ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

GÉRARD A. MAUGIN

Conditions de compatibilité pour une hypersurface singulière en mécanique relativiste des milieux continus

Annales de l'I. H. P., section A, tome 24, nº 3 (1976), p. 213-241
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1976__24_3_213_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXIV, n° 3, 1976, p. 213-241.

Section A :
Physique théorique.

Conditions de compatibilité pour une hypersurface singulière en mécanique relativiste des milieux continus

par

Gérard A. MAUGIN
Université de Paris (VI).
Laboratoire de Mécanique Théorique associé au C. N. R. S.,
Tour 66, 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Dans ce travail, les conditions de compatibilité pour les discontinuités des champs relativistes et leurs dérivées spatio-temporelles et de genre temps, jusqu'au deuxième ordre inclus, sont construites systématiquement en termes de la géométrie locale du front d'onde (hypersurface singulière). Une nouvelle dérivée de genre temps qui généralise au cadre relativiste la dérivée-δ de la mécanique classique (Thomas) est ainsi introduite. Elle fournit une forme condensée de ces expressions. On espère ainsi avoir construit l'équivalent relativiste de la théorie classique de T. Y. Thomas (1957).

ABSTRACT. — In this work the compatibility conditions verified by the discontinuities of relativistic fields and of their space-time and time-like derivatives up to the second order are systematically constructed in terms of the local geometry of the wave front (singular hypersurface). A new time-like derivative that generalizes Thomas' δ-derivative of classical continuum mechanics is thus introduced in the relativistic frame. It allows to formulate these conditions in compact forms. It is thus expected that the relativistic analogue of T. Y. Thomas' (1957) classical theory is produced.

1. INTRODUCTION

Ce travail a pour objet la construction des *conditions de compatibilité*, en suivant les travaux originaux d'Hadamard [*1*] et de Thomas [*2*], pour les discontinuités de différents champs physiques, autres que la gravitation [1], dans le cadre de l'espace-temps de la relativité restreinte ou générale. De nombreux travaux ont été consacrés à ce sujet en mécanique classique (Voir, par exemple, la synthèse de Truesdell et Toupin [*3*], Coleman *et al.* [*4*], Maugin [*5*]). Des études déjà approfondies ont été consacrées à ce problème en relativité par de multiples auteurs (par exemple, Thomas [*6*] [*7*], Lichnerowicz [*8*]), et les formules les plus élémentaires — équations $(4.5)_2$ et $(4.8)_1$ dans le présent travail — ont été utilisées par, entre autres, Rayner [*9*], Bressan [*10*], Grot [*11*], Carter [*12*] et Lichnerowicz et ses élèves (en employant des tenseurs-distributions ; cf. Annexe). Cependant, l'apparition de modèles assez complexes en mécanique relativiste des milieux continus — MHD, milieux déformables non linéaires, milieux hypoélastiques, milieux électromagnétiques à spin — et l'emploi de lois de comportement plus élaborées telles que la loi de comportement de conduction de chaleur présentant un phénomène de relaxation, conduisent, si l'on veut étudier la propagation des fronts d'onde (d'après la définition donnée par Hadamard), à la construction de conditions de compatibilité du premier, mais aussi, du second ordre (portant sur les dérivées secondes des champs dont on étudie les discontinuités). De plus, si l'on désire mener à bien l'étude de la variation d'amplitude d'une discontinuité le long de son rayon (ou bi-caractéristique) et la transition d'une onde faible à une onde forte, il faut nécessairement utiliser les conditions de compatibilité du second ordre. Pour des milieux continus relativistes relativement complexes, on est alors conduit à une théorie *non linéaire* de la propagation des fronts d'onde [2]. L'intégration complète [3] de « l'équation de transport » de la discontinuité requiert la considération de la géométrie locale du front d'onde. C'est pourquoi, en contraste avec la méthode basée sur la théorie des distributions (Voir l'Annexe) employée par M. A. Lichnerowicz, nous basons notre présentation sur l'emploi de cette géométrie locale dont Taub a rappelé quelques propriétés [*14*].

Après un rappel des notations nécessaires au chapitre 2, nous définissons en 3 la géométrie d'un front d'onde qui se propage dans l'espace-temps.

---

(1) Pour les études concernant les discontinuités du champ gravitationnel, on se reportera aux travaux cités à l'annexe.

(2) En mécanique classique des milieux continus, voir l'article (très pédagogique) de Varley et Cumberbatch [*13*].

(3) M. A Lichnerowicz démontre que, dans des cas suffisamment simples (hydrodynamique et MHD relativistes ; Cf. Références [*8*] et [*17*]), la discontinuité du champ A se propage selon le rayon associé ; c'est-à-dire, si D_R indique la dérivée invariante selon ce rayon, on a

$$D_R[\![A]\!] = 0 \quad \text{(modulo un terme linéaire en } [\![A]\!]) \tag{a}$$

Dans des cas plus complexes, on serait conduit à un second membre d'un ordre plus élevé en $[\![A]\!]$, par exemple, quadratique.

La présentation semble nouvelle qui fait appel aux notions de dérivée covariante tangentielle, d'une dérivée invariante selon un 3-vecteur sur le front d'onde et d'une dérivée — appelée dérivée-$\mathscr{D}$ — qui généralise au cadre relativiste la notion de dérivée-δ que Thomas [*2*] avait introduite en mécanique classique des milieux continus. Au chapitre 3, toutes les dérivées, jusqu'au second ordre inclus, spatio-temporelles et de genre temps (dérivée selon une ligne de courant, dérivée convective), sont ainsi construites en fonction de dérivées intrinsèques sur le front d'onde. L'emploi de la dérivée-$\mathscr{D}$ fournit une forme élégante et condensée (Cf. équations 3.4, 3.18) des équations impliquant des dérivées temporelles. Les conditions de compatibilité correspondantes pour les discontinuités sont établies au chapitre 4 dans des conditions de continuité telles pour les fonctions, qu'avec l'emploi de coordonnées curvilignes, la plupart d'entre elles restent valables en relativité générale (chap. 5). Une comparaison avec les résultats partiels que M. Lichnerowicz a obtenus élégamment à l'aide de la théorie des tenseurs-distributions est brièvement faite en Annexe. On espère ainsi avoir construit l'analogue relativiste de la théorie développée par Thomas [*2*] en mécanique classique. Bien que le présent travail constitue une étude en soi, des applications (en particulier à l'étude de la propagation des fronts d'onde dans les milieux relativistes à spin dont nous avons donné ailleurs les équations du champ et les lois de comportement [*15*] [*16*] et qui requiert l'utilisation de toutes les équations ici obtenues) seront données dans une publication ultérieure.

2. PROPAGATION D'UNE HYPERSURFACE DANS V^4

2.1. Espace-temps et mouvement

Dans une carte locale curviligne $\{ x^\alpha, \alpha = 1, 2, 3, 4$ (x^4 de genre temps) $\}$, la métrique $g_{\alpha\beta}(x)$ de l'espace-temps $V^4(M^4)$ est considérée de classe C^∞, symétrique et hyperbolique normale, soit de signature lorentzienne $+2$ $(+, +, +, -)$. On considère l'espace-temps de Minkowski $V^4 = M^4$ tel que la courbure $R^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta}$ s'annule en tout point événement $\boldsymbol{x}$. La dérivée covariante sera notée ∇ et la dérivée partielle par une virgule. Les indices grecs prennent les valeurs 1, 2, 3 et 4, et tous les indices latins, minuscules ou majuscules, les valeurs 1, 2 et 3. Le carré de l'élément de distance de M^4 s'écrit dans la carte $\{ x^\alpha \}$:

$$(dS)^2 = g_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})dx^\alpha dx^\beta . \tag{2.1}$$

Dans un *repère d'inertie* $x^\alpha \overset{*}{=} (x^k, ct)$, $k = 1, 2, 3$ — c = vitesse de la lumière dans le vide, t = temps — (2.1) prend la forme

$$(dS)^2 \overset{*}{=} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{2.2}$$

où

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(+1, +1, +1, -1)\,. \tag{2.3}$$

Le mouvement *direct* [4] d'une « particule » (X^K) du milieu continu relativiste, de coordonnées de Lagrange X^K, $K = 1, 2, 3$, le long de sa ligne d'univers $\mathscr{C}(X^K)$ dans M^4 est entièrement décrit par le difféomorphisme $\boldsymbol{\mathscr{X}}$: $\mathscr{E} = I \times B \to M^4$ de classe C^k ($k \geqq 2$) sur un ouvert $\boldsymbol{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{E}$ (I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$; B est un ouvert de $\mathbb{E}^3 \equiv \mathbb{R}^3$) [5] :

$$\boxed{x^\alpha = \mathscr{X}^\alpha(X^K, s)} \tag{2.4}$$

où s est le *temps propre* de (X^K). La 4-vitesse d'univers de (X^K) est telle que

$$u^\alpha = \dot{x}^\alpha = \frac{\delta x^\alpha}{\delta s} = \left.\frac{\partial \mathscr{X}^\alpha}{\partial s}\right|_{X^K}, \qquad g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta + c^2 = 0 \tag{2.5}$$

avec

$$\frac{\delta A}{\delta s} = \dot{A} = D_u A = u^\alpha \nabla_\alpha A, \qquad \forall A\,. \tag{2.6}$$

Dans un *repère de Lorentz*, u^α s'écrit

$$u^\alpha \stackrel{*}{=} \left[\frac{v^k}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \frac{ic}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right], \qquad \beta = \left|\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right| \tag{2.7}$$

où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse tridimensionnelle habituelle.

Plus généralement que (2.6), on définit la *dérivée invariante* dans la direction d'un 4-vecteur contravariant V^α d'une fonction $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ à valeurs tensorielles sur M^4 par

$$(D_V \mathbf{A})(\boldsymbol{x}) \equiv V^\alpha \nabla_\alpha \mathbf{A}(\boldsymbol{x})\,. \tag{2.8}$$

On note aussi que la dérivée de Lie d'une telle fonction $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ par rapport au champ de 4-vecteur u^α s'écrit (Cf. Schouten [*19*], p. 106) :

$$\left\{\begin{aligned} \underset{u}{\pounds} A_\alpha &\equiv \frac{\delta A_\alpha}{\delta s} + A_\lambda \nabla_\alpha u^\lambda\,, \\ \underset{u}{\pounds} A^\alpha &\equiv \frac{\delta A^\alpha}{\delta s} - D_A u^\alpha\,, \end{aligned}\right. \tag{2.9}$$

suivant que $\mathbf{A}$ est un 4-vecteur covariant ou contravariant.

---

[4] (2.4) est supposé invertible avec X^K et s variables indépendantes de sorte que le mouvement *inverse* est décrit par

$$X^K = \mathscr{X}^K(x^\alpha)\,.$$

[5] Voir la justification d'une telle représentation paramétrique, par exemple, dans Taub [*18*], p. 185-188.

En un point $\mathbf{Q} \in \mathscr{C}(X^K)$, l'*opérateur de projection* $P^{\alpha\beta}(\mathbf{Q})$ sur $M_\perp^3(\mathbf{Q})$, l'espace vectoriel tangent tri-dimensionnel orthogonal à $\mathscr{C}(X^K$, est défini par

$$(2.10)\quad \left\{\begin{array}{l} P^{\alpha\beta}(\mathbf{Q}) \equiv g^{\alpha\beta}(\mathbf{Q}) + c^{-2}u^\alpha(\mathbf{Q})u^\beta(\mathbf{Q}) = P^{\beta\alpha}(\mathbf{Q}) \\ P^{\alpha\beta}(\mathbf{Q})u_\beta(\mathbf{Q}) = 0, \qquad P^{\alpha}_{.\beta}P^{\beta}_{.\gamma} = P^{\alpha}_{.\gamma}, \qquad P^{\alpha}_{.\alpha} = 3, \end{array}\right.$$

où $g^{\alpha\beta}$ est la réciproque de $g_{\alpha\beta}$. $P_{\alpha\beta}(\mathbf{Q})$ n'est autre que la métrique locale de $M_\perp^3(\mathbf{Q})$ écrite sous forme covariante dans M^4. Soit $A^{\alpha\beta\ldots\mu}(\mathbf{Q})$ un champ tensoriel d'ordre n. Sa projection sur $M_\perp^3(\mathbf{Q})$ est fournie par

$$(2.11)\qquad (A^{\alpha\beta\ldots\rho})_\perp(\mathbf{Q}) = P^{\alpha}_{.\lambda}(\mathbf{Q})P^{\beta}_{.\mu}(\mathbf{Q}) \ldots P^{\rho}_{.\nu}(\mathbf{Q})A^{\lambda\mu\ldots\nu}(\mathbf{Q}).$$

Si ce champ vérifie la condition d'orthogonalité

$$(2.12)\qquad (A^{\alpha\beta\ldots\rho})_\perp(\mathbf{Q}) = A^{\alpha\beta\ldots\rho}(\mathbf{Q}),$$

il est dit *complètement P. U.* (Cf. Maugin [*20*]). En particulier, si A_α est P. U., alors on vérifie que $\underset{u}{\pounds}A_\alpha$ est aussi P. U., soit :

$$(2.12)_b\qquad A_\alpha u^\alpha = 0 \Rightarrow u^\alpha \underset{u}{\pounds}A_\alpha = 0, \qquad (\underset{u}{\pounds}A_\alpha)_\perp \equiv \underset{u}{\pounds}A_\alpha\,;$$

mais si A^α est P. U., on n'a pas $u_\alpha \underset{u}{\pounds}A^\alpha = 0$ car l'élévation et l'abaissement des indices ne commutent pas avec la dérivée de Lie (cf. équation 2.9). On note que la 4-accélération $\dfrac{\delta u_\alpha}{\delta s}$ est P. U. et que $P^{\alpha\beta}$ est P. U. et idempotent.

