cf. Maslov [MAS]) qui consiste à construire des solutions approchées et à en déduire une approximation des valeurs propres. Un inconvénient de cette méthode est de ne pas localiser les valeurs propres mais seulement de construire des suites de valeurs propres approchées dont on ne sait pas toujours si elles « épuisent » le spectre. Pour des résultats récents dans cette direction, nous renvoyons à Colin de Verdière [CV], Ralston [RAL], Candelperger-Nosmas [CN] et Helffer-Sjöstrand [H-S].

Nous développons ici une troisième méthode basée sur des idées de Colin de Verdière [CV], Weinstein [WE] et dans ce contexte par Chazarain [CHA] dont un des mérites est de marcher pour des opérateurs d'ordre quelconque. L'idée de départ est la suivante (idée que nous avions utilisée dans un contexte voisin dans $[\mathrm{H.R}]_2$ et $[\mathrm{H.R}]_3$). Pour tout point (x, ξ) de $\mathbb{R}^2$, il existe $\mathrm{T}(x, \xi) > 0$ tel que si ϕ^t désigne le flot hamiltonien associé à p_0, on ait :

$$\phi^{\mathrm{T}(x,\xi)}(x, \xi) = (x, \xi)$$

De plus $\mathrm{T}(x, \xi)$ est constant sur chaque composante connexe d'un niveau d'énergie (tout au moins en dehors des valeurs critiques de q_0) si on définit $\mathrm{T}(x, \xi)$ comme étant la plus petite période strictement positive.

L'idée sera alors de trouver une fonction de l'opérateur P(h) telle que pour le symbole « principal » $f_0(p_0)$ de ce nouvel opérateur Q(h), on puisse choisir $\mathrm{T}(x, \xi) = 2\pi$ pour (x, ξ) dans la même bande d'énergie (à condition d'éviter les valeurs critiques de p_0).

Nous aurons alors à notre disposition toutes les techniques liées à l'étude d'opérateurs dont le flot associé au symbole principal est périodique. Au niveau qualitatif, il y a deux zones bien différentes :

Zone 1 : $\quad -\frac{1}{4} < \mathrm{E} < 0$

Zone 2 : $\quad 0 < \mathrm{E} < +\infty$

selon la position de E par rapport aux valeurs critiques de p_0. On évitera dans la suite la valeur critique 0, qui reste mystérieuse (ce point correspond à un point col pour le potentiel). On peut par contre « s'approcher » de la valeur critique $-\frac{1}{4}$ en raffinant les techniques développées ici ou en utilisant des techniques concernant l'étude des premières valeurs propres qui relèvent de la théorie des perturbations ([R-S], [H.S], [SIM]).

Dans la première zone, on montre que dans tout intervalle I_ε,

$$I_\varepsilon = \left[-\frac{1}{4}, -\varepsilon\right] \qquad (\varepsilon > 0),$$

on peut, pour $h < h_0(\varepsilon)$, réordonner les valeurs propres de $P(h)$ contenues dans cet intervalle en deux suites :

$$\begin{array}{ll} \lambda_j^+(h) & (0 \leqslant j \leqslant N^1_{h,\varepsilon}) \\ \lambda_j^-(h) & (0 \leqslant j \leqslant \tilde{N}^1_{h,\varepsilon}) \\ \multicolumn{2}{c}{(\text{avec } |N^1_{h,\varepsilon} - \tilde{N}^1_{h,\varepsilon}| \leqslant 1)} \end{array}$$

où $\lambda_j^+(h)$ est associée à une fonction propre paire
$\lambda_j^-(h)$ est associée à une fonction propre impaire.

De plus, il existe $C_0 t.q$ pour tout $h \leqslant h_0(\varepsilon)$ et tout $j \geqslant C_0 t.q\, j \leqslant \operatorname{Inf}(N^1_{h,\varepsilon}, \tilde{N}^1_{h,\varepsilon})$, on ait : $\lambda_j^+(h) - \lambda_j^-(h) = 0(h^\infty)$.

Notre démonstration n'est pas assez fine pour dire que $\lambda_j^+(h)$ (resp. $\lambda_j^-(h)$) est la $(j+1)^{\text{ème}}$ valeur propre paire (resp. impaire), (ceci peut se montrer par des techniques différentes pour l'exemple cf. [TIT]) mais elle permettra de montrer que, pour C convenable > 0, toutes les valeurs propres continues dans $\left[-\frac{1}{4} + \mathrm{Ch}, -\varepsilon\right]$ sont pour h assez petit du type ci-dessus et qu'on obtient ainsi *tout le spectre dans cette zone.*

Dans $\left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} + \mathrm{Ch}\right]$ où il n'y a qu'un nombre fini de v. p. indépendant de h (asymptotiquement) on peut utiliser des techniques de perturbation pour étudier le spectre (cf. la fin de ce paragraphe).

Dans $\left[-\frac{1}{4} + \mathrm{Ch}, -\varepsilon\right]$, on déduira cette propriété de l'existence d'une série formelle en h à coefficients dans $C^\infty\left(\left[-\frac{1}{4}, 0\right]\right)$:

$$f(h, E) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j f_j(E)$$

t. q $f(h, \lambda_j^\pm [h]) = (j + 1/2)h + 0(h^\infty)$ (pour les couples (j, h) définis plus haut)

avec
$$f_0(\mathrm{E}) = \frac{1}{4\pi}\int_{p_0(x,\xi)\leqslant \mathrm{E}} dx d\xi$$
$$f_1(\mathrm{E}) \equiv 0$$
$\left(\text{on montrera plus loin pourquoi } f_0 \text{ est effectivement dans } \mathrm{C}^\infty\left(\left[-\frac{1}{4}, 0\right[\right)\right)$.

Dans la deuxième zone, la situation est différente. Dans un intervalle $[\varepsilon, +\mathrm{A}[\,(\mathrm{A} > \varepsilon > 0)$, on peut de nouveau, pour h assez petit, ranger les valeurs propres en une suite : $\lambda_j(h)(\mathrm{N}^3_{h,\varepsilon} \leqslant j \leqslant \mathrm{N}^4_{h,\varepsilon})$ $(\lambda_j(h))$ n'est plus nécessairement la $(j+1)^{\text{ème}}$ valeur propre) telle qu'il existe une série formelle en h à coefficients dans $\mathrm{C}^\infty(]0, +\infty[)$:

$$\tilde{f}(h, \mathrm{E}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j \tilde{f}_j(\mathrm{E})$$

t. q : $\tilde{f}(h, \lambda_j(h)) = (j+1/2)h + 0(h^\infty)$ pour $h \leqslant \tilde{h}_0(\varepsilon, \mathrm{A})$ et $\mathrm{N}^3_{h,\varepsilon} \leqslant j \leqslant \mathrm{N}^4_{h,\varepsilon}$

avec :
$$\tilde{f}_0(\mathrm{E}) = \frac{1}{2\pi}\int_{p_0(x,\xi)<\mathrm{E}} dx d\xi, \qquad \tilde{f}_1(\mathrm{E}) \equiv 0$$

De plus, $\lambda_j(h)$ correspond à une fonction propre paire pour j pair et à une fonction propre impaire pour j impair.

Le phénomène observé ici est donc différent puisque dans la première zone les valeurs propres (correspondant aux fonctions propres) paires se couplent avec les impaires (modulo $0(h^\infty)$) alors que dans la deuxième zone, on a alternativement une paire et une impaire avec un écart de l'ordre de $\dfrac{h}{f_0'(\lambda_j(h))}$ c.à.d. $\dfrac{h}{\mathrm{T}(\lambda_j(h))}$ où T(E) désigne la période sur la bande d'énergie E.

(Remarquons que T(E) tend vers $+\infty$ lorsque E tend vers 0).

Dans [R-S] (ch. XII), on trouvera une discussion détaillée du phénomène de double puits sur l'exemple suivant :

$$\mathrm{H}(\beta) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2(2+\beta x)^2$$

Cet hamiltonien est unitairement équivalent à :

$$\tilde{\mathrm{H}}(h) = h^{-1}\left[-h^2\frac{d^2}{dy^2} + (y^2 - 1/2)^2\right]$$

En particulier dans [R. S] les auteurs montrent que le spectre de $\mathrm{H}(\beta)$ est constitué de deux suites de valeurs propres $(\mathrm{E}_j^{\pm}(\beta))_{j>0}$ vérifiant :

i) Pour tout $j \in \mathrm{N}$, $\lim_{\beta \to 0} \mathrm{E}_j^{\pm}(\beta) = \mathrm{E}_j(0)$ où $\mathrm{E}_j(0)$ est la $j^{\text{ième}}$ valeur propre de $-\dfrac{d^2}{dx^2} + 2x^2$.

ii) Il existe $a, b > 0$ telles que $\exp(-a.\beta^{-2}) < \mathrm{E}_0^+(\beta) - \mathrm{E}_0^-(\beta) < \exp(-b\beta^{-2})$.

iii) $\mathrm{E}_0^+(\beta)$ se développe suivant la série de perturbation de Rayleigh Schrödinger.

Ce type de résultats (en particulier (*ii*)) vient d'être généralisé et précisé en dimension $\geqslant 1$ par B. Simon [SIM] et par B. Helffer et J. Sjostrand [H-S] (cf. également Harrell [HA]).

Une étude approfondie du cas $n=1$ vient également d'être réalisée par J. M. Combes, P. Duclos et R. Seiler ([C-D-S]).

Pour le moment ces derniers travaux concernent spécifiquement l'opérateur de Schrödinger.

Dans ce travail annoncé en $[\text{H-R}]_1$ nous établissons un certain nombre de résultats modulo $0(h^\infty)$, concernant des hamiltoniens $\mathrm{P}(h) = p(h; x, h\mathrm{D}_x)$ assez généraux en présence de puits de potentiel. Notre plan est le suivant :

2) *Étude d'une classe d'opérateurs h-admissibles-hypothèses.*
3) *Localisation en énergie et applications.*
4) *Étude du spectre au voisinage du minimum d'énergie.*
5) *Minoration du spectre d'opérateurs h-admissibles.*

Pour terminer cette introduction nous donnons une description sommaire du contenu de chacun des paragraphes suivants :

— Dans le § 2 nous introduisons nos hypothèses sur les opérateurs $\mathrm{P}(h)$, $h \in]0, h_0]$, considérés. Il s'agit en particulier de décrire les propriétés de symétrie et de périodicité faites sur le symbole et d'en tirer quelques conséquences pour les opérateurs.

— Dans le § 3 nous commençons par mettre en place les outils qui seront utilisés : le calcul fonctionnel qui permet de faire des localisations en énergie et les solutions approchées de l'équation d'évolution de Schrödinger : $ih\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathrm{P}(h)\Psi$. Ces outils sont utilisés ensuite pour étudier le spectre de $\mathrm{P}(h)$ dans des bandes d'énergie non critiques pour le symbole principal de $\mathrm{P}(h)$ sous les hypothèses de symétrie faites dans le § 2.

Le § 4 est consacré à l'étude du spectre au voisinage d'un minimum du symbole principal p_0 de $\mathrm{P}(h)$, en supposant que ce minimum est de Morse (i. e. non dégénéré). Notons que des minima d'autre type mériteraient d'être également étudiés. L'intérêt, selon nous, de cette étude est de mettre en évidence la limite de validité des méthodes asymptotiques (B-K-W, Maslov) utilisées dans le § 3. Plus précisément nous montrons que ces méthodes sont opérantes à une distance $> \mathrm{Ch}\,(\mathrm{C} > 0)$ du minimum. En deçà de cette limite on tombe précisément dans le champ d'application

des méthodes perturbatives : le spectre de $P(h)$ doit alors être considéré comme une perturbation du spectre d'oscillateurs harmoniques associés à la matrice hessienne de p_0 aux minima. Cette étude a été faite dans [H-S] et [SIM] lorsque $P(h)$ est l'opérateur de Schrödinger: $P(h) = -h^2\Delta + V$.

Enfin dans le § 5, nous établissons des inégalités du type Gärding-Hörmander-Melin qui précisent la meilleure constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que

$$\text{Spectre } [P(h)] \subset [\gamma . h, +\infty[\qquad \text{pour tout} \quad h \in]0, h_0].$$

2. ÉTUDE D'UNE CLASSE D'OPÉRATEURS h-ADMISSIBLES. HYPOTHÈSES

Pour la commodité du lecteur rappelons ici la définition des opérateurs faiblement h-admissibles introduits dans $[\text{H-R}]_1$.

On appellera opérateur faiblement h-admissible toute application : $h \to P(h)$ définie dans $]o, h_0]$, $h_0 > 0$, à valeurs dans l'espace $\mathscr{L}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$ des opérateurs linéaires continus de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, vérifiant :

il existe $m \in \mathbb{R}$, $N_0 \in \mathbb{N}$, $p_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n_2 \times \mathbb{R}^n_\xi)$, $j \in \mathbb{N}$, $R_N(h) \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$, $N > N_0$, tels que :

$$P(h) = \sum_{j=0}^{N} h^j p_j^W(x, h.D_x) + h^{N+1}.R_{N+1}(h)$$

où p_j vérifie :

Pour tous α, $\beta \in \mathbb{N}^n$, $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \; p_j(x, \xi) = 0(1 + |x| + |\xi|)^m$ et

$$\operatorname*{Sup}_{h \in]0, h_0]} \| R_{N+1}(h) \|_{\mathscr{L}(L^2, L^2)} < +\infty$$

$p_j^w(x, h.D_x)$ est défini par la formule de quantification de Weyl : pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, on a posé :

$$p_j^w(x, h.D_x)u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y, \xi\rangle} p_j\left(\frac{x+y}{2}, h\xi\right) u(y) dy d\xi$$

Soit $P(h)$ un opérateur faiblement h-admissible au sens de $[\text{H.R}]_1$ de symbole $p(h) = \sum_{j \geqslant 0} h^j p_j$.

On fait alors les hypothèses suivantes :

(H1) $P(h)$ est symétrique pour tout $h \in]0, h_0](h_0 < 0)$

(H2) p_0 est minoré par un réel $\lambda_0 > 0$ sur $R^n_x \times R^n_\xi$

(H3) p_0 est un poids σ-tempéré et, pour tout $j \geqslant 0$, on a $p_j \in S(p_0, g_0)$ où g_0 est la métrique standard sur $R^n_x \times R^n_\xi$.

Il résulte alors du théorème (2.6) de $[\text{H-R}]_1$ que $P(h)$ est essentiellement auto-adjoint à partir de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ et que son extension auto-adjointe est semi-bornée pour tout $h \in]0, h_0]$ (quitte à diminuer h_0).

On se fixe maintenant un intervalle d'énergie $I = [E_1, E_2]$ et on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

(H4) $p_0^{-1}[E_1 - \varepsilon, E_2 + \varepsilon]$ est un compact non vide.

(H5) p_0 n'a pas de valeurs critiques dans $[E_1 - \varepsilon, E_2 + \varepsilon]$.

Enfin pour simplifier l'étude on supposera :

(H6) Le symbole sous-principal p_1 de $P(h)$ est identiquement nul.

Il résulte de (H4) et (H5) que pour tout $E \in I$, $p_0^{-1}(E)$ est une réunion finie N_I (indépendant de E) d'hypersurfaces compactes et connexes : C_E^i $(i = 1, \ldots, N_I)$.

On pose : $\Omega_i^\varepsilon = \bigcup_{E \in]E_1 - \varepsilon_1, E_2 + \varepsilon[} C_E^i$ (notons que H5 implique que Ω_i^ε est ouvert.)

(H7) Pour tout $i, j \in \{1, 2, \ldots, N_I\}$, il existe une transformation canonique affine de $\mathbb{R}^{2n}$: $\kappa_{j,i}$ qui applique Ω_i^ε sur Ω_j^ε telle que :

$$p(h, \kappa_{ji}(x, \xi)) = p(h; x, \xi) \quad \text{pour tout } i, j \in \{1, 2, \ldots, N_1\} \quad \text{et tout } (x, \xi) \in \Omega_i^\varepsilon.$$

On introduit enfin l'hypothèse de périodicité :

(H8) $\begin{cases} \text{Le flot hamiltonien } \exp(tH_{p_0}) \text{ restreint à } p_0^{-1}(E) \text{ est périodique de période} \\ T_E > 0 \text{ pour tout } E \in I \text{ (voir l'appendice C de } [\text{H-R}]_2 \text{ pour une discussion de cette condition).} \end{cases}$

REMARQUE (2.3). — *Pour $n = 1$,* (H7) *entraîne* (H8). *En effet le système de Hamilton associé à p_0 est invariant par transformation canonique d'une part et d'autre part C_E^i est constitué d'une seule trajectoire. La période commune est alors donnée par :*

$$T_E = \frac{1}{N_I} \cdot \frac{d}{dE}\left(\int_{p_0 \leq E} dx d\xi\right) \tag{2.1}$$

ou encore par:

$$T_E = \frac{1}{N_I} \cdot \int_{\{p_0 = E\}} \frac{dS_E}{|\nabla p_0|} \tag{2.2}$$

où dS_E est la mesure riemannienne induite sur $\{p_0 = E\}$.

