

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MARCEL BRAY

**La magnétohydrodynamique relativiste étudiée
par la méthode de G. F. R. Ellis**

Annales de l'I. H. P., section A, tome 23, n° 3 (1975), p. 303-311

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__23_3_303_0

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

La magnétohydrodynamique relativiste étudiée par la méthode de G. F. R. Ellis.

par

Marcel BRAY

ABSTRACT. — This article proposes to study stream-lines and the trajectories of the magnetic field in relativistic magnetohydrodynamics according to G. F. R. Ellis' method [1].

I. INTRODUCTION

L'espace fondamental est une variété de Riemann V_4 munie d'une métrique hyperbolique normale de signature $+- - -$.

Le tenseur de Ricci est défini par les formules

$$R_{\alpha\beta} = R^{\nu}_{\beta\nu\alpha}; \quad R^{\nu}_{\beta\lambda\alpha} = \partial_{\lambda}(\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}) - \partial_{\alpha}(\Gamma^{\nu}_{\beta\lambda}) + \Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha}\Gamma^{\nu}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\lambda}\Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha}.$$

Nous désignerons par $U^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial s}$ le champ des vecteurs unitaires ($U^{\alpha}U_{\alpha} = 1$) tangents aux lignes de courant.

Fondée sur l'emploi systématique de l'identité de Ricci

$$2X_{\alpha;[\beta;\gamma]} = X^{\sigma}R_{\sigma\alpha\beta\gamma}$$

la méthode de G. F. R. Ellis sera appliquée à l'étude des lignes de courant et des trajectoires de $\vec{h}$ en magnétohydrodynamique relativiste.

II. LIGNES DE COURANT

La contraction par $\vec{U}$ de l'identité de Ricci appliquée à $\vec{U}$

$$(U_{\alpha;\beta;\gamma} - U_{\alpha;\gamma;\beta} - U^{\sigma}R_{\sigma\alpha\beta\gamma})U^{\gamma} = 0$$

permet d'écrire en introduisant la notation $(\) \equiv U^\nu \nabla_\nu (\)$

$$(U_{\alpha;\beta})^\cdot - \nabla_\beta(\dot{U}_\alpha) + U_{\alpha;\gamma} U^\gamma_{;\beta} - R_{\alpha\sigma\gamma\beta} U^\sigma U^\gamma = 0$$

Si l'on désigne par $\pi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - U_\alpha U_\beta$ l'opérateur de projection dans l'espace associé à $\vec{U}$, la définition $A_{\alpha\beta} = \pi_\alpha{}^\rho \pi_\beta{}^\sigma U_{\rho;\sigma}$ entraîne

$$A_{\alpha\beta} = U_{\alpha;\beta} - \dot{U}_\alpha U_\beta; \quad A_{\alpha\beta} U^\beta = 0.$$

Il vient

$$(A_{\alpha\beta})^\cdot = \dot{\pi}_\alpha{}^\rho \pi_\beta{}^\sigma U_{\rho;\sigma} + \pi_\alpha{}^\rho \dot{\pi}_\beta{}^\sigma U_{\rho;\sigma} + \pi_\alpha{}^\rho \pi_\beta{}^\sigma \langle U_{\rho;\sigma} \rangle$$

Soit, en portant dans cette expression la valeur de $\langle U_{\rho;\sigma} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle A_{\alpha\beta} \rangle = & -U_\alpha \dot{U}^\rho U_{\rho;\beta} + U_\alpha U_\beta (\dot{U}^\rho \dot{U}_\rho) - \dot{U}_\alpha \dot{U}_\beta - U_\beta \dot{U}^\rho U_{\alpha;\rho} + \pi_\alpha{}^\rho \pi_\beta{}^\sigma \dot{U}_{\rho;\sigma} \\ & - A_{\alpha\gamma} A^\gamma_{;\beta} + R_{\alpha\rho\sigma\beta} U^\rho U^\sigma \end{aligned}$$

On en tire

$$\pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \langle A_{\alpha\beta} \rangle = -\dot{U}_\mu \dot{U}_\nu + \pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \dot{U}_{\alpha;\beta} - A_{\mu\gamma} A^\gamma_{;\nu} + R_{\mu\rho\sigma\nu} U^\rho U^\sigma$$

