

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. BRAY

Quelques solutions décrites par des métriques conformes à celle de Taub en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 35, n° 1 (1981), p. 37-54

[<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1981__35_1_37_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1981__35_1_37_0)

© Gauthier-Villars, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Quelques solutions décrites par des métriques conformes à celle de Taub en relativité générale

par

M. BRAY

657, rue de Robb , 02120 Guise

ABSTRACT. — On some gravitational fields described by metrics of the form

$$ds^2 = e^{2\omega} [ds^2 \text{ Taub}].$$

I

La métrique de Taub $ds^2 = e^{2\alpha} [(dx^0)^2 - (dx^1)^2] - e^{2\gamma} [(dx^2)^2 + (dx^3)^2]$ avec

$$\alpha \equiv \tilde{\alpha}(x^0, x^1) + \omega(u); \quad \gamma \equiv \tilde{\gamma}(x^0, x^1) + \omega(u); \quad u \equiv \varepsilon x^0 + \lambda x^1; \quad \varepsilon, \lambda : \mathbb{C}^{\text{tes}}.$$

peut être considérée comme conforme à la métrique de même nature $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}$.

Les composantes du tenseur de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\nu}^{\nu} = -\partial_{\beta}(\Gamma_{\alpha}^{\nu}{}_{\nu}) + \partial_{\nu}(\Gamma_{\alpha}^{\nu}{}_{\beta}) - \Gamma_{\alpha}^{\sigma}{}_{\nu}\Gamma_{\sigma}^{\nu}{}_{\beta} + \Gamma_{\alpha}^{\sigma}{}_{\beta}\Gamma_{\sigma}^{\nu}{}_{\nu}$$

seront écrites $R_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\alpha\beta} - X_{\alpha\beta}$, $\tilde{R}_{\alpha\beta}$ désignant celles du tenseur de Ricci de $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}$.

Ce sont $R_{00}, R_{11}, R_{22} = R_{33}$ et R_{01} .

Pour tout champ gravitationnel du vide $R_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \tilde{R}_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}$.

Dans les équations d'Einstein

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \chi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\alpha\beta} T \right); \quad \chi > 0$$

posons $T_{\alpha\beta} = \sigma k_\alpha k_\beta$; $k^2 k_\alpha = 0$; $\sigma > 0$: schéma radiation pure. Il vient

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\alpha\alpha} &= \chi\sigma(k_\alpha)^2; & \tilde{R}_{01} &= \chi\sigma k_0 k_1 \\ k_0 k_2 &= 0; & k_0 k_3 &= 0; & k_1 k_2 &= 0; & k_1 k_3 &= 0; & k_2 k_3 &= 0 \\ e^{-2\tilde{\alpha}}[k_0^2 - k_1^2] - e^{-2\tilde{\gamma}}[k_2^2 + k_3^2] &= 0 \rightarrow \text{isotropie de } \vec{k}\end{aligned}$$

On en tire $k_2 = k_3 = 0$; $k_1 = \delta k_0$ avec $\delta^2 = 1$.

Portant ces valeurs dans les équations $\tilde{R}_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}$ nous obtenons le système

$$\begin{aligned}\text{I}' \quad \omega''(3\varepsilon^2 - \lambda^2) + 2\omega'[\varepsilon(\tilde{\gamma}_0 - \tilde{\alpha}_0) - \lambda(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\gamma}_1)] - 2\lambda^2\omega'^2 &= \chi\sigma k_0^2 \\ \text{II}' \quad \omega''(3\lambda^2 - \varepsilon^2) + 2\omega'[-\varepsilon(\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\gamma}_0) + \lambda(\tilde{\gamma}_1 - \tilde{\alpha}_1)] - 2\varepsilon^2\omega'^2 &= \chi\sigma k_1^2 \\ \text{III}' \quad \omega''(\lambda^2 - \varepsilon^2) + 4\omega'[\lambda\tilde{\gamma}_1 - \varepsilon\tilde{\gamma}_0] + 2\omega'^2(\lambda^2 - \varepsilon^2) &= 0 \\ \text{IV}' \quad 2\langle \varepsilon\lambda\omega'' - \omega'[\varepsilon\tilde{\alpha}_1 + \lambda\tilde{\alpha}_0] - \varepsilon\lambda\omega'^2 \rangle &= \chi\sigma k_0 k_1.\end{aligned}$$

$$k_1 = \delta k_0; \text{ on a posé } \omega' \equiv \frac{d\omega}{du}.$$

Il est commode de transcrire le système sous la forme équivalente

$$\text{I} \equiv \text{I}'; \quad \text{II} \rightleftharpoons \text{I}' = \text{II}'; \quad \text{III} \equiv \text{III}'; \quad \text{IV} \rightleftharpoons \text{I}' = \delta \text{IV}'$$

Additionnant II et III nous avons

$$\omega'[(\lambda^2 - \varepsilon^2)\omega' + 2(\lambda\tilde{\gamma}_1 - \varepsilon\tilde{\gamma}_0)] = 0$$

D'autre part la combinaison $4\text{II} + \text{III} = 0$ donne la relation $\omega''(\varepsilon^2 - \lambda^2) = 0$ d'où l'alternative $\omega'' = 0$ ou $\varepsilon^2 = \lambda^2$.

Considérons d'abord l'hypothèse $\varepsilon^2 = \lambda^2$; II s'écrit alors $\omega'[\varepsilon\tilde{\gamma}_0 - \lambda\tilde{\gamma}_1] = 0$ soit en écartant le cas trivial $\omega' = 0$: $\varepsilon\tilde{\gamma}_0 = \lambda\tilde{\gamma}_1$. Or $\lambda = \zeta\varepsilon$; $\zeta = \pm 1$ puisque $\lambda^2 = \varepsilon^2$; donc $\tilde{\gamma}_0 = \zeta\tilde{\gamma}_1$. L'équation IV :

$$(1 - \delta\zeta)\{\varepsilon[\omega'' - \omega'^2] - \omega'[\tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1]\} = 0$$

peut être satisfaite en posant $\delta\zeta = 1$ ou $\varepsilon[\omega'' - \omega'^2] = \omega'[\tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1]$. Pour éviter de restreindre la forme de ω , il est avantageux de choisir $\delta = \zeta$. Nous avons dans ce cas $\tilde{R}_{00} = \chi\sigma k_0^2$; $\tilde{\alpha}_{00} - \tilde{\alpha}_{11} = 0$; $\tilde{\gamma}_{00} - \tilde{\gamma}_{11} + 2\tilde{\gamma}_0^2 - 2\tilde{\gamma}_1^2 = 0$.

D'après $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(v)$ avec $v \equiv \varepsilon(\zeta x^0 + x^1)$ l'équation en $\tilde{\gamma}$ est identiquement satisfaite (en vertu de $\delta\zeta = 1$). La relation $\tilde{R}_{00} = \delta\tilde{R}_{01}$ se réduit à $\tilde{\alpha}_{00} - \tilde{\alpha}_{11} = 0$.

Compte tenu de $\tilde{\alpha}_{00} - \tilde{\alpha}_{11} = 0$ et de $\tilde{\gamma}_0 = \zeta\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{R}_{00} - \chi\sigma k_0^2 = 0$ s'écrit

$$\varepsilon[\omega'' + \tilde{\gamma}'''] + \varepsilon[(\tilde{\gamma}')^2 - \omega'^2] - [\omega' + \zeta\tilde{\gamma}'][\tilde{\alpha}_0 + \zeta\tilde{\alpha}_1] = 0$$

Remarquant que $v = \zeta u$ nous avons

$$\frac{d}{du} \tilde{\gamma} = \zeta \tilde{\gamma}' \rightleftharpoons \tilde{\gamma}' \equiv \frac{d\tilde{\gamma}}{dv} = \zeta \frac{d\tilde{\gamma}}{du}$$

d'où

$$\varepsilon\gamma'' + \gamma' \left[\varepsilon \left(\frac{d\tilde{\gamma}}{du} - \omega' \right) - (\tilde{\alpha}_0 + \zeta\tilde{\alpha}_1) \right] = 0$$

Cette équation admet la solution évidente $\gamma = c^{te}$.

Ensuite $\tilde{\alpha} = \phi(X) + \psi(Y)$; $X \equiv x^0 + x^1$; $Y \equiv x^0 - x^1$.