Notons que les formules (2.11) *ou* (2.12) *donnent la plus petite période strictement positive.*

Nous avons besoin de nous ramener à une situation où la période T_E est indépendante du niveau d'énergie E.

Pour cela on utilise un résultat de mécanique classique (Guillemin-Sternberg [G-S] p. 167-168), compte tenu de (H7) et (H8) on a la :

PROPOSITION (2.4). — *Soit γ une trajectoire d'énergie* E *et de période* T_E *de* p_0.

Alors $\int_\gamma \xi dx$ *ne dépend que de* E *et définit une fonction* J *sur* I, $J \in C^\infty(I)$. *On a de plus* : $J'(E) = T_E$.

EXEMPLES (2.5). — 1) Pour $n = 1$, on a bien sûr :

$$J(E) = \frac{1}{N_I} \int_{p_0(x,\xi) \leqslant E} dx d\xi .$$

2) Soit $n = 2$ et $p_0(x, \xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + x_1^2 + 4x_2^2$.

$$J(E) = \pi E .$$

Il est facile de prolonger la fonction J en une fonction $\tilde{J} \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \tilde{J}(E) &= a_1 \cdot E + b_1 \quad \text{pour} \quad E \leqslant E_1 - 2\varepsilon \\ \tilde{J}(E) &= a_2 \cdot E + b_2 \quad \text{pour} \quad E \geqslant E_2 + 2\varepsilon \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\tilde{J} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} . \tag{2.4}$$

On définit alors l'opérateur : $Q(h) = (2\pi)^{-1} J(P(h))$.

Il résulte assez aisément de notre article $[H\text{-}R]_1$ le lemme suivant :

LEMME (2.6). — $Q(h)$ *est un opérateur admissible de symbole* :

$$q(h) \sim \sum_{j \geq 0} h^j \cdot q_j$$

vérifiant :

$$\begin{cases} q_0 = \tilde{J} \circ p_0 \\ q_1 = p_1 \cdot \tilde{J}' \circ p_0 = 0 . \end{cases} \tag{2.15}$$

Posons alors : $F_1 = \tilde{J}(E_1)$, $F_2 = \tilde{J}(E_2)$.

Comme dans le lemme (1.2) de $[H\text{-}R]_3$, en utilisant la proposition (2.4), on obtient le :

LEMME (2.7). — $\exp(t H q_0)$ *est périodique de période* 2π *dans*

$$q_0^{-1}([F_1 - \tilde{\varepsilon}, F_2 + \tilde{\varepsilon}]) .$$

REMARQUE (2.8). — $Q(h)$ *vérifie les mêmes propriétés que* $P(h)$ (*en remplaçant* E *par* $F = \tilde{J}(E)$). *En particulier* $\tilde{J}$ *étant un* C^∞-*difféomorphisme d'un voisinage de* $[E_1, E_2]$ *sur un voisinage de* $[F_1, F_2]$, *strictement croissant, les*

propriétés du spectre ponctuel de $P(h)$ *dans* $[E_1, E_2]$ *seront immédiatement déduites des mêmes propriétés pour l'opérateur* $Q(h)$ *dans* $[F_1, F_2]$.

LEMME (2.9). — $Q(h)$ *vérifie les mêmes propriétés de symétrie* (H-7) *que* $P(h)$.

Preuve. — Si $R(h)$ est un opérateur h-admissible on pose :

$$\check{R}(h) = T_h \cdot R(h) \cdot T_h^{-1}$$

où

$$T_h u(x) = h^{n/4} \cdot u(h^{1/2} \cdot x)$$

(la conjugaison de l'opérateur unitaire T_h a pour but de symétriser les rôles des variables x et ξ).

On a alors :

$$(\check{R}(h)u)(x) = \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle} r\left(h, \sqrt{h}\left(\frac{x+y}{2}\right), \sqrt{h}\cdot\xi\right) u(y) d\xi dy$$

(r désigne le symbole formel de $R(h)$ qui définit un opérateur h-admissible modulo un opérateur borné de $L^2(R^n)$ dans lui-même de norme $0(h^\infty)$, $h \to 0$).

Considérons le groupe symplectique affine de R^{2n} (muni de sa structure symplectique canonique). C'est le sous-groupe des isométries affines de R^{2n} définit par les transformations de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \to M \cdot \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

où M est une matrice symplectique d'ordre $2n$ et $(a, b) \in R^{2n}$.

Au groupe symplectique affine est associé le groupe métaplectique affine qui est le sous-groupe du groupe unitaire de $L^2(R^n)$ engendré par le groupe métaplectique usuel et par les opérateurs : $U_{a,b}^{(h)}((a, b) \in R^{2n})$ définis par :

$$(U_{a,b}^{(h)} v)(x) = e^{i.h^{-1/2}.\langle b,x\rangle} \cdot v(x + h^{-1/2} \cdot a)$$

(l'introduction de $\sqrt{h}$ est par raison de commodité).

Comme dans le cas vectoriel on définit alors un homomorphisme : $\mathscr{F} \xrightarrow{g} \kappa$ du groupe métaplectique affine sur le groupe symplectique affine dont le noyau est $\mathbb{C}\backslash 0$. On détermine un relèvement de g de sorte que l'on ait le :

LEMME (2.10). — *Soient* $R(h)$ *un opérateur h-admissible et* $\mathscr{F}$ *un élément du groupe métaplectique affine. Alors* :

$$\mathscr{F}^{-1} \cdot \check{\mathscr{R}}(h) \cdot \mathscr{F} = \check{S}(h)$$

où $\check{S}(h)$ *est un opérateur h-admissible de symbole* :

$$s(h, x, \xi) \sim r(h, \kappa(x, \xi))$$

où : $$\kappa = g(\mathscr{F}).$$

Fin de la preuve du lemme (2.9). — On a : $\mathscr{F}^{-1} \cdot J(\check{P}(h)) \cdot \mathscr{F} = J(\mathscr{F}^{-1} \cdot \check{P}(h) \cdot \mathscr{F})$.

Il résulte du lemme (3.7) que $\mathscr{F}^{-1} \cdot \check{P}(h) \cdot \mathscr{F}$ et $\check{P}(h)$ ont même symbole dans l'ouvert Ω si l'on a : $p(h, \kappa(x, \xi)) = p(h, x, \xi)$ pour tout $(x, \xi) \in \Omega$.

On en déduit alors que $J(\mathscr{F}^{-1} \cdot \check{P}(h) \cdot \mathscr{F})$ et $J(\check{P}(h))$ ont des symboles qui coïncident dans Ω d'où le lemme (2.9).

3. LOCALISATION EN ÉNERGIE ET APPLICATIONS

Précisons d'abord ce que nous entendons par localisation en énergie. L'idée développée ici a été introduite dans [ROB]$_1$. Elle consiste à ramener l'étude de $P(h)$ à celle d'un opérateur h-admissible dont le symbole est à support compact. Comme dans l'article de J. Chazarain [CHA] et nos articles antérieurs ([H-R]$_1$, [H-R]$_3$) notre méthode consiste à étudier l'opérateur : $U_h(t) = e^{-it.h^{-1}P(h)}$ pour $t = 2\pi$ sous la forme d'un opérateur intégral de Fourier. Or cet opérateur n'aura des propriétés intéressantes pour nous que dans les tranches d'énergie où le flot est 2π-périodique. Soit donc I l'intervalle d'énergie où la propriété (H8) est vérifiée avec $T_E = 2\pi$ pour tout $E \in I$. Puisqu'on ne s'intéresse qu'à la bande d'énergie I, on tronque en dehors d'un voisinage de cette bande par une fonction ψ.

On désigne par ψ_ε^I l'ensemble de fonctions suivant :

(3.1) $\psi_\varepsilon^I = \{ \psi \in C^\infty(R),\ \psi \equiv 1 \text{ sur } I \text{ et } \operatorname{Supp} \psi \subset]E_1 - \varepsilon, E_2 + \varepsilon[\}$

Soient ψ, $\tilde{\psi} \in \psi_\varepsilon^I$ telles que $\tilde{\psi} \equiv 1$ sur supp ψ.

On a :

(3.2) $U_h^\Psi(t) = e^{-ith^{-1}.P(h)} \cdot \Psi(P(h)) = e^{-ith^{-1}.P(h).\tilde{\Psi}(P(h))} \cdot \Psi(P(h))$

L'intérêt de (3.2) est que l'on est ramené à étudier des opérateurs de la forme : $e^{-ith^{-1}Q(h)}$ où $Q(h)$ est un opérateur h-admissible, autoadjoint, à support compact, grâce à (H4).

REMARQUE (3.1). — Rappelons que le support d'un opérateur admissible $Q(h)$ est par définition l'adhérence de la réunion des supports des q_j où $\sum_{j \geq 0} h^j \cdot q_j$ désigne le symbole de $Q(h)$. En particulier si ce support est vide on a alors $Q(h) \in \mathscr{L}(L^2(R^n))$ et $\| Q(h) \| = 0(h^\infty)$.

On peut certes travailler dans les classes d'Asada-Fujiwara [A-F] comme l'a fait initialement J. Chazarain [CHA], mais cela n'est plus réellement nécessaire ici. En effet, on se ramène, modulo un opérateur dont la norme dans $\mathscr{L}(L^2(R^n))$ est $0(h^\infty)$, à travailler avec des intégrales oscillantes dont

l'amplitude est à support compact. A quelques détails près, cette construction est faite dans nos articles antérieurs [H-R]$_1$, [H-R]$_4$, [H-R]$_5$. Aussi nous mettrons surtout en évidence quelques points particuliers qui n'étaient qu'implicites précédemment.

On construit d'abord des approximations de $U_h^\Psi(t)$ pour $|t| < T_0$ ($T_0 > 0$, assez petit) notées : $U_{h,N}^\Psi(t)$ puis, pour $t \in [kT_0, (k+1)T_0]$, on utilise l'approximation précédente et :

$$U_h^\Psi(t) = [e^{-iT_0 h^{-1} P(h)\tilde{\Psi}(P(h))}]^k \cdot U_h^\Psi(t - kT_0) \tag{3.3}$$

ou :

$$U_h^\Psi(t) = [U_h^{\tilde{\Psi}}(T_0)]^k \cdot U_h^\Psi(t - kT_0) \tag{3.4}$$

Or pour $|t| \leqslant T_0$, $\tilde{U}_h(t) = e^{-ith^{-1}P(h)\tilde{\Psi}(P(h))}$ peut s'écrire modulo $0(h^\infty)$ comme un opérateur dont le noyau est donné par l'intégrale oscillante :

$$\tilde{U}_h(t; x, y) = \int e^{ih^{-1}(S(t,x,\eta) - y.\eta)} a(t, x, y, \eta; h) d\eta \tag{3.5}$$

où S est solution de l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} \partial_t S(t, x, \eta) + q_0(x, \partial_x S(t, x, \eta)) &= 0 \\ S(0, x, \eta) &= x \cdot \eta \end{aligned} \tag{3.6}$$

où :

$$q_0 = p_0 \cdot \tilde{\Psi}(p_0)$$

et $a(t, x, y, \eta; h)$ est de la forme :

$$a(t, x, y, \eta; h) = \sum_{j \geqslant 0} h^j \cdot a_j(t, x, \eta) \tag{3.7}$$

les a_j étant déterminés par des équations de transport. On a en outre (cf. [ROB]$_1$) les propriétés suivantes :

$$a_0(0, x, \eta) \equiv 1 \quad \text{et} \quad a_j(0, x, \eta) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad j \geqslant 1 \tag{3.8}$$

Il existe un compact fixe $K_1 \subset R^{2n}$ tel que :

$$\begin{cases} a_0(t, x, \eta) \equiv 1 & \text{pour} \quad (x, \eta) \notin K_1 \quad \text{et} \quad |t| \leqslant T_0 \\ a_j(t, x, \eta) \equiv 0 & \text{pour} \quad (x, \eta) \notin K_1, \ |t| \leqslant T_0 \quad \text{et} \quad j \geqslant 1 \end{cases} \tag{3.9}$$

$$S(t, x, \eta) = x \cdot \eta \quad \text{pour} \quad (x, \eta) \notin K_1 \quad \text{et} \quad |t| \leqslant T_0 . \tag{3.10}$$

En utilisant les formules de composition [H-R]$_4$, on en déduit alors que le noyau de $U_h^\Psi(t)$ est donné par :

$$U_h^\Psi(t; x, y) = \int e^{ih^{-1}(S(t,x,\eta) - y.\eta)} \cdot a_\Psi(t; x, \eta; h) d\eta \quad \text{pour} \quad |t| \leqslant T_0 . \tag{3.11}$$

Pour $t \in [k \cdot T_0, (k+1)T_0]$, le noyau de $U_h^{\Psi}(t)$ est de la forme :

$$(3.12) \qquad U_h^{\Psi}(t; x, y) = \int_{\mathbb{R}^{N_K}} e^{ih^{-1}\Phi(t,x,\Theta,y)} a_{\Psi}(t, x, \Theta, y; h) d\Theta$$

N_k étant un entier dépendant de $k \in \mathbb{Z}$.

De plus dans (3.11) et (3.12) les amplitudes sont à support compact (indépendamment de h et t) respectivement dans les variables (x, η) et (x, Θ).

REMARQUES (3.2). — *i) Les égalités* (3.11) *et* (3.12) *ont lieu modulo le noyau d'un opérateur de norme* $0(h^{\infty})$ *dans* $\mathscr{L}(L^2(R^n))$.

ii) Si $a_{\Psi} \equiv 0$ *sur un voisinage de* $\{ \phi'_{\Theta} = 0 \}$ *alors* (3.12) *définit un opérateur de norme* $0(h^{\infty})$ *dans* $\mathscr{L}(L^2(R^n))$ *(théorème de la phase non stationnaire). Or, les expressions de* Φ *et de* a_{Ψ} *montrent que* $\{ (x, \Theta, y) \mid \Phi'_{\Theta}(x, \Theta, y) = 0$ *et* $(x, \Theta, y) \in \operatorname{Supp} a_{\Psi} \}$ *est inclus dans un compact de* R^{2n+N_k} *(indépendant de t et h). Par conséquent, quitte à multiplier les amplitudes par une fonction de y à support compact, on pourra supposer que les noyaux donnés par* (3.11) *et* (3.12) *sont à support compact en* (x, y).

LEMME (3.3). — *Soient* $\chi_0, \chi_1 \in C_0^{\infty}(R^{2n})$.

On suppose que $[\operatorname{Supp} \chi_0]^{\mathrm{Sat}} \cap [\operatorname{Supp} \chi_1]^{\mathrm{Sat}} = \emptyset$ où $[\operatorname{Supp} \chi_i]^{\mathrm{Sat}}$ *désigne le plus petit fermé stable par le flot hamiltonien de* p_0 *contenant* $\operatorname{supp} \chi_i$. *On a alors :*

$$\chi_1(x, hD) \cdot e^{-ith^{-1}P(h)} \cdot \Psi(P(h))\chi_0(x, hD) \equiv 0 \pmod{h^{\infty}}$$

Preuve. — On utilise la formule de composition $[H\text{-}R]_4$ et le théorème de la phase non stationnaire (cf. remarque (3.2) (*ii*).

Dans les lemmes suivants nous montrons que l'on peut suivre les symétries de $P(h)$ (cf. (H7)) au cours de constructions précédentes :

LEMME (3.4). — *Soient* $Q(h)$ *et* $\tilde{Q}(h)$ *deux opérateurs h-admissibles auto-adjoints à supports compacts. Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^{2n}$. *On suppose que :*

i) les symboles de $Q(h)$ *et* $\tilde{Q}(h)$ *coïncident dans* Ω

ii) Ω *est stable par le flot hamiltonien du symbole principal de* Q.

