ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

CHRISTIANE SCHOMBLOND

PHILIPPE SPINDEL

Conditions d'unicité pour le propagateur $\Delta^1(x, y)$ du champ scalaire dans l'univers de de Sitter

Annales de l'I. H. P., section A, tome 25, nº 1 (1976), p. 67-78

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1976__25_1_67_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXV, n° 1, 1976, p. 67-78.

Section A :
Physique théorique.

Conditions d'unicité pour le propagateur $\Delta^1(x, y)$ du champ scalaire dans l'univers de de Sitter

par

Christiane SCHOMBLOND
Université Libre de Bruxelles, Physique Théorique et Mathématique

Philippe SPINDEL
Université de l'État à Mons, Mécanique Analytique et Relativité Générale

ABSTRACT. — Two different methods are used here in the construction of the Δ^1 propagator of the scalar field in the de Sitter space-time and conditions are given which insure unicity.

INTRODUCTION

Le développement de la théorie quantique des champs sur un espace-temps V_4 requiert de façon essentielle la connaissance des noyaux Δ et Δ^1 : le premier assure la causalité de la théorie, le deuxième permet de généraliser [*10*] la décomposition des solutions de l'équation de Klein-Gordon en parties de fréquence positive et négative.

E. Combet [*7*] a démontré l'existence de Δ^1 pour un espace-temps statique ; pour les espaces stationnaires, M. Chevalier [*5*] a établi l'existence de Δ^1 et a donné des conditions d'unicité qui généralisent les conditions introduites par G. Rideau [*11*] pour l'espace de Minkowski.

Le problème particulier de l'univers de de Sitter a été traité par différents groupes d'auteurs [*3*] [*4*] [*6*] [*8*] ; en particulier, dans [*8*], J. Géhéniau et Ch. Schomblond ont construit une expression de Δ^1 en terme de fonctions hypergéométriques, mais leur propagateur contient une solution arbitraire de l'équation de K. G. régulière sur le cône de lumière.

Le but de cette note est d'établir des conditions qui assurent l'unicité de ce propagateur. Nous utilisons deux méthodes différentes : la première basée sur la théorie quantique des champs nous fournit une représentation intégrale de Δ^1 ; la seconde analogue à [*8*] garantit la généralité des résultats.

L'univers de de Sitter peut être représenté par la quadrique H_4 d'équation

$$\eta_{ab}\xi^a\xi^b = - R^2 \qquad (a, b = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

dans l'espace de Minkowski à cinq dimensions M_5 rapporté à un système de coordonnées rectilignes orthogonales (ξ^a) ; le tenseur métrique est défini par

$$\eta_{00} = - \eta_{11} = - \eta_{22} = - \eta_{33} = - \eta_{44} = 1 , \qquad \eta_{ab} = 0 \quad \text{si} \quad a \neq b \tag{2}$$

et R est une constante réelle positive.

Géométriquement les géodésiques de l'espace sont les composantes connexes des intersections de H_4 avec les 2-plans de M_5 passant par l'origine. Par convention, (ξ) et $(- \xi)$ définissent le même point de l'univers de de Sitter [*12*] ; la variété ainsi obtenue par l'identification des points antipodaux de H_4 est géodésiquement complète et par tout couple de points $P(\xi)$ et $Q(\eta)$ passe une et une seule géodésique. La distance géodésique $s(P, Q)$ entre ces deux points est donnée par [*8*]

$$\operatorname{ch} \frac{s}{R} = | p | \tag{3}$$

où

$$p = - \eta_{ab}\xi^a\eta^b/R^2 . \tag{4}$$

La géodésique joignant P à Q est du type temps si $| p | > 1$, du type espace si $| p | < 1$ et du type lumière si $| p | = 1$.

Dans ce travail, nous utiliserons le système de coordonnées intrinsèques de H_4, lié à un observateur inertial, défini par

$$\xi^0 - \xi^4 = R^2\lambda^{-1} \qquad (\lambda > 0) \tag{5}$$

$$\xi^k = Rx^k\lambda^{-1} \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{6}$$

pour lequel le carré de l'élément de longueur s'écrit

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{R^2}{\lambda^2}(d\lambda^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2) \\ &= \frac{R^2}{\lambda^2}(d\lambda^2 - d\bar{x}^2) . \end{aligned} \tag{7}$$

Ce système de coordonnées recouvre toute la variété sauf la surface d'équation

$$(\xi^0)^2 - (\xi^4)^2 = 0 \tag{8}$$

frontière des événements perceptibles par l'observateur.