Si l'on abandonne l'hypothèse $\delta\zeta = 1$, IV exige

$$\varepsilon[\omega'' - \omega'^2] - \omega'[\tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1] = 0.$$

Soit

$$\frac{d}{du} [\log \omega' - \omega] = \left(\frac{1 - \delta}{\varepsilon} \right) \phi' + \left(\frac{1 + \delta}{\varepsilon} \right) \psi'.$$

Posons par exemple $\varepsilon = \zeta = 1$ (d'où $u \equiv X$) et $\psi = \frac{C}{2} Y$, $C : c^{te}$.

Alors $\log \omega' - \omega = Cu \rightarrow Ce^{-\omega} = KC - e^{Cu}$, $K : c^{te}$

$$e^{2\alpha} = \frac{C^2 e^{2\phi(X) + CY - 2CX}}{[KCe^{-CX} - 1]^2}; \quad e^{2\gamma} = \frac{C^2 e^{2\tilde{\gamma}(X) - 2CX}}{[KCe^{-CX} - 1]^2}.$$

Les trajectoires de $\vec{k}$ sont des lignes autoparallèles qu'un choix convenable du paramètre affine ramène à des géodésiques nulles. Dans ce cas l'équation $\tilde{\nabla}_\beta(\sigma k^\beta) = 0$ ou équivalamment $\partial_\beta(\sqrt{-\tilde{g}}\sigma k^\beta) = 0$ nous donne

$$Z = Z(\delta x^0 + x^1) \quad \text{avec} \quad Z \equiv \sqrt{-\tilde{g}}\sigma k^0.$$

Les expressions σk_0 et σk_0^2 permettent de déduire k_0 ; σ doit être positive.

Les considérations précédentes étaient fondées sur $\varepsilon^2 = \lambda^2$.

Si $\varepsilon^2 - \lambda^2 \neq 0$ il faut assurer $\omega'' = 0 \rightarrow \omega = Ku$; en outre

$$K[(\lambda^2 - \varepsilon^2)K + 2(\lambda\tilde{\gamma}_1 - \varepsilon\tilde{\gamma}_0)] = 0;$$

écartant $K = 0$ il reste

$$\lambda\tilde{\gamma}_1 - \varepsilon\tilde{\gamma}_0 = \left(\frac{\varepsilon^2 - \lambda^2}{2} \right) K \equiv L$$

La relation IV prend la forme

$$(\lambda\delta - \varepsilon) \left[(\tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1) - \frac{K}{2}(\lambda\delta - \varepsilon) \right] = 0.$$

Si $\lambda\delta - \varepsilon = 0$, $\lambda^2 = \varepsilon^2$; nous supposons donc

$$\tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1 = \frac{K}{2}(\lambda\delta - \varepsilon) \equiv \dot{L}$$

Selon que $\delta = -1$ ou $+1$, on a $2\tilde{\alpha} = \dot{L}(x^0 + x^1)$ ou $2\tilde{\alpha} = \dot{L}(x^0 - x^1)$.

Il reste à examiner l'expression de σk_0^2 .

Si $\lambda^2 = \varepsilon^2$, $\chi\sigma k_0^2 = 2\varepsilon^2(\omega'' - \omega'^2) - 2\varepsilon\omega'(\tilde{\alpha}_0 + \zeta\tilde{\alpha}_1)$.

La nécessité de postuler $\sigma k_0^2 \neq 0$ nous force à prendre $\lambda\zeta = 1 \Rightarrow \lambda = \zeta$ comme solution de l'équation IV.

Il vient, puisque $\tilde{\alpha}_{00} = \tilde{\alpha}_{11} \rightarrow \tilde{\alpha} = \phi(X) + \psi(Y)$.

$$-2\varepsilon^2[\tilde{\gamma}'' + \tilde{\gamma}'^2] + 2\varepsilon\tilde{\gamma}'[\phi'(\zeta + 1) + \psi'(\zeta - 1)] = 2\varepsilon^2(\omega'' - \omega'^2) - 2\varepsilon\omega'[\phi'(\zeta + 1) + \psi'(1 - \zeta)]$$

Posant $\zeta = 1$ d'où $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\zeta u) = \tilde{\gamma}(u)$ nous avons une équation en u pour déterminer ω , la solution étant astreinte à vérifier la condition de positivité. Si $\omega'' = 0 \rightarrow \omega = Ku$ on obtient

$$\chi\sigma k_0^2 = 2K \langle \varepsilon(\tilde{\gamma}_0 - \tilde{\alpha}_0) - \lambda(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\gamma}_1) \rangle - 2\lambda^2 K^2;$$

en outre

$$K \langle (\lambda^2 - \varepsilon^2)K + 2(\lambda\tilde{\gamma}_1 - \varepsilon\tilde{\gamma}_0) \rangle = 0$$

et

$$(\varepsilon - \lambda\delta) \left\langle \tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1 + \frac{K}{2}(\varepsilon - \lambda\delta) \right\rangle = 0$$

Soit $\tilde{\alpha}_0 - \delta\tilde{\alpha}_1 = \dot{L}$ puisque le choix $\varepsilon = \lambda\delta$ nous ramènerait au cas $\lambda^2 = \varepsilon^2$ avec toutes ses conséquences.

On établirait de même les solutions

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_0 &= -\frac{K}{2}(\lambda\delta + \varepsilon); & \tilde{\gamma}_1 &= -\frac{K\delta}{2}(\lambda\delta + \varepsilon); \\ \tilde{\gamma} &= -\frac{K}{2}(\lambda\delta + \varepsilon)(x^0 + \delta x^1). \end{aligned}$$

Portons ces valeurs dans l'expression $\chi\sigma k_0^2$; on trouve :

$$\begin{aligned} \chi\sigma k_0^2 &= 2K \langle -[\lambda\tilde{\gamma}_1 - \varepsilon\tilde{\gamma}_0] - \varepsilon\tilde{\alpha}_0 - \lambda\tilde{\alpha}_1 - \lambda^2 K \rangle \\ &= 2K \left\langle \frac{K}{2}(\lambda^2 - \varepsilon^2) - \frac{\varepsilon}{2}\dot{L} + \frac{\lambda\delta}{2}\dot{L} - \lambda^2 K \right\rangle \\ \chi\sigma k_0^2 &= 2K^2 \left\langle \frac{(\lambda^2 - \varepsilon^2)}{2} + \left(\frac{\lambda^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\lambda\delta}{4} \right) - \lambda^2 \right\rangle \\ \chi\sigma k_0^2 &= -\frac{K^2}{2}(\lambda\delta + \varepsilon)^2 < 0 \end{aligned}$$

On voit que cette éventualité est à rejeter.

Étudions enfin le tenseur de courbure de la métrique initiale.

Les seules composantes covariantes non nulles s'écrivent :

$$\begin{aligned} R_{0101} &= e^{2\alpha}[-\alpha_{00} + \alpha_{11}]; & R_{0202} &= -e^{2\gamma}[\gamma_{00} + \gamma_0^2 - \alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1] \\ R_{0212} &= -e^{2\gamma}[\gamma_{01} + \gamma_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0 - \alpha_0\gamma_1]; & R_{0303} &= -e^{2\gamma}[\gamma_{00} + \gamma_0^2 - \alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1] \\ R_{0331} &= e^{2\gamma}[\gamma_{01} + \gamma_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0 - \alpha_0\gamma_1]; & R_{2323} &= -e^{-2\alpha+4\gamma}[\gamma_1^2 - \gamma_0^2] \\ R_{3131} &= -e^{2\gamma}[\gamma_{11} + \gamma_1^2 - \alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1]; & R_{1212} &= -e^{2\gamma}[\gamma_{11} + \gamma_1^2 - \alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1] \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \mathcal{K} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}^{0101}\mathbf{R}_{0101} + \mathbf{R}^{0202}\mathbf{R}_{0202} + \mathbf{R}^{0303}\mathbf{R}_{0303} + \mathbf{R}^{2323}\mathbf{R}_{2323} \\ + \mathbf{R}^{3131}\mathbf{R}_{3131} + \mathbf{R}^{1212}\mathbf{R}_{1212} + 2\mathbf{R}^{0212}\mathbf{R}_{0212} + 2\mathbf{R}^{0331}\mathbf{R}_{0331} \end{array} \right\}$$

La métrique devant satisfaire les équations $\mathbf{R}_{\alpha\beta} = 0$, l'invariant de courbure se réduit à $\mathcal{K} = e^{-4x} \langle 8[\gamma_{00} + \gamma_0^2 - \alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1]^2 + [\gamma_1^2 - \gamma_0^2]^2 \rangle$.