Alors, pour tout $\chi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, *on a :*

$$e^{-ith^{-1}Q(h)} \cdot \chi(x, hD) \equiv e^{-ith^{-1}\tilde{Q}(h)} \cdot \chi(x, hD) \pmod{0(h^{\infty})}.$$

Preuve. — Il suffit de suivre les constructions de $[H\text{-}R]_4$.

LEMME (3.5). — *Soient :*

a) $Q(h)$ *un opérateur h-admissible à support compact.*

b) $\mathscr{F}$ *un élément du groupe métaplectique affine associé à la transformation canonique affine.*

c) Ω *un ouvert de* R^{2n}, *stable par le flot hamiltonien du symbole principal de* $Q(h)$.

On suppose que le symbole total $q(h)$ de $Q(h)$ vérifie :

$$q(h, \kappa(x, \xi)) = q(h, x, \xi) \quad \text{pour tout} \quad (x, \xi) \in \Omega .$$

Alors pour tout $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a :

$$(\mathscr{F}^{-1} \cdot e^{-ith^{-1}Q(h)} \cdot \mathscr{F}) \cdot \chi(x, hD)) \equiv e^{-ith^{-1}Q(h)} \cdot \chi(x, hD) \quad (\text{mod } 0(h^\infty))$$

Preuve. — On applique le lemme (3.4) à $Q(h)$ et $\tilde{Q}(h) = \mathscr{F}^{-1} \cdot Q(h) \cdot \mathscr{F}$ en remarquant que :

$$\mathscr{F}^{-1} \cdot e^{-ith^{-1}Q(h)} \cdot \mathscr{F} = e^{-ith^{-1}.\tilde{Q}(h)} .$$

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier plus en détail l'opérateur : $U_h^\Psi(2\pi)$, $\Psi \in \Psi_\varepsilon^I$.

PROPOSITION (3.6). — *$U_h^\Psi(2\pi)$ est un opérateur h-admissible à support dans $p_0^{-1}([E_1 - \varepsilon, E_2 + \varepsilon])$.*

De plus son symbole principal est donné par :

$$\Sigma_P(U_h^\Psi(2\pi))(x, \xi) = \Psi(p_0(x, \xi))e^{-2i\pi\sigma(h)}$$

où $\sigma(h) = \dfrac{\alpha}{4} + \dfrac{\gamma}{h}$, α étant l'indice d'Arnold des trajectoires fermées de H_{p_0} d'énergie $E \in [E_1 - \varepsilon, E_2 + \varepsilon]$ et γ étant la moyenne du lagrangien sur l'une de ces trajectoires :

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\xi(t) \cdot \dot{x}(t) - p_0(x(t), \xi(t))]dt$$

(γ étant évidemment indépendant de la trajectoire).

Preuve. — Il résulte de la théorie de Maslov (J. J. Duistermaat [DUI], J. Chazarain [CHA], Asada-Fujiwara [A-F]) que dans Ω_j^ε on a :

$$\Sigma_p(U_h^\Psi(2\pi))(x, \xi) = \Psi(p_0(x, \xi))e^{-2i\pi\sigma_j(h)}$$

Or il résulte des hypothèses de symétries (H7) que $\sigma_j(h)$ ne dépend pas de j. D'où la proposition.

COROLLAIRE (3.7). — *Supposons que $n=1$ et que p_0 n'admet qu'un nombre fini de valeurs critiques : $\operatorname{Min} p_0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_r$ sur l'intervalle $[\lambda_0, E_2 + \varepsilon]$, que $\{p_0 = \lambda_j\}$ est de mesure nulle dans R^2 pour $j = 0, 1, \ldots, r$ et que $\{p_0 \leqslant E_2 + \varepsilon\}$ est compact. On a alors :*

$$\Sigma_P(U_h^\Psi(2\pi))(x, \xi) = \Psi(p_0(x, \xi))e^{-2i\pi(1/2 + \lambda_0/h)}$$

Preuve. — Les trajectoires étant homotopes à des cercles, on a alors $\alpha = 2$ (Feydoriuk-Maslov [F-M]). D'autre part, il résulte de la formule de Stokes :

$$\gamma = \frac{1}{2\pi N_I} \int_{p_0 \leqslant E} dx \Lambda d\xi - E ; \qquad \forall E \in I \tag{3.13}$$

Posons : $g(\mathrm{E}) = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{N}_{\mathrm{I}}} \displaystyle\iint_{p_0 \leqslant \mathrm{E}} dx \Lambda d\xi - \mathrm{E}$; $\quad \mathrm{E} \in [\lambda_0, \mathrm{E}_2 + \varepsilon]$

Il résulte des hypothèses que g est C^∞ sur $]\lambda_0, \mathrm{E}_2 + \varepsilon[\setminus \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$, continue sur $[\lambda_0, \mathrm{E}_2 + \varepsilon]$ constante sur I et sur $]\lambda_j, \lambda_{j+1}[, j = 0, 1, \ldots, r-1$.

On en déduit alors que : $\gamma = g(\lambda_0) = -\lambda_0$, ce qui prouve le corollaire. ■

Il résulte donc de la proposition (3.6) que l'on a :

$$\Psi(\mathrm{P}(h)) e^{-2i.\pi.h^{-1}(\mathrm{P}(h) - h\sigma(h))} = \Psi(\mathrm{P}(h)) + h.\mathrm{W}(h) \tag{3.14}$$

où W est un opérateur admissible dont le symbole est à support compact (en particulier il est d'ordre 0).

Soit alors $\Psi_1 \in \Psi_\varepsilon^{\mathrm{I}}$ telle que $\Psi \equiv 1$ sur Supp Ψ_1. Il résulte de (3.14) :

$$\Psi_1(\mathrm{P}(h)) e^{-2i\pi h^{-1}(\mathrm{P}(h) - h\sigma(h))} = \Psi_1(\mathrm{P}(h))(\mathrm{I} + h\mathrm{W}(h)) \tag{3.15}$$

PROPOSITION (3.8). — *Il existe $h_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ et un opérateur admissible $\tilde{\mathrm{W}}(h)$ d'ordre 0 commutant à $\mathrm{P}(h)$ pour tout $h \in]0, h_0]$ tels que pour tout $\Psi \in \Psi_\varepsilon^{\mathrm{I}}$ on ait :*

$$e^{-2i\pi.h^{-1}[\mathrm{P}(h) - h\sigma(h) - h^2\tilde{\mathrm{W}}(h)]} \cdot \Psi(\mathrm{P}(h)) = \Psi(\mathrm{P}(h)). \tag{3.16}$$

De plus, si $\mathrm{P}(h)$ vérifie (H7), *alors $\tilde{\mathrm{W}}(h)$ vérifie également* (H7).

Preuve. — On choisit $h_0 > 0$ de sorte que $\| h \cdot \mathrm{W}(h) \|_{\mathscr{L}(\mathrm{L}^2(\mathrm{R}^n))} < 1/2$ pour tout $h \in]0, h_0]$. Ceci permet alors de définir :

$$\mathrm{Log}\,(\mathrm{I} + h\mathrm{W}(h)) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \cdot h^{k+1} \cdot \mathrm{W}(h)^{k+1}$$

Il n'est pas difficile de montrer que l'opérateur : $\tilde{\mathrm{W}}(h) = -2i \cdot \mathrm{Log}\,(\mathrm{I} + \mathrm{W}(h))$ est admissible d'ordre 0.

Montrons maintenant que $\tilde{\mathrm{W}}(h)$ vérifie (H7) si c'est le cas pour $\mathrm{P}(h)$.

Soit $\mathscr{F}_{ji}$ l'élément du groupe métaplectique affine associé à la translation $\kappa_{j,i}$.

Posons : $\mathrm{P}_{ji}(h) = \mathscr{F}_{ji}^{-1} \cdot \mathrm{P}(h) \cdot \mathscr{F}_{ji}$.

$\mathrm{P}_{ji}(h)$ vérifie également les propriétés (H1) à (H6) et (H8) avec $\mathrm{T}_{\mathrm{E}} = 2\pi$.

En appliquant (3.15) à $\mathrm{P}_{ji}(h)$ il vient :

$$\Psi(\mathrm{P}_{ji}(h)) e^{-2i\pi h^{-1}(\mathrm{P}_{ji}(h) - h\sigma(h))} = \Psi(\mathrm{P}_{ji}(h))(\mathrm{I} + \mathrm{W}_{ji}(h)) \tag{3.17}$$

Il résulte de (3.17) :

$$\Psi(\mathrm{P}(h)) e^{-2i\pi h^{-1}(\mathrm{P}(h) - h\sigma(h))} = \Psi(\mathrm{P}(h))(\mathrm{I} + \mathscr{F}_{ji} \cdot \mathrm{W}_{ji}(h) \cdot \mathscr{F}_{ji}^{-1}) \tag{3.18}$$

Soit $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega_{\mathrm{I}}^\varepsilon)$. D'après le lemme (3.4) et l'hypothèse (H7) sur $\mathrm{P}(h)$, on a :

$$e^{-2i\pi h^{-1}(\mathrm{P}_{ji}(h) - h\sigma(h))} \cdot \chi(x, h\mathrm{D}x) \equiv e^{-2i\pi h^{-1}(\mathrm{P}(h) - h\sigma(h))} \chi(x, h\mathrm{D}x) \tag{3.19}$$

(modulo h^∞).

En changeant éventuellement de ε, on trouve, en comparant (3.15), (3.17), (3.18) et (3.19) et en utilisant le lemme (2.10) :

$$(3.20)\quad (\sigma W)(h, \kappa_{ji}(x, \xi) = (\sigma W)(h, x, \xi) \qquad \text{pour tout} \quad (x, \xi) \in \Omega_1^\varepsilon .$$

Compte tenu de sa construction, il est clair que (3.20) est également vérifiée pour $\tilde{W}$. La proposition (3.8) admet la conséquence suivante :

THÉORÈME (3.9). — *Il existe* $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ *et* $C_0 > 0$ *tels que* :

$$[\text{Spectre } P(h)] \cap [E_1, E_2] \subseteq \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \left[\left(l + \frac{\alpha}{4}\right)h + \gamma - C_0 h^2, \left(l + \frac{\alpha}{4}\right)h + \gamma + C_0 h^2\right] \qquad \textit{pour tout} \quad h \in]0, h_0]$$

(*notons que si* h_0 *est assez petit les intervalles* :

$$I_l(h) = \left[\left(l + \frac{\alpha}{4}\right)h + \gamma - C_0 h^2, \left(l + \frac{\alpha}{4}\right)h + \gamma + C_0 h^2\right]$$

sont deux à deux disjoints pour tout $h \in]0, h_0]$).

Preuve. — Posons : $\tilde{P}(h) = P(h) - h\sigma(h) - h^2 \cdot \tilde{W}(h)$.

Les opérateurs compacts : $Q(h) = P(h) \cdot \Psi(P(h))$ et $\tilde{Q}(h) = \tilde{P}(h) \cdot \Psi(P(h))$ possédant une base commune de fonctions propres que l'on note $\{ u_{j,h} : j \in \mathbb{N} \}$.

On a :
$$Q(h) \cdot u_{jh} = \mu_{jh} \cdot u_{jh}$$
$$\tilde{Q}(h) \cdot u_{jh} = \nu_{jh} \cdot u_{jh}$$

Il résulte alors de la définition de $\tilde{Q}(h)$ qu'il existe $C_0 > 0$ telle que :

$$(3.21)\qquad \left| \mu_{jh} - \nu_{jh} - h\frac{\alpha}{4} - \gamma \right| \leqslant C_0 \cdot h^2$$

Or, si $\lambda \in [\text{Spectre } P(h)] \cap [E_1, E_2]$, $\lambda = \lambda \cdot \Psi(\lambda) \in \text{Spectre } [Q(h)]$ et d'autre part, il résulte de (3.16) et (3.21) que si h est assez petit alors : $\nu_{jh} \in h \cdot \mathbb{Z}$. Par conséquent le théorème (3.9) résulte de (3.21).

Par analogie avec les travaux de Colin de Verdière [CV], on peut préciser le théorème (3.9) en faisant l'hypothèse complémentaire :

(H9) $\exp tH_{p_0}|_{p_0^{-1}(]E_1-\varepsilon, E_2+\varepsilon[)}$ est simplement périodique de période 2π.

Autrement dit les difféomorphismes : $\exp tH_{p_0}$ n'ont pas de points fixes dans $p_0^{-1}(]E_1 - \varepsilon, E_2 + \varepsilon[)$ pour tout $t \in]0, 2\pi[$.

On suppose h_0 assez petit et on définit alors les nombres :

$$d_l(h) = \sum_{\lambda \in [\text{Spectre } P(h)] \cap I_l(h)} \Psi(\lambda)$$

Notons que si $\left(l+\frac{\alpha}{4}\right)h+\gamma \in [E_1, E_2]$ et h assez petit alors $d_l(h)$ est égal au nombre des valeurs propres de $P(h)$ qui sont situées dans l'intervalle $I_l(h)$.

THÉORÈME (3.10). — *Sous les hypothèses* (H1) *à* (H9) *on a* :

$$d_l(h) \sim \sum_{j \geqslant 1} \Gamma_j\left(h\left(l+\frac{\alpha}{4}\right)+\gamma\right)h^{j-n}, \qquad h \to \infty$$

où :
$$\Gamma_j \in C_0^\infty(]E_1-\varepsilon, E_2+\varepsilon[).$$

On a en particulier :

$$\Gamma_1(\tau) = \Psi(\tau)\cdot(2\pi)^{-n}\int_{\{p_0=\tau\}} \frac{d\Sigma_\tau}{|\nabla p_0|}.$$

COROLLAIRE (3.11). — *Sous les hypothèses du théorème* (3.10) *et du corollaire* (3.7) (*en particulier* $n=1$) *on a* :

$$[\text{Spectre } P(h)] \cap [E_1, E_2] \subset \bigcup_{l \in Z} [(l+1/2)h+\gamma-C_0h^2, \quad (l+1/2)h+\gamma+C_0h^2]$$

où :
$$\gamma = \operatorname*{Min}_{\mathbb{R}^2} p_0$$

De plus : $d_l(h) = N_I$ *pour tout* $h \in]0, h_0]$ *t.q* $(l+1/2)h+\gamma \in I = [E_1, E_2]$.

REMARQUE (3.12). — *La preuve des théorèmes* (3.9), (3.10) *et son corollaire n'utilise pas toute l'information contenue dans l'hypothèse* (H7). *En fait on peut se rendre compte assez facilement qu'il suffit de faire l'hypothèse plus faible* :

(H'7) *Pour tout* j, $i \in \{1, 2, \ldots, N_I\}$ *il existe une transformation canonique* $\kappa_{ji}C^\infty$ *de* Ω_i^ε *sur* Ω_j^ε *telle que* $p_0(\kappa_{ji}(x, \xi)) = p_0(x, \xi)$ *pour tout* $(x, \xi) \in \Omega_i^\varepsilon$.

Preuve du théorème (3.10). — Il résulte de (3.16) que, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, on a :

$$[\text{Spectre } \tilde{P}(h)] \cap [E_1-\varepsilon, E_2+\varepsilon] \subseteq h.\mathbb{Z} \quad \text{pour tout} \quad h \in]0, h_0].$$

D'où l'on déduit, pour tout $\Psi \in \Psi_I^\varepsilon$:

$$\text{(3.22)} \qquad \operatorname{tr}[\Psi(P(h))e^{-ith^{-1}\tilde{P}(h)}] = \sum_{l \in Z}\left(\sum_{\lambda \in [\text{Spectre } P(h)] \cap I_l(h)} \Psi(\lambda)\right)e^{-itl}$$

et

$$\text{(3.23)} \qquad d_1(h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{itl}\cdot \operatorname{tr}[\Psi(P(h))e^{-ith^{-1}\tilde{P}(h)}]dt$$

Soit alors $\zeta \in C_0^\infty\left(\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\right)$ telle que : $\sum_{l \in Z} \zeta(t - 2\pi l) = 1$.