En désignant par $(\lambda, \bar{x})$ et $(\lambda', \bar{y})$ les coordonnées respectives des points P et Q, (4) devient

$$p = \frac{1}{2\lambda\lambda'}[\lambda^2 + \lambda'^2 - (\bar{x} - \bar{y})^2] = \frac{1}{2\lambda\lambda'}[\lambda^2 + \lambda'^2 - r^2]. \tag{9}$$

Le groupe d'isométries de H_4 est O(1,4) ; dans les coordonnées introduites en (5) et (6) ces isométries se divisent en

(*i*) translations : $\bar{x} \to \bar{x} + \bar{a}t$; $\lambda \to \lambda$ $\quad (\bar{a}^2 = 1)$ (10)

(*ii*) rotations : $\bar{x} \to \mathcal{R}\bar{x}$; $\lambda \to \lambda$ (11)

(*iii*) dilatation : $\bar{x} \to \alpha\bar{x}$; $\lambda \to \alpha\lambda$ (12)

(*iv*)

$$\bar{x} \to \frac{\bar{x} - \bar{a}\frac{t}{R}(\bar{x}^2 - \lambda^2)}{1 - 2\frac{t}{R}\bar{a}.\bar{x} + \frac{t^2}{R^2}(\bar{x}^2 - \lambda^2)} \quad (\bar{a}^2 = 1) \tag{13}$$

$$\lambda \to \frac{\lambda}{1 - 2\frac{t}{R}\bar{a}.\bar{x} + \frac{t^2}{R^2}(\bar{x}^2 - \lambda^2)}$$

La grandeur p est la seule fonction des deux points P et Q invariante pour tout le groupe.

Le propagateur $\Delta^1(x, y)$ du champ scalaire est une fonction réelle des deux points x et y, symétrique, invariante pour le groupe d'isométries de l'espace, solution de l'équation de Klein-Gordon

$$(\Box_x + m^2)\Delta^1(x, y) = 0 \tag{14}$$

et vérifiant la relation de convolution introduite par Lichnerowicz

$$\int_\Sigma d\Sigma_y[\Delta^1(x, y)\partial_n\Delta^1(x', y) - \Delta^1(x', y)\partial_n\Delta^1(x, y)] = \Delta(x, x') \tag{15}$$

où Σ est une hypersurface de genre espace, ∂_n la dérivée normale à cette surface, et $\Delta(x, x')$ est la différence des solutions élémentaires retardée et avancée [*3*] [*5*] [*8*].

En théorie quantique des champs, $i\Delta$ et Δ^1 représentent respectivement la valeur moyenne pour le vide du commutateur et de l'anticommutateur des deux champs scalaires Φ et Φ^+ :

$$i\Delta(x, y) = \langle 0 \,|\, [\Phi(x), \Phi^+(y)] \,|\, 0 \rangle \tag{16}$$

$$\Delta^1(x, y) = \langle 0 \,|\, \{ \Phi(x), \Phi^+(y) \} \,|\, 0 \rangle . \tag{17}$$

L'espace des solutions scalaires classiques de l'équation de K. G. est muni du « produit scalaire » usuel

$$(\varphi, \psi) = i \int_\Sigma d\Sigma_x[\varphi^*(x)\partial_n\psi(x) - \psi(x)\partial_n\varphi^*(x)], \tag{18}$$

indépendant du choix de Σ, ainsi que (15) ; par la suite, nous choisirons pour Σ l'hypersurface d'équation λ = constante.