D'où, par contraction avec $g^{\mu\nu}$:

$$\pi^{\alpha\beta} (A_{\alpha\beta})^\cdot = \nabla_\alpha(\dot{U}^\alpha) - A_{\alpha\beta} A^{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta$$

Calculant maintenant $(A_{\alpha\beta})^\cdot$ à partir de la forme $A_{\alpha\beta} = U_{\alpha;\beta} - \dot{U}_\alpha U_\beta$ on établit aisément les relations

$$\langle A_{\alpha\beta} \rangle = \langle U_{\alpha;\beta} \rangle - \ddot{U}_\alpha U_\beta - \dot{U}_\alpha \dot{U}_\beta; \quad (U^\alpha_{;\alpha})^\cdot = \nabla_\alpha(\dot{U}^\alpha) - A_{\alpha\beta} A^{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta$$

Nous poserons dorénavant

$$U^\alpha_{;\alpha} \equiv \theta; \quad A_{(\alpha\beta)} \equiv \sigma_{\alpha\beta} + \frac{\theta}{3} \pi_{\alpha\beta}; \quad A_{[\alpha\beta]} \equiv \omega_{\alpha\beta}$$

D'après les équations d'Einstein avec terme cosmologique

$$R_{\alpha\beta} = \chi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right) + \Lambda g_{\alpha\beta}; \quad \chi = 8\pi$$

dans lesquelles $T_{\alpha\beta}$ représente le tenseur magnétohydrodynamique [2]

$$T_{\alpha\beta} = (c^2 r f + \mu |h|^2) U_\alpha U_\beta - \left(p + \frac{\mu}{2} |h|^2 \right) g_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta$$

on a

$$R_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = \chi (c^2 r f + \mu |h|^2 + 2p) + \Lambda$$

D'où l'équation de Rauchaudhuri

$$\dot{\theta} = \nabla_\alpha(\dot{U}^\alpha) - 2(\sigma^2 - \omega^2) - \frac{\theta^2}{3} - \frac{\chi}{2} (c^2 r f + \mu |h|^2 + 2p) - \Lambda$$

avec

$$2\sigma^2 = \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}; \quad 2\omega^2 = \omega^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}.$$

Introduisant avec G. F. R. Ellis la quantité $\dot{l}/l = \frac{\theta}{3}$ nous avons

$$\frac{3\ddot{l}}{l} = \dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = \nabla_\alpha(\dot{U}^\alpha) - 2(\sigma^2 - \omega^2) - \frac{\chi}{2}(c^2 r f + \mu |h|^2 + 2p) - \Lambda$$

Expression qui fait apparaître le paramètre de décélération

$$q \equiv -\frac{\ddot{l}}{l} H^{-2}; \quad H = \frac{\theta}{3}$$

Par antisymétrisation de $\pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \langle A_{\alpha\beta} \rangle$ il vient

$$\pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \dot{\omega}_{\alpha\beta} = \pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \dot{U}_{[\alpha;\beta]} - A_{[\mu|\gamma|} A_{\nu]}^\gamma,$$

soit encore

$$\pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \dot{\omega}_{\alpha\beta} = \pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \dot{U}_{[\alpha;\beta]} + 2\sigma_{[\mu}^\gamma \omega_{\nu]\gamma} - \frac{2\theta}{3} \omega_{\mu\nu}$$

On déduit de cette relation par contraction en $\omega^{\mu\nu}$

$$(\omega^2)^\cdot = \omega^{\alpha\beta} \dot{U}_{[\alpha;\beta]} - \frac{4\theta}{3} \omega^2 + 2\sigma_{[\mu}^\gamma \omega^{\mu\nu} \omega_{\nu]\gamma}$$

Il est commode de définir un vecteur $2\omega^\alpha = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} U_\beta \omega_{\gamma\delta}$, $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$: tenseur de Levi-Civita.