Il résulte de (3.23) que l'on a alors :

$$d_l(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itl} \cdot \zeta(t) \cdot tr\, [\Psi(P(h)) e^{-ith^{-1}\tilde{P}(h)}] dt \tag{3.24}$$

Posons $\tau = \gamma + \left(l + \frac{\alpha}{4}\right)h$, on a encore :

$$d_1(h) = e_\tau(h) \tag{3.25}$$

où : $$e_\tau(h) = \frac{1}{2\pi} tr \left[\int e^{ith^{-1}\tau} \cdot \zeta(t) \cdot \Psi(P(h)) \cdot e^{-ith^{-1}(P(h) - h^2 W(h))} dt\right]$$

Comme dans nos travaux antérieurs ([H-R]$_4$ théorème 3), on applique alors le théorème de la phase stationnaire pour estimer $e_\tau(h)$ lorsque h tend vers 0, τ étant considéré comme un paramètre, $\tau \in [E_1 - \varepsilon, E_2 + \varepsilon]$. La dépendance en τ étant uniforme dans l'intervalle $[E_1 - \varepsilon, E_2 - \varepsilon]$, on peut prendre $\tau = \gamma + \left(l + \frac{\alpha}{4}\right) \cdot h$ et on obtient ainsi le théorème (3.10).

Le corollaire (3.11) résulte facilement du théorème (3.10) et du lemme (3.7).

REMARQUE (3.13). — *Si l'on revient à l'hypothèse initiale* (H8) (*où* T_E *n'est pas nécessairement* 2π), *les résultats précédents donnent une expression des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld. Plus précisément sous les hypothèses* (H1) *à* (H8) *les niveaux d'énergie discrets de* $P(h)$ *dans l'intervalle* $[E_1, E_2]$ *vérifie l'équation* :

$$J(E) = 2\pi\left[\gamma + \left(l + \frac{\alpha}{4}\right) \cdot h\right] + 0(h^2) \qquad \text{avec} \quad l \in \mathbb{Z}$$

et où : $J(E) = \int_\gamma \xi dx$, γ *étant une trajectoire classique du champ hamiltonien* H_{p_0}, *d'énergie* E.

Dans la suite nous montrons que si $n = 1$ *les conditions de Bohr-Sommerfeld prennent une forme beaucoup plus précise.*

Dans ce qui suit nous supposons donc que $n = 1$.

Pour simplifier l'écriture, quitte à faire une translation, nous pouvons supposer que $\gamma = 0$.

Soit $(l, h) \in \mathbb{Z} \times]0, h_0[$ tel que $(1 + 1/2)h \in [E_1, E_2]$. Il résulte de ce qui précède que, si h_0 est assez petit, spectre $P(h) \cap I_1(h)$ est constitué de N_I nombres que l'on note : $\{\lambda_1^j(h)\}_{1 \leq j \leq N_I}$ en ordonnant cette suite finie suivant les valeurs croissantes.

THÉORÈME (3.14). — *Sous les hypothèses* (H1) *à* (H9) *avec de plus* $n=1$ *et* $\gamma=0$, *il existe une suite de fonctions* $f_k \in C^\infty(]E_1-\varepsilon, E_2+\varepsilon[)$, $k \geqslant 2$, *telle que* :

$$\lambda_l^j(h) + \sum_{k=2}^{\infty} h^k \cdot f_k(\lambda_1^j(h)) = (1 + 1/2) \cdot h + 0(h^\infty)$$

pour $j=1, 2, \ldots, N_I$, $h \in]0, h_0[$, $l \in \mathbb{Z}$, *tels que* $(l+1/2)h \in [E_1, E_2]$, *le* 0 *étant uniforme par rapport à* 1.

COROLLAIRE (3.15). — *Sous les hypothèses du théorème* (3.14), *il existe une suite de fonctions* $g_k \in C^\infty(]E_1 - \varepsilon, E_2 + \varepsilon[)$, $k \geqslant 2$, *telle que* :

$$\lambda_l^j(h) = (l+1/2)h + \sum_{k \geqslant 2} h^k g_k((l + 1/2)h) + 0(h^\infty)$$

sous la condition $(l+1/2)h \in [E_1, E_2]$, $h \leqslant h_0$, *le* 0 *étant uniforme par rapport à* 1. *En particulier sous les conditions précédentes on a* :

$$|\lambda_l^j(h) - \lambda_l^{j'}(h)| = 0(h^\infty) \quad \textit{pour} \quad j, j' = 1, 2, \ldots, N_I.$$

Preuve du théorème (3.14). — Avec les notations de la proposition (3.8), on a :

$$\tilde{P}(h) = P(h) - \frac{h}{2} - h^2 \cdot \tilde{W}(h) \tag{3.26}$$

avec $[P(h), \tilde{W}(h)] = 0$.

On en déduit alors que pour $j=1, 2, \ldots, N_I$, il existe $f_2^j \in C^\infty(]E_1-\varepsilon, E_2+\varepsilon[)$ telle que : $\tilde{W}_0(x, \xi) = -f_2^j(p_0(x, \xi))$ dans Ω_j^ε.

Montrons que : $f_2^j = f_2^k$ pour j, $k = 1, 2, \ldots, N_I$.

Or, d'après la proposition (3.8), on a :

$$\tilde{W}_0(x, \xi) = \tilde{W}_0(\kappa_{jk}(x, \xi)) \quad \text{dans} \quad \Omega_k^\varepsilon \tag{3.27}$$

et d'autre part :

$$\tilde{W}_0(x, \xi) = -f_2^k(p_0(x, \xi)) \quad \text{dans} \quad \Omega_k^\varepsilon \tag{3.28}$$

Il résulte de (3.27), (3.28) et de (H7) que l'on a bien : $f_2^j = f_2^k$. On pose alors $f_2 = f_2^j$, $j = 1, 2, \ldots, N_I$.

On déduit alors de (3.26) et de ce qui précède que l'on a :

$$\tilde{P}(h) = P(h) - \frac{h}{2} + h^2 \cdot f_2(P(h)) + h^3 \cdot W_3(h) \tag{3.29}$$

où $[P(h), W_3(h)] = 0$ et $W_3(h)$ vérifie également (H7).

Par récurrence sur l'entier M on obtient :

$$\tilde{P}(h) = P(h) - \frac{h}{2} + \sum_{j=2}^{M} h^j f_j(P(h)) + h^{M+1} \cdot W_{M+1}(h) \tag{3.30}$$

avec $[P(h)\tau W_{M+1}(h)] = 0$; $W_{M+1}(h)$ vérifie (H7) et est uniformément borné par rapport à h comme opérateur de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

De (3.30) on déduit le théorème (3.14).

Le corollaire (3.15) s'obtient à partir du théorème (3.14) par inversion.

REMARQUE (3.16). — *La suite de fonctions* $\{ g_k \}_{k \geqslant 2}$ *déterminée dans le corollaire* (3.15) *est unique. Elle est théoriquement calculable à partir de la donnée du symbole de* $P(h)$. *Nous ne sommes pas parvenus pour le moment à établir des formules permettant d'exprimer ces fonctions. Cependant, en utilisant la formule de trace asymptotique de notre précédent travail* $[H\text{-}R]_1$ (*proposition* (5.3)) *on peut obtenir des relations qui permettent de déterminer les fonctions* g_k, $k \geqslant 2$, *modulo des constantes arbitraires. En outre si* p_0 *n'a pas de valeurs critiques dans* $]\mathrm{Min}\, p_0, E_2 + \varepsilon]$ *et si* $\mathrm{Min}\, p_0$ *est une valeur critique de Morse* (*cf.* § 4) *alors on peut déterminer ces constantes* (*au moins dans le cas de l'opérateur de Schrödinger*) *à l'aide de la théorie des perturbations* (*cf.* [H-S]) *car alors « prés » de* $\mathrm{Min}\, p_0$ *le spectre de* $P(h)$ *« ressemble » à celui de l'oscillateur harmonique* (*cf.* § 4, *lemme* (4.2)).

4. ÉTUDE DU SPECTRE DE $P(h)$ AU VOISINAGE DU MINIMUM

On suppose que $P(h)$ est un opérateur admissible vérifiant (H1), (H2), (H3) et (H4) avec $I = [0, E]$, on suppose de plus :

($\tilde{H}5$) $\min_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}} p_0(x, \xi) = 0$, 0 *est une valeur critique isolée pour* p_0 *et* $p_0^{-1}(0)$ *est constitué d'un nombre fini de points* : $(x^1, \xi^1), \ldots, (x^N, \xi^N)$ *qui sont des points de Morse pour* p_0 (*i. e. en ces points le hessien de* p_0 *est défini positif*).

Dans la suite, pour simplifier l'exposé, nous supposerons $n=1$. Nous signalerons au passage les modifications à faire pour $n \geqslant 2$.

Dans tout intervalle $[E', E]$, $E' > 0$, nous pourrons appliquer les résultats du § 3. Par conséquent, dans ce paragraphe nous pourrons toujours supposer E suffisamment petit. Dans la suite nous exploiterons librement cette possibilité.

Soit :
$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \cdot \int_{p_0(x,\xi) \leq \lambda} dx d\xi, \qquad \lambda \in]0, E[$$

LEMME (4.1). — *Il existe un prolongement de* f *en une fonction strictement croissante,* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *et affine en dehors d'un voisinage compact de* $[0, E]$.

Preuve. — En utilisant le lemme de Morse au voisinage de chacun des points (x^j, ξ^j), $j = 1, 2, \ldots, N$ on se ramène au cas où $p(x, \xi) = x^2 + \xi^2$.

On en déduit alors que $f \in C^\infty([0, E])$ (voir preuve en annexe). Le lemme en résulte alors facilement.

Il résulte du lemme (4.1) que l'opérateur admissible $Q(h) = f(P(h))$ est tel que toutes les trajectoires de H_{q_0} d'énergie $\lambda \in]0, E]$ sont périodiques de période 2π.

LEMME (4.2). — $q_0 \underset{\text{def}}{=} f(p_0)$ *vérifie également* ($\tilde{\text{H}}$5).

Preuve. — Un calcul immédiat montre que :

$$(\text{Hess } q_0)(x^j, \xi^j) = f'(0) \cdot (\text{Hess } p_0)(x^j, \xi^j)$$

pour $j = 1, \ldots, N$ d'où le lemme (4.2).

Il est assez aisé de voir que les constructions du § 3 sont encore valides pour $Q(h)$ dans les intervalles d'énergie $[-E, E]$ ($E > 0$ assez petit).

En particulier sous les hypothèses (H1) à (H4), ($\tilde{\text{H}}$5), (H6) et (H7) on a :

PROPOSITION (4.3). — *Il existe* $\Gamma > 0$ *et* $h_0 > 0$ *tels que* :

$$[\text{Spectre } Q(h)] \cap [-E, E] \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(k+1/2)h - \Gamma \cdot h^2, (k+1/2)h + \Gamma \cdot h^2] \quad \textit{pour tout} \quad h \in]0, h_0].$$

REMARQUE (4.4). — *Pour* $n \geqslant 2$ *on remplace* f *par la fonction d'action* : $J :]0, E] \to \mathbb{R}$ *définie dans la proposition* (2.4). *Nous montrerons en annexe que* $J \in C^\infty([0, E])$. *Avec ces modifications on a encore la proposition* (4.3) *pour* $Q(h) = J(P(h))$.

Comme dans le § 3 désignons par $d_k(h)$ le nombre de valeurs propres de $Q(h)$ *dans l'intervalle* :

$$I_k(h) = [(k + 1/2)h - \Gamma \cdot h^2, (k + 1/2)h + \Gamma \cdot h^2].$$

Supposons de plus que :

($\tilde{\text{H}}$9) expt $H_{q_0}|_{q_0^{-1}(]0,E[)}$ soit simplement périodique de période 2π.

THÉORÈME (4.5). — *Sous les hypothèses* (H1) *à* (H4), ($\tilde{\text{H}}$5), (H6) *à* (H8) *et* ($\tilde{\text{H}}$9) *on a* :

il existe un entier $k_0 \geqslant 1$ *et un réel* $h_0 > 0$

tels que :
$$d_k(h) = 0 \quad \textit{si} \quad k \leqslant -k_0$$
$$d_k(h) = N \quad \textit{si} \quad k \geqslant k_0$$

pour tout $h \in]0, h_0]$.

Commençons par remarquer qu'il résulte de $[\text{H-R}]_1$ que pour tout $E > 0$ il existe $h_0 > 0$ tel que : spectre $Q(h) \subset [-E, +\infty[$ pour tout $h \in]0, h_0]$. On peut donc bien choisir $E > 0$ aussi petit que l'on veut.

Comme dans le § 3 on pose : $\tau = (k + 1/2)h$ et on se ramène à étudier :

$$e_\tau(h) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tr}\left[\int e^{ith^{-1}\tau} \cdot \zeta(t)\Psi(Q(h)) \cdot e^{-ith^{-1}\tilde{Q}(h)} dt\right]$$

où :
$$\tilde{Q}(h) = Q(h) - h^2\tilde{W}(h),$$

avec : $\Psi \in C_0^\infty(]-E-\varepsilon, E+\varepsilon[)$, $\Psi \equiv 1$ sur $[-E, E]$ et $\tilde{W}(h)$ est un opérateur admissible d'ordre 0 commutant à $Q(h)$.

Le théorème (4.4) est une conséquence de :

PROPOSITION (4.6). —

i) $e_\tau(h) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\{p_0=\tau\}} \frac{dS_\tau}{|\nabla p_0|} + 0\left(\frac{h}{\tau}\right)$ *pour* $h \in]0, h_0]$, $0 < \tau \leqslant E$.

ii) $e(h) = 0\left(\dfrac{h}{|\tau|}\right)^\infty$ *pour* $h \in]0, h_0]$, $-E \leqslant \tau < 0$

Preuve de : proposition (4.6) $\Rightarrow$ *théorème* (4.5).

Si $k < 0$, on a alors en utilisant (*ii*) :

$$d_k(h) = 0\left(\frac{h}{|k + 1/2| \cdot h}\right). \qquad \text{Or} \quad d_k(h) \in \mathbb{N}$$

d'où il existe $k_0 > 0$ tel que : $d_k(h) = 0$ si $k < -k_0$.

Pour $k > 0$ le raisonnement est le même en remarquant que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\{p_0=\tau\}} \frac{dS}{|\nabla p_0|} = N \qquad \text{pour } \tau > 0.$$

REMARQUE (4.7). — *Il résulte également de la proposition* (4.6) *que pour tout* $C > 0$ *il existe* $n_C \in \mathbb{N}$ *tel que :* $d_k(h) \leqslant n_C$ *pour tout* $h \in]0, h_0]$ *et pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $|k| \leqslant C$.

En particulier le nombre de valeurs propres de $Q(h)$ *dans* $[-Ch, Ch]$ *peut être majoré indépendamment de h sous les conditions :* $h \in]0, h_0]$, $Ch \leqslant E$. *Des méthodes de perturbation permettent une étude plus fine de*

$$[\text{Spectre } Q(h)] \cap [-Ch, Ch]$$

(*voir* § 5 *de ce travail et* [SIM] [H-S]).

Preuve de la proposition (4.6). — Nous devons reprendre l'étude de $e_\tau(h)$ par la méthode indiquée au § 3 (preuve du théorème (3.10)) en contrôlant soigneusement les estimations lorsque τ tend vers une valeur critique de q_0.

Après partition de l'unité en la variable t, on se ramène à étudier :

$$J_\tau(h) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tr}\left[\int e^{ith^{-1}\tau} \cdot \zeta(t) \cdot \Psi(Q(h)) e^{-ith^{-1}\cdot\tilde{Q}(h)} dt\right]$$

où $\zeta \in C_0^\infty(](k-1)\cdot T_0, (k+1)\cdot T_0[)$, $k \in \mathbb{Z}$, $T_0 > 0$ suffisamment petit.

Des intégrales du type $J_\tau(h)$ ont été étudiées dans $[HR]_2$ et [HEL] lorsque τ est assez loin des valeurs critiques de q_0. Nous reprenons cette étude ici en insistant seulement sur les modifications à apporter par rapport à $[HR]_2$ et [HEL].

Supposons $k \in \mathbb{N}$ ($k < 0$ se traite de manière similaire).

Pour $t \in](k-1)T_0, (k+1)T_0[$, $\Psi(Q(h))e^{-ih^{-1}\tilde{Q}(h)}$ a un noyau distribution de la forme :

$$K(t, x, y) = h^{-k-1} \int_{\mathbb{R}^{2k+1}} e^{ih^{-1}\phi(t,x,\Theta,y)} \cdot b(t, x, \Theta, y, h) d\Theta$$

(après avoir négligé des termes donnant une contribution $0(h^\infty)$).