A l'aide d'un ensemble complet orthonormé $\{ u_A(x), u_A^*(x) \}$ de solutions scalaires de l'équation de K. G., respectivement de fréquence positive et négative,

$$(\square + m^2)u_A(x) = 0\,, \qquad (\square + m^2)u_A^*(x) = 0 \tag{19}$$

$$(u_A, u_B) = \delta_{AB} \tag{20a}$$

$$(u_A^*, u_B^*) = -\,\delta_{AB} \tag{20b}$$

$$(u_A^*, u_B) = (u_A, u_B^*) = 0 \tag{20c}$$

et en utilisant les relations de commutation canoniques entre les amplitudes de création et d'annihilation

$$\begin{aligned} [a_A, a_B^+] &= [b_A, b_B^+] = \delta_{AB} \\ [a_A, a_B] &= [a_A^+, a_B^+] = [b_A, b_B] = [b_A^+, b_B^+] = 0 \\ [a_A, b_B] &= [a_A, b_B^+] = \dots = 0 \\ a_A|0\rangle &= 0, \qquad b_A|0\rangle = 0\,, \end{aligned} \tag{21}$$

le propagateur $\Delta^1(x, y)$ s'écrit formellement

$$\Delta^1(x, y) = S_A(u_A(x)u_A^*(y) + u_A^*(x)u_A(y))\,; \tag{22}$$

cette expression se déduit de (17) en y remplaçant les champs $\Phi(x)$ et $\Phi^+(y)$ par leurs développements

$$\Phi(x) = S_A(a_A u_A(x) + b_A^+ u_A^*(x)) \tag{23}$$

$$\Phi^+(y) = S_A(a_A^+ u_A^*(y) + b_A u_A(y))\,. \tag{24}$$

De la même façon, on déduit de (17)

$$\Delta(x, y) = -\,iS_A(u_A(x)u_A^*(y) - u_A^*(x)u_A(y)) \tag{25}$$

Grâce à la normalisation (20) la relation de convolution (15) est identiquement vérifiée lorsque Δ^1 et Δ sont remplacées par les expressions formelles (22) et (25).

La construction de Δ et Δ^1 se trouve ainsi ramenée à celle d'un système complet orthonormé de solutions à fréquences déterminées de l'équation de K. G.

En utilisant les coordonnées $(\lambda, \bar{x})$ définies en (5) et (6), on construit aisément un système complet orthonormé de solutions de l'équation de Klein-Gordon qui s'explicite sous la forme

$$\left[\frac{\lambda^2}{R^2}(\partial_\lambda^2 - \bar{\nabla}^2) - \frac{2\lambda}{R^2}\partial_\lambda + m^2\right]u_A(\lambda, \bar{x}) = 0 \tag{26}$$

Par la technique de séparation des variables, on obtient

$$u_A(\lambda, \bar{x}) \;\to\; u_{\bar{k}}(\lambda, \bar{x}) = (2\pi)^{-3/2}e^{i\bar{k}.\bar{x}}v_{\bar{k}}(\lambda) \tag{27}$$

où les $v_{\bar{k}}(\lambda)$ satisfont à l'équation

$$\left[\lambda^2 \frac{d^2}{d\lambda^2} - 2\lambda \frac{d}{d\lambda} + (\bar{k}^2\lambda^2 + m^2\mathrm{R}^2)\right] v_{\bar{k}}(\lambda) = 0 \tag{28}$$

La solution générale de (28) s'écrit au moyen de fonctions de Bessel [1, p. 358]

$$v_k(\lambda) = \lambda^{3/2}\left[c(\bar{k})\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda k) + d(\bar{k})\mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda k)\right] \tag{29}$$

où

$$\nu = i\mu, \qquad \mu = +\sqrt{m^2\mathrm{R}^2 - 9/4} \tag{30}$$

$$k = |\bar{k}| \tag{31}$$

et

$$\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda k) = e^{i\nu\pi/2}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(\lambda k) = \left[\mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda k)\right]^* . \tag{32}$$

La normalisation (20) impose entre les fonctions $c(\bar{k})$ et $d(\bar{k})$ les relations suivantes

$$|d(\bar{k})|^2 - |c(\bar{k})|^2 = \frac{\pi}{4\mathrm{R}^2} = |d(-\bar{k})|^2 - |c(-\bar{k})|^2 \tag{33}$$

$$c(\bar{k})d(-\bar{k}) - c(-\bar{k})d(\bar{k}) = 0 . \tag{34}$$

D'autres relations entre ces fonctions doivent encore être ajoutées afin d'assurer que les $u_{\bar{k}}(\lambda, \bar{x})$ définies par (27) et (29) soient des solutions de fréquence positive (voir p. 73).