L'hypothèse $\omega'' = 0$ entraînant $\sigma k_0^2 < 0$ il suffit de considérer

$$\lambda^2 = \varepsilon^2 \Leftrightarrow \lambda = \zeta \varepsilon$$

Le calcul montre alors que $\mathcal{K} = 0$; il n'y a donc pas de singularité essentielle. On peut envisager l'éventualité $\lambda = 0 \rightarrow u \equiv \varepsilon x^0$. On obtient dans ce cas le système

$$\chi \sigma k_0^2 = 3\varepsilon^2 \omega'' + 2\varepsilon \omega'(\tilde{\gamma}_0 - \tilde{\alpha}_0) \quad (1);$$

$$4\varepsilon^2 \omega'' + 4\varepsilon \omega' \tilde{\gamma}_0 + 2\varepsilon^2 \omega'^2 = 0 \quad (2);$$

$$-\varepsilon^2 \omega'' - 4\varepsilon \omega' \tilde{\gamma}_0 - 2\varepsilon^2 \omega'^2 = 0 \quad (3);$$

$$3\varepsilon^2 \omega'' + 2\varepsilon \omega'(\tilde{\gamma}_0 - \tilde{\alpha}_0) = -2\varepsilon \delta \omega' \tilde{\alpha}_1 \quad (4).$$

Additionnant (2) et (3) il vient $\varepsilon^2 \omega'' = 0 \rightarrow \omega'' = 0$.

Puis

$$\tilde{\gamma}_0 = -\varepsilon k \rightarrow \tilde{\gamma} = -\varepsilon k x^0 + A(x^1); \quad k \equiv \frac{K}{2}$$

$$\tilde{\alpha}_0 - \delta \tilde{\alpha}_1 = -\varepsilon k; \quad \tilde{\alpha} = \delta \varepsilon k x^1 + \delta \phi(x^0 + \delta x^1).$$

$$\chi_0 k_0^2 = -4\varepsilon k(\varepsilon k + \delta \phi')$$

Le système d'Einstein exige ensuite

$$A'^2 = \varepsilon^2 k^2; \quad \varepsilon^2 k^2 + \phi'[A' + \delta \varepsilon k] + \delta \varepsilon k A' = 0$$

En posant $A' = \zeta \varepsilon k$, il vient $\varepsilon^2 k^2(1 + \delta \zeta) + \phi' \varepsilon k(\delta + \zeta) = 0$.

Relation qu'on peut satisfaire identiquement en prenant $\delta = -\zeta$.

L'étude de l'hypothèse $\varepsilon = 0 \rightarrow u \equiv \lambda x^1$ conduit à des résultats analogues.

Notamment

$$\omega'' = 0, \quad \tilde{\gamma}_1 = -\lambda k; \quad \omega = 2ku,$$

d'où

$$\tilde{\gamma} = -\lambda k x^1 + B(x^0); \quad \tilde{\alpha} = -\lambda k x^1 + \phi(x^0 + \delta x^1).$$

Dans ce cas $\chi \sigma k_0^2 = -4\lambda k \delta \phi'$ expression soumise à la contrainte de positivité :

$$B'^2 = \lambda^2 k^2; \quad -2B'^2 + 2B'\phi' + 2\lambda^2 k^2 + 2\phi'\delta \lambda k = 0 \Leftrightarrow 2\phi'[B' + \delta \lambda k] = 0$$

Donc $\phi = C^{\text{te}}$ ou $B' = -\delta \lambda k \rightarrow B = -\delta \lambda k x^0 + B_0$.

II

Considérons la métrique

$$ds^2 = e^{2\omega} \langle e^{2\alpha} [(dx^0)^2 - (dx^1)^2] - e^{2\gamma} [(dx^2)^2 + (dx^3)^2] \rangle$$

avec $\alpha, \gamma(x^0, x^1)$; $\omega \equiv \omega(x^2)$ ou $ds^2 = e^{2\omega} ds_*^2$ en désignant par ds_*^2 la métrique de Taub définie par α et γ .

Le calcul du tenseur de Ricci fait apparaître les composantes covariantes non nulles

$$R_{\alpha\alpha}, \quad R_{01}, R_{02}, R_{12}; \quad \alpha = 0, 1, 2, 3.$$

dans lesquelles nous isolerons les composantes $R_{\alpha\beta}$ de la métrique de Taub. Les équations du vide $R_{\alpha\beta} = 0$ s'écrivent

$$\begin{aligned} R_{00} + e^{2\alpha-2\gamma}[\omega'' + 2\omega'^2] &= 0; & R_{11} - e^{2\alpha-2\gamma}[\omega'' + 2\omega'^2] &= 0; & R_{22} - 3\omega'' &= 0 \\ R_{33} - [\omega'' + 2\omega'^2] &= 0; \\ R_{01} &= 0; & \gamma_0 \omega' &= 0 \Leftrightarrow R_{02} = 0; & \gamma_1 \omega' &= 0 \Leftrightarrow R_{12} = 0. \end{aligned}$$

Supposant $\omega' \neq 0$ nous avons $\gamma_0 = \gamma_1 = 0 \rightarrow \gamma = 0$ d'où

$$R_{01} \equiv 0; \quad R_{22} = R_{33} \equiv 0$$

ce qui entraîne $\omega'' = 0$, $\omega'^2 = 0$ et nous ramène au cas exclu *a priori*. Donc il n'existe pas de champ gravitationnel du vide décrit par la métrique ds^2 . Pour un schéma radiation pure les équations d'Einstein prennent la forme

$$R_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}; \quad T_{\alpha\beta} = \sigma k_\alpha k_\beta; \quad k^\alpha k_\alpha = 0.$$

Soit en choisissant $k_2 = k_3 = 0$:

$$\begin{cases} R_{00} = \chi \sigma k_0^2; & R_{11} = \chi \sigma k_1^2; & R_{22} = 0; & R_{33} = 0 \\ R_{01} = \chi \sigma k_0 k_1; & R_{02} = 0; & R_{12} = 0 \end{cases}$$

L'isotropie de $\vec{k}$ entraîne en outre $k_1 = \delta k_0$; $\delta^2 = 1$; on peut écrire

$$\begin{aligned} R_{00} &= \chi \sigma k_0^2; & R_{11} - R_{00} &= 0; & R_{22} &= 0; \\ R_{33} &= 0; & R_{00} &= \delta R_{01}; & R_{02} &= 0; & R_{12} &= 0 \end{aligned}$$

$\omega' \neq 0$ exige $\gamma = 0$ d'après les deux dernières équations.

Alors $R_{01} = 0 \rightarrow R_{00} = 0$; $k_0 = k_1 = 0$: dégénérescence totale.

Choisissons donc $k_3 = k_1 = 0$; nous obtenons le système

$$\begin{aligned} R_{00} &= \chi \sigma k_0^2; & R_{11} &= 0; & R_{22} &= \chi \sigma k_2^2; & R_{33} &= 0; \\ & & R_{01} &= 0; & R_{02} &= \chi \sigma k_0 k_2; & R_{12} &= 0 \\ k^\alpha k_\alpha &= 0 \Leftrightarrow e^{-2\alpha} k_0^2 = e^{-2\gamma} k_2^2 \end{aligned}$$

D'après $R_{12} = 0$, $\gamma_1 = 0 \rightarrow \gamma = \gamma(x^0)$; dans ces conditions $R_{01} = 0$

entraîne $\alpha_1 \gamma_0 = 0$; la seule solution non dégénérée est $\alpha_1 = 0$; la métrique de Taub est alors une métrique du type de Ricci. Nous avons explicitement :

$$\begin{aligned} -\alpha_{00} - 2\gamma_{00} - 2\gamma_0^2 + 2\alpha_0\gamma_0 + e^{2\alpha-2\gamma}[\omega'' + 2\omega'^2] &= \chi\sigma k_0^2 \\ -\alpha_{00} - 2\alpha_0\gamma_0 + e^{2\alpha-2\gamma}[\omega'' + 2\omega'^2] &= 0 \\ e^{-2\alpha}[\gamma_{00} + 2\gamma_0^2] - 3e^{-2\gamma}\omega'' &= \chi\sigma e^{-2\gamma}k_2^2 = \chi\sigma e^{-2\alpha}k_0^2 \\ e^{-2\alpha}[\gamma_{00} + 2\gamma_0^2] - [\omega'' + 2\omega'^2] &= 0 ; \quad 2\gamma_0\omega' = \chi\sigma k_0 k_2 \end{aligned}$$

ou en transcrivant sous forme équivalente :

$$\begin{aligned} -2\gamma_{00} - 2\gamma_0^2 + 4\alpha_0\gamma_0 &= \chi\sigma k_0^2 \quad (1) \\ e^{-2\alpha+2\gamma}[\alpha_{00} + 2\alpha_0\gamma_0] &= \omega'' + 2\omega'^2 \quad (2) \\ e^{-2\alpha+2\gamma}[\gamma_{00} + 2\gamma_0^2] &= \omega' + 2\omega'^2 \quad (3) ; \\ -2\omega'' + 2\omega'^2 &= \chi\sigma k_2^2 \quad (4) \\ 2\gamma_0\omega' &= \delta e^{-\alpha+\gamma}(\chi\sigma k_0^2) \quad (5) ; \\ k_2 &= \delta e^{-\alpha+\gamma}k_0 \quad (6) ; \quad \delta^2 = 1 \end{aligned}$$

Nécessairement $-\omega'' + \omega'^2 = K$; $K : c^{te}$; d'après (2) et (3) : $\omega'' + 2\omega'^2 = L$.