Posons : $\Theta = (\eta_1, y_2, \eta_2, \ldots, y_{k+1}, \eta_{k+1}) \in \mathbb{R}^{2k+1}$.

Alors Φ est donnée par :

$$(4.1) \quad \Phi(t, x, \Theta, y) = S(t - kT_0, x, \eta_{k+1}) - y_{k+1} \cdot \eta_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} S(T_0, y_{j+1}, \eta_j) - y_j \cdot \eta_j$$

avec la convention $y_1 = y$.

S est solution de l'équation caractéristique :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \partial_t S(t, x, \eta) - q_0(x, \partial_x S(t, x, \eta)) = 0 \\ S(0, x, \eta) = x \cdot \eta \end{cases}$$

$b(t, x, \Theta, y, h)$ est une amplitude que l'on peut supposer à support compact en (x, Θ), indépendant de h, de terme principal :

$$(4.3) \quad b^0(t, x, \Theta, y) = a(t - kT_0, x, \eta_{k+1}) \left(\prod_{j=1}^{k} a(T_0, y_{j+1}, \eta_j) \right) \cdot \Psi(q_0(y_2, \eta_1))$$

où $(a(s, x, \eta)$ est solution d'une équation de transport et vérifie $a(0, x, \eta) = 1$. Dans la suite on pourra modifier si nécessaire le support de Ψ.

L'étude de $J_\tau(h)$ se ramène donc à celle de l'intégrale :

$$(4.4) \quad G_\tau(h) = h^{-k-1} \int e^{ih^{-1}[\phi(t,x,\Theta,x) + t\tau]} \cdot b(t, x, \Theta, x, h) \zeta(t) đ\Theta dx đt$$

où l'on a posé $dt = (2\pi)^{-1} đt$ et $đ\Theta = (2\pi)^{-k} d\Theta$.

Les calculs qui vont suivre présentent des analogies avec le § 4.1 de [HEL] bien que le paramètre τ qui y figure soit un grand paramètre !

Une intégrale du type (4.4) a été étudiée dans [HEL] et $[H\text{-}R]_2$ pour établir une relation de Poisson.

Posons :

$$\Psi(t, x, \Theta, \tau) = \phi(t, x, \Theta, x) + t \cdot \tau$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit le voisinage suivant $\mathscr{A}(\tau, \varepsilon)$ de la variété critique de Ψ :

$$\mathscr{A}(\tau, \varepsilon) = \Big\{ (t, x, \Theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \mid t \in \operatorname{Supp} \mathscr{I}, |x|^2 + |\Theta|^2 \leqslant R^2 \mid$$
$$|\Psi'_t|^2 + |\Psi'_x|^4 + \sum_{j=1}^{2k+1} |\Psi'_{\theta_j}|^4 \leqslant \varepsilon^2(\tau^2 + |x|^4 + |\Theta|^4) \Big\},$$

R étant un réel > 0 fixé.

Dans la suite pour simplifier l'exposé de la preuve du théorème (4.5) nous supposerons que $N = 1$ et que $p_0^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$. On se ramène facilement à ce cas pour une partition de l'unité.

On a :

LEMME (4.8). — *Il existe des réels* $\varepsilon_0 > 0$, $\tau_0 > 0$, $C_0 > 0$, $C'_0 > 0$ *tels que pour* $0 < \tau \leqslant \tau_0$ *et* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *on ait* :

$$\mathscr{A}(\tau, \varepsilon) \subset \{ (t, x, \Theta), C_0 \leqslant |\tau|^{-1/2}(|y_{j+1}| + |\eta_j|) < C'_0,\ 1 \leqslant j \leqslant k ;$$
$$C_0 \leqslant |\tau|^{-1/2}(|x| + |\eta_1|) \leqslant C'_0 ;\ C_0 \leqslant |\tau|^{-1/2}(|x| + |\eta_{k+1}|) \leqslant C'_0 \}$$

Preuve du lemme (4.8). — On a : $\Psi'_t = \tau + \partial_t S(t - kT_0, x, \eta_{k+1})$.

D'où on a :

Il existe $\varepsilon_1, A_0, A_1 > 0$ tels que :

$$(4.5) \quad A_0(|\tau| - \varepsilon(|x|^2 + |\Theta|^2)) \leqslant |\partial_t S(t - kT_0, x, \eta_{k+1})|$$
$$\leqslant A_1(|\tau| + \varepsilon \cdot (|x|^2)) \quad \text{pour} \quad (t, x, \Theta) \in \mathscr{A}(\tau, \varepsilon), \qquad \varepsilon < \varepsilon_1 .$$

Or pour $|x|^2 + |\eta|^2 < R^2$, $|s| \leqslant T_0$, on a :

$$(4.6) \qquad \begin{cases} |x|^2 + |\eta|^2 \approx |\partial_x S(s, x, \eta)|^2 + |x|^2 \\ |x|^2 + |\eta|^2 \approx |\partial_\eta S(s, x, \eta)|^2 + |\eta|^2 \end{cases}$$

(4.6) provient de ce que pour T_0 assez petit, $(x, \eta) \to (\partial_x S(s, x, \eta), x)$ et $(x, \eta) \to (\eta, \partial_\eta S(s, x, \eta))$ sont des difféomorphismes qui envoient $(0, 0)$ sur $(0, 0)$ et égaux à l'identité pour $s = 0$. D'autre part, le fait que $(0, 0)$ soit un minimum de Morse pour q_0 entraîne :

$$(4.7) \quad q_0(x, \eta) \approx |x|^2 + |\eta|^2 \quad \text{pour} \quad |x|^2 + |\eta|^2 < R_0^2, \quad R_0 > 0 \quad \text{assez petit}.$$

On déduit alors de (4.2), (4.5), (4.6) et (4) :

$$(4.8) \qquad |x|^2 + |\eta_{k+1}|^2 \approx |\tau| \qquad (\text{mod } \varepsilon(|x|^2 + |\Theta|^2)$$

CONVENTION. — *Pour alléger l'écriture, nous adoptons la convention suivante ; soient 3 fonctions* $f_1, f_2, g \cdot f_1 \approx f_2$ (mod g) *signifie qu'il existe des constantes* C_1, $C_2 > 0$ *telles que* : $C_1(f_1 - g) \leqslant f_2 \leqslant C_2(f_1 + g)$.

Sur $\mathscr{A}(\tau, \varepsilon)$, on a :

$$(4.9)\qquad \begin{cases} |\partial_{\eta_1} S(T_0, y_2, \eta_1) - x|^2 \leqslant \varepsilon(|\tau| + |x|^2 + |\Theta|^2) \\ |\partial_x S(t-kT_0, x, \eta_{k+1})|^2 \leqslant \varepsilon(|\tau| + |x|^2 + |\Theta|^2) \end{cases}$$

D'où :

$$(4.10)\qquad |x|^2 + |\eta_1|^2 \approx |\tau| \qquad (\text{mod } \varepsilon(|x|^2 + |\Theta|^2))$$

De la même manière on obtient :

$$(4.11)\qquad |\eta_1|^2 + |y_2|^2 \approx |\tau| \qquad (\text{mod } \varepsilon(|x|^2 + |\Theta|^2))$$

puis de proche en proche :

$$(4.12)\qquad |\eta_j|^2 + |y_{j+1}|^2 \approx |\tau| \qquad (\text{mod } \varepsilon(|x|^2 + |\Theta|^2))$$

Le lemme résulte alors de (4.8), (4.10) et (4.12) avec ε assez petit.

Nous allons maintenant exploiter le lemme (4.8) pour faire des intégrations par parties en dehors de $\mathscr{A}(\tau, \varepsilon)$.

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\chi \equiv 1$ sur $[-1/2, 1/2]$, $\operatorname{Supp} \chi \subset [-1, 1]$.

Posons : $$\zeta_\varepsilon(t, x, \Theta, \tau) = \chi\left(\frac{|\Psi'_t|^2 + \sum_j |\Psi'_{x_j}|^4 + \sum_j |\Psi'_{\theta_j}|^4}{\varepsilon^2(\tau^2 + |x|^4 + |\Theta|^4)}\right)$$

puis $\tilde{b} : (t, x, \Theta) \to b^0(t, x, \Theta, x)$ et $\tilde{b} = \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2$ où $\tilde{b}_1 = \zeta_\varepsilon \cdot b$.

Commençons par étudier la contribution de $\tilde{b}_2$ à $G_\tau(h)$; pour cela introduisons l'opérateur différentiel :

$$M = i^{-1}\left(|\Psi'_t|^2 + \sum_j |\Psi'_{x_j}|^4 + \sum |\Psi'_{\theta_j}|^4\right)\left(\Psi'_t \cdot \partial_t + \sum_j \Psi'^3_{x_j} \cdot \partial_{x_j} + \sum_j \Psi'^3_{\theta_j} \cdot \partial_{\theta_j}\right)$$

on a :

$$(4.13)\qquad I_{2,\tau}(h) = h^{-k-1} \iint e^{ih^{-1}\Psi(t,x,\Theta,\tau)} h^1 ({}^tM)^1(\tilde{b}_2)\, dt\, d\Theta\, dx$$

Or en utilisant le lemme (4.8), on montre que pour tout $1 \in N$, assez grand, on a :

$$(4.14)\qquad |I_{2,\tau}(h)| \leqslant C_1 h^{-k-1} \cdot h^1 \cdot \int (|\tau| + |x|^2 + |\Theta|^2)^{-1} dx\, d\Theta$$

On effectue alors le changement de variables :

$$\begin{cases} x = |\tau|^{1/2}\tilde{x} \\ \Theta = |\tau|^{1/2}\tilde{\Theta} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ \Theta \in \mathbb{R}^{2k+1} \end{matrix}$$

On obtient alors :

$$I_{2,\tau}(h) = 0\left(\frac{h}{|\tau|}\right)^{1-k-1}$$

1 étant arbitraire, il en résulte :

$$I_{2,\tau}(h) = 0\left(\frac{h}{|\tau|}\right)^{\infty}$$

Pour estimer la contribution de $\tilde{b}_1$ on fait également le changement de variables précédent et on revient à la notation (x, Θ). Nous allons utiliser la méthode de la phase stationnaire par rapport au grand paramètre : $\sigma = \frac{|\tau|}{h}$; la phase et l'amplitude dépendant régulièrement du petit paramètre τ.

Posons :

$$I_{1,\tau}(h) = |\tau|^{k+1} \cdot h^{-k-1} \int e^{ih^{-1}.\Psi(t,|\tau|^{1/2}.x,|\tau|^{1/2}.\Theta,\tau)} \cdot \tilde{b}_1(t, |\tau|^{1/2}x, |\tau|^{1/2} \cdot \Theta, \tau) dt d\Theta dx .$$

On a encore :

$$I_{1,\tau}(h) = \sigma^{k+1} \cdot \int e^{i\sigma.[|\tau|^{-1}.\phi(t,|\tau|^{1/2}.x,|\tau|^{1/2}\Theta,|\tau|^{1/2}.x)+(\operatorname{sgn}\sigma).t]} \cdot \tilde{b}_1(t, |\tau|^{1/2} \cdot x, |\tau|^{1/2} \cdot \Theta, \tau) dt d\Theta dx .$$

Posons : $H_\tau(\sigma) = I_{1,\tau}(h)$ où $\sigma = \frac{|\tau|}{h}$.

Rappelons que la phase de $H_\tau(\sigma)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}(4.15)\quad & \phi(t, |\tau|^{1/2} \cdot x, |\tau|^{1/2} \cdot \Theta, |\tau|^{1/2} \cdot x) \\ & + (\operatorname{sgn}\sigma)t = |\tau|^{-1} \cdot S(t - kT_0), |\tau|^{1/2}x, |\tau|^{1/2}\eta_{k+1}) - y_{k+1} \cdot \eta_{k+1} \\ & + |\tau|^{-1} \sum_{j=1}^{k} (S(T_0, |\tau|^{1/2}y_{j+1}, |\tau|^{1/2}\eta_j) - y_j \cdot \eta_j) + (\operatorname{sgn}\sigma) \cdot \tau, \text{ avec } y_1 = x.\end{aligned}$$

$(0, 0)$ étant un point fixe pour le flot $\exp(tH_{q_0})$, on a :

$$\begin{cases} S(s, 0, 0) = 0 \\ \partial_x S(s, 0, 0) = 0 \\ \partial_\eta S(s, 0, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{pour} \quad |s| \leqslant T_0 .$$

D'autre part, on a :

$$(4.16)\quad \lim_{|\tau| \to 0} \{ |\tau|^{-1} \cdot S(s, |\tau|^{1/2} \cdot x, |\tau|^{1/2} \cdot \eta) \} = S_0(s, x, \eta) \quad \text{pour} \quad |s| \leqslant T_0, \quad |x|^2 + |\eta|^2 \leqslant R_0^2 .$$

où S_0 est la solution de l'équation caractéristique relative à la partie quadratique $\tilde{q}_0$ du développement de Taylor de q_0 en $(0, 0)$.

Or il résulte de l'hypothèse sur q_0 que $S_0(s, x, \eta)$ est, à un changement linéaire de coordonnées près, la phase de l'oscillateur harmonique. On peut préciser (4.16) de la manière suivante :

$$(4.17)\quad |\tau|^{-1}\cdot S(s, |\tau|^{1/2}\cdot x, |\tau|^{1/2}\cdot\eta) = S_0(s, x, \eta) + |\tau|^{1/2}\cdot S_1(s, |\tau|, x, \eta)$$

où $(s, \tau, x, \eta) \to S_1(s, \tau, x, \eta)$ est C^∞ dans $]-T_0, T_0[\times[0, E]\times\{|x|^2+|\eta|^2\leqslant R_0^2\}$.

(4.17) permet de réécrire la phase de $H_\tau(\sigma)$ sous la forme :

$$(4.18)\quad \tilde{\phi}(t, \Theta, x, |\tau|) = S_0(t-k\cdot T_0, x, \eta_{k+1}) - y_{k+1}\cdot\eta_{k+1} + \sum_{j=1}^{k}(S_0(T_0, y_{j+1}, \eta_j) - y_j\cdot\eta_j) + |\tau|^{1/2}\cdot\tilde{\phi}_1(t, \Theta, x, |\tau|)$$

Nous allons considérer $\tilde{\phi}$ comme une perturbation de :

$$\tilde{\phi}_0(t, \Theta, x) = S_0(t-kT_0, x, \eta_{k+1}) - y_{k+1}\cdot\eta_{k+1} + \sum_{j=1}^{k}(S_0(T_0, y_{j+1}, \eta_j) - y_j\cdot\eta_j) \qquad (\text{où } y_1 = x).$$

Or $\tilde{\phi}_0$ étant associée à un oscillateur harmonique de période 2π, sur les points critiques de $\tilde{\phi}_0$, on a : $t\in 2\pi Z$ et :

$$(\exp t\cdot H_{\tilde{q}_0})(x, \eta_1) = (x, \eta_1)$$

Or il résulte du lemme (4.8) (compte tenu du changement de variables) que l'on a :

$$|x| + |\eta_1| \geqslant C_0 .$$

Il résulte alors du théorème de la phase non stationnaire que l'on a :

$$(4.19)\quad \text{Si}\quad \zeta\in C_0^\infty\,](k-1)T_0, (k+1)T_0[,\quad k\neq 0\quad \text{et Supp}\,\zeta C\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

alors : $H_\tau(\sigma) = 0(|\sigma|^{-\infty})$ uniformément par rapport à τ, $|\tau|\leqslant E$. ($E > 0$ assez petit).

On est donc ramené à l'étude de $H_\tau(\sigma)$ pour Supp $\zeta\subset\,]-T_0, T_0[$.