En portant dans (22) et (25) les solutions obtenues ci-dessus, nous obtenons

$$\Delta^1(x, y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})}\mathscr{D}^{(1)}(\bar{k}, \lambda, \lambda') \tag{35}$$

$$\Delta(x, y) = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})}\mathscr{D}^{(-1)}(\bar{k}, \lambda, \lambda') \tag{36}$$

où nous avons défini, pour $\varepsilon = \pm 1$

$$\begin{aligned}\mathscr{D}^{(\varepsilon)}(k, \lambda, \lambda') = (\lambda\lambda')^{3/2}\{ &(|c(\bar{k})|^2 + \varepsilon|d(-\bar{k})|^2)\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda k)\mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda' k) \\ &+ (\varepsilon|c(-\bar{k})|^2 + |d(\bar{k})|^2)\mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda k)\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda' k) \\ &+ (c(\bar{k})d^*(\bar{k}) + \varepsilon c(-\bar{k})d^*(-\bar{k}))\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda k)\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda' k) \\ &+ (c^*(\bar{k})d(\bar{k}) + \varepsilon c^*(-\bar{k})d(-\bar{k}))\mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda k)\mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda' k)\}\end{aligned} \tag{37}$$

Les fonctions $(u_{\bar{k}}(\lambda, \bar{x}), u_{\bar{k}}^*(\lambda, \bar{x}))$ étant fonctions propres des opérateurs $-i\bar{\nabla}$, générateurs des translations (10, *i*), les expressions (35) et (36) sont automatiquement invariantes pour ce groupe.

Leur invariance pour le groupe de rotations (10, *ii*) impose aux fonctions c et d de ne dépendre que de $k = |\bar{k}|$, et l'invariance pour la dilatation (10, *iii*) impose à ces fonctions d'être homogènes de degré zéro, c'est-à-dire constantes. Les conditions de normalisation (33) et (34) se réduisent alors à

$$|d|^2 - |c|^2 = \frac{\pi}{4\mathrm{R}^2} \tag{38}$$

qui fixe $\Delta(x, y)$:

$$\Delta(x, y) = i\frac{(\lambda\lambda')^{3/2}}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})}(|d|^2 - |c|^2) \cdot (\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda k)\mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda' k) - \mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda k)\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda' k))$$

$$= i\frac{\pi}{4R^2}\frac{(\lambda\lambda')^{3/2}}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})} \cdot (\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda k)\mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda' k) - \mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda k)\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda' k)) . \quad (39)$$

On vérifie immédiatement sur (39)

$$\Delta(x, y)|_{\lambda=\lambda'} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\lambda^2}{R^2}\partial_\lambda\Delta(x, y)|_{\lambda=\lambda'} = -\frac{\lambda^4}{R^4}\delta^3(\bar{x} - \bar{y}) . \quad (41)$$

Le propagateur $\Delta^1(x, y)$ contient encore trois constantes réelles arbitraires

$$\Delta^1(x, y) = \frac{(\lambda\lambda')^{3/2}}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})}\{(|c|^2+|d|^2)[\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda k)\mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda' k)+\mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda k)\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda' k)]$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\,(cd^*).[\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda k)\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda' k) + \mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda k)\mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda' k)]$$
$$+ 2i\,\mathrm{Im}\,(cd^*).[\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda k)\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda' k) - \mathscr{H}_\nu^{(2)}(\lambda k)\mathscr{H}_\nu^{(1)}(\lambda' k)]\} \quad (42)$$

Le calcul explicite des différentes intégrales de (42) — au sens des distributions — est fait en appendice. Imposer à Δ^1 d'être une fonction revient à annuler la constante Re (cd^*) ; le signe de Im (cd^*) est alors arbitraire.