Donc $\omega' = l$; $K = l^2$; $L = 2l^2$.

De (5) on déduit $\gamma_0 = \delta l e^{\alpha-\gamma}$ et en vertu de (3) : $\gamma_{00} = 0$.

Par conséquent $\alpha - \gamma = c^{te}$; prenant $\alpha = \gamma$ on obtient :

$$ds^2 = e^{2(\alpha x^0 + l x^2)} \langle (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \rangle.$$

Soit une métrique conforme à celle de Minkowski

$$\chi\sigma k_0^2 = 2l^2 = \chi\sigma k_2^2$$

En imposant la condition $\nabla_\beta(\sigma k^\beta) = 0$ les trajectoires du champ $\vec{k}$ deviennent des géodésiques nulles.

Or $\nabla_\beta(\sigma k^\beta) = 0 \Rightarrow \partial_\beta(\sqrt{-g} \sigma k^\beta) = 0$ soit puisque $k^2 = g^{22}k_2 = -\delta e^{-\alpha-\gamma-2\omega}k_0$,

$$\partial_0 \langle e^{2\gamma+2\omega} \sigma k_0 \rangle - \delta \partial_2 \langle e^{\alpha+\gamma+2\omega} \sigma k_0 \rangle = 0$$

Soit en développant dans le cas $\alpha = \gamma$:

$$\partial_0(\sigma k_0) - \delta \partial_2(\sigma k_0) + 2\sigma k_0[\gamma_0 - \delta\omega'] = 0$$

Mais $\gamma_0 = \delta l e^{\alpha-\gamma} = \delta l$ et $\gamma_0 - \delta\omega' = 0$.

Ceci nous donne $\sigma k_0 = \phi(x^0 + \delta x^2)$; on en tire $k_0 = \frac{2l^2}{\chi\phi}$; $\sigma = \frac{\chi\phi^2}{2l^2}$.

Dans les équations d'Einstein $R_{\alpha\beta} = \chi \left[T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right] + \Lambda g_{\alpha\beta}$ nous posons maintenant : $T_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \theta_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\theta^\nu \theta_\nu)$: champ mésonique vectoriel.

Si $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0$ les équations $R_{02} = R_{12} = 0$ exigent $\gamma = 0$; il reste

$$\begin{aligned} -\alpha_{00} + \alpha_{11} + e^{2\alpha}(\omega'' + 2\omega'^2) &= \Lambda e^{2\alpha+2\omega} ; \\ 3\omega'' &= \Lambda e^{2\omega} ; \quad \chi\theta_3^2 = \Lambda e^{2\omega} - (\omega'' + 2\omega'^2) \\ (-\alpha_{00} + \alpha_{11})e^{-2\alpha} &= 2(\omega'' - \omega'^2) ; \quad 3\omega'' = \Lambda e^{2\omega} ; \quad \chi\theta_3^2 = 2(\omega'' - \omega'^2) \end{aligned}$$

On doit poser

$$e^{-2\alpha}(-\alpha_{00} + \alpha_{11}) = 2K^2 ; \quad \omega'' - \omega'^2 = K^2 \rightarrow \chi\theta_3^2 = 2K^2 ; \quad 3\omega'' = \Lambda e^{2\omega}$$

Λ est alors nécessairement positive. On trouve aisément la solution

$$\omega = -\log \langle \cos Kx^2 \rangle \quad \text{d'où} \quad 3\omega'' = 3[K^2 + \omega'^2] = \Lambda e^{2\omega} = \Lambda \left[\frac{K^2 + \omega'^2}{K^2} \right]$$

Le choix $\Lambda = 3K^2$ assure donc la compatibilité.

L'équation $\alpha_{11} - \alpha_{00} = 2K^2 e^{2\alpha}$ peut s'intégrer facilement en posant

$$\alpha = \phi(u) ; \quad u \equiv (x^0 + \varepsilon x^1)$$

Il vient $(\varepsilon^2 - 1)\phi'' = 2K^2 e^{2\phi} \Leftrightarrow \phi'' = v^2 e^{2\phi} ; v^2 \equiv \frac{2K^2}{(\varepsilon^2 - 1)}$ avec $\varepsilon^2 > 1$, d'où la solution particulière $\phi = -\log [\cos vu]$.

Finalement nous obtenons la métrique :

$$\begin{aligned} g_{00} &= -g_{11} = (\cos vu)^{-2} (\cos Kx^2)^{-2} ; \\ g_{22} &= g_{33} = -(\cos Kx^2)^{-2} ; \quad \chi\theta_3^2 = 2K^2 \end{aligned}$$

En examinant l'hypothèse $\theta_2 = \theta_3 = 0$ on met en évidence (par addition des équations d'indices 00 et 11) la relation $\theta_0^2 + \theta_1^2 = 0$ correspondant à la disparition du champ mésonique.

Posons maintenant $\theta_1 = \theta_3 = 0$. Le système d'Einstein

$$\begin{cases} R_{00} = \chi\theta_0^2 + \Lambda g_{00} ; & R_{11} = \Lambda g_{11} ; & R_{22} = \chi\theta_2^2 + \Lambda g_{22} ; & R_{33} = \Lambda g_{33} \\ R_{01} = 0 ; & R_{02} = \chi\theta_0\theta_2 ; & R_{12} = 0 \end{cases}$$

entraîne $\gamma_1\omega' = 0$ ($R_{12} = 0$) soit $\gamma_1 = 0$ pour éviter la solution banale $\omega' = 0$.

D'après $R_{01} = 0$, $\alpha_1\gamma_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$ ou $\gamma_0 = 0$.

Avec $\gamma_0 = 0 \rightarrow \gamma = 0$, on trouve $\theta_0 = 0$ et $\chi\theta_2^2 = \Lambda e^{2\omega} - 3\omega'' = -2\omega'' + 2\omega'^2$.

Il reste deux équations : $\alpha_{00} - \alpha_{11} = 0$ et $\omega'' + 2\omega'^2 = \Lambda e^{2\omega}$.

On tire de la première $\alpha = \phi(x^0 + x^1) + \psi(x^0 - x^1)$; ϕ, ψ fonctions arbitraires.

Quant à la seconde, on peut l'écrire $Z'' = 2\Lambda Z^2$ avec $Z = e^{2\omega}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^2} \left[(Z')^2 - \frac{4\Lambda}{3} Z^3 \right] &= 0 \rightarrow (Z')^2 = C + \frac{4\Lambda}{3} Z^3 ; \quad C : \text{cte} \\ \left[C + \frac{4\Lambda}{3} Z^3 \right]^{-1/2} dZ &= \pm dx^2 \rightarrow Z = \mathcal{A}(x^2) \end{aligned}$$

En particulier, si $C = 0$ on a $Z^{-3/2}Z' = \pm \sqrt{\frac{4\Lambda}{3}}$; $\Lambda > 0$.

$$\text{Soit } -2Z^{-1/2} = \pm \sqrt{\frac{4\Lambda}{3}} x^2 - A \Leftrightarrow Z^{-1/2} = a \pm bx^2.$$

Toutefois on vérifie que dans ce cas la composante θ_2 s'annule aussi.

$$\text{Pour } \Lambda = 0, Z'' = 0 \rightarrow Z = kx^2 + l = e^{2\omega}; \chi\theta_2^2 = 3k^2/2(kx^2 + l)^2.$$

Si l'on postule $\gamma_0 \neq 0$, α_1 doit s'annuler.