La phase s'écrit alors simplement :

$$(4.20)\quad \tilde{\phi}(t, \eta, x, |\tau|) = S_0(t, x, \eta) - x\cdot\eta + |\tau|^{1/2}\cdot S_1(t, |\tau|, x, \eta) + (\operatorname{sgn}\sigma)t$$

D'où l'on déduit que pour $|\tau|$ assez petit les points critiques de $\tilde{\phi}$ qui sont sur le support de l'amplitude vérifiant :

$$(4.21)\qquad t = 0\,;\qquad q(|\tau|^{1/2}x, |\tau|^{1/2}\cdot\eta) = (\operatorname{sgn}\tau)|\tau|$$

Le théorème de la phase stationnaire généralisé, dépendant régulièrement d'un paramètre, nous permet alors d'obtenir :

$$(4.22)\quad H_\tau(\sigma) = \frac{\zeta(0)}{2\pi}\cdot\int_{\{q_0=\tau\}} \frac{dS_\tau}{|\nabla q_0|} + 0(\sigma^{-1}), \qquad \sigma \to +\infty$$

uniformément en τ, $\tau \in]0, E]$.

$$(4.23)\quad H_\tau(\sigma) = 0(|\sigma|^{-\infty}), \quad \sigma \to -\infty, \quad \text{uniformément en } \tau, \tau \in [-E, 0[.$$

On en déduit alors la proposition (4.6) en revenant à la notation initiale : $\sigma = \dfrac{|\tau|}{h}$.

REMARQUE (4.9). — *A partir du théorème* (4.5) *on obtient facilement les analogues du théorème* (3.14) *et du corollaire* (3.15) *en remplaçant l'intervalle* : $]E_1 - \varepsilon, E_2 + \varepsilon[$ *par* $[0, E]$ *sous la condition* $k \geqslant k_0$. *Plus précisément pour* $k \geqslant k_0$ *désignons par* $\lambda_k^j(h)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, *les valeurs propres de* $Q(h)$ *qui sont dans l'intervalle* $I_k(h)$. *On a alors* :

$$\lambda_k^j(h) + \sum_{1=2}^{\infty} h^1 \cdot f_1(\lambda_k^j(h)) = (k + 1/2)h + 0(h^\infty)$$

pour $j = 1, 2, \ldots, N$, $h \in]0, h_0[$, $k \geqslant k_0$, $(k + 1/2)h \leqslant E$, *le* 0 *étant uniforme par rapport à k. De plus* $f_1 \in C^\infty([0, E])$. *Sous les mêmes conditions, on a* :

$$\lambda_k^j(h) = (k+1/2)\cdot h + \sum_{1\geqslant 2} h^1 \cdot g_1((k+1/2)\cdot h) + 0(h^\infty) \quad \text{avec} \quad g_1 \in C^\infty([0, E])$$

d'où l'on déduit en particulier :

$$|\lambda_k^j(h) - \lambda_k^{j'}(h)| = 0(h^\infty) \quad \text{pour} \quad k \geqslant k_0,\ j,\ j' = 1, 2, \ldots, N \quad \text{et} \quad (k+1/2)h \leqslant E.$$

La preuve de la proposition (4.6) n'a pas utilisé la propriété $n = 1$. Il est assez facile de voir que la technique utilisée permet d'obtenir le résultat suivant :

Soit $P(h)$, $0 < h \leqslant h_0$, un opérateur admissible vérifiant : (H_1), (H_2), (H_3), (H_4) avec $E_1 = 0$ et $E_2 = E$ et $(\tilde{H}_5)$.

Soient $\zeta \in C_0^\infty]-T_0, T_0[$, $T_0 > 0$ assez petit et $\Psi \in C_0^\infty(]-E-\varepsilon, E+\varepsilon[)$, $\Psi \equiv 1$ sur $[-E, E]$. On pose alors :

$$I_\tau(h) = \operatorname{tr}\left[\int e^{ith^{-1}\tau} \cdot \zeta(t) \cdot \Psi(P(h)) e^{-ith^{-1}P(h)} dt\right]$$

On a :

PROPOSITION (4.10). —

$$i) \qquad I_\tau(h) = (2\pi h)^{1-n} \cdot \zeta(0) \cdot \int_{\{P_0=\tau\}} \frac{dS_\tau}{|\nabla p_0|} + \sum_{j=2}^{+\infty} A_j(\tau^{1/2}) \left(\frac{\tau}{h}\right)^{n-j}$$

pour $0 < \tau \leqslant E$, $h \in]0, h_0]$, $A_j \in C^\infty([0, E])$.

Le développement asymptotique ayant la signification que, pour tout entier $N > n$, *on a* :

$$\sum_{j=2}^{+\infty} A_j(\tau^{1/2}) \left(\frac{\tau}{h}\right)^{n-j} = \sum_{j=2}^{N} A_j(\tau^{1/2}) \cdot \left(\frac{\tau}{h}\right)^{n-j} + 0\left(\frac{\tau}{h}\right)^{n-N-1}$$

$$ii) \qquad I_\tau(h) = 0\left(\frac{h}{|\tau|}\right)^{\infty} \quad \textit{pour} \quad -E < \tau < 0, \quad h \in]0, h_0]$$

Dans (*i*) *et* (*ii*), *le* 0 *est uniforme par rapport à* τ.

De la proposition (4.10) nous pouvons tirer une information sur la répartition du spectre de $P(h)$ dans l'intervalle $[-E, E]$.

Pour $\lambda \leqslant E$, désignons par $N_h(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de $P(h)$ (avec multiplicité) $\leqslant \lambda$.

Sous les hypothèses de la proposition (4.10), on a le :

THÉORÈME (4.11). — *i*) *Il existe* $C_0 > 0$ *tel que* $N_h(\lambda) = 0$ *pour tout* $\lambda \leqslant -C_0 \cdot h$ *et tout* $h \in]0, h_0]$. *On suppose* $n \geqslant 2$. *On a alors* :

$$ii) \qquad N_h(C \cdot h) = (2\pi h)^{-n} \cdot \iint_{p_0 \leqslant Ch} dx d\xi + 0(C^{n-1})$$

pour $C \to +\infty$, $Ch \leqslant E$ et $h \in]0, h_0]$, *le* « 0 » *étant uniforme par rapport à* h.

iii) *Pour* $n = 1$, *on a le même type de résultat avec* 0 (Log C).

REMARQUE (4.12). — *i*) *Si l'on a* $C \cdot h = \lambda$, $\lambda \in]0, E]$ *et si l'on fait tendre* h *vers* 0, *le théorème* (4.11) *redonne un résultat déjà démontré pour la fonction de répartition* $N_h(\lambda)$ *en dehors des points critiques. Ici, nous précisons le comportement de* $N_h(\lambda)$, *lorsque* λ *s'approche de la valeur critique* 0. *En particulier le théorème* (4.11) *implique que, pour tout* $C > 0$, *on a* :

$$\operatorname*{Sup}_{\left\{\substack{Ch \leqslant E \\ h \in]0, h_0[}\right\}} N_h(Ch) < +\infty$$

ii) *Des résultats du même type sont établis dans* [FEI] *dans un contexte différent et avec une estimation moins bonne sur le reste.*

La preuve du théorème (4.11) se fait de manière classique à partir de la proposition (4.10) et d'estimations préliminaires sur $N_h(\lambda)$ (voir par exemple $[H\text{-}R]_4$).

Commençons par :

LEMME (4.13). — *Il existe* $C_0 > 0$ *tel que* :

$$N_h(\lambda) = 0 \qquad \textit{pour tous} \quad \lambda \in]-\infty, -C_0 \cdot h] \quad \text{et} \quad h \in]0, h_0]$$

Preuve. — Supposons pour simplifier la présentation que $N = 1$ et que $\operatorname{Min} p_0$ est atteint au point de coordonnées $x = 0$, $\xi = 0$.

Soient : $\tilde{\Psi} \in C_0^\infty(]-E-2\varepsilon, E+2\varepsilon[)$, $\Psi \in C_0^\infty(]-E-\varepsilon, E+\varepsilon[$ telle que : $0 \leqslant \Psi, \tilde{\Psi} \leqslant 1$, $\tilde{\Psi} \cdot \Psi \equiv \Psi$.

Posons : $\Omega_\varepsilon = p_0^{-1}(]-E-2\varepsilon, E+2\varepsilon[)$.

Dans ce qui suit E et ε sont choisis assez petits mais fixés une fois pour toutes.

Il résulte de l'hypothèse $p_0 \geqslant 0$ que l'on a :

(4.24) Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha| + |\beta| = 1$, il existe $K_{\alpha,\beta} > 0$ telle que :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_0| \leqslant K_{\alpha\beta} \cdot p_0^{1/2} \qquad \text{pour tout} \quad (x, \xi) \in \Omega_\varepsilon .$$

Posons : $\tilde{P}(h) = p(h, \sqrt{h} \cdot x, \sqrt{h} \cdot D_x)$.

$\tilde{P}(h)$ et $P(h)$ étant unitairement équivalents, il suffit de prouver le lemme (4.13) pour $\tilde{P}(h)$.

Pour $\lambda > 0$, posons :

$$b_\lambda^\Psi(x, \xi) = [\tilde{\Psi}(p_0) \cdot (p_0 + \lambda)^{-1}](x, \xi) \quad \text{et} \quad \tilde{B}_\lambda^\Psi(h) = b_\lambda^\Psi(\sqrt{h} \cdot x, \sqrt{h} \cdot D_x).$$

Il résulte de (4.24) que l'on a :

(4.25) Pour tout $\alpha, \beta \in N^n$, il existe $L_{\alpha,\beta} > 0$ telle que :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (p_0 + \lambda)^{-1}| \leqslant L_{\alpha,\beta} \cdot \lambda^{-1-(|\alpha|+|\beta|)/2}$$

pour tout $\lambda \in]0, 1]$ et tout $(x, \xi) \in \Omega_\varepsilon$.

En effet, on a :

$$(4.26) \quad \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (p_0 + \lambda)^{-1} = (p_0 + \lambda)^{-1} \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant |\alpha| + |\beta| \\ |\alpha| = |\alpha^1| + \ldots + |\alpha^k| \\ |\beta| = |\beta^1| + \ldots + |\beta^k|}} C\binom{\alpha^1, \ldots, \alpha^k}{\beta^1, \ldots, \beta^k} \prod_{j=1}^{k} (p_0 + \lambda)^{-1} \cdot \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_0$$

où $C\begin{pmatrix}\alpha^1, \ldots, \alpha^k \\ \beta^1, \ldots, \beta^k\end{pmatrix}$ sont des constantes universelles.

Si $|\alpha^j| + |\beta^j| = 1$, on utilise (4.24) :

$$|(p_0 + \lambda)^{-1} \partial_x^{\alpha^j} \partial_\xi^{\beta^j} p_0| \leqslant K_{\alpha\beta} \cdot (p_0 + \lambda)^{-1/2} \leqslant K_{\alpha\beta} \lambda^{-1/2}$$

Si $|\alpha^j| + |\beta^j| \geqslant 2$, on a :

$$|(p_0 + \lambda)^{-1} \partial_x^{\alpha^j} \partial_\xi^{\beta^j} p_0| \leqslant \tilde{K}_{\alpha,\beta} (p_0 + \lambda)^{-1} \leqslant \tilde{K}_{\alpha\beta} \lambda^{-1}$$

Or, comme $\lambda \in]0, 1]$, on a :

$$\lambda^{-1} \leqslant \lambda^{-(|\alpha^j|+|\beta^j|)/2}.$$

On obtient donc (4.25).

On utilise alors la méthode standard de construction des paramétrix pour les opérateurs elliptiques : il existe donc un opérateur

$$D_\lambda^\Psi(h) \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$$

(de symbole principal b_λ^Ψ) tel que :

$$\tilde{\Psi}(\tilde{P}(h)) \cdot (\tilde{P}(h) + \lambda) \cdot D_\lambda^\Psi(h) = \Psi(\tilde{P}(h)) + R_\lambda(h) \tag{4.27}$$

Il résulte du théorème de composition précisé des opérateurs admissibles (voir [ROB]$_2$) et du théorème de continuité de Calderon-Vaillancourt que l'on a :

$$\| R_\lambda(h) \|_{\mathscr{L}(L^2,L^2)} = 0\left(\frac{h}{\lambda}\right) \quad \text{pour} \quad h \in]0, h_0], \quad \lambda \in]0, 1]. \tag{4.28}$$

En changeant éventuellement de fonction Ψ, on peut écrire (4.27) sous la forme :

$$\Psi(\tilde{P}(h)) \cdot (\tilde{P}(h) + \lambda) \cdot D_\lambda^\Psi(h) = \Psi(\tilde{P}(h))(I + R_\lambda(h)) \tag{4.29}$$

Posons alors : $\lambda = Ch$ et soit $C \geqslant C_0$ de sorte que $\| R_{C.h}(h) \|_{\mathscr{L}(L^2,L^2)} \leqslant 1/2$.

Il résulte alors de (4.27) et du choix de Ψ que pour $C \geqslant C_0$, $Ch \in]0, E[$, $(\tilde{P}(h) + Ch)^{-1}$ existe.

Pour la preuve du théorème (4.11), nous pouvons clairement remplacer l'étude de $N_h(\lambda)$ par celle de :

$$\sigma_h(\lambda) = \sum_{\lambda_j(h) \leqslant \lambda} \Psi(\lambda_j(h))$$

où

$$\Psi \in C_0^\infty(]-E-\varepsilon, E+\varepsilon[), \quad 0 \leqslant \Psi \leqslant 1, \quad \Psi \equiv 1 \quad \text{sur} \quad [-E, E].$$

Dans la suite nous utiliserons la proposition (4.10) en choisissant $\zeta \in C_0^\infty(]-T_0, T_0[)$ telle que :

$$\begin{cases} i) & \zeta(0) = 1 \quad \text{et} \quad \zeta \text{ est paire} \\ ii) & \hat{\zeta} \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \\ iii) & \text{Il existe } \delta_0 > 0, \varepsilon_0 > 0 \text{ tels que :} \\ & \qquad \hat{\zeta} \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{sur} \quad [-\delta_0, \delta_0] \end{cases} \tag{4.30}$$

Posons : $\theta_h(\mu) = (2\pi h)^{-1} \cdot \hat{\zeta}(h^{-1} \cdot \mu)$.

Il résulte de la définition de $I_\tau(h)$ que l'on a :

$$\frac{d}{d\lambda}(\sigma_h * \theta_h)(\lambda) = (2\pi h)^{-1} I_\lambda(h). \tag{4.31}$$

La comparaison de $\sigma_h * \theta_h$ et σ_h se fait par le :

LEMME (4.14). — *Il existe* $K > 0$ *telle que* :

$$|\sigma_h(Ch) - \sigma_h(Ch + \tau h)| \leqslant K(1 + |C|)^{n-1} \cdot (1 + |\tau|)^n$$

pour tout $C, \tau \in \mathbb{R}$.

Preuve. — Soit $\delta \in \mathbb{R}$, $|\delta| \leqslant \delta_0$.

On a :

$$\sigma_h(C \cdot h) - \sigma_h(C \cdot h - \delta h) = \int_{(C-\delta)h}^{Ch} d\sigma_h(\mu)$$

et en utilisant (4.30) (*iii*), il vient :

$$|\sigma_h(C \cdot h) - \sigma_h(Ch - \delta \cdot h)| \leqslant \varepsilon_0^{-1} \cdot I_{Ch}(h) \tag{4.32}$$

Il résulte de la proposition (4.10), du lemme (4.13) et de (4.32) que l'on a :

$$\text{Pour tout } C \in \mathbb{R}, \qquad \sigma_h(C \cdot h) = 0(1), \qquad h \to 0. \tag{4.33}$$

En effet, on découpe l'intervalle $[C_0, C]$, $C \neq 0$, en intervalles de longueur assez petite de sorte que 0 ne soit pas à l'extrémité de l'un de ces intervalles. L'inégalité (4.32) permet d'éviter 0 en l'utilisant pour $C = \delta$, ce qui est nécessaire à cause de la proposition (4.10).

$$\begin{cases} \text{Pour tout } C_0 > 0, \text{ il existe } K_0 > 0 \text{ tel que :} \\ |\sigma_h(Ch) - \sigma_h(C \cdot h - \tau \cdot h)| < K_0 \cdot |C|^{n-1} \text{ pour } |C| \geqslant C_0, \|\tau| \leqslant \delta_0 \end{cases} \tag{4.34}$$

Il résulte de (4.33) et (4.34) que l'on a :

$$\sigma_h(C \cdot h) = 0(C^n), \qquad C \to +\infty, \tag{4.35}$$

uniformément par rapport à h, $h \in]0, h_0]$.

(On établit d'abord cette propriété pour $C = j \cdot \delta_0$, j entier $\geqslant 1$).

Le lemme (4.14) résulte alors facilement des considérations précédentes.