Nous obtenons ainsi, en terme de fonctions hypergéométriques,

$$\Delta^1(x, y) = \frac{1}{2\pi^2}\frac{\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)}{\cos\nu\pi}\mathrm{Re}\left\{(|c|^2 + |d|^2)\mathrm{F}\left(-\nu + \frac{3}{2}; \nu + \frac{3}{2}; 2; \frac{1+p}{2}\right)\right.$$
$$\left. - 2\,\mathrm{Im}\,(cd^*).\mathrm{F}\left(-\nu + \frac{3}{2}; \nu + \frac{3}{2}; 2; \frac{1-p}{2}\right)\right\} \quad (43)$$

Le cas particulier $\nu = \frac{3}{2}$ $(m = 0)$ est exclu de (43) ; les fonctions hypergéométriques se réduisent pour $\nu = \frac{3}{2}$ à la constante 1. Ce cas est traité entièrement dans [*8*].

L'expression (43) donne le propagateur Δ^1 comme la partie réelle d'une fonction analytique réelle dans le plan complexe de la variable p coupé le long de l'axe réel de $-\infty$ à -1 et de 1 à $+\infty$; en $p = \pm 1$, les hypergéométriques présentent un pôle d'ordre 1 et un point d'embranchement de type logarithmique. Ces singularités de Δ^1 en $p = 1$ sont les singularités de la théorie de Hadamard [*8*].

Le coefficient $(|c|^2 + |d|^2)$ est déterminé si on fixe la valeur du résidu en $p = 1$:

$$|c|^2 + |d|^2 = \rho^2 . \tag{44}$$

Alors (38) et (44) fixent Im (cd^*), au signe près, sauf dans le cas où ce coefficient est nul, c'est-à-dire lorsque

$$\rho^2 = \frac{\pi}{4R^2} \tag{45}$$

ce qui implique $c = 0$. La valeur (45), minimum des valeurs permises pour ρ^2, correspond à

$$\lim_{p \to 1} \left(\frac{p-1}{2}\right) \Delta^1(p) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{4R^2} \tag{46}$$

ou, exprimé en terme de la distance géodésique s introduite en (3),

$$\lim_{s^2 \to 0} s^2 \Delta^1(s) = -\frac{1}{2\pi^2} . \tag{47}$$

Ceci est la normalisation couramment admise en théorie quantique des champs dans l'espace-temps de Minkowski [*2*, p. 650].

Lorsque $c = 0$, Δ^1 ne contient pas d'autres singularités que celles de la « solution élémentaire » de Hadamard en $p = 1$. Inversement, éliminer les singularités autres que celles qui apparaissent en $p = 1$ impose $c = 0$ et en conséquence la valeur (45) du résidu.

Ces résultats nous amènent à compléter la définition des solutions à fréquence positive (27), (29) par la condition $c(\bar{k}) = 0$.

Le calcul de Δ^1 présenté dans [*8*] se fait par une méthode plus directe que celle que nous avons développée ici. Cette méthode est plus générale en ce sens qu'elle n'impose pas à Δ^1 de représenter la valeur moyenne pour le vide de l'anticommutateur de champs. Elle consiste à rechercher pour Δ^1 la fonction réelle de p, solution de l'équation de Klein-Gordon (14).

Cette équation se ramène alors à

$$\left[(p^2 - 1)\frac{d^2}{dp^2} + 4p\frac{d}{dp} + m^2R^2\right] f(p) = 0 \, ; \tag{48}$$

elle est de type hypergéométrique en variable $z = \dfrac{1-p}{2}$. La solution régulière en $z = 0$ $(p = 1)$ est [*8*]

$$R(p) = F\left(-\nu + \frac{3}{2}, \nu + \frac{3}{2} \, ; 2 \, ; \frac{1-p}{2}\right) . \tag{49}$$

En remarquant l'invariance de l'équation (48) pour la substitution

$$p \to -p$$

on peut écrire la solution générale de (48), pour $m \neq 0$, sous la forme

$$f(p) = a\mathrm{F}\left(-\nu+\frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}; 2; \frac{1-p}{2}\right) + b\mathrm{F}\left(-\nu+\frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}; 2; \frac{1+p}{2}\right) \quad (50)$$

où la fonction $\mathrm{F}\left(-\nu+\frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}; 2; \frac{1+p}{2}\right)$ possède en $p = 1$ un pôle d'ordre 1 et un point d'embranchement de type logarithmique. La solution (50) est une fonction analytique dans le plan p coupé le long de l'axe réel de $-\infty$ à -1 et de 1 à $+\infty$. Avec a et b réels, Δ^1 s'écrit

$$\Delta^1(p) = a \operatorname{Re} \mathrm{F}\left(-\nu+\frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}; 2; \frac{1-p}{2}\right) + b \operatorname{Re} \mathrm{F}\left(-\nu+\frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}; 2; \frac{1+p}{2}\right) \quad (51)$$