Enfin, la « dérivée covariante projetée » $\overset{*}{\nabla}_\alpha$ en $\mathbf{Q} \in \mathscr{C}(X^K)$ est définie par (cf. Maugin [*21*], aussi Cattaneo [*34*]) :

$$(2.12)_c\qquad \overset{*}{\nabla}_\alpha \equiv P_{\alpha}^{\cdot\beta}(\mathbf{Q})\nabla_\beta = \nabla_\alpha + c^{-2}u_\alpha(\mathbf{Q})\frac{\delta}{\delta s}, \qquad u^\alpha\overset{*}{\nabla}_\alpha \Rightarrow 0.$$

Elle n'est autre que la *dérivée tangentielle* sur $M_\perp^3(\mathbf{Q})$, la dérivée $\dfrac{\delta}{\delta s}$ étant la dérivée normale à $M_\perp^3(\mathbf{Q})$ à une constante près.

2.2. **Hypersurface Σ dans V^4**

A. DÉFINITION ET VITESSE DE PROPAGATION

Une hypersurface tridimensionnelle *régulière* $\mathscr{S}$ plongée dans V^4 est une région de V^4 définie localement par les équations paramétriques de Gauss (Cf. Thomas [*22*]) :

$$(2.13)\qquad \boxed{x^\alpha = \phi^\alpha(a^j), \qquad j = 1, 2, 3,}$$

où les trois paramètres a^j sont tels que la matrice $3X4\left(\dfrac{\partial\phi^\alpha}{\partial a^j}\right)$ est de rang trois en tout point de $\mathscr{S}$. Il s'ensuit que, dans un voisinage de tout point de $\mathscr{S}$ (désormais appelée Σ), il existe une fonction $\Sigma(x^\alpha)$ de classe C^2 sur son domaine telle que les points de Σ satisfassent à l'équation [6] :

$$\Sigma(x^\alpha) = 0\,. \tag{2.14}$$

En tout point de Σ on peut définir un vecteur normal proportionnel à $\Sigma_{,\alpha}$. Nous nous limitons au cas où Σ est une hypersurface de *genre temps* (normale de genre espace), c'est-à-dire, telle qu'en tout point de Σ [7]

$$g^{\alpha\beta}\Sigma_{,\alpha}\Sigma_{,\beta} > 0\,. \tag{2.15}$$

Cette condition signifie que Σ représente une hypersurface qui se propage à une vitesse inférieure à celle de la lumière, et que sa normale spatiale ne s'annule en aucun point de Σ. Normalisant à l'unité le vecteur normal à Σ, on définit

$$\mathrm{N}_\alpha = \frac{\Sigma_{,\alpha}}{(g^{\alpha\beta}\Sigma_{,\alpha}\Sigma_{,\beta})^{1/2}}\,, \qquad g^{\alpha\beta}\mathrm{N}_\alpha\mathrm{N}_\beta = 1\,. \tag{2.16}$$

Dans un repère de Lorentz, la normale spatiale unitaire v_k et la vitesse G_0 de la surface Σ par rapport à ce repère sont données par

$$v_k = \frac{\Sigma_{,k}}{(\eta^{\alpha\beta}\Sigma_{,\alpha}\Sigma_{,\beta})^{1/2}}\,, \qquad \delta^{km}v_kv_m = 1\,, \tag{2.17}$$

$$\mathrm{G}_0 = \frac{-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\Sigma}{\partial t}}{(\eta^{\alpha\beta}\Sigma_{,\alpha}\Sigma_{,\beta})^{1/2}}\,. \tag{2.18}$$

L'inégalité (2.15) est évidemment équivalente à la condition

$$\mathrm{G}_0^2 < c^2\,. \tag{2.19}$$

En termes de v_k et G_0, les composantes spatiales et temporelle de N_α sont, dans un repère (2.2)-(2.3) (Cf. Grot [*11*]) :

$$\mathrm{N}_k = v_k\left(1 - \frac{\mathrm{G}_0^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \qquad \mathrm{N}_4 = -\frac{\mathrm{G}_0}{c}\left(1 - \frac{\mathrm{G}_0^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{2.20}$$

Plus généralement, on peut définir des projections de $\mathrm{N}_\alpha(\mathbf{Q} \in \Sigma)$ sur $\mathrm{M}_\perp^3(\mathbf{Q})$ et le long de u^α à l'aide de (2.10)-(2.11). Soit,

$$\mathrm{N}_\alpha = \overset{*}{\mathrm{N}}_\alpha + \mathrm{N}_0\frac{u_\alpha}{c}\,, \tag{2.21}$$

avec

$$\overset{*}{\mathrm{N}}_\alpha \equiv \mathrm{P}_\alpha^{\cdot\beta}\mathrm{N}_\beta, \qquad \overset{*}{\mathrm{N}}_\alpha u^\alpha = 0, \qquad \mathrm{N}_0 \equiv -\frac{1}{c}\mathrm{N}_\alpha u^\alpha\,. \tag{2.22}$$

---

[6] Réciproquement, le théorème des fonctions implicites permet de passer de (2.14) à (2.13).

[7] Il s'ensuit que l'un des a^j est homogène à une coordonnée temporelle.

Alors $(2.16)_2$ implique

$$g^{\alpha\beta}\overset{*}{N}_\alpha\overset{*}{N}_\beta = P^{\alpha\beta}N_\alpha N_\beta = 1 + N_0^2 . \tag{2.23}$$

La normalisation de $\overset{*}{N}_\alpha$ à l'unité fournit le 4-vecteur P. U. $\overset{*}{v}_\alpha$ tel que

$$\overset{*}{v}_\alpha = \overset{*}{N}_\alpha(P^{\mu\gamma}N_\mu N_\gamma)^{-1/2} = \overset{*}{N}_\alpha(1 + N_0^2)^{-1/2}, \qquad P^{\alpha\beta}\overset{*}{v}_\alpha\overset{*}{v}_\beta = 1 . \tag{2.24}$$

D'une manière identique à (2.10), on peut introduire l'opérateur de projection $P^{\alpha\beta}_{(\Sigma)}$ sur Σ, ce qui permet de définir les composantes normales et tangentielles de tout 4-vecteur sur Σ. On a [8]

$$P^{\alpha\beta}_{(\Sigma)} \stackrel{\text{déf}}{=} g^{\alpha\beta} - N^\alpha N^\beta = P^{\beta\alpha}_{(\Sigma)} , \tag{2.25}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{c} N^\alpha = g^{\alpha\beta}N_\beta , \\ P^{\alpha\beta}_{(\Sigma)}N_\beta = 0, \qquad P^{\alpha}_{(\Sigma).\alpha} = 3, \qquad P^{\alpha\beta}_{(\Sigma)}P_{(\Sigma)\beta\gamma} = P^{\alpha}_{(\Sigma).\gamma} . \end{array} \right. \tag{2.26}$$

Par exemple, les composantes normales et tangentielles de la 4-vitesse u^α en un point événement $\mathbf{Q} = \mathscr{C}(X^K) \cap \Sigma$ sur Σ sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} u^\alpha = u^\alpha_\perp + u^\alpha_{//} = uN^\alpha + v^\alpha , \\ u^\alpha_{//} \equiv v^\alpha = P^\alpha_{(\Sigma)\beta}u^\beta, \qquad v^\alpha N_\alpha = 0 , \\ u^\alpha_\perp = u^\alpha - v^\alpha = uN^\alpha, \qquad u \equiv N_\beta u^\alpha = - cN_0 . \end{array} \right. \tag{2.27}$$

Contractant (2.25) avec $u_\alpha u_\beta$ et utilisant $(2.22)_3$, on a

$$1 + N_0^2 = - c^{-2}P^{\alpha\beta}_{(\Sigma)}u_\alpha u_\beta = \overset{*}{N}_\alpha\overset{*}{N}^\alpha ; \tag{2.28}$$

ce qui montre que

$$P^{\alpha\beta}_{(\Sigma)}u_\alpha u_\beta < 0 . \tag{2.29}$$

Un paramètre sans dimension utile pour l'étude de la propagation des fronts d'onde a été considéré par M. Lichnerowicz ([*8*], p. 104). Nous définissons ce paramètre par

$$Y^\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{u}_\perp^2}{\boldsymbol{u}_{//}^2} = \frac{g_{\alpha\beta}u^\alpha_\perp u^\beta_\perp}{g_{\alpha\beta}u^\alpha_{//}u^\beta_{//}} . \tag{2.30}$$

En accord avec (2.26)-(2.28), on a

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}u^\alpha_\perp u^\beta_\perp &= g_{\alpha\beta}N^\alpha N^\beta u^2 = c^2N_0^2 \\ g_{\alpha\beta}u^\alpha_{//}u^\beta_{//} &= g_{\alpha\beta}P^{\alpha\gamma}_{(\Sigma)}P^{\beta\delta}_{(\Sigma)}u_\gamma u_\delta = \boldsymbol{u}^2 - \boldsymbol{u}_\perp^2 \\ &= P^{\alpha\beta}_{(\Sigma)}u_\alpha u_\beta = - c^2(1 + N_0^2) . \end{aligned} \tag{2.31}$$

(8) Le signe moins dans la définition (2.25) provient du caractère spatial de N^α (comparer avec $(2.10)_1$).

D'où

$$\boxed{Y^{\Sigma} = \frac{-N_0^2}{1 + N_0^2} \leqq 0 .} \tag{2.32}$$

Ce paramètre (9) caractérise la propagation de l'hypersurface Σ par rapport à la matière, c'est-à-dire, par rapport à la direction temporelle u^{α}. La vitesse « invariante » G de Σ, mesurée dans le repère au repos instantané du milieu continu est alors donnée par :

$$\boxed{G \equiv c\sqrt{-Y^{\Sigma}} = \frac{cN_0}{(1 + N_0^2)^{1/2}} .} \tag{2.33}$$

B. Géométrie locale de Σ (10)

B.1. *Première forme fondamentale*

L'élément de distance ds de Σ induit par V^4 est donné par

$$ds^2 = \gamma_{ij} da^i da^j , \tag{2.34}$$

où la *première forme fondamentale* de Σ s'écrit dans la carte $\{ a^j \}$ avec (2.13) :

$$\boxed{\gamma_{ij} \equiv g_{\alpha\beta} \phi^{\alpha}_{.|i} \phi^{\beta}_{.|j} = \gamma_{ji}} \tag{2.35}$$

où la dérivation covariante dans $\{ a^j \}$ est notée par une barre verticale. Les trois 4-vecteurs $\phi^{\alpha}_{.|i}$ ($i = 1, 2, 3$) sont tangents à l'hypersurface Σ donc orthogonaux à N_{α}, soit

$$N_{\alpha} \phi^{\alpha}_{.|i} = 0, \qquad i = 1, 2, 3 . \tag{2.36}$$

Si l'on définit la réciproque γ^{ij} de γ_{ij} par

$$\gamma^{ij} \gamma_{jk} = \delta^i_k \tag{2.37}$$

où δ^i_k est le symbole tridimensionnel de Kronecker, on a alors

$$g^{\alpha\beta} = N^{\alpha} N^{\beta} + \gamma^{ij} \phi^{\alpha}_{.|i} \phi^{\beta}_{.|j} , \tag{2.38}$$

---

(9) D'une manière équivalente, la définition (2.30) peut s'écrire

$$Y^{\Sigma} = \frac{-(N^{\lambda} u_{\lambda})^2}{(N^{\alpha} u_{\alpha})^2 + N^{\alpha} N_{\alpha}} = \frac{-(N^{\lambda} u_{\lambda})^2}{c^2 P^{\alpha\beta} N_{\alpha} N_{\beta}} ,$$

ce qui est la définition de M. Lichnerowicz à la signature de la métrique près.