Fin de la preuve du théorème (4.11). — On a :

$$(\sigma_h * \theta_h)(Ch) - \sigma_h(Ch) = \int (\sigma_h(Ch - \mu) - \sigma_h(\mu)) \cdot \theta_h(\mu) d\mu$$

Il résulte alors du lemme (4.14) via le changement de variable : $\mu = \tau \cdot h$ et la propriété : $\hat{\zeta} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ que l'on a :

$$(\sigma_h * \theta_h)(Ch) - \theta_h(Ch) = 0(C^{n-1}), \qquad C \to +\infty \tag{4.36}$$

uniformément en h, $h \in]0, h_0]$.

(4.36) et la proposition (4.10) impliquent le point (*ii*) du théorème (4.11).

5. MINORATION DU SPECTRE D'OPÉRATEURS h-ADMISSIBLES

Dans le cadre des opérateurs admissibles $P(h)$ considérés dans le § 4, nous avons montré qu'il existe $C > 0$ telle que :

(5.1) $\quad \text{Spectre}\,(P(h)) \subset [-Ch, +\infty[\qquad \text{pour tout } h \in]0, h_0]$.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de préciser la relation (5.1) en établissant, pour certaines classes d'opérateurs admissibles, des inégalités du type Gärding-Hörmander-Melin. Pour cela nous partons d'un résultat de Hörmander qui prolonge le travail de Melin $[\mathrm{HOR}]_1$ sur l'inégalité de Gärding précisée. Nous utilisons les notations de L. Hörmander $[\mathrm{HOR}]_1$:

THÉORÈME (5.1). — (*Lemme* (6.3) *de* $[\mathrm{HOR}]_1$) *Soit g une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant* : $g_0/g_\sigma \leqslant h^2 \leqslant 1$. *Soit* $a \in S(1, g)$ *et* $N \in \mathbb{N}$ *tels que* :

$$i) \quad |a^{(k)}(x, \xi; t_1, \ldots, t_k)| \leqslant \prod_1^1 g(t_j)^{1/2} \quad \textit{pour tous } k \leqslant N, \quad (x, \xi), \quad t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}^{2n}.$$

On suppose de plus qu'il existe $C_1 > 0$, $K \in \mathbb{R}$ *telles que* :

$$ii) \quad \begin{cases} a(x, \xi) + 1/2\mathrm{Tr}^+ (a'' + K.t.g) > 0 \\ \textit{sous les conditions } t \geqslant 0,\ a'' + tg \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad g(x, \xi) \leqslant C_1 \end{cases}$$

Alors, pour $0 < C_0 < C_1$ *et* N *assez grand (ne dépendant que de la dimension), il existe une constante* Γ indépendante de a et de g *et* $R \in S(1, g)$, *avec des semi-normes indépendantes de a et g, tels que* :

$$iii) \qquad (a^W(x, D)u, u) \geqslant -\Gamma h^{\sigma/5} \cdot \|u\|^2 + (R^W u, u)$$

pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; R *vérifiant* :

$$R(x, \xi) = 0 \qquad \textit{si} \qquad g(x, \xi) \leqslant C_0 .$$

REMARQUE (5.2). — *L'intérêt du résultat précédent est de donner des constantes universelles permettant de considérer des familles de symboles dépendant d'un paramètre. Pour nos applications nous prendrons des symboles admissibles* :

$$a_h(x, \xi) = p(\sqrt{h} \cdot x, \sqrt{h} \cdot \xi, h) \quad \textit{avec} \quad p \in S(1, Cg_0) \quad (C \geqslant 0 \quad \textit{assez grand}),$$

(où g_0 désigne la métrique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$) et la métrique $g(= g_h)$ dépendant de h :

$$g_h(t_x, t_\xi) = C \cdot h \cdot (|t_x|^2 + |t_\xi|^2)$$

(C sera ajustée pour vérifier l'hypothèse (i) du théorème (5.1)).

D'après la définition de g^σ on aura alors :

$$g = h^2 \cdot g^\sigma .$$

Rappelons la :

DÉFINITION (5.3). — *Soit* B *une forme bilinéaire sur* R^{2n} *muni de sa structure symplectique canonique :*

$$\sigma(t_x, t_\xi ; t'_x, t'_\xi) = t_x \cdot t'_\xi - t'_x \cdot t'_\xi .$$

On définit l'application hamiltonienne F *associée à* B *par :*

$$\mathrm{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \sigma(\mathrm{X}, \mathrm{FY}), \qquad \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbb{R}^{2n} .$$

Alors $\mathrm{Tr}^+ \mathrm{B}$ *designe la somme des valeurs propres positives de* F/i.

Les deux propriétés suivantes nous serons utiles :

LEMME (5.4). — ([HOR]$_3$). — *i) Si* $\mathrm{A} \leqslant \mathrm{B}$ *alors* $\mathrm{Tr}^+ \mathrm{A} \leqslant \mathrm{Tr}^+ \mathrm{B}$.
ii) $\quad |\mathrm{Tr}^+ \mathrm{A} - \mathrm{Tr}^+ \mathrm{B}| \leqslant \mathrm{C} \cdot \|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|^{1/2n} \cdot (\|\mathrm{A}\| + \|\mathrm{B}\|)$

où C *ne dépend que de n (en particulier* Tr^+ *est continue).*

Soit maintenant un symbole admissible : $p(h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j \cdot p$ vérifiant les hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) du § 2 avec les notations suivantes : $\mu = \operatorname*{Inf}_{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}} p_0(x, \xi)$, $\mathrm{E}_1 - \varepsilon = \mu$; $\mathrm{E}_2 + \varepsilon = \mu + \varepsilon_0$ où $\varepsilon_0 > 0$ est un nombre fixé (éventuellement petit).

Nous allons déduire du théorème (5.1) le résultat suivant :

THÉORÈME (5.5). — *Aux hypothèses précédentes on ajoute :*

$$(\tilde{\mathrm{H}}) \quad \begin{cases} \textit{Il existe } \varepsilon > 0, \lambda \in \mathbb{R} \textit{ tels que} \\ p_0(y, \eta) + \varepsilon(\lambda + p_1(y, n) + \mathrm{Tr}^+(p''_0(y, n))) \geqslant 0 \quad \textit{pour} \quad p_0(y, \eta) \leqslant \mu + \varepsilon \end{cases}$$

Alors il existe C, $\tilde{\mathrm{C}}$, h_1 *tels que :*

$$(5.2) \quad (\check{\mathrm{P}}(h)u, u) \geqslant \mu \|u\|^2 - \lambda \cdot h \|u\|^2 - \mathrm{C}h^{\sigma/5} \|u\|^2 - \tilde{\mathrm{C}}h^{1+1/2n} \|u\|^2$$

pour tout $h \leqslant h_1$ *et* $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

On a posé : $\check{\mathrm{P}}(h) = p(h, \sqrt{h} \cdot x, \sqrt{h}\mathrm{D}_x)$.
Si p_1 *est une fonction affine, alors* $\tilde{\mathrm{C}} = 0$.

COROLLAIRE (5.6). — *Sous les hypothèses* (H1), (H2), (H3), (H4) *auxquelles on ajoute :*

$$(\tilde{\mathrm{H}}) \qquad \begin{cases} \textit{Il existe } \lambda \in \mathbb{R} \textit{ tel que :} \\ p_0(y, \eta) = \mu \quad \textit{entraîne} \quad \lambda + p_1 + \mathrm{Tr}^+ p''_0 \geqslant 0 \end{cases}$$

il existe $h_1 > 0$, *tel que, pour tout* $\delta > 0$, *il existe* C_δ *tel que* :

$$(5.3)\quad (\check{P}(h)u, u) + \delta \cdot h \| u \|^2 \geqslant \mu \| u \|^2 - \lambda \cdot h \| u \|^2 - C_\delta \cdot h^2 \| u \|^2$$

pour tout $h \leqslant h_1$ *et* $u \in \mathscr{S}(R^n)$.

Ce corollaire est la version semi-classique de l'inégalité de Melin [MEL].

Preuve du Corollaire (5.6). — Soit $\delta_0 > 0$. Vérifions que $\check{P}(h) + \dfrac{\delta_0 h}{2}$ satisfait aux hypothèses du théorème (5.5). En utilisant (H4) et la continuité de Tr^+ on a :

$$\lambda + p_1 + \frac{\delta_0}{2} + \mathrm{Tr}^+ p_0'' \geqslant \frac{\delta_0}{4} \quad \text{sur} \quad p_0^{-1}([\mu, \mu + \varepsilon])$$

D'où $(\tilde{H})$ est vérifiée et on en déduit le corollaire (5.6).

REMARQUE (5.7). — *Nous avons démontré dans* $[\text{H-R}]_1$ *la propriété que, pour tout* $\sigma > 0$, *il existe* $h_\sigma > 0$ *tel que* :

$$(5.4)\quad (\check{P}(h)u, u) \geqslant (\mu - \sigma) \cdot \| u \|^2 \quad \textit{pour tout} \quad h \in]0, h_\sigma] \textit{ et tout } u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Compte tenu de (5.4), (5.3) *est équivalente à* :

(5.5) *Pour tout* $\delta > 0$ *il existe* $h_\delta > 0$, *tel que* :

$$(\check{P}(h)u, u) + \delta h \| u \|^2 \geqslant \mu \| u \|^2 - \lambda h \| u \|^2$$

pour $h \in]0, h_\delta]$, $u \in \mathscr{S}(R^n)$.

Preuve du théorème (5.5). — Notons au préalable qu'il serait plus élégant de donner une démonstration directe sans passer par le théorème (5.1). On commence par faire une localisation dans la zone $p_0^{-1}([\mu, \mu + \varepsilon_0])$ en utilisant les résultats de calcul fonctionnel de $[\text{H-R}]_1$. On suppose par commodité que $\mu < 0$. Soit $\sigma > 0$ à déterminer et $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \chi_1 \equiv 1 & \text{sur} \quad]-\infty, \ \mu + \sigma[\\ \chi_1 \equiv 0 & \text{sur} \quad]\mu + 2\sigma, +\infty[\end{cases}$$

On impose à σ la condition $\mu + 3\sigma < 0$.
Soit $\chi_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que : $\chi_1^2 + \chi_2^2 \equiv 1$.
On a clairement :

$$(5.6)\qquad (\check{P}(h) \cdot \chi_2(\check{P}(h))u, \chi_2(\check{P}(h))u) \geqslant (\mu + \sigma) \| \chi_2(\check{P}(h))u \|^2$$

pour tout $h > 0$ et tout $u \in \mathscr{S}(R^n)$.

On est donc ramené à minorer : $(\check{P}(h) \cdot \chi_1(\check{P}(h))u, \chi_1(\check{P}(h))u)$.

Soit $\tilde{\chi} \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \operatorname{Supp} \tilde{\chi}\, C]-\infty, \mu + 3\sigma[\\ \tilde{\chi} \cdot \chi_1 = \chi_1 \end{cases}$$

Posons : $\tilde{P}(h) = \tilde{\chi}(\check{P}(h)) \cdot \check{P}(h)$.

$\tilde{P}(h)$ est un opérateur h-admissible, de symbole $\tilde{p}(h, y, \eta) \in S_{ad}(1, g_0)$ (cf. $[H\text{-}R]_1$).

De plus $\tilde{P}(h)$ admet la décomposition :

$$\tilde{P}(h) = \tilde{A}(h) + R(h)$$

où :

$$(5.7) \qquad \begin{cases} \text{Il existe } C > 0 \text{ telle que :} \\ \| R(h) \|_{\mathscr{L}(L^2, L^2)} \leqslant C \cdot h^2 \end{cases}$$

et $\tilde{A}(h)$ est un opérateur de symbole de Weyl $\tilde{a}_h \in S(1, g)$ donné par :

$$(5.8) \quad \tilde{a}_h(x, \xi) = \tilde{\chi}(p_0) \cdot p_0(\sqrt{h} \cdot x, \sqrt{h} \cdot \xi) + h[\tilde{\chi}(p_0)p_1 + \tilde{\chi}'(p_0)p_1 p_0](\sqrt{h} \cdot x, \sqrt{h} \cdot \xi).$$

Définissons :

$$(5.9) \qquad A(h) = \tilde{A}_h - \mu + \lambda h + \tilde{C} h^{1+1/2n}$$

(où $\tilde{C}$ est à déterminer).

On désigne par a_h le symbole de $A(h)$.

On a :

$$(5.10) \qquad a_h(x, \xi) = b(h, \sqrt{h}x, \sqrt{h}\xi)$$

$$\text{où} \begin{cases} b(h, y, \eta) = b_0(y, \eta) + h b_1(y, \eta) + \tilde{C} \cdot h^{1+1/2n} \\ b_0(y, \eta) = (\tilde{\chi}(p_0)p_0 - \mu)(y, \eta) \\ b_1(y, \eta) = (\lambda + \tilde{\chi}(p_0)p_1 + \tilde{\chi}'(p_0)p_0 p_1)(y, \eta) \end{cases}$$

Par conséquent : $a_h \in S(1, g_h)$ et vérifie l'hypothèse (i) (rappelons que $g_h(t_x, t_\xi) = Ch(|t_x|^2 + |t_\xi|^2)$).

Vérifions l'hypothèse (ii) du théorème (5.1) avec $K = 0$.

On a :

$$(5.11) \quad [a_h + 1/2 \operatorname{Tr}^+ a_h''](x, \xi) = (\tilde{\chi}(p_0)p_0 - \mu)(y, \eta) + h[\lambda + \tilde{\chi}(p_0)p_1 + \tilde{\chi}'(p_0) \cdot p_1 \cdot p_0 + \operatorname{Tr}^+ (\tilde{\chi}(p_0)p_0)''](y, \eta) + h[\tilde{C}h^{1/2n} + \operatorname{Tr}^+ (b_0 - h b_1) - \operatorname{Tr}^+(b_0)]$$

avec $(y, \eta) = (\sqrt{h}x, \sqrt{h}\xi)$

Compte tenu du support de $\tilde{\chi}$ et du lemme (5.4) on peut choisir $\tilde{C}$ assez grand de sorte que le dernier terme de (5.11) soit > 0. (Si p_1 est affine on peut choisir $C = 0$). En jouant sur le support essentiel de $\chi_1(\check{P}(h))$ et sur le choix de σ on applique alors le théorème (5.1) pour obtenir l'inégalité (5.2).

PROBLÈME (5.8). — En ajoutant une condition raisonnable à l'hypothèse $(\tilde{\tilde{\mathrm{H}}})$ du Corollaire (5.6), établir (5.3) avec $\delta = 0$.

Un résultat de Hörmander $[\mathrm{HOR}]_2$ à propos de travaux d'Ivrii-Petkov suggère d'ajouter à $(\tilde{\tilde{\mathrm{H}}})$ la condition :

(AN) $p_0^{-1}(\mu)$ *est une sous-variété* Σ, $\vec{C}^\infty$ *et compacte de* $\mathbb{R}^{2n}$; *le rang de la 2-forme symplectique* σ *restreinte à* Σ *est constant sur chaque composante connexe et* $p_0 - \mu$ *s'annule exactement à l'ordre* 2 *sur* Σ.

Cependant nous préférons nous limiter au cas de l'opérateur de Schrödinger car alors on peut appliquer presque directement le résultat de $[\mathrm{HOR}]_3$.

Pour terminer ce paragraphe, examinons donc le cas de l'opérateur de Schrödinger : $\mathrm{P}(h) = -h^2\Delta + \mathrm{V}$ où $\mathrm{V} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{V} \geqslant 0$ vérifie :

(V_1) $$|\partial_x^\alpha \mathrm{V}| \leqslant \mathrm{C}_\alpha(\mathrm{V}+1) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n.$$

(V_2) Il existe $\mathrm{R} > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ tels que $|x| \geqslant \mathrm{R}$ entraîne $\mathrm{V}(x) \geqslant \varepsilon_0$.

On pose : $\Sigma_\mathrm{V} = \mathrm{V}^{-1}(0)$.

Puisque $\mathrm{V} \geqslant 0$, on a sur Σ_V : $\mathrm{V}''(x) > 0$ on peut donc définir :

$$\mathrm{T}(x) = \mathrm{tr}\,(1/2\mathrm{V}''(x))^{1/2} \qquad \text{pour} \quad x \in \Sigma.$$

On ajoute les hypothèses :

(V_3) Il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\mathrm{T}(x) \geqslant \delta_0$ pour tout $x \in \Sigma_\mathrm{V}$.