En utilisant les représentations intégrales des hypergéométriques données en appendice, afin de satisfaire la relation de convolution (15), on doit imposer la condition

$$b^2 - a^2 = \left[\frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{8\pi\mathrm{R}^2 \cos \nu\pi}\right]^2 > 0 \quad (52)$$

La relation (15) étant quadratique en Δ^1, elle laisse arbitraire le signe global du propagateur.

D'autre part, la donnée du résidu en $p = 1$ fixe la valeur de la constante b; le paramètre a est alors déterminé au signe près sauf lorsqu'il est nul, ce qui correspond à

$$b = \frac{1}{4\mathrm{R}^2} \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{2\pi \cos \nu\pi} \quad (53)$$

c'est-à-dire à la normalisation définie par (46) ou (47).

CONCLUSION

En conclusion, nous pouvons énoncer le *théorème* suivant : le propagateur $\Delta^1(x, y)$ du champ scalaire dans l'univers de de Sitter est univoquement déterminé par l'ensemble des conditions

(*i*) c'est une fonction réelle, invariante pour le groupe d'isométries O(1, 4),

(*ii*) solution de l'équation de Klein-Gordon (14),

(*iii*) vérifiant la condition de convolution (15), (*iv*) normalisée sur le conoïde caractéristique par

$$\lim_{p \to 1} \left(\frac{p-1}{2} \right) \Delta^1(p) = - \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{4R^2} .$$

La condition (*iv*) est équivalente à

(*v*) ne possède pas d'autres singularités que celles de la « solution élémentaire » de Hadamard.

Les autres choix de la valeur du résidu en $p = 1$ conduisent à l'indétermination du signe de la solution régulière en $p = 1$ et introduisent de nouvelles singularités en $p = -1$.

REMERCIEMENTS

Nous adressons de très vifs remerciements à M. le Professeur J. Géhéniau pour les conseils et les encouragements qu'il nous a prodigués dans l'élaboration de ce travail.

APPENDICE

Les intégrales qui apparaissent dans (39) et (42) se déduisent de la formule [9, p. 50].

$$\int_0^\infty dx \mathrm{K}_\nu(ax)\mathrm{K}_\nu(bx)\cos(cx) = \frac{\pi^2}{4\sqrt{ab}} \sec \nu\pi \mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}\right) \tag{A-1}$$

valable pour

$$|\operatorname{Re} \nu| < \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{Re}(a+b) > 0, \qquad c > 0.$$

La fonction $\mathrm{P}_\nu(z)$ est la fonction de Legendre, reliée à l'hypergéométrique par

$$\mathrm{P}_\nu(z) = \mathrm{F}\left(-\nu, \nu+1\,;1\,;\frac{1-z}{2}\right) \tag{A-2}$$

et les $\mathrm{K}_\nu(z)$ sont des fonctions de Hänkel d'argument imaginaire

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_\nu(z) &= i\frac{\pi}{2}e^{i\nu\pi/2}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(ze^{i\pi/2}) \\ &= -i\frac{\pi}{2}e^{-i\nu\pi/2}\mathrm{H}_\nu^{(2)}(ze^{-i\pi/2}) \end{aligned} \qquad -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2} \tag{A-3}$$

A l'aide des formules (A-1, 2, 3), on obtient, pour $\varepsilon > 0$ et $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et

$$p = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \tag{A-4}$$

$$\int_0^\infty dx \mathscr{H}_\nu^{(1)}[(a+i\varepsilon)x]\mathscr{H}_\nu^{(1)}[(b+i\varepsilon)x]\cos(cx) = \frac{-i}{\sqrt{ab}}\sec\nu\pi\mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}\left[p - i\varepsilon\frac{(a+b)}{ab}(p-1)\right] \tag{A-5}$$