(10) Pour la géométrie locale d'une variété V^{n-1} plongée dans un V^n euclidien, on consultera le traité classique d'Eisenhart [*23*].

soit avec (2.25)

$$\boxed{P^{\alpha\beta}_{(\Sigma)} \equiv g^{\alpha\beta} - N^\alpha N^\beta = \gamma^{ij}\phi^{\alpha}_{\cdot|i}\phi^{\beta}_{\cdot|j}\,.} \tag{2.39}$$

$P^{\alpha\beta}_{(\Sigma)}$ représente donc bien la métrique de Σ en formalisme covariant dans V^4 (de la même manière que $P^{\alpha\beta}(Q)$ représente la métrique de $M^3_\perp(Q)$). Avec $(2.26)_1$, on a donc

$$g_{\alpha\beta}N^\alpha N^\beta = 1\,, \tag{2.40}$$

$$g_{\alpha\beta}\phi^{\alpha}_{\cdot|i}N^\beta = 0\,. \tag{2.41}$$

Comme N_α est un gradient, on a, par dérivation extérieure,

$$\nabla_\beta N_\alpha - \nabla_\alpha N_\beta = 0\,. \tag{2.42}$$

Par ailleurs, en prenant la dérivée covariante de (2.40), il vient

$$N^\alpha \nabla_\beta N_\alpha = 0\,. \tag{2.43}$$

De (2.42) et (2.43), on tire le résultat suivant :

LEMME 2.1.

$$\boxed{D_N N_\alpha \equiv N^\beta \nabla_\beta N_\alpha = 0} \tag{2.44}$$

où l'on a utilisé la notation (2.8).

B.2. *Seconde forme fondamentale*

La seconde forme fondamentale de Σ est, par définition,

$$\boxed{b_{ij} = -\,\phi^{\mu}_{\cdot|i}\phi^{\nu}_{\cdot|j}\nabla_\nu N_\mu = b_{ji}\,.} \tag{2.45}$$

La symétrie résulte de (2.42). On peut donner une autre forme à b_{ij}. En prenant la dérivée covariante par rapport à la carte $\{ a^j \}$ sur Σ de (2.36) ou (2.41), on a ([11])

$$N_{\mu|j}\phi^{\mu}_{\cdot|i} + N_\mu \phi^{\mu}_{\cdot|ij} = (\nabla_\nu N_\mu)\phi^{\nu}_{\cdot|j}\phi^{\mu}_{\cdot|i} + N_\mu\phi^{\mu}_{\cdot|ij} = 0\,, \tag{2.46}$$

soit

$$\boxed{b_{ij} = \phi^{\mu}_{\cdot|ij}N_\mu = \phi^{\mu}_{\cdot|ji}N_\mu\,,} \tag{2.47}$$

([11]) On a

$$\phi^{\mu}{}_{|ij} \equiv \phi^{\mu}_{;i|j} = \frac{\partial^2\phi^\mu}{\partial a^i \partial a^j} - \left\{ {}_{i}{}^{k}{}_{j} \right\} \frac{\partial \phi^\mu}{\partial a^k}$$

où $\{ {}_{i}{}^{k}{}_{j} \}$ est le symbole de Christoffel de deuxième espèce basé sur γ_{ij}.

la dernière relation provenant de la symétrie de b_{ij}. Compte tenu de (2.39), (2.45) et (2.43), on a

$$b_{ij}\gamma^{ij} = -(\nabla_\nu N_\mu)P^{\mu\nu}_{(\Sigma)} = -g^{\mu\nu}\nabla_\nu N_\mu = -\nabla_\mu N^\mu . \tag{2.48}$$

La *courbure moyenne* de Σ est alors classiquement définie par

$$\boxed{\Omega \equiv \frac{1}{2} b_{ij}\gamma^{ij} = -\frac{1}{2}\nabla_\mu N^\mu .} \tag{2.49}$$

On notera finalement l'*équation de Gauss* sur Σ :

$$\boxed{\phi^{\mu}_{\cdot|ij} = b_{ij}N^\mu .} \tag{2.50}$$

Remarque. — Dans (2.46), on a utilisé le fait suivant. Soit $f(x)$ un champ à valeurs tensorielles sur V^4. En un point **Q** de Σ, on a, avec (2.13)

$$f(x^\alpha) = f(\phi^\alpha(a^j)) = \hat{f}(a^j) \tag{2.51}$$

d'où l'introduction de la dérivée covariante par rapport à $\{ a^j \}$. En particulier, soit Φ^j un champ de vecteur contravariant sur Σ ; alors, d'une manière identique à (2.8), on introduit la *dérivée invariante* dans la direction de Φ^j sur Σ d'un champ $f(x)$ par

$$\boxed{d_\Phi f \equiv \hat{f}_{|j}\Phi^j .} \tag{2.52}$$

Dans la suite, le « $\hat{}$ » sera entendu là où il n'y a pas ambiguïté.

B.3. *Dérivations sur* Σ

On s'intéresse aux champs $f(x)$ définis le long d'une ligne d'univers représentant le mouvement (2.4) et, plus particulièrement, à la valeur des dérivées de ces champs au point événement (que l'on suppose unique) $\mathbf{Q} = \mathscr{C}(X^K) \cap \Sigma$. On a donc une relation identique à (2.51).

a) *Dérivées normales et tangentielles.* — La première et la seconde dérivées normales sont définies par :

$$D_N f \equiv N^\alpha \nabla_\alpha f , \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned} \square_N f \equiv D_N D_N f = D_N(N^\alpha \nabla_\alpha f) &= N^\alpha D_N(\nabla_\alpha f) \\ &= N^\alpha N^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta f \equiv N^\alpha N^\beta \nabla_\beta \nabla_\alpha f , \end{aligned} \tag{2.54}$$

où l'on a utilisé le Lemme 2.1.

La première dérivée tangentielle sur Σ est définie d'une manière analogue à $\overset{*}{\nabla}_\alpha$ (cf. équation 2.12) :

$$D^\alpha_T \equiv P^{\alpha\beta}_{(\Sigma)}\nabla_\beta = g^{\alpha\beta}\nabla_\beta - N^\alpha D_N, \qquad N_\alpha D^\alpha_T \Rightarrow 0 . \tag{2.55}$$

La seconde dérivée tangentielle d'un champ $f(\boldsymbol{x})$ est obtenue en appliquant deux fois l'opérateur D_T^α, soit

(2.56) $$D_T^\alpha D_T^\beta f = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\mu} \nabla_\mu \nabla_\gamma f - g^{\beta\gamma} N^\alpha D_N(\nabla_\gamma f) - (D_T^\alpha N^\beta)(D_N f) - g^{\alpha\mu} N^\beta \nabla_\mu (D_N f) + N^\alpha N^\beta \Box_N f.$$

L'opérateur $D_T^\alpha D_T^\beta$ n'est évidemment pas symétrique puisqu'il représente une double dérivation covariante sur l'hypersurface Σ en général (extrinsèquement) courbe ; donc

(2.57) $$D_T^{[\alpha} D_T^{\beta]} f \neq 0$$

où [..] indique l'antisymétrisation. Notons alors le résultat suivant :

LEMME 2.2.

(2.58) $$\boxed{D_T^\alpha N^\beta = D_T^\beta N^\alpha .}$$

En effet, d'après (2.55), (2.44) et (2.42), on a

$$g_{\alpha\beta} D_T^\beta N_\mu = \nabla_\alpha N_\mu = \nabla_\mu N_\alpha ,$$

d'où (2.58) par élévation des indices.

Prenant alors la partie antisymétrique de (2.56) par rapport à α et β, on a immédiatement avec (2.58) :

(2.59) $$D_T^{[\alpha} D_T^{\beta]} f = g^{\gamma[\alpha} N^{\beta]} D_N(\nabla_\gamma f) + N^{[\alpha} g^{\beta]\mu} \nabla_\mu (D_N f)$$

En utilisant le fait que

$$D_N(\nabla_\gamma f) = N^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\gamma f,$$

(2.59) se transforme en

(2.60) $$D_T^{[\alpha} D_T^{\beta]} f = g^{\mu[\beta} N^{\alpha]} (\nabla_\mu N^\lambda)(\nabla_\lambda f).$$

On verra au chapitre 3 que, comme il se doit, cette expression fait intervenir la seconde forme fondamentale de Σ.

b) *Dérivée-$\mathscr{D}$.* — Nous généralisons ici la notion de dérivée « delta » introduite par T. Y. Thomas [*2*] en mécanique classique des milieux continus ([12]). Cette dérivée que nous noterons « $\mathscr{D}$ » représente une dérivée

([12]) Rappelons que la dérivée-δ de Thomas se définit classiquement par

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial n},$$

où $\partial/\partial t$ est la dérivée partielle par rapport au temps, $\partial/\partial n$ est la dérivée normale par rapport à la surface bidimensionnelle de discontinuité, et V est la vitesse (scalaire) de cette surface dans la direction de sa normale. En formalisme quadridimensionnel covariant, on n'introduit pas de dérivée partielle $\partial/\partial t$ mais la dérivée $\delta/\delta s$ qui correspond en fait à la dérivée particulaire (en suivant le mouvement d'une « particule ») de la mécanique classique.

temporelle « en suivant le mouvement de Σ dans V^4 le long de sa normale ». C'est donc une dérivée temporelle selon les rayons.

DÉFINITION 2.3. — Au point événement $\mathbf{Q} = \mathscr{C}(X^K) \cap \Sigma$, la dérivée-$\mathscr{D}$ d'un champ $f(\boldsymbol{x})$ à valeurs tensorielles sur V^4 est définie par

$$\boxed{\frac{\mathscr{D}f}{\mathscr{D}s} \equiv \frac{\delta f}{\delta s} + c\mathrm{N}_0\mathrm{D}_\mathrm{N}f.} \tag{2.61}$$

En effet, en $\mathbf{Q}$, on peut définir $\dfrac{\delta f}{\delta s}$ puisque $\mathbf{Q} \in \mathscr{C}(X^K)$, et $\mathrm{D}_\mathrm{N}f$ puisque $\mathbf{Q} \in \Sigma$. On vérifie immédiatement qu'une définition équivalente est fournie par

$$\boxed{\frac{\mathscr{D}f}{\mathscr{D}s} \equiv u_\alpha \mathrm{D}_\mathrm{T}^\alpha.} \tag{2.62}$$

En particulier, on note le résultat suivant en $\mathbf{Q} \in \mathscr{C}(X^K) \cap \Sigma$:

$$\boxed{\frac{\mathscr{D}\mathrm{N}_\alpha}{\mathscr{D}s} \equiv \frac{\delta \mathrm{N}_\alpha}{\delta s},} \tag{2.63}$$

qui résulte immédiatement de (2.61) et (2.44).

On verra au chapitre suivant l'interprétation de $\mathscr{D}/\mathscr{D}s$ en fonction d'une dérivée intrinsèque sur Σ (dérivée invariante dans $\{a^j\}$ par rapport à la composante tangentielle de la 4-vitesse d'univers).

La double dérivée-$\mathscr{D}$ s'obtient en appliquant deux fois l'opérateur défini en (2.61) ou (2.62). On obtient l'une des deux formes suivantes :

$$\frac{\mathscr{D}^2}{\mathscr{D}s^2} \equiv \frac{\delta^2}{\delta s^2} + c\mathrm{N}_0\left(\mathrm{D}_\mathrm{N}\frac{\delta}{\delta s} + \frac{\delta}{\delta s}\mathrm{D}_\mathrm{N}\right) + c\frac{\mathscr{D}\mathrm{N}_0}{\mathscr{D}s}\mathrm{D}_\mathrm{N} + c^2\mathrm{N}_0^2\square_\mathrm{N}, \tag{2.64$_1$}$$

$$\frac{\mathscr{D}^2}{\mathscr{D}s^2} = \frac{\delta^2}{\delta s^2} + c\mathrm{N}_0\mathrm{D}_\mathrm{N}\frac{\delta}{\delta s} + c\left(\mathrm{N}_0\frac{\delta}{\delta s} + \frac{\mathscr{D}\mathrm{N}_0}{\mathscr{D}s}\right)\mathrm{D}_\mathrm{N} + c^2\mathrm{N}_0^2\square_\mathrm{N}, \tag{2.64$_2$}$$

où $\dfrac{\delta^2}{\delta s^2} = \dfrac{\delta}{\delta s}\dfrac{\delta}{\delta s}$ représente la double dérivée invariante dans la direction de u^α.