D'après la propriété $\omega_{\alpha\beta} U^\beta = 0$ on a

$$\pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \dot{\omega}_{\alpha\beta} = \dot{\omega}_{\mu\nu} - U_\mu \omega_{\nu\alpha} \dot{U}^\alpha + U_\nu \omega_{\mu\alpha} \dot{U}^\alpha$$

puis

$$\pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \dot{U}_{[\alpha;\beta]} = \dot{U}_{[\mu;\nu]} + U_{[\mu} \ddot{U}_{\nu]} + U_{\alpha;[\mu} U_{\nu]}^\alpha$$

Portant ces expressions dans celle de $\dot{\omega}^\alpha$ on trouve

$$2\dot{\omega}^\xi = \eta^{\xi\rho\mu\nu} \langle \dot{U}_\rho \omega_{\mu\nu} \rangle + \eta^{\xi\rho\mu\nu} U_\rho \left\langle \dot{U}_{[\mu;\nu]} + 2\sigma_{[\mu}^\gamma \omega_{\nu]\gamma} - \frac{2\theta}{3} \omega_{\mu\nu} \right\rangle$$

Quelques transformations conduisent à la forme équivalente :

$$2(l^2 \dot{\omega}^\xi) = l^2 \eta^{\xi\rho\mu\nu} \langle \dot{U}_\rho \omega_{\mu\nu} + U_\rho \{ \dot{U}_{[\mu;\nu]} + 2\sigma_{[\mu}^\gamma \omega_{\nu]\gamma} \} \rangle$$

dont la projection sur l'espace associé à $\vec{U}$ s'écrit

$$\pi_\xi^\tau (l^2 \dot{\omega}^\xi) = \frac{l^2}{2} \eta^{\tau\rho\mu\nu} U_\rho \dot{U}_{\mu;\nu} + l^2 \sigma_\xi^\tau \omega^\xi$$

Par un calcul similaire à celui utilisé dans le cas de l'antisymétrie on peut trouver

$$\pi_{(\mu}^\alpha \pi_{\nu)}^\beta \dot{A}_{\alpha\beta} = \pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \dot{A}_{(\alpha\beta)} = -\dot{U}_\mu \dot{U}_\nu + \pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \dot{U}_{(\alpha;\beta)} - A_{(\mu|\gamma|} A_{\nu)}^\gamma + R_{\mu\rho\sigma\nu} U^\rho U^\sigma$$

Or

$$A_{(\mu|\gamma|} A_{\nu)}^\gamma = \sigma_{\mu\gamma} \sigma_{\nu}^\gamma + \omega_{\mu\gamma} \omega_{\nu}^\gamma + \frac{2\theta}{3} \sigma_{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{9} \pi_{\mu\nu}$$

En outre

$$\pi_{\mu}^{\alpha} \pi_{\nu}^{\beta} \dot{A}_{(\alpha\beta)} = \pi_{\mu}^{\alpha} \pi_{\nu}^{\beta} \dot{\sigma}_{\alpha\beta} + \frac{\dot{\theta}}{3} \pi_{\mu\nu}; \quad \pi^{\alpha\beta} \dot{\sigma}_{\alpha\beta} = 0$$

Il vient

$$\pi_{\mu}^{\alpha} \pi_{\nu}^{\beta} \dot{A}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (\pi^{\alpha\beta} \dot{A}_{(\alpha\beta)}) = \pi_{\mu}^{\alpha} \pi_{\nu}^{\beta} \dot{\sigma}_{\alpha\beta} + \dot{\theta} \left(\frac{1}{3} \pi_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \right)$$

Le tenseur figurant au premier membre de cette relation est à trace nulle et dans le second membre on peut remplacer $\dot{\theta}$ conformément à l'équation de Raychaudhuri ce qui fournit la loi de propagation de $\sigma_{\alpha\beta}$ dans l'espace associé à $\bar{U}$.