$$\int_0^\infty dx \mathscr{H}_\nu^{(2)}[(a-i\varepsilon)x]\mathscr{H}_\nu^{(2)}[(b-i\varepsilon)x]\cos(cx) = \frac{i}{\sqrt{ab}}\sec\nu\pi\mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}\left[p + i\varepsilon\frac{(a+b)}{ab}(p-1)\right] \tag{A-6}$$

$$\int_0^\infty dx \mathscr{H}_\nu^{(1)}[(a+i\varepsilon)x]\mathscr{H}_\nu^{(2)}[(b-i\varepsilon)x]\cos(cx) = \frac{1}{\sqrt{ab}}\sec\nu\pi\mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(-p - i\varepsilon\frac{(a-b)}{ab}(p+1)\right) \tag{A-7}$$

Et en particulier,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty dx\,\{\mathscr{H}_\nu^{(1)}[(a+i\varepsilon)x]\mathscr{H}_\nu^{(1)}[(b+i\varepsilon)x] - \mathscr{H}_\nu^{(2)}[(a-i\varepsilon)x]\mathscr{H}_\nu^{(2)}[(b-i\varepsilon)x]\}\cos(cx) \\ &\qquad = -\frac{i}{\sqrt{ab}}\sec\nu\pi\,\{\mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}(p+io) + \mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}(p-io)\} \end{aligned} \tag{A-8}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty dx\,\{\mathscr{H}_\nu^{(1)}[(a+i\varepsilon)x]\mathscr{H}_\nu^{(1)}[(b+i\varepsilon)x] + \mathscr{H}_\nu^{(2)}[(a-i\varepsilon)x]\mathscr{H}_\nu^{(2)}[(b-i\varepsilon)x]\}\cos(cx) \\ &\qquad = -\frac{i}{\sqrt{ab}}\sec\nu\pi\varepsilon(p-1)\,\{\mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}(p-io) - \mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}(p+io)\} \end{aligned} \tag{A-9}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty dx\,\{\mathscr{H}_\nu^{(1)}[(a+i\varepsilon)x]\mathscr{H}_\nu^{(2)}[(b-i\varepsilon)x] + \mathscr{H}_\nu^{(2)}[(a-i\varepsilon)x]\mathscr{H}_\nu^{(1)}[(b+i\varepsilon)x]\}\cos(cx) \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{ab}}\sec\nu\pi\,\{\mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}(-p+io) + \mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}(-p-io)\} \end{aligned} \tag{A-10}$$

$$\int_0^x dx \{ \mathcal{H}_\nu^{(1)}[(a + i\varepsilon)x]\mathcal{H}_\nu^{(2)}[(b - i\varepsilon)x] - \mathcal{H}_\nu^{(2)}[(a - i\varepsilon)x]\mathcal{H}_\nu^{(1)}[(b + i\varepsilon)x] \} \cos (cx)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \sec \nu\pi\varepsilon((a - b)(p + 1)) \{ \mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}(- p - io) - \mathrm{P}_{\nu-\frac{1}{2}}(- p + io) \} \quad \text{(A-11)}$$

Les intégrales qui définissent Δ et Δ^1 s'obtiennent en dérivant par rapport au paramètre c les expressions (A-8) à (A-11). Après avoir dérivé, les résultats sont étendus à tout le domaine de définition de la variable ν (30) à l'exception de $\nu = 3/2$.

A l'aide de (A-2), (A-8) et (A-10), nous obtenons les représentations intégrales suivantes pour les hypergéométriques :

$$\mathrm{Re}\, \mathrm{F}\left(- \nu + \frac{3}{2}, \nu + \frac{3}{2} ; 2 ; \frac{1 + p}{2}\right)$$
$$= \frac{\cos \nu\pi}{\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)} (\lambda\lambda')^{3/2} \int_0^\infty dkk \frac{\sin kr}{r} \{ \mathcal{H}_\nu^{(1)}(\lambda k)\mathcal{H}_\nu^{(2)}(\lambda' k) + \mathcal{H}_\nu^{(2)}(\lambda k)\mathcal{H}_\nu^{(1)}(\lambda' k) \} \quad \text{(A-12)}$$

$$\mathrm{Re}\, \mathrm{F}\left(- \nu + \frac{3}{2}, \nu + \frac{3}{2} ; 2 ; \frac{1 - p}{2}\right)$$
$$= - i \frac{\cos \nu\pi}{\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)} (\lambda\lambda')^{3/2} \int_0^\infty dkk \frac{\sin kr}{r} \{ \mathcal{H}_\nu^{(1)}(\lambda k)\mathcal{H}_\nu^{(1)}(\lambda' k) - \mathcal{H}_\nu^{(2)}(\lambda k)\mathcal{H}_\nu^{(2)}(\lambda' k) \} \quad \text{(A-13)}$$