3. CONDITIONS DE COMPATIBILITÉ POUR LES DÉRIVÉES D'UNE FONCTION $f(x)$

3.1. Conditions de compatibilité du premier ordre

Soit Im $(\mathscr{B})$ l'image de $\mathscr{B} \subset \mathscr{E}$ par $\mathscr{X}$ (Cf. § 2.1). On considère un champ $f(\mathbf{Q})$ à valeurs tensorielles sur V^4 où $\mathbf{Q} \in \mathrm{Im}(\mathscr{B}) \cap \Sigma$. f est de classe C^1

sur $\mathscr{B}$ et ϕ^α est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$. On a alors les théorèmes et corollaires suivants :

THÉORÈME 3.1. — *En* $\mathbf{Q} \in \operatorname{Im}(\mathscr{B}) \cap \Sigma$, *on a*

$$\mathrm{D}^\beta_\mathrm{T} f = f_{|i} \gamma^{ij} \phi^\beta_{\cdot|j}, \tag{3.1}$$

$$\nabla_\alpha f = g_{\alpha\beta} \hat{f}_{|i} \gamma^{ij} \phi^\beta_{\cdot|j} + \mathrm{N}_\alpha \mathrm{D}_\mathrm{N} f, \qquad (\mathrm{D}_\mathrm{N} f \equiv \mathrm{N}^\alpha \nabla_\alpha f). \tag{3.2}$$

THÉORÈME 3.2. — *En* $\mathbf{Q} \in \operatorname{Im}(\mathscr{B}) \cap \Sigma$, *on a*

$$\frac{\delta f}{\delta s} = d_\mathrm{V} \hat{f} - c\mathrm{N}_0 \mathrm{D}_\mathrm{N} f, \tag{3.3}$$

$$\frac{\mathscr{D} f}{\mathscr{D} s} = d_\mathrm{V} \hat{f}, \tag{3.4}$$

avec

$$d_\mathrm{V} \hat{f} = \hat{f}_{|j} \mathrm{V}^j, \qquad \mathrm{V}^j = \gamma^{ji} \mathrm{V}_i, \qquad \mathrm{V}_i \equiv v_\lambda \phi^\lambda_{\cdot|i} \tag{3.5}$$

où v_λ *est la composante tangentielle de* u_λ *sur* Σ (*cf.* équation 2.27).

COROLLAIRE 3.3 — *Si* f_α *est un 4-vecteur covariant P. U., alors, en* $\mathbf{Q} \in \operatorname{Im}(\mathscr{B}) \cap \Sigma$, *on a*

$$\underset{u}{\pounds} f_\alpha \equiv (\underset{u}{\pounds} f_\alpha)_\perp = \hat{f}_{\lambda|i}(\delta^\lambda_\alpha \mathrm{V}^i - g_{\alpha\beta} u^\lambda \gamma^{ij} \phi^\beta_{\cdot|j}) - (\mathrm{D}_\mathrm{N} f_\lambda)(c\mathrm{N}_0 \delta^\lambda_\alpha + \mathrm{N}_\alpha u^\lambda), \tag{3.6}$$

et si f^α *est un 4-vecteur contravariant,*

$$\underset{u}{\pounds} f^\alpha = d_\mathrm{V} \hat{f}^\alpha - c\mathrm{N}_0 \mathrm{D}_\mathrm{N} f^\alpha - f_\beta(\hat{u}^\alpha_{\cdot|i} \gamma^{ij} \phi^\beta_{\cdot|j} + \mathrm{N}^\beta \mathrm{D}_\mathrm{N} u^\alpha). \tag{3.7}$$

Démonstrations de (3.16)-(3.18). — Considérons $f(\mathbf{Q})$ et calculons $\hat{f}_{|i}$. En $\mathbf{Q}$, on a

$$\hat{f}_{|i} = (\nabla_\alpha f) \phi^\alpha_{\cdot|i}.$$

Multipliant les deux membres par $\gamma^{ij} \phi^\beta_{\cdot|j}$ et sommant sur les indices muets en utilisant (2.39) et (2.55), il vient

$$\hat{f}_{|i} \gamma^{ij} \phi^\beta_{\cdot|j} = (\nabla_\alpha f) \mathrm{P}^{\alpha\beta}_{(\Sigma)} \equiv \mathrm{D}^\beta_\mathrm{T} f ;$$

d'où (3.1). Utilisant maintenant la définition développée (2.55), on obtient (3.2). *C. Q. F. D.*

La dérivée invariante de f suivant u^α s'exprime, en tenant compte de (3.2) et $(2.27)_5$, par

$$\frac{\delta f}{\delta s} \equiv u^\alpha \nabla_\alpha f = \hat{f}_{|i} \gamma^{ij} u_\beta \phi^\beta_{\cdot|j} - c\mathrm{N}_0 \mathrm{D}_\mathrm{N} f.$$

Mais, d'après $(2.27)_1$ et (2.41),

$$u_\beta \phi^\beta_{\cdot|j} = v_\beta \phi^\beta_{\cdot|j} = \mathrm{V}_j$$

suivant la définition $(3.5)_3$. En effet, $\phi^\beta_{\cdot|j}$ définit une base naturelle sur Σ

pour les 4-vecteurs définis en **Q**. V_j est donc la composante de la 4-vitesse tangentielle v_β sur cette base et V^i est le 3-vecteur contravariant correspondant dans la carte $\{ a^j \}$. Compte tenu des définitions (2.52) et $(3.5)_1$, on a donc (3.3). Utilisant la définition (2.61), on obtient (3.4). *C. Q. F. D.* On voit donc l'interprétation de la dérivée-$\mathscr{D}$ en termes d'une dérivée intrinsèque sur Σ [13].

Remplaçons maintenant f par u^λ dans (3.2). Soit, en **Q**,

$$\nabla_\alpha u^\lambda = g_{\alpha\beta}\hat{u}^{\lambda}_{\cdot|i}\gamma^{ij}\phi^{\beta}_{\cdot|j} + N_\alpha D_N u^\lambda . \tag{3.8}$$

Reportant (3.3) — pour $f \to f_\alpha$ — et (3.8) dans $(2.9)_1$ et remarquant que f_α est pris P. U., donc que

$$\hat{f}_\lambda u^{\lambda}_{\cdot|i} = (\hat{f}_\lambda \hat{u}^\lambda)_{|i} - \hat{f}_{\lambda|i}u^\lambda \qquad = -\hat{f}_{\lambda|i}u^\lambda ,$$

et

$$f_\lambda(D_N u^\lambda) = D_N(f_\lambda u^\lambda) - u^\lambda D_N f_\lambda = - u^\lambda D_N f_\lambda ,$$

il vient

$$\underset{u}{\pounds} f_\alpha = (\underset{u}{\pounds} f_\alpha)_\perp = d_V \hat{f}_\alpha - g_{\alpha\beta}u^\lambda \hat{f}_{\lambda|i}\gamma^{ij}\phi^{\beta}_{\cdot|j} - cN_0(D_N f_\alpha) - N_\alpha u^\lambda(D_N f_\lambda) ;$$

d'où (3.6) en réarrangeant les indices. De même (3.7) s'obtient en appliquant (3.3) et $(2.9)_2$. On obtient (3.7) mais il n'y a pas de simplification car f^α n'est pas considéré P. U. dans ce cas. *C. Q. F. D.*

Commentaires. — Supposons que f est une fonction connue des a^j sur Σ. Alors, les dérivées $D^\beta_T f$ et $\dfrac{\mathscr{D}f}{\mathscr{D}s}$ peuvent être calculées en **Q** si l'on connaît u_α en ce point. On appelle *dérivées intérieures*, les dérivées de ce genre qui peuvent être déterminées en ce sens sur Σ. On voit donc l'utilité de telles dérivées. Les équations (3.2) et (3.3) constituent un système de relations linéaires reliant les dérivées du premier ordre de f en **Q** sur Σ. On notera que si $f = \hat{f}(a^j)$ est donné sur Σ, alors les relations (3.2) et (3.3) ne déterminent pas entièrement les dérivées $\nabla_\alpha f$ et $\dfrac{\delta f}{\delta s}$ en $\mathbf{Q} \in \mathrm{Im}\,(\mathscr{B}) \cap \Sigma$ sauf si une relation supplémentaire les concernant est spécifiée. Cette information supplémentaire peut être obtenue en spécifiant la valeur de la dérivée normale $D_N f$ en **Q** sur Σ, ou par une équation aux dérivées partielles vérifiée par f (par exemple, une équation du champ). Le même commentaire s'applique à la *dérivée convective* [14] définie par (3.6) et pour la dérivée définie en (3.7) où il faut que $u^\alpha = u^\alpha(a^j)$ soit donnée sur Σ et $D_N u^\alpha$ soit spécifié ou que u^α satisfasse à une équation du champ (par exemple,

[13] Toutefois, le mouvement du milieu est impliqué par l'intermédiaire de v_α.

[14] Voir Maugin [*24*].

l'équation de continuité). Les équations (3.2) et (3.3) sont appelées *conditions de compatibilité du premier ordre.*

Avant d'examiner les conditions de compatibilité du second ordre, nous établissons quelques formules utiles qui concernent les dérivées du premier ordre de la normale unitaire à Σ. On note tout d'abord que

$$N_\alpha(D_N u^\alpha) = - c D_N N_0 \tag{3.9}$$

d'après (2.44) et $(2.27)_5$.

Remplaçant f par N_0 dans (3.3) et (3.4), on a

$$\frac{\delta N_0}{\delta s} = d_V \overset{*}{N}_0 - c N_0 (D_N N_0) , \tag{3.10}$$

$$\frac{\mathscr{D} N_0}{\mathscr{D} s} = d_V N_0 . \tag{3.11}$$

Les autres dérivées de N^α s'obtiennent comme suit. On calcule $N^\mu_{\cdot|k}$ sur Σ à partir de

$$\hat{N}^\mu_{\cdot|k} = (\nabla_\nu N^\mu) \phi^\nu_{\cdot|k} .$$

L'inversion de (2.45) conduit à

$$\nabla_\nu N^\mu = - b^{ij} \phi^\mu_{\cdot|i} \phi^\rho_{\cdot|j} g_{\rho\nu}$$

avec

$$b^{ij} \equiv \gamma^{ik} \gamma^{jl} b_{kl} . \tag{3.12}$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\hat{N}^\mu_{\cdot|k} = - b_{km} \gamma^{im} \phi^\mu_{\cdot|i} = - \gamma^{im} \phi^\nu_{\cdot|km} \phi^\mu_{\cdot|i} N_\nu .} \tag{3.13}$$

Par ailleurs, remplaçant f par N_μ dans (3.1), on a

$$g_{\alpha\beta} D^\beta_T N_\mu = g_{\alpha\beta} \hat{N}_{\mu|i} \gamma^{ij} \phi^\beta_{\cdot|j}$$

Compte tenu de (3.13) et élevant les indices, on obtient

$$\boxed{D^\beta_T N^\mu = - b^{jp} \phi^\beta_{\cdot|j} \phi^\mu_{\cdot|p} ;} \tag{3.14}$$

ce qui est bien symétrique en β et μ d'après la symétrie de b^{jp}. Finalement, d'après (3.14), (2.62), $(3.5)_3$ et (2.63), on a

$$\boxed{\frac{\mathscr{D} N^\mu}{\mathscr{D} s} = \frac{\delta N^\mu}{\delta s} = - b^{jp} \phi^\mu_{\cdot|p} V_j .} \tag{3.15}$$

Compte tenu de (2.44), on a obtenu toutes les dérivées d'ordre un de la normale N^β.

3.2. Conditions de compatibilité du second ordre

On considère maintenant des champs $f(\mathbf{Q})$, $\mathbf{Q} \in \operatorname{Im}(\mathscr{B}) \cap \Sigma$ où f est de classe C^2 sur $\mathscr{B}$. On a alors les théorèmes et corollaires suivants :

THÉORÈME 3.5. — *En* $\mathbf{Q} \in \operatorname{Im}(\mathscr{B}) \cap \Sigma$, *on a*

$$\begin{aligned}(3.16)\quad \nabla_\alpha \nabla_\mu f = \gamma^{ij}\{\,(\widehat{\mathrm{D}_\mathrm{N} f})_{|i} + \gamma^{kl} b_{li} \hat{f}_{|k}\,\}\,(\mathrm{N}_\mu g_{\alpha\gamma} \phi^{\gamma}_{\cdot|j} + \mathrm{N}_\alpha g_{\mu\varkappa} \phi^{\varkappa}_{\cdot|j}) \\ + g_{\mu\beta} g_{\alpha\gamma} \gamma^{kl} \gamma^{ij} (\hat{f}_{|ki} - b_{ki} \mathrm{D}_\mathrm{N} f) \phi^{\beta}_{\cdot|l} \phi^{\gamma}_{\cdot|j} + \mathrm{N}_\alpha \mathrm{N}_\mu \Box_\mathrm{N} f .\end{aligned}$$

THÉORÈME 3.6. — *En* $\mathbf{Q} \in \operatorname{Im}(\mathscr{B}) \cap \Sigma$, *on a*

$$\begin{aligned}(3.17)\quad \frac{\delta^2 f}{\delta s^2} = d_\mathrm{V}^2 \hat{f} - c\mathrm{N}_0 \hat{f}_{|k}\,\{\, b^{kj} \mathrm{V}_j + \gamma^{kj} \phi^{\beta}_{\cdot|j} (\mathrm{D}_\mathrm{N} u_\beta)\,\} \\ - 2c\mathrm{N}_0 d_\mathrm{V}(\widehat{\mathrm{D}_\mathrm{N} f}) - c(d_\mathrm{V} \hat{\mathrm{N}}_0)(\mathrm{D}_\mathrm{N} f) + c^2 \mathrm{N}_0 (\mathrm{D}_\mathrm{N} f)(\mathrm{D}_\mathrm{N} \mathrm{N}_0) + c^2 \mathrm{N}_0^2 \Box_\mathrm{N} f .\end{aligned}$$

COROLLAIRE 3.7. — *En* $\mathbf{Q} \in \operatorname{Im}(\mathscr{B}) \cap \Sigma$, *on a*

$$(3.18)\qquad \frac{\mathscr{D}^2 f}{\mathscr{D} s^2} = d_\mathrm{V}^2 f .$$

THÉORÈME 3.8. — *En* $\mathbf{Q} \in \operatorname{Im}(\mathscr{B}) \cap \Sigma$, *on a*

$$(3.19)\qquad \mathrm{D}_\mathrm{T}^\beta \mathrm{D}_\mathrm{T}^\alpha f = (\hat{f}_{|ki} \gamma^{ij} \gamma^{km} \phi^{\alpha}_{\cdot|m} + \hat{f}_{|k} b^{jk} \mathrm{N}^\alpha) \phi^{\beta}_{\cdot|j} ,$$

et

$$(3.20)\qquad \mathrm{D}_\mathrm{T}^{[\alpha} \mathrm{D}_\mathrm{T}^{\beta]} f = b^{kj} \hat{f}_{|k} \mathrm{N}^{[\beta} \phi^{\alpha]}_{\cdot|j} .$$

Dans (3.17) et (3.18), on a défini

$$d_\mathrm{V}^2 \hat{f} \equiv d_\mathrm{V}(d_\mathrm{V} \hat{f})$$

où V^j est le 3-contravecteur défini en $(3.5)_2$.