On peut faire apparaître dans cette loi un terme spécial lié au tenseur de Weyl

$$C^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = R^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} - 2g^{[\alpha}_{[\gamma} R^{\beta]}_{\delta]} + \frac{R}{3} g^{[\alpha}_{[\gamma} g^{\beta]}_{\delta]}.$$

Posant $\Psi \equiv C_{\mu\rho\nu\sigma} U^{\rho} U^{\sigma}$ on a

$$\Psi = \left\{ R_{\mu\rho\nu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} g_{\mu\sigma} R_{\rho\nu} + \frac{1}{2} g_{\rho\nu} R_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} R_{\mu\nu} + \frac{R}{6} [g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}] \right\} U^{\rho} U^{\sigma}$$

En vertu des équations d'Einstein

$$R_{\alpha\beta} U^{\beta} = U_{\alpha} \left\{ \frac{\chi}{2} (c^2 r f + \mu |h|^2 + 2p) + \Lambda \right\}$$

d'où :

$$\Psi = R_{\mu\rho\nu\sigma} U^{\rho} U^{\sigma} - \pi_{\mu\nu} \left\langle \frac{\chi}{6} (c^2 r f + 2p) + \frac{\Lambda}{3} \right\rangle + \frac{\chi\mu}{2} h_{\mu} h_{\nu}$$

Comme $-\omega_{\mu\gamma} \omega^{\gamma}_{\nu} = \omega_{\mu} \omega_{\nu} - (\omega^{\rho} \omega_{\rho}) \pi_{\mu\nu}$; $\omega^{\alpha} \omega_{\alpha} = -\omega^2$ on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \pi_{\mu}^{\alpha} \pi_{\nu}^{\beta} \dot{\sigma}_{\alpha\beta} = & -\dot{U}_{\mu} \dot{U}_{\nu} + \pi_{\mu}^{\alpha} \pi_{\nu}^{\beta} \dot{U}_{(\alpha;\beta)} - \sigma_{\mu\gamma} \sigma^{\gamma}_{\nu} + \omega_{\mu} \omega_{\nu} - \frac{2\theta}{3} \sigma_{\mu\nu} \\ & - \frac{\pi_{\mu\nu}}{3} \langle \nabla_{\alpha} (\dot{U}^{\alpha}) - 2\sigma^2 - \omega^2 \rangle + \frac{\chi\mu}{2} \left\langle \frac{\pi_{\mu\nu}}{3} |h|^2 + h_{\mu} h_{\nu} \right\rangle - E_{\mu\nu} \end{aligned}$$

avec $E_{\mu\nu} = C_{\mu\rho\nu\sigma} U^{\rho} U^{\sigma}$.

La multiplication par $\sigma^{\mu\nu}$ fournirait la quantité $(\sigma^2)^{\cdot}$ soit

$$\begin{aligned} (\sigma^2)^{\cdot} = & -\sigma^{\alpha\beta} \dot{U}_{\alpha} \dot{U}_{\beta} + \sigma^{\alpha\beta} \dot{U}_{(\alpha;\beta)} - \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\gamma} \sigma^{\gamma}_{\nu} + \sigma^{\alpha\beta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta} \\ & - \frac{4\theta}{3} \sigma^2 + \frac{\chi\mu}{2} (\sigma^{\alpha\beta} h_{\alpha} h_{\beta}) - (\sigma^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

L'identité de Ricci entraîne $g^{\alpha\gamma}\pi^{\mu\beta} \langle U_{\alpha;\beta;\gamma} - U_{\alpha;\gamma;\beta} - U^\sigma R_{\sigma\alpha\beta\gamma} \rangle = 0$ ou $\pi^{\mu\beta} \langle \nabla_\gamma(U^\gamma{}_\beta) - \theta_\beta \rangle = 0$; $\theta_\beta \equiv \nabla_\beta \theta$ soit, en remplaçant $U_{\alpha;\beta}$ par

$$\sigma_{\alpha\beta} + \frac{\theta}{3} \pi_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \dot{U}_\alpha U_\beta$$

$$\pi^{\mu\beta} \left\langle \nabla_\gamma(\sigma^\gamma{}_\beta + \omega^\gamma{}_\beta) - \frac{2\theta_\beta}{3} + \dot{U}^\gamma(\sigma_{\beta\gamma} + \omega_{\beta\gamma}) \right\rangle = 0$$

ou équivalamment

$$\nabla_\gamma(\sigma^{\gamma\mu} + \omega^{\gamma\mu}) + 2(\sigma^2 - \omega^2)U^\mu - \frac{2}{3}\pi^{\mu\beta}\theta_\beta + (\sigma^\mu{}_\gamma + \omega^\mu{}_\gamma)\dot{U}^\gamma = 0.$$