Donnons également la forme explicite de $\Delta(x, y)$

$$\Delta(x, y) = - \frac{1}{8\pi R^2} \frac{\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)}{\cos \nu\pi} \varepsilon(\lambda - \lambda')\, \mathrm{Im}\, \mathrm{F}\left(- \nu + \frac{3}{2}, \nu + \frac{3}{2} ; 2 ; \frac{1 + p}{2}\right). \quad \text{(A-14)}$$

Tandis que avec la normalisation (45),

$$\Delta^1(x, y) = \frac{1}{8\pi \mathrm{R}^2} \frac{\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)}{\cos \nu\pi} \mathrm{Re}\, \mathrm{F}\left(- \nu + \frac{3}{2}, \nu + \frac{3}{2} ; 2 ; \frac{1 + p}{2}\right). \quad \text{(A-15)}$$

Les formes (A-14) et (A-15) donnent par exemple, pour le propagateur $\Delta_{\mathrm{F}}(x, y)$ au sens de Feynman,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta_{\mathrm{F}}(x, y) &= \langle 0 | \mathrm{T}\Phi(x)\Phi^+(y) | 0 \rangle \\
&= \theta(\lambda - \lambda') \langle 0 | \Phi(x)\Phi^+(y) | 0 \rangle + \theta(\lambda' - \lambda) \langle 0 | \Phi^+(y)\Phi(x) | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{2}(\Delta^1(x, y) + i\varepsilon(\lambda - \lambda')\Delta(x, y)) \\
&= \frac{1}{16\pi \mathrm{R}^2} \frac{\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)}{\cos \nu\pi} \mathrm{F}\left(- \nu + \frac{3}{2}, \nu + \frac{3}{2} ; 2 ; \frac{1 + p - io}{2}\right) \quad \text{(A-16)}
\end{aligned}$$

RÉFÉRENCES

[1] M. ABRAMOWITZ and I. STEGUN, *Handbook of Mathematical functions*. Dover Publ., New York.

[2] N. N. BOGOLIUBOV and D. SHIRKOV, *Introduction to the theory of quantized fields*. Interscience Publ.

[3] G. BORNER and H. P. DURR, Classical and quantum fields in de Sitter space. *Nuovo Cimento*, t. **64A**, 1969, p. 669-713.
[4] M. CASTAGNINO, Thèse, Paris.
[5] M. CHEVALIER, Opérateurs de création et d'annihilation sur un espace-temps stationnaire. *J. de math. pures et appliquées*, t. **53**, 1974, p. 223-250.
[6] N. A. CHERNIKOV and E. A. TAGIROV, Quantum theory of scalar field in de Sitter space-time. *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **9A**, 1968, p. 109-141.
[7] E. COMBET, Solutions élémentaires des dalembertiens généralisés. *Mem. des Sc. math.*, fasc. **160**. Gauthier-Villars, Paris, 1965.
[8] J. GEHENIAU et Ch. SCHOMBLOND, Fonctions de Green dans l'univers de de Sitter. *Acad. R. de Belgique, Bull. Cl. des Sciences*, t. **54**, 1968, p. 1147-1157.
[9] A. ERDELYI, *Tables of integral transforms*. Vol. 1.
[10] A. LICHNEROWICZ, *Propagateurs et quantification en relativité générale*, in Conférence internationale sur les théories de la gravitation, Warszawa, 1962.
[11] G. RIDEAU, Sur une définition intrinsèque de la distribution Δ^1. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **260**, 1965, p. 2719-2721.
[12] E. SCHRÖDINGER, *Expanding universes*. Cambridge Univ. Press, 1956.

(Manuscrit reçu le 8 octobre 1975)