(V_4) Σ_V est un ensemble de points isolés et $\mathrm{V}''(x)$ est défini-positif pour tout $x \in \Sigma_\mathrm{V}$.

$(\tilde{\mathrm{V}}_4)$ Σ_V est une variété C^∞ compacte de codimension k sur laquelle V s'annule exactement à l'ordre 2 et $\mathrm{V}''(x)$ est défini positif sur $\mathrm{T}_x\mathbb{R}^n/\mathrm{T}_x\Sigma_\mathrm{V}$ $(x \in \Sigma_\mathrm{V})$.

THÉORÈME (5.9). — *Sous les conditions* (V_1) *à* (V_4) *(où* $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3, \tilde{\mathrm{V}}_4$*), il existe* $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ *telle que:*

$$((-h^2\Delta + \mathrm{V})u, u) \geqslant \operatorname*{Inf}_{x \in \Sigma_\mathrm{V}} \mathrm{T}(x)) \cdot h \,\|u\|^2 - \mathrm{C}h^2 \cdot \|u\|^2 \tag{5.12}$$

pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

L'idée essentielle de la preuve de (5.12) consiste à considérer la famille d'opérateurs auxiliaires :

$$\mathscr{P}_\lambda = -\Delta - \mathrm{V}\frac{\partial^2}{\partial s^2} - i\lambda\frac{\partial}{\partial s} \tag{5.13}$$

et à appliquer à λ les résultats de $[\mathrm{HOR}]_3$.

Rappelons dans le théorème suivant le résultat utilisé :

THÉORÈME (5.10). — ($[\mathrm{HOR}]_3$) *Soit* $\mathrm{A} = a(y, \mathrm{D}_y)$ *un opérateur différentiel d'ordre* m *dans l'ouvert* $\Omega \subset \mathrm{R}^p$. *On suppose* :

i) $a_m \geqslant 0$ (a_m : Symbole principal de A).

ii) $\mathrm{Re}\, a_{m-1} + 1/2\mathrm{Tr}^+(a_m'') \geqslant 0$

pour $(y, \eta) \in \Omega \times (\mathbb{R}^p \backslash 0)$ *tel que* $a_m(y, \eta) = 0$ (a_{m-1} *désigne le symbole sous principal*).

iii) A *est autoadjoint* (*donc* a_{m-1} *est réel*).

iv) $\Sigma = a_m^{-1}(0)$ *est une variété* C^∞, a_m *est transversalement elliptique à* Σ *et la forme symplectique est de rang constant sur* Σ.

Alors pour tout compact K, $K \subset \Omega$, *il existe* $C_K \in \mathbb{R}$ *telle que* :

$$(5.14) \qquad \mathrm{Re}\,(Au, u) \geqslant -C_K \cdot \| u \|^2_{m\backslash 2-1} \qquad \textit{pour tout} \quad u \in C_0^\infty(K).$$

Preuve du théorème (5.9). — $p_{\lambda,2}$ (resp. $p_{\lambda,1}$) désigne le symbole principal (resp. sous principal) de $\mathscr{P}_\lambda$. On a :

$$p_{\lambda,2}(x, \xi, s, \sigma) = \xi^2 + V(x)\sigma^2$$
$$p_{\lambda,1}(x, \xi, s, \sigma) = \lambda\sigma$$

L'ensemble caractéristique Σ de $\mathscr{P}_\lambda$ est défini par :

$$\Sigma = \{ (x, \xi, s, \sigma) \,;\, \xi = 0,\ x \in \Sigma_V \}.$$

On a donc sur Σ :

$$\mathrm{Tr}^+(p''_{\lambda,2}) = 2 \,|\, \sigma \,|\, T(x).$$

Il résulte des hypothèses (V_1) à (V_4) que Σ est une sous-variété de dimension $(2 + (n+k))$ si on remplace V_4 par $\tilde{V}_4$) dans $T^*\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$ sur laquelle $p_{\lambda,2}$ s'annule exactement et que la forme symplectique est de rang constant sur Σ.

Soit : $K = \{ (x, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, |x| \leqslant R, |s| \leqslant 1 \}$.

Il résulte alors du théorème (5.10) que pour tout $\lambda < 0$ tel que

$$(\operatorname*{Inf}_{x \in \Sigma_V} T(x)) + \lambda > 0$$

il existe C_λ de sorte que :

$$(5.14) \qquad (\mathscr{P}_\lambda u, u) \geqslant -C_\lambda \| u \|_0^2 \qquad \text{pour tout} \quad u \in C_0^\infty(K).$$

Or, d'après (V_2), on déduit facilement :

$$(5.15) \quad (\mathscr{P}_\lambda u, u) \geqslant -\tilde{C}_\lambda \| u \|_0^2 \quad \text{pour tout } u \in C_0^\infty \{ (x, s) \,|\, |x| \geqslant R, |s| \leqslant 1 \}$$

En recollant (5.14) et (5.15) par une partition de l'unité on obtient :

$$(5.16) \qquad (\mathscr{P}_\lambda u, u) \geqslant -C_\lambda \cdot \| u \|^2 \qquad \text{pour tout} \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times]-1, 1[).$$

Pour obtenir le théorème (5.9) on applique (5.16) à : $u(x) = \varphi(x)\Psi(s)e^{ish^{-1}}$ où $\Psi \in C_0^\infty(]-1, 1[)$ est telle que : $\int |\Psi|^2 ds = 1$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

On donne à λ la valeur $\lambda = -\operatorname*{Inf}_{x \in \Sigma_V} T(x)$.

APPENDICE

(A1) *Preuve du Lemme* 4.1. — $f \in C^\infty([0, E])$. $E > 0$ étant choisi assez petit, on peut appliquer le lemme de Morse et par conséquent écrire f sous la forme :

$$f(\lambda) = \iint_{y_1^2 + y_2^2 \leqslant \lambda} g(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \qquad \text{où} \qquad g \in C^\infty(y_1^2 + y_2^2 < E).$$

D'où :

$$f(\lambda) = \lambda \cdot \iint_{y_1^2 + y_2^2 \leqslant 1} g(\lambda^{1/2} \cdot y_1, \lambda^{1/2} \cdot y_2) dy_1 dy_2, \qquad \lambda \geqslant 0.$$

On applique alors la formule de Taylor à g en $(0, 0)$ et on remarque que si $\alpha + \beta$ est impaire alors :

$$\iint_{y_1^2 + y_2^2 \leqslant 1} y_1^\alpha \cdot y_2^\beta dy_1 dy_2 = 0$$

D'où on obtient un développement asymptotique de f en puissances entières de λ pour $\lambda \to 0, \lambda \geqslant 0$ et par conséquent il en résulte que $f \in C^\infty([0, E])$.

(A2) *Preuve de* : $J \in C^\infty([0, E])$. — Nous allons montrer que, sous les hypothèses (H8) et ($\tilde{H}$5), il existe une application : $\lambda \to \tilde{T}(\lambda)$, C^∞ sur $[0, E]$, où $\tilde{T}(\lambda)$ est une période commune des trajectoires sur la surface d'énergie $p_0^{-1}(\lambda)$.

LEMME. A. — *Sous les hypothèses précédentes, avec* $N = 1$ *et* $p_0(0) = 0$, *il existe* $E > 0$ *assez petit et une application* C^∞ *sur* $[0, E]$: $\lambda \to \tilde{T}(\lambda)$ *telle que* $\phi^{\tilde{T}(\lambda)}(x, \xi) = (x, \xi)$ *pour tout* $\lambda \in [0, E]$ *et* $(x, \xi) \in p_0^{-1}(\lambda)$.

Preuve. — On commence par choisir E assez petit pour qu'il existe un difféomorphisme de Morse : $(x, \xi) \xrightarrow{M} (y, \eta)$ défini dans $p_0^{-1}([0, E[)$ de sorte que :

$$p_0(x, \xi) = |y(x, \xi)|^2 + |\eta(x, \xi)|^2$$

Par M, le champ de vecteurs H_{p_0} est transformé en un champ $\tilde{X}$ (qui n'est plus nécessairement hamiltonien!) dont les courbes intégrales sont sur les sphères : $|y|^2 + |\eta|^2 = \text{cte}$.

Pour $s \in R$, posons : $\tilde{g}_s(y, \eta) = (sy, \eta)$.

Si $p_0(s \cdot x, s \cdot \xi) \leqslant E$, on définit : $g_S(x, \xi) = \tilde{g}_S(M(x, \xi))$.

Pour $s \in [-E_1, E_1]$ ($E_1 > 0$ assez petit), on définit ainsi une famille de courbes transverses aux surfaces d'énergie $p_0 = \text{Cte}$. De plus $p_0^{-1}([0, E])$ est étoilé par rapport à cette famille de courbes. Considérons l'application :

$$(x, \xi, t) \to g_{1/s} \cdot \phi^t \cdot g_s(x, \xi) = \Psi_{s,t}(x, \xi)$$

définie pour $s \in [-E_1, E_1]$, $s \neq 0$, $\frac{E}{2} \leqslant p_0(x, \xi) \leqslant E$.

Dans les nouvelles coordonnées, il s'agit de l'application :

$$(y, \eta, t) \to \frac{1}{s} \cdot \tilde{\phi}^t(sy, s\eta) = \tilde{\Psi}_{s,t}$$

où : $\tilde{\phi}^t = \phi^t \cdot M^{-1}$.

Posons : $X_s = \frac{d}{dt} \Psi_{s,t}|_{t=0}$ et soit $\tilde{X}_s$ le champ associé à X_S dans les nouvelles coordonnées. Pour tout $s \neq 0$, $s \in [-E_1, E_1]$, X_S est périodique. Montrons qu'il se prolonge en 0 en un champ dépendant de manière C^∞ de s et que de plus X_0 est périodique.

En effet on a :

$$\tilde{\Psi}_{s,t}(y, \eta) = \frac{\partial \tilde{\phi}^t}{\partial y_j}(0, 0) y_j + \frac{\partial \tilde{\phi}^t}{\partial \eta_j}(0, 0) \eta_j + 0(s)$$

Or $t \to \tilde{\Psi}_{s,t}(y, \eta)$ est périodique de période :

$$T(s, y, \eta) \leqslant C .$$

Quitte à modifier $T(sy, s\eta)$ d'un multiple, on peut supposer que l'on a :

$$\frac{C}{2} \leqslant T(s, y, \eta) \leqslant C$$

D'où, pour tout (y, η) tel que $\varepsilon/2 \leqslant |y|^2 + |\eta|^2 \leqslant \varepsilon$, il existe $T(0, y, \eta) \in \left[\frac{C}{2}, C\right]$ vérifiant :

$$\tilde{\Psi}_{0,T(0,y,\eta)}(y, \eta) = (y, \eta) .$$

On est maintenant dans une situation analogue à celle de $[H\text{-}R]_2$ (Appendice C (lemme C-2)). On en déduit alors que l'on peut modifier la fonction T précédente en une fonction C^∞ : $(s, y, \eta) \to T(s, y, \eta)$, $(s, y, \eta) \in]-E_1, E_1[\times \left\{ \frac{E}{2} \leqslant |y|^2 + |\eta|^2 \leqslant E \right\} = \Omega$ telle que :

i) $$T(s, y, \eta) \neq 0$$

ii) $$\tilde{\Psi}_{s,T(s,y,\eta)}(y, \eta) = (y, \eta)$$

Les surfaces d'énergie étant connexes on en déduit qu'il existe une fonction C^∞, $\tilde{\tilde{T}}$ telle que :

$$T(s, y, \eta) = \tilde{T}(s^2, |y|^2 + |\eta|^2) \qquad \text{pour} \quad (s, y, \eta) \in \Omega .$$

En procédant par dilatation et en revenant aux coordonnées initiales, on en déduit le lemme A (on remarque que $\phi^t(0, 0) = (0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).

BIBLIOGRAPHIE

[A.F.] K. Asada et D. Fujiwara, On some oscillatory transformation in $L^2(\mathbb{R}^n)$. *Japan J. Math.*, 1978, p. 299-361.

[C.N.] B. Candelpergher, J. C. Nosmas, Propriétés Spectrales d'opérateurs différentiels asymptotiques autoadjoints. *Comm. in P. D. E.*, t. **9**, n° 2, 1984, p. 137-168.

[CHA] J. Chazarain, Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique, *Comm. in P. D. E.*, n° 6, 1980, p. 595-644.

[CdV] Y. Colin de Verdière, Sur les spectres des opérateurs à bicaractéristiques toutes périodiques, *Comm. Math. Helvetici*, t. **54**, 1979, p. 508-522.

[C.D.S.] J. M. Combes, P. Duclos, R. Seiler

[*1*] Krein's formula and one dimensional multiple-well. *J. Funct. Anal.*, t. **52**, 1983, p. 257-301.

[*2*] Convergent expansions for tunneling. *Comm. Math. Phys.*, t. **92**, 1983, p. 229-245.

[DUI] J. J. Duistermaat, *Fourier Integral operators*, Courant Institute.

[FE.MA.] Fedoryuk, Maslov, *Semi-classical approximation in quantum mechanics*, *Reidel*, 1981.

[FEI] V. I. Feigin, The asymptotic distribution of eigenvalues and a formula of Bohr-Sommerfeld type. *Math. USSR Sbornik*, t. **38**, 1981, p. 61-81.

[G.S.] V. Guillemin, S. Sternberg, *Geometric asymptotic*.

[HA] Harrell, Double Wells, *Comm. Math. Phys.*, t. **75**, 1980, p. 239-261.

[HEL] B. HELFFER, *Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques*. Astérisque, n° 112, 1984.

[H.R.] B. HELFFER, D. ROBERT,

[1] Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et applications. *J. of functional analysis*, t. **53**, n° 3, 1983.

[2] Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudodifférentiels sur R^n. *Comm. in P. D. E.*, 1982, p. 795-882.

[3] Asymptotique des niveaux d'énergie pour les hamiltoniens à un degré de liberté. *Duke Math. J.*, t. **49**, n° 4, 1982.

[4] Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. **31** (3), 1981, p. 169-223.

[5] Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques hypoelliptiques. *Ann. E. N. S. de Pisa*, Série IV, Vol. IX, n° 3, 1982.

[6] *Actes du colloque d'analyse microlocale à Sofia*, (Septembre 1982).

[H.S.] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND, Multiple Wells in the Semi-classical limit I. *Comm. in P. D. E.*, t. **9**, n° 4, 1984, p. 337-408.

[HOR] L. HÖRMANDER,

[1] The Weyl Calculus of pseudodifferential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, t. **32**, 1979, p. 359-443.

[2] The Weyl Calculus... *Lecture notes at Stanford*, 1977.

[3] The Cauchy problem for differential equations with double characteristics, *J. Analyse Math.*, t. **32**, 1977, p. 118-196.

[MA] V. V. MASLOV, *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques* (traduit par J. Lascoux et R. Seneor).

[MEL] A. MELIN Lower bounds for pseudodifferential operators, *Ark. för Mat.*, t. **9**, 1971, p. 117-140.

[PHA] F. PHAM, *Calcul microdifférentiel complexe et méthode semi-classique*, Exposé à la 36e rencontre physiciens théoriciens et mathématiciens (R. C. P. n° 25, IRMA Strasbourg, mai 1983).

[RAL] J. RALSTON, On the construction of quasi-modes associated with stable periodic orbits. *Comm. Math. Phys.*, t. **51**, 1976, p. 219-242.

[R.S.] M. REED et B. SIMON, *IV Analysis of operators*, Academic Press, 1978.

[ROB] D. ROBERT,

[1] Calcul fonctionnel sur les opérateurs admissibles et application, *J. of functional analysis*, t. **45**, n° 1, p. 74-94.

[2] *Approximation semi-classique*, Cours de 3e cycle à Nantes, 1983.

[SIM] B. SIMON, Instantons, Double Wells and large deviations. *Bull. A. M. S.*, t. **8**, 1983, p. 323-326.

[TIT] TITSCHMARCH, *Eigenfunctions expansions*. Part one: oxford at the clarendon press, 1962.

[VOR] A. VOROS, *Spectre de l'opérateur de Schrödinger et méthode W. K. B.*, Publications mathématiques d'Orsay.

[WE] A. WEINSTEIN, Asymptotics of eigenvalues. Cluster for the Laplacian plus a potential. *Duke Math. J.*, t. **44**, 1977, p. 883-892.

(Manuscrit reçu le 25 novembre 1983)