Dans ce cas on peut mettre le système d'Einstein sous la forme :

$$-2\gamma_{00} - 2\gamma_0^2 + 4\alpha_0\gamma_0 = \chi\theta_0^2 \quad (1);$$

$$\alpha_{00} + 2\alpha_0\gamma_0 - e^{2\alpha-2\gamma}(\omega'' + 2\omega'^2) = -\Lambda e^{2\alpha+2\gamma} \quad (2)$$

$$-2\omega'' + 2\omega'^2 = \chi\theta_2^2 \quad (3);$$

$$e^{-2\alpha+2\gamma}[\gamma_{00} + 2\gamma_0^2] - (\omega'' + 2\omega'^2) = -\Lambda e^{2\gamma+2\omega} \quad (4)$$

$$2\gamma_0\omega' = \chi\theta_0\theta_2 \quad (5)$$

De (5) on déduit $\frac{2}{\chi} = \left(\frac{\theta_0}{\gamma_0}\right)\left(\frac{\theta_2}{\omega'}\right)$; or $\theta_0 = \theta_0(x^0)$ et $\theta_2 = \theta_2(x^2)$ d'où

$$\frac{\theta_0}{\gamma_0} = K; \quad \frac{\theta_2}{\omega'} = L; \quad KL = \frac{2}{\chi} > 0.$$

Posant $\chi K^2 \equiv 2v^2$ et $\chi L^2 \equiv 2\mu^2 \rightarrow \mu^2 v^2 = 1$, nous avons :

$$\gamma_{00} + (1 + v^2)\gamma_0^2 - 2\alpha_0\gamma_0 = 0 \quad (1)'; \quad \omega'' + \omega'^2(\mu^2 - 1) = 0 \quad (3)'$$

De (3)' on tire $\omega = -\frac{1}{k} \log(l - kx^2)$ avec $k \equiv 1 - \mu^2$; l : c^{te}.

D'après (1)' :

$$2\alpha_0 = \frac{\gamma_{00}}{\gamma_0} + (1 + v^2)\gamma_0 \rightarrow 2\alpha = \log(\gamma_0) + (1 + v^2)\gamma + c^{te}$$

$$e^{2\alpha} = \gamma_0 e^{(1+v^2)\gamma + C}$$

D'autre part l'équation $\alpha_{00} + 2\alpha_0\gamma_0 = \gamma_{00} + 2\gamma_0^2$ déduite de (2) et (4) s'écrit aussi

$$\frac{d}{dx^0} \left\{ 2e^{2\gamma}\alpha_0 - \frac{d}{dx^0}(e^{2\gamma}) \right\} = 0 \Leftrightarrow 2e^{2\gamma}(\alpha_0 - \gamma_0) = 2C, \quad C: c^{te}$$

$$\alpha_0 = \gamma_0 + Ce^{-2\gamma}.$$

Cette relation fournit l'équation en γ , savoir :

$$\frac{\gamma_{00}}{\gamma_0} + (1 + v^2)\gamma_0 = 2\gamma_0 + 2Ce^{-2\gamma} \rightarrow \frac{\gamma_{00}}{\gamma_0} + (v^2 - 1)\gamma_0 = 2Ce^{-2\gamma}$$

laquelle admet l'intégrale $\gamma = \frac{1}{2} \log(x^0)$ pourvu que $v^2 - 3 = 4C$, d'où

$$\alpha = \left(\frac{v^2 - 1}{4} \right) \log x^0.$$

Reste à vérifier l'équation (4). Or nous avons $\gamma_{00} + 2\gamma_0^2 = 0$.

On doit donc avoir $\omega'' + 2\omega'^2 = \Lambda e^{2\gamma+2\omega}$; ceci nous montre que Λ doit être nulle.

Donc $\omega'' + 2\omega'^2 = 0$; pour identifier cette équation à (3)' il suffit de poser $\mu^2 = 3$.

Alors $\omega = \frac{1}{2} \log(l + 2x^2)$; nous aboutissons à la métrique :

$$g_{00} = -g_{11} = (l + 2x^2)(x^0)^{-1/3}; \quad g_{22} = g_{33} = (l + 2x^2)x^0$$

$$\theta_0 = K\gamma_0 = \frac{K}{2x^0}; \quad \theta_2 = L\omega' = \frac{L}{(l + 2x^2)}$$

On déduit

$$(\theta^\nu \theta_\nu) = e^{-2\omega} \langle e^{-2\alpha} \theta_0^2 - e^{-2\gamma} \theta_2^2 \rangle = \frac{1}{\Delta} \left\{ (x^0)^{1/3} \frac{K^2}{4(x^0)^2} - \frac{1}{x^0} \frac{L^2}{\Delta^2} \right\}$$

avec $\Delta \equiv (l + 2x^2)$.

$$\text{Soit } (\theta^\nu \theta_\nu) = \frac{1}{x^0 \Delta} \left\langle \frac{K^2}{4(x^0)^{2/3}} - \frac{L^2}{\Delta^2} \right\rangle = \left[\frac{K^2 \Delta^2 - 4L^2 (x^0)^{2/3}}{4\Delta^3 (x^0)^{5/3}} \right].$$

Sans écrire les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel nous nous contenterons de mentionner la forme générale de l'invariant de courbure :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & e^{-4\alpha-4\omega} \langle (\alpha_{11} - \alpha_{00})^2 + 2(\gamma_{00} + \gamma_0^2 - \alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1)^2 \\ & + 2(\gamma_{11} + \gamma_1^2 - \alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1)^2 + (\gamma_0^2 - \gamma_1^2)^2 - 4[\gamma_{01} + \gamma_0\gamma_1 - \alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0]^2 \rangle \\ & + 3e^{-4\gamma-4\omega} \langle (\omega'')^2 + (\omega')^4 \rangle - 2\omega'' e^{-2\alpha-2\gamma-4\omega} \langle \gamma_{00} - \gamma_{11} + 2(\gamma_0^2 - \gamma_1^2) \rangle \\ & - 2\omega'^2 e^{-2\alpha-2\gamma-4\omega} \langle (\alpha_{00} - \alpha_{11}) + (\gamma_{00} - \gamma_{11}) + 3(\gamma_0^2 - \gamma_1^2) \rangle \end{aligned}$$

III

Nous considérons à présent une métrique conforme à celle de Taub :

$$ds^2 = e^{2\omega} \langle e^{2\alpha} [(dx^0)^2 - (dx^1)^2] - e^{2\gamma} [(dx^2)^2 + (dx^3)^2] \rangle$$

avec $\alpha, \gamma(x^0, x^1)$; $\omega(x^2, x^3)$.

Cette métrique donne naissance aux dix composantes du tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta}$.

Supposant essentiellement $\omega_2\omega_3 \neq 0$ (le cas $\omega_3 = 0$ fait l'objet du paragraphe II), on examine en premier lieu les équations du vide $R_{\alpha\beta} = 0$.

Les équations $R_{02}=0$, $R_{03}=0$, $R_{12}=0$, $R_{13}=0$ exigent alors $\gamma_0=\gamma_1=0$, nous poserons $\gamma=0$.

Le système s'écrit dans ces conditions

$$\begin{aligned} -\alpha_{00} + \alpha_{11} + e^{2\alpha}[\omega_{22} + \omega_{33} + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^2] &= 0 \quad (R_{00} = 0 \Leftrightarrow R_{11} = 0); \\ 3\omega_{22} + \omega_{33} + 2\omega_2^2 &= 0 \quad (R_{22} = 0); \quad 3\omega_{33} + \omega_{22} + 2\omega_3^2 = 0 \quad (R_{33} = 0); \\ -\omega_{23} + \omega_2\omega_3 &= 0 \quad (R_{23} = 0). \end{aligned}$$

$R_{01} \equiv 0$; $R_{02} = R_{03} = R_{12} = R_{13} = 0$ en vertu de $\gamma = 0$.

Par addition des équations E_{22} et E_{33} on déduit

$$2[\omega_{22} + \omega_{33}] + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 0$$

Ceci permet d'écrire E_{11} sous la forme

$$e^{-2\alpha}[\alpha_{00} - \alpha_{11}] = \omega_{22} + \omega_{33} + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^2 = \frac{3}{2}[\omega_2^2 + \omega_3^2]$$

$$e^{-2\alpha}[\alpha_{00} - \alpha_{11}] = \frac{3}{2}[\omega_2^2 + \omega_3^2] = \frac{3}{2}K^2, \quad K = c^{te}.$$

La dérivation de $\omega_2^2 + \omega_3^2 = K^2$ nous donne

$$\omega_2\omega_{22} + \omega_3\omega_{23} = 0 \quad \text{et} \quad \omega_2\omega_{23} + \omega_3\omega_{33} = 0;$$

soit en vertu de E_{23}

$$\omega_2[\omega_{22} + \omega_3^2] = 0; \quad \omega_3[\omega_{33} + \omega_2^2] = 0.$$

Donc, puisque $\omega_2\omega_3 \neq 0$ il vient :

$$\omega_{22} + \omega_3^2 = 0; \quad \omega_{33} + \omega_2^2 = 0 \rightarrow \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 0$$

et comme

$$\omega_{22} + \omega_{33} = -\frac{1}{2}[\omega_2^2 + \omega_3^2]$$

nous avons $\omega_2^2 + \omega_3^2 = 0 \rightarrow \omega_2 = \omega_3 = 0$ contrairement à l'hypothèse.