Démonstrations de (3.16)-(3.18). — Remplaçons f par $\nabla_\mu f$ dans (3.2). Il vient

$$(3.21)\qquad \nabla_\alpha \nabla_\mu f = g_{\alpha\beta} (\widehat{\nabla_\mu f})_{|i} \gamma^{ij} \phi^{\beta}_{\cdot|j} + \mathrm{N}_\alpha \mathrm{D}_\mathrm{N}(\nabla_\mu f) .$$

En contractant avec N_μ et tenant compte du fait que la courbure de V^4 est nulle, on a

$$(3.22)\qquad \mathrm{N}^\mu \nabla_\alpha \nabla_\mu f = \mathrm{N}^\mu \nabla_\mu (\nabla_\alpha f) \equiv \mathrm{D}_\mathrm{N}(\nabla_\alpha f) .$$

Par ailleurs, avec (2.54),

$$(3.23)\qquad \mathrm{N}^\mu \mathrm{D}_\mathrm{N}(\nabla_\mu f) = \mathrm{N}^\mu \mathrm{N}^\gamma \nabla_\gamma \nabla_\mu f \equiv \Box_\mathrm{N} f .$$

Enfin, avec (3.2), on obtient, en utilisant le lemme de Ricci pour $g_{\alpha\beta}$ et γ_{ij} dans les cartes $\{\, x^\alpha \,\}$ et $\{\, a^j \,\}$ respectivement,

$$(3.24)\qquad \boxed{(\widehat{\nabla_\mu f})_{|i} = g_{\mu\beta} \hat{f}_{|ki} \gamma^{kl} \phi^{\beta}_{\cdot|l} + g_{\mu\beta} \hat{f}_{|k} \gamma^{kl} \phi^{\beta}_{\cdot|li} + \hat{\mathrm{N}}_{\mu|i} (\mathrm{D}_\mathrm{N} f) + \mathrm{N}_\mu (\widehat{\mathrm{D}_\mathrm{N} f})_{|i} .}$$

Compte tenu de (2.50) et (3.13), (3.24) se transforme en

$$(3.25)\quad \widehat{(\nabla_\mu f)}_{|i} = g_{\mu\beta}\hat{f}_{|ki}\gamma^{kl}\phi^{\beta}_{\cdot|l} + g_{\mu\beta}\hat{f}_{|k}\gamma^{kl}b_{li}N^{\beta} + \gamma^{qp}b_{ip}g_{\mu\eta}\phi^{\eta}_{\cdot|q}(D_N f) + N_\mu(\widehat{D_N f})_{|i}\,.$$

Tous calculs faits en tenant compte de (3.12), (2.40), (2.41), (3.21), (3.25) et (3.23), on obtient le résultat intermédiaire suivant [en $Q \in \operatorname{Im}(\mathscr{B}) \cap \Sigma$] :

$$(3.26)\quad \boxed{D_N(\nabla_\alpha f) = g_{\alpha x}\gamma^{ij}\phi^{x}_{\cdot|j}(\widehat{D_N f})_{|i} + g_{\alpha x}b^{kj}\phi^{x}_{\cdot|j}\hat{f}_{|k} + N_\alpha \Box_N f\,.}$$

Compte tenu de (3.26) et (3.25), (3.21) s'écrit, tous calculs faits, sous la forme (3.16). *C. Q. F. D.*

Remplaçons maintenant f par $\dfrac{\delta f}{\delta s}$ dans (3.2) ; soit,

$$(3.27)\quad \nabla_\alpha\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right) = g_{\alpha\beta}\widehat{\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right)}_{|i}\gamma^{ij}\phi^{\beta}_{\cdot|j} + N_\alpha D_N\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right).$$

Ce qui n'est autre que

$$(3.28)\quad g_{\alpha\gamma}D^{\gamma}_{T}\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right) = g_{\alpha\beta}\widehat{\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right)}_{|i}\gamma^{ij}\phi^{\beta}_{\cdot|j}\,.$$

Mais d'après (3.3),

$$(3.29)\quad \boxed{\widehat{\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right)}_{|i} = (d_V\hat{f})_{|i} - c\hat{N}_{0|i}(D_N f) - cN_0(\widehat{D_N f})_{|i}\,.}$$

Par ailleurs,

$$u^{\alpha}D_N(\nabla_\alpha f) = D_N\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right) - (\nabla_\alpha f)(D_N u^{\alpha}),$$

d'où

$$(3.30)\quad D_N\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right) = u^{\alpha}D_N(\nabla_\alpha f) + (\nabla_\alpha f)(D_N u^{\alpha}).$$

Les équations (3.26) et (3.2) fournissent les expressions de $D_N(\nabla_\alpha f)$ et $\nabla_\alpha f$ respectivement. Soit, en reportant dans (3.30),

$$(3.31)\quad \boxed{D_N\left(\frac{\delta f}{ds}\right) = d_V(\widehat{D_N f}) + \hat{f}_{|k}b^{kj}V_j - cN_0\Box_N f + \hat{f}_{|i}\gamma^{ij}\phi^{\beta}_{\cdot|j}(D_N u_\beta) - c(D_N N_0)(D_N f)}$$

où l'on a utilisé (3.9). Reportant (3.31) et (3.29) dans (3.27), il vient

$$\nabla_\alpha\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right) = \{\,(d_V\hat{f})_{|i} - c\hat{N}_{0|i}(D_N f) - cN_0(\widehat{D_N f})_{|i}\,\}\,g_{\alpha\beta}\gamma^{ij}\phi^{\beta}_{\cdot|j} + N_\alpha\{\,d_V(\widehat{D_N f}) + \hat{f}_{|k}b^{kj}V_j - cN_0\Box_N f + \hat{f}_{|i}\gamma^{ij}\phi^{\beta}_{\cdot|j}(D_N u_\beta) - c(D_N N_0)(D_N f)\,\}\,.$$

Contractant le tout avec u^α et tenant compte de $(2.27)_5$ et (3.5), on obtient (3.17). *C. Q. F. D.*

La démonstration de (3.18) qui n'est qu'une forme condensée de (3.17) se fait comme suit. Partant de (3.27) et contractant avec u^α et utilisant $(2.27)_5$, on obtient

$$\frac{\delta^2 f}{\delta s^2} + c\mathrm{N}_0\mathrm{D}_\mathrm{N}\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right) = \widehat{\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right)}_{|i}\mathrm{V}^i . \tag{3.32}$$

Mais, d'après (3.29), le second membre n'est autre que

$$\begin{aligned}\widehat{\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right)}_{|i}\mathrm{V}^i &= d_\mathrm{V}^2\hat{f} - c d_\mathrm{V}(\widehat{\mathrm{N}_0\mathrm{D}_\mathrm{N}f}) \\ &= d_\mathrm{V}^2\hat{f} - c\frac{\mathscr{D}\mathrm{N}_0}{\mathscr{D}s}(\mathrm{D}_\mathrm{N}f) - c\mathrm{N}_0 d_\mathrm{V}(\widehat{\mathrm{D}_\mathrm{N}f})\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (3.11). (3.32) s'écrit donc

$$\frac{\delta^2 f}{\delta s^2} + c\mathrm{N}_0\mathrm{D}_\mathrm{N}\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right) + c\frac{\mathscr{D}\mathrm{N}_0}{\mathscr{D}s}(\mathrm{D}_\mathrm{N}f) = d_\mathrm{V}^2\hat{f} - c\mathrm{N}_0 d_\mathrm{V}(\widehat{\mathrm{D}_\mathrm{N}f}) . \tag{3.33}$$

Par ailleurs, remplaçons f par $\mathrm{D}_\mathrm{N}f$ dans (3.3) en utilisant (2.54). Soit,

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta s}(\mathrm{D}_\mathrm{N}f) = d_\mathrm{V}(\widehat{\mathrm{D}_\mathrm{N}f}) - c\mathrm{N}_0\square_\mathrm{N}f .} \tag{3.34}$$

Reportant la valeur de $d_\mathrm{V}(\widehat{\mathrm{D}_\mathrm{N}f})$ ainsi obtenue dans (3.33), cette dernière équation devient

$$\frac{\delta^2 f}{\delta s^2} + c\mathrm{N}_0\left\{\mathrm{D}_\mathrm{N}\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right) + \frac{\delta}{\delta s}(\mathrm{D}_\mathrm{N}f)\right\} + c\frac{\mathscr{D}\mathrm{N}_0}{\mathscr{D}s}(\mathrm{D}_\mathrm{N}f) + c^2\mathrm{N}_0^2\square_\mathrm{N}f = d_\mathrm{V}^2\hat{f} ;$$

ce qui n'est autre que (3.18) compte tenu de l'expression $(2.64)_1$.

C. Q. F. D.

Démonstrations de (3.19)-(3.20). — Remplaçons f par $\mathrm{D}_\mathrm{T}^\alpha f$ dans (3.1). Soit,

$$\mathrm{D}_\mathrm{T}^\beta\mathrm{D}_\mathrm{T}^\alpha f = (\widehat{\mathrm{D}_\mathrm{T}^\alpha f})_{|i}\gamma^{ij}\phi^{\beta}_{\cdot|j} .$$

Utilisant à nouveau (3.1), il vient, en utilisant le lemme de Ricci pour γ^{ij} dans $\{ a^j \}$,

$$\mathrm{D}_\mathrm{T}^\beta\mathrm{D}_\mathrm{T}^\alpha f = \gamma^{ij}\gamma^{km}(\hat{f}_{|ki}\phi^{\alpha}_{\cdot|m} + \hat{f}_{|k}\phi^{\alpha}_{\cdot|mi})\phi^{\beta}_{\cdot|j} ; \tag{3.35}$$

d'où (3.19) en tenant compte de (2.50) et (3.12). En intervertissant le rôle des indices α et β et prenant la partie antisymétrique par rapport à α et β, et le champ f (à valeurs tensorielles sur V^4) se comportant comme un scalaire sur Σ, on obtient (3.20). *C. Q. F. D.*

Commentaires. — (*i*) On remarque tout d'abord que l'expression (3.16) est, comme il se doit, symétrique en α et μ. Elle généralise au cas relativiste une expression obtenue par Chadwick et Powdrill ([*25*], équation 21); (*ii*) L'expression (3.17) prend la forme extrêmement condensée (3.18) grâce à l'introduction de la notion de dérivée-$\mathscr{D}$; (*iii*) Les équations (3.16)-(3.20) sont les *conditions de compatibilité du second ordre* (ou conditions de compatibilité pour les dérivées du second ordre) pour f sur Σ. Si f et sa première dérivée normale $D_N f$ sont connues en fonction de a^j sur Σ, alors les *dérivées intérieures* peuvent être calculées sur Σ. On voit d'après les équations (3.16) et (3.17) que toutes les dérivées secondes de f peuvent être calculées sur Σ (à condition de connaître la dérivée normale de u_β) si la seconde dérivée normale de f, c'est-à-dire, $\square_N f$, est également connue. Cette information supplémentaire peut éventuellement être contenue dans une équation aux dérivées partielles (par exemple, une équation du champ) vérifiée par f ; (*iv*) On remarque finalement que la définition de la double dérivée tangentielle de f fait bien intervenir la seconde forme fondamentale de Σ. Bien entendu, cette dérivée étant prise sur Σ, la connaissance de $f = \hat{f}(a^j)$ sur Σ suffit pour en calculer l'expression.

Pour conclure ce paragraphe, notons un cas particulier important de l'équation (3.16). Considérons le *paramètre différentiel du* second ordre Δ_2 dans V^4 tel que

$$\Delta_2 \equiv g^{\alpha\mu}\nabla_\alpha\nabla_\mu .$$

Contractant les indices α et μ de (3.16), on a immédiatement, en tenant compte de (2.41), (2.35), (2.37), (2.49) et (2.40)

$$\boxed{\Delta^2 f = \bar{\Delta}^2 \hat{f} - 2\Omega D_N f + \square_N f} \tag{3.36}$$

où $\bar{\Delta}_2$ est le paramètre différentiel du second ordre sur Σ tel que

$$\bar{\Delta}_2 A(a^j) \equiv \gamma^{ik} A_{|ik} .$$

4. CONDITIONS DE COMPATIBILITÉ POUR LES DISCONTINUITÉS DES DÉRIVÉES D'UNE FONCTION $f(x)$ A TRAVERS UNE 3-HYPERSURFACE

4.1. Degré de continuité des fonctions

Le degré de continuité des fonctions considérées est spécifié comme suit :

FONCTIONS DE CLASSE $C^{k,p}$ (Cf. Lichnerowicz [*26*], Coburn [*27*]). — *Une fonction $f(x)$ à valeurs tensorielles sur* V^4 *est dite de classe* $C^{k,p}$ *si :*

(i) *ses dérivées d'ordre $j = k + 1, \ldots, p$ dans une carte locale $\{x^\alpha\}$ sont continues sur les ouverts* Im $(\mathscr{B}) - \Sigma^-$ *et* Im $(\mathscr{B}) - \Sigma^+$, *où* Im $(\mathscr{B})$ *est* *une région de* V^4 *et* Σ *est une hypersurface tridimensionnelle frontière commune de* $\mathrm{Im}\,(\mathscr{B}) - \Sigma^-$ *et* $\mathrm{Im}\,(\mathscr{B}) - \Sigma^+$, *ces dérivées approchant des valeurs limites uniformément en* x^α *et ayant donc des discontinuités finies sur* Σ ;

(ii) *ses dérivées d'ordre* $i = 0, 1, \ldots, k$ *(la dérivée d'ordre zéro étant la fonction elle-même) sont continues sur* $\mathrm{Im}\,(\mathscr{B}) \subset V^4$.

On a donc $\Sigma = \complement_{\mathrm{Im}\,(\mathscr{B})} (\mathrm{Im}\,(\mathscr{B}) - \Sigma^-) \cup (\mathrm{Im}\,(\mathscr{B}) - \Sigma^+)$. Autrement dit, les dérivées d'ordre $j = k + 1, \ldots, p$ sont seulement continues par morceaux sur $\mathrm{Im}\,(\mathscr{B})$ et présentent des discontinuités finies à travers Σ.

La discontinuité d'une fonction $A(\boldsymbol{x})$ à travers Σ sera notée

$$[\![A(\boldsymbol{x})]\!] \equiv A^+ - A^- \tag{4.1}$$

où A^+ et A^- sont les limites uniformes de A sur les deux faces de Σ, la normale à Σ étant orientée de la face « $-$ » à la face « $+$ ».

FONCTIONS DE CLASSE $C^k_{(M)}$. — *Une fonction* $f(\boldsymbol{x})$ *à valeurs tensorielles sur* V^4 *est dite de classe* $C^k_{(M)}$ *si ses dérivées d'ordre* $0, 1, \ldots, k$ *sont continues sur les ouverts* $\mathrm{Im}\,(\mathscr{B}) - \Sigma^-$ *et* $\mathrm{Im}\,(\mathscr{B}) - \Sigma^+$, *ces dérivées approchant des valeurs limites uniformément en* x^α *et ayant donc des discontinuités finies sur* Σ [15].

A toutes fins utiles, on notera les résultats suivants. Soient A et B à valeurs scalaires sur V^4 et de classe $C^0_{(M)}$. Alors, à travers Σ,

$$[\![AB]\!] = \bar{A}_\Sigma[\![B]\!] + [\![A]\!]\bar{B}_\Sigma, \qquad [\![A^2]\!] = 2\bar{A}_\Sigma[\![A]\!]$$

où une barre superposée et l'indice Σ indiquent la valeur moyenne sur Σ, c'est-à-dire, $\bar{A}_\Sigma = \frac{1}{2}(A^+ + A^-)$. Si $A \in C^0$ et $B \in C^0_{(M)}$, alors

$$[\![AB]\!] = A_\Sigma[\![B]\!] \tag{4.8}$$

où l'indice Σ indique la valeur sur Σ.

4.2. **Conditions de compatibilité du premier ordre**

Les expressions obtenues au chapitre III permettent d'établir immédiatement les résultats suivants. Si f est $C^1_{(M)}$ sur $\mathrm{Im}\,(\mathscr{B}) \subset V^4$, alors, observant que

$$\widehat{[\![f]\!]}_{|j} = (f^+ - f^-)_{|j} = f^+_{|\hat{j}} - f^-_{|\hat{j}} = [\![\hat{f}_{|j}]\!], \qquad [\![D_N f]\!] \equiv F, \tag{4.3}$$

(15) Pour éviter les complications résultant de différentiations sur les frontières, on fait appel au concept de classe de différentiabilité de fonctions dont le domaine $\mathscr{E}$ n'est pas un ouvert. Une fonction $f : \mathscr{V} \to \mathbb{R}$ sera dite de classe C^k ($k \geqq 0$) sur $\mathscr{V}$ s'il existe une fonction $g : \mathscr{W} \to \mathbb{R}$ où $\mathscr{W}$ est un ouvert de $\mathscr{E}$ qui contient $\mathscr{V}$, tel que la restriction de g à $\mathscr{V}$ coïncide avec f. g est appelée une « extension » de f (Cf. Nickerson, Spencer, Steenrod [*28*], p. 408-412). Cette définition est entendue dans le présent travail.

et que (2.13) est de classe C^2, les équations (3.1) et (3.2) s'appliquent sur les deux faces de Σ. Par différence, on a donc le

THÉORÈME 4.1. — *Si* $f \in C^1_{(M)}(\mathrm{Im}(\mathscr{B}))$, *alors* (3.1) *et* (3.2) *conduisent aux conditions de compatibilité suivantes, sur* Σ, *pour les discontinuités des dérivées spatiales du premier ordre de* f :

$$
(4.4) \qquad \begin{aligned} [\![D^\beta_T f]\!] &= \widehat{[\![f]\!]_{|i}} \gamma^{ij} \phi^{\beta}_{\cdot|j} , \\ [\![\nabla_\alpha f]\!] &= g_{\alpha\beta} \widehat{[\![f]\!]_{|i}} \gamma^{ij} \phi^{\beta}_{\cdot|j} + FN_\alpha \end{aligned}
$$

Il s'ensuit le

COROLLAIRE 4.2. — *Si* $f \in C^{0,1}(\mathrm{Im}(\mathscr{B}))$, *alors* $[\![f]\!] = 0$ *et les conditions* (4.4) *se réduisent à*

$$
(4.5) \qquad [\![D^\beta_T f]\!] = 0, \qquad [\![\nabla_\alpha f]\!] = FN_\alpha .
$$

Pour obtenir les conditions dynamiques correspondantes à partir de (3.3) et (3.4), il faut spécifier la classe de continuité de la 4-vitesse. On a alors les théorèmes et corollaires suivants.

THÉORÈME 4.3. — *Si* $f \in C^1_{(M)}(\mathrm{Im}(\mathscr{B}))$ *et* $u^\alpha \in C^0_{(M)}(\mathrm{Im}(\mathscr{B}))$, *alors* (3.3) *et* (3.4) *conduisent aux conditions dynamiques de compatibilité suivantes sur* Σ :

$$
(4.6) \qquad \left[\!\!\left[\frac{\delta f}{\delta s} \right]\!\!\right] = [\![d_V \hat{f}]\!] - cFN_0 , \qquad \left[\!\!\left[\frac{\mathscr{D} f}{\mathscr{D} s} \right]\!\!\right] = [\![d_V \hat{f}]\!] .
$$

COROLLAIRE 4.4. — *Si* $f \in C^1_{(M)}(\mathrm{Im}(\mathscr{B}))$ *et* $u^\alpha \in C^0(\mathrm{Im}(\mathscr{B}))$, *soit* $[\![u^\alpha]\!] = [\![v^\alpha]\!] = 0$ *et* $[\![V^j]\!] = 0$, *alors, en utilisant* (4.3), *les équations* (4.6) *se réduisent à*

$$
(4.7) \qquad \begin{aligned} \left[\!\!\left[\frac{\delta f}{\delta s} \right]\!\!\right] &\equiv u^\alpha [\![\nabla_\alpha f]\!] = \widehat{[\![f]\!]_{|j}} V^j - cFN_0 , \\ \left[\!\!\left[\frac{\mathscr{D} f}{\mathscr{D} s} \right]\!\!\right] &\equiv u_\alpha [\![D^\alpha_T f]\!] = \widehat{[\![f]\!]_{|j}} V^j \end{aligned}
$$

où la valeur de u^α *est prise sur* Σ.

Visiblement, dans les conditions du Corollaire 4.4, les conditions (4.7) ne sont pas indépendantes des conditions (4.4). $(4.7)_1$ et $(4.7)_2$ sont obtenues en contractant $(4.4)_2$ et $(4.4)_1$ par u_β et u^α respectivement.

COROLLAIRE 4.5. — *Si* $f \in C^{0,1}(\mathrm{Im}(\mathscr{B}))$ *et* $u^\alpha \in C^0(\mathrm{Im}(\mathscr{B}))$, *on a*

$$
(4.8) \qquad \left[\!\!\left[\frac{\delta f}{\delta s} \right]\!\!\right] = - cFN_0 , \qquad \left[\!\!\left[\frac{\mathscr{D} f}{\mathscr{D} s} \right]\!\!\right] = 0 .
$$

Ces deux équations sont entièrement équivalentes et se déduisent de $(4.5)_1$ ou $(4.5)_2$ par contraction avec la 4-vitesse.

Enfin, d'après (3.6) et (3.7), on a les résultats suivants :

(*i*) Si $f \in C^1_{(M)}(\mathrm{Im}\,(\mathscr{B}))$ et $u^\alpha \in C^0(\mathrm{Im}\,(\mathscr{B}))$, (3.6) et (3.7) fournissent les conditions de compatibilité

$$(4.9)\quad [\![\underset{u}{\pounds} f_\alpha]\!] = ([\![\underset{u}{\pounds} f_\alpha]\!])_\perp = [\![(\underset{u}{\pounds} f_\alpha)_\perp]\!] = \widehat{[\![f_\lambda]\!]}_{|i}(\delta^\lambda_\alpha V^i - g_{\alpha\beta}u^\lambda\gamma^{ij}\phi^\beta_{\cdot|j}) \\ - F_\lambda(cN_0\delta^\lambda_\alpha + N_\alpha u^\lambda)\,,$$

$$(4.10)\quad [\![\underset{u}{\pounds} f^\alpha]\!] = \widehat{[\![f^\alpha]\!]}_{|j}V^j - cN_0F^\alpha - [\![f_\beta]\!](\hat{u}^\alpha_{\cdot|i}\gamma^{ij}\phi^\beta_{\cdot|j} + N^\beta\overline{(D_N u^\alpha)_\Sigma}) \\ - (\overline{f_\beta})_\Sigma N^\beta[\![D_N u^\alpha]\!]$$

où l'on a utilisé la notation de moyenne introduite au paragraphe 4.1 et posé

$$(4.11)\qquad F_\lambda \equiv [\![D_N f_\lambda]\!]\,;$$

(*ii*) Si $f \in C^{0,1}(\mathrm{Im}\,(\mathscr{B}))$ et $u^\alpha \in C^0(\mathrm{Im}\,(\mathscr{B}))$, (4.9) se réduit à

$$(4.12)\qquad [\![\underset{u}{\pounds} f_\alpha]\!] \equiv [\![(\underset{u}{\pounds} f_\alpha)_\perp]\!] = -F_\lambda(cN_0\delta^\lambda_\alpha + N_\alpha u^\lambda)\,.$$

On vérifie immédiatement que le second membre de (4.9) est bien P. U. en contractant avec u^α.

Les relations (4.9) et (4.12) seront utiles pour l'étude de la propagation des fronts d'ondes dans les milieux continus relativistes conducteurs de la chaleur qui satisfont à une loi de conduction objective que nous avons proposée ailleurs (Cf. Maugin [*24*]).

Remarque (*a*). — A noter que les résultats (4.7), (4.8), (4.9) et (4.12) impliquent que Σ n'est pas une onde de choc car $[\![u^\alpha]\!] = 0$ sur Σ. Dans ces cas, Σ ne peut être qu'une discontinuité faible.