Ceci établit la non existence de champs gravitationnels du vide décrits par ds^2 .

Examinons maintenant l'hypothèse champ mésonique vectoriel comme source du champ soit

$$T_{\alpha\beta} = \theta_\alpha\theta_\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\theta^\nu\theta_\nu)$$

dans les équations d'Einstein.

On ne peut avoir $\theta_2 = \theta_3 = 0$ car les équations $R_{02} = R_{03} = R_{12} = R_{13} = 0$ entraînent $\gamma = 0$ ($\omega_2\omega_3 \neq 0$) et l'addition des équations E_{00} et E_{11} fournit $\theta_0^2 + \theta_1^2 = 0 \rightarrow \theta_0 = \theta_1 = 0$, disparition du champ $\vec{\theta}$.

Posons donc $\theta_1 = \theta_3 = 0$; $\theta_0\theta_2 \neq 0$.

Les équations R_{03} et $R_{12} = 0$ demandent $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ d'où

$$R_{02} = 0 \rightarrow \theta_0\theta_2 = 0.$$

L'hypothèse est donc à rejeter. La conclusion est la même si l'on adopte

$$\theta_0 = \theta_3 = 0.$$

Prenant $\theta_0 = \theta_1 = 0$, $\theta_2\theta_3 \neq 0$ les relations $R_{02} = R_{03} = R_{12} = R_{13} = 0$ exigent toujours $\gamma = 0$. On parvient au système

$$\begin{aligned} e^{-2\alpha}[\alpha_{00} - \alpha_{11}] &= [\omega_{22} + \omega_{33} + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^2 - \Lambda e^{2\omega}] \\ \chi\theta_2^2 &= -3\omega_{22} - \omega_{33} - 2\omega_3^2 + \Lambda e^{2\omega}; \quad \chi\theta_3^2 = -3\omega_{33} - \omega_{22} - 2\omega_2^2 + \Lambda e^{2\omega} \\ 4[-\omega_{23} + \omega_2\omega_3]^2 &= [-3\omega_{22} - \omega_{33} - 2\omega_3^2 + \Lambda e^{2\omega}][-3\omega_{33} - \omega_{22} - 2\omega_2^2 + \Lambda e^{2\omega}] \end{aligned}$$

Il faut donc

$$e^{-2\alpha}[\alpha_{00} - \alpha_{11}] = K; \quad \omega_{22} + \omega_{33} + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^2 - \Lambda e^{2\omega} = K$$

ω , déterminée par cette équation doit satisfaire la contrainte représentée par la dernière équation du système et rendre positives les expressions θ_2^2, θ_3^2 . Les « composantes » du pseudo-vecteur d'isothermie $\xi^\alpha \equiv g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ sont

$$\xi^0 = 2g^{22}\Gamma_{22}^0; \quad \xi^1 = 2g^{22}\Gamma_{22}^1; \quad \xi^2 = 2g^{00}\Gamma_{00}^2; \quad \xi^3 = 2g^{00}\Gamma_{00}^3$$

$\xi^0 = \xi^1 = 0$ si $\gamma = 0$ comme nous le supposons.

$$\xi^2 = 2e^{-2\omega}\omega_2; \quad \xi^3 = 2e^{-2\omega}\omega_3$$

Portant ces expressions dans $\square(\phi) \equiv \nabla^\nu \nabla_\nu(\phi) = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha(\phi_\beta) = g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}(\phi) - \xi^\nu\phi_\nu$ avec $\phi_\alpha \equiv \nabla_\alpha(\phi)$ il vient :

$$\square(\omega) = -e^{-2\omega} \langle \omega_{22} + \omega_{33} + 2[\omega_2^2 + \omega_3^2] \rangle$$

L'équation en ω peut donc s'écrire $\square(\omega) = -\Lambda - Ke^{-2\omega}$.

Équivalamment, en posant $X \equiv e^{2\omega}$, l'équation prend la forme

$$X_{22} + X_{33} = 2\Lambda X^2 + 2KX$$

Si $\Lambda = K = 0 \rightarrow X_{22} + X_{33} = 0$. X est alors une fonction harmonique des variables x^2, x^3 .

$$X = k \log r; \quad r^2 = (x^2)^2 + (x^3)^2$$

De $e^{2\omega} = k \log r$ on tire notamment la relation

$$e^{2\omega}[-\omega_{23} + \omega_2\omega_3] = \frac{kx^2x^3}{r^4} \left[1 + \frac{3k}{4e^{2\omega}} \right]$$

L'équation $\omega_{22} + \omega_{33} + 2[\omega_2^2 + \omega_3^2] = 0$ permet d'écrire :

$$\chi\theta_2^2 = -2\omega_{22} + 2\omega_2^2; \quad \chi\theta_3^2 = -2\omega_{33} + 2\omega_3^2,$$

d'où la contrainte

$$[-\omega_{23} + \omega_2\omega_3]^2 = [-\omega_{22} + \omega_2^2][-\omega_{33} + \omega_3^2]$$

soit

$$\frac{k^2(x^2x^3)^2}{r^8} \left[1 + \frac{A}{2k} \right]^2 = \frac{1}{4} \left[-\frac{k}{r^2} + \frac{A(x^2)^2}{r^4} \right] \left[-\frac{k}{r^2} + \frac{A(x^3)^2}{r^4} \right];$$

$$A \equiv 2k \left[1 + \frac{3k}{4e^{2\omega}} \right]$$

$$k[A - k] = 0 \rightarrow k = 0 \rightarrow A = 0$$

ou

$$A = k \Leftrightarrow 1 + \frac{3k}{2e^{2\omega}} = 0 \rightarrow 2 \log r + 3 = 0$$

Il n'existe donc pas de solution du type considéré.

Posons donc $\Lambda = 0$, $K \neq 0 \rightarrow \omega_{22} + \omega_{33} + 2[\omega_2^2 + \omega_3^2] = K$
avec

$$[-\omega_{23} + \omega_2\omega_3]^2 = \left[-\omega_{22} + \omega_2^2 - \frac{K}{2} \right] \left[-\omega_{33} + \omega_3^2 - \frac{K}{2} \right].$$

Ou d'une manière équivalente $X_{22} + X_{33} = 2KX$ et

$$[2XX_{23} - 3X_2X_3]^2 = [2XX_{22} - 3(X_2)^2 + 2K(X)^2][2XX_{33} - 3(X_3)^2 + 2K(X)^2]$$

Posant $X = \phi(x^2)\psi(x^3)$, il vient $\frac{\phi''}{\phi} + \frac{\psi''}{\psi} = 2K$.

Donc $\phi'' = 2L\phi$, $\psi'' = 2(K - L)\psi$; $L : c^te$. La contrainte s'écrit :

$$(\phi'\psi')^2 = [2\phi\phi'' - 3\phi'^2 + 2K\phi^2][2\psi\psi'' - 3\psi'^2 + 2K\psi^2]$$

soit encore :

$$(\phi'\psi')^2 = [(2K + 4L)\phi^2 - 3\phi'^2][(6K - 4L)\psi^2 - 3\psi'^2]$$

$$\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \cdot \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 = \left[(2K + 4L) - 3\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2\right] \left[(6K - 4L) - 3\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2\right]$$

Supposant L et $(K - L) > 0$ et portant les valeurs $\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 = 2L$
 $\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 = 2(K - L)$ dans la contrainte, on obtient une identité. Ceci fait apparaître la solution

$$X \equiv e^{2\omega} = \phi\psi = e^{\sqrt{2L}x^2 + \sqrt{2(K-L)}x^3}$$

Nous avons en outre $\alpha_{00} - \alpha_{11} = Ke^{2\alpha}$, équation qu'on peut ramener à la forme $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi \partial \eta} = Ke^{2\alpha}$ par le changement de variables $x^0 - x^1 = 2\xi$;
 $x^0 + x^1 = 2\eta$.