Remarque (*b*). — Si $u^\alpha \in C^0$, alors les équations (3.15) conduisent aux conditions de discontinuité suivantes sur Σ.

$$(4.13)\qquad \left[\!\!\left[\frac{\mathscr{D}N^\mu}{\mathscr{D}s}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{\delta N^\mu}{\delta s}\right]\!\!\right] = u^\alpha[\![\nabla_\alpha N^\mu]\!] = 0$$

qui sont identiquement vérifiées car $[\![\nabla_\alpha N^\mu]\!] = 0$ d'après l'équation qui précède (3.12).

4.3. Conditions de compatibilité du second ordre

On posera

$$(4.14)\qquad \mathscr{F} \equiv [\![\Box_N f]\!]\,.$$

De la même manière que l'on a établi les résultats du paragraphe précédent, on établit immédiatement ceux qui suivent.

THÉORÈME 4.7. — *Si* $f \in C^2_{(M)}$ (Im ($\mathscr{B}$)), *les équations* (3.16) *et* (3.19)-(3.20) *conduisent aux conditions de compatibilité suivantes, sur* Σ, *pour les discontinuités des dérivées spatiales d'ordre deux de* f :

$$(4.15)\quad [\![\nabla_\alpha \nabla_\mu f]\!] \equiv [\![\nabla_\mu \nabla_\alpha f]\!] = \gamma^{ij}\{\hat{F}_{|i} + \gamma^{kl} b_{li} \widehat{[\![f]\!]}_{|k}\} \times (N_\mu g_{\alpha\gamma}\phi^{\gamma}_{\cdot|j} + N_\alpha g_{\mu\varkappa}\phi^{\varkappa}_{\cdot|j}) + g_{\mu\beta} g_{\alpha\gamma}\gamma^{kl}\gamma^{ij}(\widehat{[\![f]\!]}_{|ki} - b_{ki}F)\phi^{\beta}_{\cdot|l}\phi^{\gamma}_{\cdot|j} + N_\alpha N_\mu \mathscr{F} ,$$

$$(4.16)\qquad [\![D^\beta_T D^\alpha_T f]\!] = (\widehat{[\![f]\!]}_{|ki}\gamma^{ij}\gamma^{km}\phi^{\alpha}_{\cdot|m} + \widehat{[\![f]\!]}_{|k} b^{jk} N^\alpha)\phi^{\beta}_{\cdot|j} ,$$

$$(4.17)\qquad [\![D^{[\alpha}_T D^{\beta]}_T f]\!] = b^{kj}\widehat{[\![f]\!]}_{|k} N^{[\beta}\phi^{\alpha]}_{\cdot|j} ,$$

où l'on a utilisé les définitions $(4.3)_2$ et (4.14). (4.15) est la généralisation relativiste d'une équation obtenue par Chadwick et Powdrill ([*25*], équation 38 ; aussi T. Y. Thomas [*2*]) en mécanique classique des milieux continus.

COROLLAIRE 4.8. — *Si* $f \in C^{0,2}$ (Im ($\mathscr{B}$)), *les équations* (4.15)-(4.17) *se réduisent, avec* $[\![f]\!] = 0$, *à*

$$(4.18)\quad [\![\nabla_\alpha \nabla_\mu f]\!] \equiv [\![\nabla_\mu \nabla_\alpha f]\!] = \gamma^{ij}(N_\mu g_{\alpha\gamma}\phi^{\gamma}_{\cdot|j} + N_\alpha g_{\mu\varkappa}\phi^{\varkappa}_{\cdot|j})\hat{F}_{|i} - (g_{\mu\beta} g_{\alpha\gamma} b^{lj}\phi^{\beta}_{\cdot|l}\phi^{\gamma}_{\cdot|j})F + N_\alpha N_\mu \mathscr{F} ,$$

$$(4.19)\qquad [\![D^\alpha_T D^\beta_T f]\!] = [\![D^\beta_T D^\alpha_T f]\!] = 0 .$$

COROLLAIRE 4.9. — *Si* $f \in C^{1,2}$ (Im ($\mathscr{B}$)), *l'équation* (4.18) *se réduit, avec* $[\![\nabla_\alpha f]\!] = 0$, *a*

$$(4.20)\qquad [\![\nabla_\alpha \nabla_\mu f]\!] = [\![\nabla_\mu \nabla_\alpha f]\!] = N_\alpha N_\mu \mathscr{F} .$$

Les cas particuliers de (4.15), (4.18) et (4.20) correspondant à la condition (3.36) sont alors fournis par le

COROLLAIRE 4.10.

$$\begin{aligned} [\![\Delta_2 f]\!] &= \bar{\Delta}^2 [\![f]\!] - 2\Omega F + \mathscr{F}, && f \in C^2_{(M)}) \ (\mathrm{Im}\ (\mathscr{B})), \\ [\![\Delta_2 f]\!] &= -\,2\Omega F + \mathscr{F}, && f \in C^{0,2}\ (\mathrm{Im}\ (\mathscr{B})), \\ [\![\Delta_2 f]\!] &= \mathscr{F}, && f \in C^{1,2}\ (\mathrm{Im}\ (\mathscr{B})). \end{aligned}$$

Les conditions dynamiques de compatibilité du second ordre s'obtiennent directement à partir de (3.17) et (3.18). On a les théorèmes et corollaires suivants :

THÉORÈME 4.11. — *Si* $f \in C^2_{(M)}$ (Im ($\mathscr{B}$)) *et si* $u^\alpha \in C^1_{(M)}$ (Im ($\mathscr{B}$)), *alors les* *équations* (3.17) *et* (3.18) *conduisent aux conditions de compatibilité suivantes sur* Σ :

$$\left[\!\left[\frac{\delta^2 f}{\delta s^2}\right]\!\right] = [\![d_V^2 \hat{f}]\!] - c\mathrm{N}_0[\![f_{|k}\mathrm{V}_j]\!] b^{kj} - c\mathrm{N}_0[\![\hat{f}_{|k}(\mathrm{D_N}u_\beta)]\!]\gamma^{kj}\phi^{\beta}_{\cdot|j} - 2c\mathrm{N}_0[\![d_V(\widehat{\mathrm{D_N}f})]\!] - c[\![(d_V\hat{\mathrm{N}}_0)(\mathrm{D_N}f)]\!] + c^2\mathrm{N}_0(\mathrm{D_N N_0})\mathrm{F} + c^2\mathrm{N}_0^2\mathscr{F}, \tag{4.21}$$

$$\left[\!\left[\frac{\mathscr{D}^2 f}{\mathscr{D}s^2}\right]\!\right] = [\![d_V^2 \hat{f}]\!] . \tag{4.22}$$

COROLLAIRE 4.12. — *Si* $f \in \mathrm{C}^{0,2}$ (Im ($\mathscr{B}$)) *et* $u^\alpha \in \mathrm{C}^{0,1}$ (Im ($\mathscr{B}$)), *alors* (4.21) *et* (4.22) *se réduisent à*

$$\left[\!\left[\frac{\delta^2 f}{\delta s^2}\right]\!\right] = - c\mathrm{N}_0[\![\mathrm{D_N}u^\beta]\!]\hat{f}_{|k}\gamma^{kj}\phi^{\beta}_{\cdot|j} - 2c\mathrm{N}_0\hat{\mathrm{F}}_{|j}\mathrm{V}^j - c(d_V\hat{\mathrm{N}}_0)\mathrm{F} + c^2\mathrm{N}_0(\mathrm{D_N N_0})\mathrm{F} + c^2\mathrm{N}_0^2\mathscr{F}, \tag{4.23}$$

$$\left[\!\left[\frac{\mathscr{D}^2 f}{\mathscr{D}s^2}\right]\!\right] = 0 . \tag{4.24}$$

En effet,

$$[\![d_V^2 \hat{f}]\!] = [\![\hat{f}_{|ij}\mathrm{V}^i\mathrm{V}^j + \hat{f}_{|i}\mathrm{V}^j\mathrm{V}^i_{\cdot|j}]\!] = \widehat{[\![f]\!]}_{|ij}\mathrm{V}^i\mathrm{V}^j + \widehat{[\![f]\!]}_{|i}\mathrm{V}^j\mathrm{V}^i_{\cdot|j} = 0$$

car $[\![\mathrm{V}^i]\!] = 0$ puisque $u^\alpha \in \mathrm{C}^{0,1}$, et $[\![f]\!] = 0$ car $f \in \mathrm{C}^{0,2}$.

Enfin, on a le

COROLLAIRE 4.13. — *Si* $f \in \mathrm{C}^{1,2}$ (Im ($\mathscr{B}$)) *et* $u^\alpha \in \mathrm{C}^1$ (Im ($\mathscr{B}$)), (4.23) *se réduit, avec* $[\![\nabla_\alpha u_\beta]\!] = 0$ *et* $\mathrm{F} = 0$, à

$$\left[\!\left[\frac{\delta^2 f}{\delta s^2}\right]\!\right] = c^2\mathrm{N}_0^2\mathscr{F} . \tag{4.25}$$

Un cas particulier intéressant de (4.23) est celui où f n'est autre que la 4-vitesse u^α. On a alors le résultat suivant : si $u^\alpha \in \mathrm{C}^{0,2}$ (Im ($\mathscr{B}$)), on a la condition suivante de compatibilité :

$$\left[\!\left[\frac{\delta^2 u^\alpha}{\delta s^2}\right]\!\right] = c\mathrm{N}_0\mathrm{A}^\lambda \{ \delta^\alpha_\lambda(c\mathrm{D_N N_0} - d_V\hat{\mathrm{N}}_0) - g_{\lambda\beta}\hat{u}^\alpha_{\cdot|k}\gamma^{kj}\phi^{\beta}_{\cdot|j} \} - 2c\mathrm{N}_0\hat{\mathrm{A}}^\alpha_{\cdot|j}\mathrm{V}^j + c^2\mathrm{N}_0^2\mathscr{A}^\alpha, \tag{4.26}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{A}_\beta \equiv [\![\mathrm{D_N}u_\beta]\!], \qquad \mathscr{A}^\alpha \equiv [\![\Box_\mathrm{N} u^\alpha]\!] .$$

Si $u^\alpha \in \mathrm{C}^{1,2}$ (Im ($\mathscr{B}$)), l'équation (4.26) se réduit à une forme identique à (4.25). L'équation (4.26) interviendra dans une étude ultérieure concernant la propagation des fronts d'ondes dans les fluides relativistes à spin.

Remarque (*a*). — Plus généralement que (4.20) et (4.25), on peut montrer facilement que si $f \in C^{m-1,m}$ (Im ($\mathscr{B}$)), alors

$$(4.27) \qquad [\![\underbrace{\nabla_\alpha\nabla_\mu \dots}_{m \text{ dérivées}} f]\!] = \underbrace{N_\alpha N_\mu \dots}_{m \text{ fois}} \mathscr{F}_{(m)} \Leftrightarrow [\![\underbrace{D^\alpha_T D^\beta_T \dots}_{m \text{ dérivées}} f]\!] = 0 ,$$

et

$$(4.28) \qquad \left[\!\!\left[\frac{\delta^m f}{\delta s^m}\right]\!\!\right] = (-cN_0)^m \mathscr{F}_{(m)} \Leftrightarrow \left[\!\!\left[\frac{\mathscr{D}^m f}{\mathscr{D} s^m}\right]\!\!\right] = 0 ,$$

où $\mathscr{F}_{(m)}$ est défini par

$$\mathscr{F}_{(m)} \equiv [\![\underbrace{N^\alpha N^\mu \dots}_{m \text{ fois}} \underbrace{\nabla_\alpha\nabla_\mu \dots}_{m \text{ fois}} f]\!] .$$

Remarque (*b*). — Les conditions de compatibilité pour les discontinuités des dérivées secondes mixtes du genre $\nabla_\alpha\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right)$ et $\frac{\delta}{\delta s}(\nabla_\alpha f)$ peuvent également être obtenues à partir de formules établies au chapitre III. En particulier, $\left[\!\!\left[\nabla_\alpha\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right)\right]\!\!\right]$ est obtenue directement à partir de l'équation qui suit (3.31) ; et si $u^\alpha \in C^1$ (Im ($\mathscr{B}$)), alors

$$\left[\!\!\left[\frac{\delta}{\delta s}(\nabla_\alpha f)\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\nabla_\alpha\left(\frac{\delta f}{\delta s}\right)\right]\!\!\right] - (\nabla_\alpha u^\beta)_\Sigma [\![\nabla_\beta f]\!] .$$

5. VALIDITÉ DES ÉQUATIONS OBTENUES EN 4 EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Tous les champs physiques, autres que la gravitation, que l'on peut considérer en physique relativiste des milieux continus pour des théories relativement complexes (par exemple, les théories concernant les fluides parfaits, newtoniens, électromagnétiques ou non, conducteurs de la chaleur ou non, les solides déformables, les milieux déformables à spin,...), peuvent être représentés à l'aide de 4-vecteurs ([16]), en général P. U. (la 4-vitesse et le 4-courant sont des exceptions), ou des scalaires dans l'espace-temps. Il s'ensuit que, pour les dérivées considérées dans les chapitres précédents — qui sont au maximum des dérivées secondes —, la géométrie d'un espace-temps courbe intervient par sa courbure $R^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta}$ dans des expressions du genre

$$(5.1) \qquad 2\nabla_{[\delta}\nabla_{\gamma]} f_\beta = f_\alpha R^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta}$$