Les expressions θ_2^2 et θ_3^2 sont négatives si $2\omega = \sqrt{2L}x^2 + \sqrt{2(K-L)}x^3$

Soit alors $L < 0$ et $(K - L) > 0$; nous avons $\phi = \sin(\sqrt{2|L|x^2})$; $\psi = e^{\sqrt{2(K-L)}x^3}$

$$\frac{\phi'}{\phi} = \sqrt{2|L|} \cot(\sqrt{2|L|x^2}); \quad \frac{\psi'}{\psi} = \sqrt{2(K-L)}.$$

La contrainte devient :

$$2|L| \cot^2(\sqrt{2|L|x^2}) \cdot [2(K-L)] \\ = \langle 2K + 4L - 6|L| \cot^2(\sqrt{2|L|x^2}) \rangle \langle 6K - 4L - 3 \cdot 2(K-L) \rangle$$

Posons $K = -2L$, nous avons

$$2|L| \cot^2(\sqrt{2|L|x^2}) \cdot [-6L] = -6|L| \cot^2(\sqrt{2|L|x^2}) \cdot [-16L + 18L]$$

ce qui est une identité,

$$2\omega = \log[\sin(\sqrt{2|L|x^2})] + \sqrt{6|L|x^3}.$$

On tire de cette expression

$$2\omega_2 = \sqrt{2|L|} \cot(\sqrt{2|L|x^2}); \\ 2\omega_{22} = \frac{-2|L|}{\sin^2(\sqrt{2|L|x^2})}; \quad 2\omega_3 = \sqrt{6|L|}; \quad 2\omega_{33} = 0$$

Par conséquent

$$\chi\theta_2^2 = 3|L| \cot^2(\sqrt{2|L|x^2}); \quad \chi\theta_3^2 = |L|.$$

La solution est donc physiquement admissible et l'on étudierait d'une manière semblable le cas $L > 0$, $(K - L) < 0$.

L'équation $X_{22} + X_{33} = 2\Lambda X^2$ correspond au choix $K = 0$. Si l'on postule $X = X(u)$ avec $u = x^2 + x^3$ il vient $X'' = \Lambda X^2 \rightarrow (X')^2 = \frac{2\Lambda}{3} X^3 + c^{te}$.

En particulier si la constante arbitraire est nulle, on a

$$X' = \pm \sqrt{\frac{2\Lambda}{3}} X^{3/2}; \quad \Lambda > 0$$

$$-2X^{-1/2} = \pm \sqrt{\frac{2\Lambda}{3}} u + \mathcal{C} \rightarrow X \equiv e^{2\omega} = 4 \left[\mathcal{C} \pm \sqrt{\frac{2\Lambda}{3}} u \right]^{-2}; \quad \mathcal{C}: C^{te}.$$

En outre $\alpha_{00} - \alpha_{11} = 0 \rightarrow \alpha = \phi(x^0 - x^1) + \psi(x^0 + x^1)$. Toutefois cette solution correspond à $\theta_2 = \theta_3 = 0$.

D'une manière générale

$$\chi\theta_2^2 = \frac{-2XX'' + 3X'^2}{2X^2} = \chi\theta_3^2 \quad \text{et} \quad \omega_{23} = \frac{XX'' - X'^2}{2X^2}$$

On vérifie que la contrainte est bien satisfaite.

Dans les équations d'Einstein nous prendrons

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)U_\alpha U_\beta - pg_{\alpha\beta} + U_\alpha Q_\beta + U_\beta Q_\alpha; \quad U^\alpha U_\alpha = 1; \quad U^\alpha Q_\alpha = 0.$$

fluide parfait thermodynamique.

$$R_{\alpha\beta} = \chi \left\langle (\rho + p)U_\alpha U_\beta - \left(\frac{\rho - p}{2}\right)g_{\alpha\beta} + U_\alpha Q_\beta + U_\beta Q_\alpha \right\rangle + \Lambda g_{\alpha\beta}; \quad \chi > 0.$$

Si $U_2 = U_3 = 0$, $e^{-2\alpha-2\omega}[U_0^2 - U_1^2] = 1$; nous choisissons

$$Q_0 = Q_1 = 0; \quad Q_2 \cdot Q_3 \neq 0.$$

Du système correspondant on tire

$$\begin{aligned} 2\chi p &= g^{00}[R_{00} - R_{11}] - 2\Lambda; & 2\chi\rho &= g^{00}[R_{00} - R_{11}] - 4g^{22}R_{22} + 2\Lambda \\ \begin{cases} U_0^2 &= [R_{00} - g_{00}g^{22}R_{22}]/[g^{00}[R_{00} - R_{11}] - 2g^{22}R_{22}] \\ U_1^2 &= [R_{11} + g_{00}g^{22}R_{22}]/[g^{00}[R_{00} - R_{11}] - 2g^{22}R_{22}] \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= R_{33}; \quad R_{23} = 0; \quad (R_{01})^2 = (R_{00} - g_{00}g^{22}R_{22})(R_{11} - g_{11}g^{22}R_{22}). \\ 2\gamma_0\omega_2 &= \chi U_0 Q_2; \quad 2\gamma_0\omega_3 = \chi U_0 Q_3; \quad 2\gamma_1\omega_2 = \chi U_1 Q_2; \quad 2\gamma_1\omega_3 = \chi U_1 Q_3 \\ R_{22} = R_{33} &\rightarrow \omega_{22} - \omega_2^2 = \omega_{33} - \omega_3^2; \quad R_{23} = 0 \rightarrow \omega_{23} - \omega_2\omega_3 = 0 \end{aligned}$$

Écrivant $e^{-\omega} \equiv Z$ nous avons donc $Z_{22} = Z_{33}$; $Z_{23} = 0$; $Z = A(x^2) + B(x^3)$ avec $A'' = B'' = 2k$; $A = k(x^2)^2 + ax^2 + b$; $B = k(x^3)^2 + cx^3 + d$.

D'autre part

$$\frac{\omega_2}{Q_2} = \frac{\omega_3}{Q_3} = \frac{\chi U_0}{2\gamma_0} = \frac{\chi U_1}{2\gamma_1} \equiv \frac{1}{\zeta}; \quad Q_2 = \zeta\omega_2; \quad Q_3 = \zeta\omega_3$$

$$\chi^2\zeta^2 = 4e^{-2\alpha-2\omega}(\gamma_0^2 - \gamma_1^2) \text{ d'où la condition nécessaire } \gamma_0^2 - \gamma_1^2 > 0.$$

Nous transcrivons les expressions de U_0^2 et U_1^2 sous la forme :

$$U_0^2 \equiv \frac{\mathcal{H} + e^{2\alpha-2\gamma}\Omega}{\mathcal{D}}; \quad U_1^2 \equiv \frac{\mathcal{Y} - e^{2\alpha-2\gamma}\Omega}{\mathcal{D}}$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{H} \equiv -\alpha_{00} + \alpha_{11} - \gamma_{00} + 2\alpha_0\gamma_0 - \gamma_{11} + 2\alpha_1\gamma_1 - 2\gamma_1^2; & \Omega \equiv 2(-\omega_{22} + \omega_2^2) \\ \mathcal{Y} \equiv \alpha_{00} - \alpha_{11} - \gamma_{00} + 2\alpha_0\gamma_0 - \gamma_{11} + 2\alpha_1\gamma_1 - 2\gamma_0^2 \\ \mathcal{D} \equiv 2e^{-2\alpha-2\omega}[-\alpha_{00} + \alpha_{11} + \gamma_0^2 - \gamma_1^2] + 4e^{-2\gamma-2\omega}[-\omega_{22} + \omega_2^2] \end{cases}$$

$$\left(\frac{U_0}{\gamma_0}\right)^2 = \left(\frac{U_1}{\gamma_1}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\mathcal{H} + e^{2\alpha-2\gamma}\Omega}{\gamma_0^2} = \frac{\mathcal{Y} - e^{2\alpha-2\gamma}\Omega}{\gamma_1^2}$$

soit en développant :

$$e^{2\alpha-2\gamma}\Omega(\gamma_0^2 + \gamma_1^2) = \gamma_0^2\mathcal{Y} - \gamma_1^2\mathcal{H} \rightarrow \Omega = \frac{[\gamma_0^2\mathcal{Y} - \gamma_1^2\mathcal{H}]}{(\gamma_0^2 + \gamma_1^2)}e^{-2\alpha-2\gamma} = c^te$$

puisque $\Omega = \Omega(x^2, x^3)$.

Or $e^{-\omega} = A(x^2) + B(x^3)$; $A'' = B'' = 2k$; on en déduit $\omega_2 = \frac{-A'}{A+B}$ puis $-\omega_{22} + \omega_2^2 = \frac{2k}{A+B}$; donc il faudrait $A+B = c^{te}$, $B = c^{te} \rightarrow A = c^{te}$.