([16]) Si l'on a des tenseurs du second ordre, il suffit de les décomposer à l'aide de l'opérateur $P^{\alpha\beta}$ (Cf. équations 2.10) et d'appliquer les relations données au paragraphe 4.1 pour calculer les discontinuités.

où $R^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta}$ fait intervenir, au plus, des dérivées secondes de la métrique $g_{\alpha\beta}$. Alors, si $g_{\alpha\beta} \in C^2$ (Im ($\mathscr{B}$)), on a évidemment à travers Σ :

$$(5.2) \qquad [\![R^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta}]\!] = 0 .$$

C'est dire que nous ne considérons pas d'ondes gravitationnelles. (5.1) fournit alors avec (5.2)

$$(5.3) \qquad 2[\![\nabla_{[\delta}\nabla_{\gamma]}f_{\beta}]\!] = [\![f_{\alpha}]\!](R^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta})_{\Sigma} ;$$

et si $f_{\alpha} \in C^{0,1}$ (Im ($\mathscr{B}$)) ou $C^{0,2}$ (Im ($\mathscr{B}$)), il vient

$$(5.4) \qquad [\![\nabla_{\delta}\nabla_{\gamma}f_{\beta}]\!] = [\![\nabla_{\gamma}\nabla_{\delta}f_{\beta}]\!] .$$

On peut donc dire que les conditions de compatibilité — *pour les discontinuités* — (4.4)-(4.12) sont également valables en relativité générale. Il en est de même pour les conditions (4.18)-(4.20), (4.23)-(4.26) si f est un 4-vecteur, ainsi que pour (4.21)-(4.22) si f est un scalaire, et pour (4.27)-(4.28) si f est un 4-vecteur ou un scalaire. Suivant l'expression de Coburn [*27*], dans ces cas, les conditions de discontinuité ne sont pas « affectées par la gravitation ».

Dans le cas d'un espace-temps courbe et si l'on veut étudier le problème de Cauchy du champ gravitationnel, le champ $f(x)$ considéré peut être la métrique $g_{\alpha\beta}$. Nous renvoyons aux études faites par de nombreux auteurs (Cf. Synge et O'Brien [*29*], Lichnerowicz [*8*], Thomas [*6*] [*7*],...) ([17]). Les cas où l'on considère simultanément des champs physiques $f(x)$ (comme la 4-vitesse) et la métrique $g_{\alpha\beta}$, tels que $f \in C^1_{(M)}$ (Im ($\mathscr{B}$)) et $g_{\alpha\beta} \in C^{1,3}$ (Im ($\mathscr{B}$)), qui conduisent aux chocs relativistes ont été étudiés par Taub [*30*], Israel [*31*], Y. Fourès-Bruhat [*32*] (pour des chocs faibles) et Lichnerowicz [*33*] (pour la MHD).

([17]) Voir les références citées dans Coburn [*27*].

ANNEXE

EMPLOI DE TENSEURS-DISTRIBUTIONS

(Cf. Lichnerowicz [*17*])

Soient Y^- et Y^+ les fonctions caractéristiques (fonctions de Heaviside) de Im ($\mathscr{B}$) $- \Sigma^-$ et Im ($\mathscr{B}$) $- \Sigma^+$ respectivement. Soit f une fonction à valeurs tensorielles sur V^4, de classe $C^1_{(M)}$ (Im ($\mathscr{B}$) $\subset V^4$). On définit la fonction p-tensorielle *(p-tenseur-distribution)* f^D à support compact sur Im ($\mathscr{B}$) par (au sens des distributions)

$$f^D = Y^- f + Y^+ f.$$

Alors, on démontre (Cf. Lichnerowicz [*17*]) la formule suivante dans Im ($\mathscr{B}$) :

$$\nabla_\alpha f^D = N_\alpha \bar{\delta}[\![f]\!] + (\nabla_\alpha f)^D, \tag{A.1}$$

où $\bar{\delta}$ est la distribution de Dirac dont le support est sur Σ, $\nabla_\alpha f^D$ est le tenseur-distribution dérivé, au sens des distributions, du p-tenseur-distribution f^D, $(\nabla_\alpha f)^D$ désigne le tenseur-distribution défini par la dérivée covariante usuelle $\nabla_\alpha f$ du tenseur f, tenseur ordinaire défini presque partout dans Im ($\mathscr{B}$). $N_\alpha \bar{\delta}[\![f]\!]$ est la *couche tensorielle* attachée à $[\![f]\!]$. M. Lichnerowicz montre alors que l'on a

$$\bar{\delta}[\![\nabla_\alpha f]\!] = \nabla_\alpha(\bar{\delta}[\![f]\!]) + N_\alpha \underline{\delta f} \tag{A.2}$$

où $\underline{\delta f}$ — la *discontinuité infinitésimale* de f — est un p-tenseur-distribution à support sur Σ. Si $f \in C^{0,1}$ (Im ($\mathscr{B}$)), alors (A.2) se réduit, avec $\bar{\delta}[\![f]\!] = 0$, à

$$\bar{\delta}[\![\nabla_\alpha f]\!] = N_\alpha \underline{\delta f}. \tag{A.3}$$

Considérons maintenant $f \in C^{0,2}$ (Im ($\mathscr{B}$)) avec $g_{\alpha\beta} \in C^2$ (Im ($\mathscr{B}$)) ; alors, de (A.3) et (2.42), M. Lichnerowicz déduit qu'il existe un p-tenseur-distribution $\bar{\bar{f}}$ à support sur Σ tel que

$$\bar{\delta}[\![\nabla_\alpha \nabla_\beta f]\!] \equiv \bar{\delta}[\![\nabla_\beta \nabla_\alpha f]\!] = (\nabla_\alpha N_\beta)\underline{\delta f} + N_\alpha \nabla_\beta(\underline{\delta f}) + N_\beta \nabla_\alpha(\underline{\delta f}) + N_\alpha N_\beta \bar{\bar{f}}. \tag{A.4}$$

Le second membre est bien symétrique en α et β d'après (2.42).

Les équations (A.2), (A.3) et (A.4) correspondent respectivement à nos équations $(4.4)_2$, $(4.5)_2$ et (4.18). C'est dire que l'on a

$$F \equiv \underline{\delta f}, \qquad \mathscr{F} \equiv \bar{\bar{f}}.$$

Pour retrouver (4.18) à partir de (A.4), il faut utiliser l'équation qui précède (3.12) ainsi que le résultat (3.2). Pour retrouver le résultat général (4.15) dans lequel $f \in C^2_{(M)}$ (Im ($\mathscr{B}$)), il faut appliquer (A.2) à $\nabla_\mu f$ et remplacer les dérivations covariantes par des dérivations par rapport aux a^i ; ce qui serait assez compliqué.

RÉFÉRENCES

[*1*] J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes*. Hermann, Paris, 1903.

[*2*] T. Y. THOMAS, Extended Compatibility Conditions for the Study of Surfaces of Discontinuity in Continuum Mechanics. *Jl. Math. and Mech.*, v. **6**, 1957, p. 311-322 ; Erratum, *ibid.*, 1957, p. 907-908.

[3] C. TRUESDELL et R. A. TOUPIN, The Classical Field Theories. *Handbuch der Physik*, Bd. III/1, p. 266-793. Ed. S. Flugge, Springer-Verlag, Berlin, 1960.

[4] B. D. COLEMAN, M. E. GURTIN, I. HERRERA et C. TRUESDELL, *Wave Propagation in Dissipative Materials*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1965.

[5] G. A. MAUGIN, Acceleration Waves in Simple and Linear Viscoelastic Micropolar Materials. *Int. Jl. Engng. Sci.*, v. **12**, 1974, p. 143-157.

[6] T. Y. THOMAS, On the Propagation and Decay of Gravitational Waves. *J. Math. Anal. Appl.*, v. **3**, 1961, p. 315-335.

[7] T. Y. THOMAS, Hypersurfaces in Einstein-Riemann Space and Their Compatibility Conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, v. **7**, 1963, p. 225-246.

[8] A. LICHNEROWICZ, Théorie des rayons en hydrodynamique et magnétohydrodynamique relativistes. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, v. **7**, 1967, p. 271-302.

[9] C. B. RAYNER, Elasticity in General Relativity. *Proc. Roy. Soc. London*, t. **272A**, 1963, p. 44-53.

[10] A. BRESSAN, Onde ordinarie di discontinuità nei mezzi elastici con deformazioni finite in relatività generale. *Riv. Mat. Univ. Parma*, v. **4**, 1963, p. 23-40.

[11] R. A. GROT, Relativistic Theory of the Propagation of Wave Fronts in Nonlinear Elastic Solids. *Int. Jl. Engng. Sci.*, v. **6**, 1968, p. 295-307.

[12] B. CARTER, Speed of Sound in High-pressure General Relativistic Solids. *Phys. Rev.*, v. **D7**, 1973, p. 1590-1593.

[13] E. VARLEY et E. CUMBERBATCH, Nonlinear Theory of Wave-front Propagation. *Jl. Inst. Math. Applics*, v. **1**, 1965, p. 101-112.

[14] A. H. TAUB, Variational Principles in General Relativity (Lecture 3), in *Relativistic Fluid Dynamics*, Proc. C. I. M. E., Bressanone, 1970, Ed. C. Cattaneo, Cremonese, Rome, 1971.

[15] G. A. MAUGIN, Relativistic Theory of Magnetoelastic Interactions-I, *J. Phys. A. Gen.*, v. **5**, 1972, p. 786-802 [et les articles suivants de cette série : *ibid.*, v. **6**, 1973, p. 306-321, p. 1647-1666 ; v. **7**, 1974, p. 818-856.

[16] G. A. MAUGIN, Sur les fluides relativistes à spin. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, v. **20**, n° 1, 1974, p. 41-68.

[17] A. LICHNEROWICZ, Ondes de choc, ondes infinitésimales et rayons en hydrodynamique et en magnétohydrodynamique relativistes, in *Relativistic Fluid Dynamics*, p. 87-203. Proc. C. I. M. E., Bressanone, 1970. Ed. C. Cattaneo, Cremonese, Rome, 1971.

[18] A. H. TAUB, Relativistic Hydrodynamics, *Lectures in Applied Mathematics*, Vol. **8**, p. 170-193, *Amer. Math. Soc. Providence, R. I.*, 1967.

[19] J. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus*. Springer-Verlag, Berlin, 1954.

[20] G. A. MAUGIN, Champ des déformations d'un milieu continu dans l'espace-temps de Minkowski. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **273A**, 1971, p. 65-68.

[21] G. A. MAUGIN, An Action Principle in General Relativistic Magnetohydrodynamics. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, v. **16**, 1972, p. 133-169.

[22] T. Y. THOMAS, *Concepts from Tensor Analysis and Differential Geometry*, 2nd Edition, Academic Press, New York, 1963.

[23] L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1926.

[24] G. A. MAUGIN, Constitutive Equations for Heat Conduction in General Relativity. *J. Phys. A. Math.*, v. **7**, 1974, p. 465-484.

[25] P. CHADWICK et B. POWDRILL, Singular Surfaces in Linear Thermoelasticity. *Int. Jl. Engng. Sci.*, v. **3**, 1965, p. 561-595.

[26] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*. Masson, Paris, 1955.

[27] N. COBURN, Gravitational Characteristic Waves in Relativistic Equilibrium Fluids, in *Fluides et champ gravitationnel en relativité générale*. Coll. Intern. C. N. R. S., 1967. Éditions C. N. R. S., Paris, 1969.

[28] H. K. NICKERSON, D. C. SPENCER et N. E. STEENROD, *Advanced Calculus*. Van Nostrand, Princeton, N. J., 1959.

[29] J. L. SYNGE et S. O'BRIEN, Jump Conditions at Discontinuities in General Relativity. *Comm. of the Dublin Inst. for Adv. Studies*, Série A, v. **9**, 1953.

[30] A. H. TAUB, Singular Hypersurfaces in General Relativity. *Ill. J. of Math.*, v. **1**, 1957, p. 370-388.

[31] W. ISRAEL, Discontinuities in Spherically Symmetric Gravitational Fields and Shells of Radiation. *Proc. Roy. Soc. London*, t. **A248**, 1958, p. 404-414.

[32] Y. FOURES-BRUHAT, Fluides chargés de conductivité infinie. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 4 mai 1958, n° 18.

[33] A. LICHNEROWICZ, Ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, v. **5**, 1966, p. 37-75.

[34] C. CATTANEO, Formulation relativiste des lois physiques en relativité générale. *Cours professé au Collège de France*, 1961-1962 (polycopié).

(Manuscrit reçu le 30 janvier 1974)