Pour éviter cette solution triviale posons $2k=0$; $A = mx^2 + p$; $B = nx^3 + q$. Alors $\Omega = 0 \rightarrow \gamma_0^2 \mathcal{Y} - \gamma_1^2 \mathcal{H} = 0$ relation dont le développement nous donne

$$(\alpha_{00} - \alpha_{11})(\gamma_0^2 + \gamma_1^2) + (\gamma_0^2 - \gamma_1^2)[- \gamma_{00} - 2\gamma_0^2 + 2\alpha_0\gamma_0 - \gamma_{11} - 2\gamma_1^2 + 2\alpha_1\gamma_1] = 0 \quad (E)$$

A l'équation (E) s'ajoute $(R_{01})^2 = \mathcal{H}\mathcal{Y}$.

Si nous remplaçons dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{Y}$, $(\alpha_{00} - \alpha_{11})$ par sa valeur tirée de (E) nous obtenons toutes réductions faites

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= 2\gamma_0^2 \mathcal{Z}; \quad \mathcal{Y} = 2\gamma_1^2 \mathcal{Z} \\ \text{avec} \quad \mathcal{Z} &= \left(\frac{-\gamma_{00} - \gamma_0^2 + 2\alpha_0\gamma_0 - \gamma_{11} - \gamma_1^2 + 2\alpha_1\gamma_1}{(\gamma_0^2 + \gamma_1^2)} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 4[-\gamma_{01} - \gamma_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0 + \alpha_0\gamma_1]^2 &= 4\gamma_0^2\gamma_1^2 \mathcal{Z}^2 \\ -\gamma_{01} - \gamma_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0 + \alpha_0\gamma_1 &= \pm \gamma_0\gamma_1 \mathcal{Z} \end{aligned}$$

Deux relations apparaissent :

$$\begin{cases} -\alpha_0\gamma_1 \left[\frac{\gamma_0^2 - \gamma_1^2}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2} \right] + \alpha_1\gamma_0 \left[\frac{\gamma_0^2 - \gamma_1^2}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2} \right] \\ \quad = \gamma_{01} + \gamma_0\gamma_1 - \gamma_0\gamma_1 \left[\frac{\gamma_{00} + \gamma_0^2 + \gamma_{11} + \gamma_1^2}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2} \right] \quad (1) \\ \alpha_0\gamma_1 \left[\frac{3\gamma_0^2 + \gamma_1^2}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2} \right] + \alpha_1\gamma_0 \left[\frac{\gamma_0^2 + 3\gamma_1^2}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2} \right] \\ \quad = \gamma_{01} + \gamma_0\gamma_1 + \gamma_0\gamma_1 \left[\frac{\gamma_{00} + \gamma_0^2 + \gamma_{11} + \gamma_1^2}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2} \right] \quad (2) \end{cases}$$

Soit $\gamma = \gamma(u)$; $u \equiv x^0 + \varepsilon x^1$; dans ce cas

$$\begin{aligned} \gamma_{01} + \gamma_0\gamma_1 - \gamma_0\gamma_1 \left[\frac{\gamma_{00} + \gamma_0^2 + \gamma_{11} + \gamma_1^2}{\gamma_0^2 + \gamma_1^2} \right] \\ = \varepsilon\gamma'' + \varepsilon\gamma'^2 - \varepsilon\gamma'^2 \left[\frac{\gamma'' + \gamma'^2 + \varepsilon^2\gamma'' + \varepsilon^2\gamma'^2}{\gamma'^2(1 + \varepsilon^2)} \right] = 0 \end{aligned}$$

(1) devient en supposant $\varepsilon^2 \neq 1$: $\gamma'[\alpha_1 - \varepsilon\alpha_0] = 0$.

On ne peut prendre $\gamma' = 0$ car cela entraînerait $\bar{Q} = 0$; par conséquent $\alpha_1 = \varepsilon\alpha_0 = 0$.

Il est possible de satisfaire cette condition en posant $\alpha = \alpha(u)$.

(E) devient $(1 - \varepsilon^4)\gamma'^2[\alpha'' - \gamma'' - 2\gamma'^2 + 2\alpha'\gamma'] = 0$.

Pour un choix arbitraire de γ , α est déterminée par l'équation

$$\alpha'' + 2\alpha'\gamma' = \gamma'' + 2\gamma'^2$$

Exemple : $\gamma = nu \rightarrow \alpha = nu + \frac{1}{2n}e^{-2nu}$; on trouve ensuite

$$\begin{cases} \chi p = e^{-2\alpha-2\omega} \{ -(1-\varepsilon^2)[n^2 + 2ne^{-2nu}] + 3e^{2\alpha-2\gamma}[\omega_2^2 + \omega_3^2] \} - \Lambda \\ \chi \rho = e^{-2\alpha-2\omega} \{ (1-\varepsilon^2)[3n^2 - 2ne^{-2nu}] - 3e^{2\alpha-2\gamma}[\omega_2^2 + \omega_3^2] \} + \Lambda \end{cases}$$

Ces expressions doivent satisfaire $p \geq 0$; $\rho > 0$; $3p \leq \rho$; $\varepsilon^2 < 1$.
Examinons la relation (2) avec $\gamma = \gamma(u)$

$$\gamma' \left[\alpha_0 \varepsilon \left(\frac{3 + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right) + \alpha_1 \left(\frac{1 + 3\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right) \right] = 2\varepsilon [\gamma'' + \gamma'^2]$$

En posant $\alpha = \alpha(u)$ on a

$$\alpha' = \frac{\gamma'' + \gamma'^2}{2\gamma'} \rightarrow 2\alpha = \log \gamma' + \gamma \rightarrow e^{2\alpha} = e^{\gamma} \gamma'$$

(E) s'écrit encore avec $0 < \varepsilon^2 < 1$, $\gamma' \neq 0$: $\alpha'' + 2\alpha'\gamma' = \gamma'' + 2\gamma'^2$.

Soit $\alpha'' + \gamma'' + \gamma'^2 = \gamma'' + 2\gamma'^2 \rightarrow \alpha'' = \gamma'^2$.

On en déduit l'équation en γ : $\gamma'\gamma''' + \gamma''[\gamma'^2 - \gamma''] = 2\gamma'^4$.

Soit $\zeta\zeta'' + \zeta'[\zeta^2 - \zeta'] = 2\zeta^4$; $\zeta \equiv \gamma'$

$$\frac{(\zeta\zeta'' - \zeta'^2)}{\zeta^2} + \zeta' = 2\zeta^2$$

Posant $\zeta = e^{\int \frac{du}{\xi}}$, il vient $\zeta' \equiv \frac{d\zeta}{du} = \frac{1}{\xi} e^{\int \frac{du}{\xi}} \rightarrow \frac{\zeta'}{\zeta} = \frac{1}{\xi}$

$$\left(\frac{\zeta\zeta'' - \zeta'^2}{\zeta^2} \right) = -\frac{\zeta'}{\xi^2} \quad \text{d'où} \quad -\frac{\zeta'}{\xi^2} + \frac{\zeta'}{\xi} = 2\zeta^2$$

Avec

$$Z \equiv \frac{1}{\xi}, \quad Z' = -\frac{\xi'}{\xi^2}; \quad Z' + \zeta Z = 2\zeta^2$$

Mais

$$\frac{dZ}{du} = \frac{dZ}{d\zeta} \frac{d\zeta}{du} = \frac{dZ}{d\zeta} (\zeta Z)$$

L'équation s'écrit finalement

$$\zeta Z \frac{dZ}{d\zeta} + \zeta Z = 2\zeta^2$$

soit

$$Z \frac{dZ}{d\zeta} + Z = 2\zeta$$

On aperçoit la solution $Z = \zeta \rightarrow \gamma = -\log(c - u)$; $e^{2\alpha} = e^{2\gamma}$.
 Cette solution est physiquement inacceptable car $(\rho + p) = 0$.
 La transformation $Z = 2\zeta\Omega$ fournit :

$$2\Omega^2 + \Omega + 2\Omega\zeta \frac{d\Omega}{d\zeta} = 1 \quad \frac{-2\Omega d\Omega}{2\Omega^2 + \Omega - 1} = \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

On en déduit

$$\left[\frac{-2}{3(\Omega + 1)} - \frac{1}{3\left(\Omega - \frac{1}{2}\right)} \right] d\Omega = \frac{d\zeta}{\zeta}$$

puis

$$(\Omega + 1)^2 \left(\Omega - \frac{1}{2} \right) = \zeta^{-3}.$$

(Manuscrit reçu le 23 février 1981).