Puisque $U_{[\alpha;\beta;\gamma]} = 0$, $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}U_{[\alpha;\beta;\gamma]}U_\delta = 0$ soit en développant

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}U_\delta \langle \omega_{\alpha\beta;\gamma} + \dot{U}_\alpha U_{\beta;\gamma} \rangle = 0$$

On établit aisément les relations $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}U_\delta \dot{U}_\alpha U_{\beta;\gamma} = 2(\omega^\alpha \dot{U}_\alpha)$

$$2\nabla_\gamma(\omega^\gamma) = \eta^{\gamma\delta\alpha\beta}\omega_{\delta\gamma}\omega_{\alpha\beta} - 2(\omega^\alpha \dot{U}_\alpha) + \eta^{\gamma\delta\alpha\beta}U_\delta\omega_{\alpha\beta;\gamma}$$

A l'aide de ces résultats et de la remarque $\omega_{\alpha\beta}\omega^{*\alpha\beta} = 0$

$$2\omega^{*\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta\rho\sigma}\omega_{\rho\sigma} = 2[\omega^\alpha U^\beta - \omega^\beta U^\alpha]$$

il vient

$$\nabla_\alpha(\omega^\alpha) + 2(\omega^\alpha \dot{U}_\alpha) = 0$$

Toujours d'après l'identité de Ricci écrite $Z_{\alpha\mu\nu} \equiv 2U_{\alpha;[\mu;\nu]} - U^\sigma R_{\sigma\alpha\mu\nu} = 0$ on a $U_\rho \eta_{(\alpha}^{\rho\mu\nu} Z_{\beta)\mu\nu} = 0$.

Quelques réductions basées sur le calcul de

$$U_{\alpha;\mu;\nu} = \nabla_\nu \left\langle \sigma_{\alpha\mu} + \frac{\theta}{3} \pi_{\alpha\mu} + \omega_{\alpha\mu} + \dot{U}_\alpha U_\mu \right\rangle$$

conduisent à la formule

$$\eta_{\beta}^{\rho\mu\nu} U_\rho U_{\alpha;\mu;\nu} = \eta_{\beta}^{\rho\mu\nu} U_\rho \left\langle (\sigma_{\alpha\mu} + \omega_{\alpha\mu})_{;\nu} + \frac{g_{\alpha\mu}}{3} \theta_{;\nu} \right\rangle + 2 \left(\dot{U}_\alpha - \frac{\theta}{3} U_\alpha \right) \omega_\beta$$

On en déduit

$$4\dot{U}(\lambda\omega_\tau) + 2\pi_\lambda^\alpha \pi_\tau^\beta U_\rho \eta_{(\alpha}^{\rho\mu\nu} \langle \sigma_{\beta)\mu;\nu} + \omega_{\beta)\mu;\nu} \rangle + \pi_\lambda^\alpha \pi_\tau^\beta U_\rho U^\sigma \eta_{(\alpha}^{\rho\mu\nu} R_{\beta)\sigma\mu\nu} = 0$$

Compte tenu des relations $R_{\alpha\beta} U^\beta = K U_\alpha$ le dernier terme peut être mis sous la forme $U_\rho U^\sigma \eta_{(\lambda}^{\rho\mu\nu} R_{\tau)\sigma\mu\nu} = U_\rho U^\sigma \eta_{(\lambda}^{\rho\mu\nu} C_{\tau)\sigma\mu\nu}$. Par conséquent en définissant $2H_{\lambda\tau} = U_\rho U^\sigma \eta_{(\lambda}^{\rho\mu\nu} C_{\tau)\sigma\mu\nu}$ on a

$$H_{\lambda\tau} + 2\dot{U}(\lambda\omega_\tau) + \pi_\lambda^\alpha \pi_\tau^\beta U_\rho \eta_{(\alpha}^{\rho\mu\nu} \langle \sigma_{\beta)\mu;\nu} + \omega_{\beta)\mu;\nu} \rangle = 0$$

$H_{\lambda\tau}$ s'exprime aussi à l'aide du tenseur polaire à droite comme suit

$$H_{\lambda\tau} = - U^\rho U^\sigma R_{\rho(\lambda\tau)\sigma}^* ; \quad R_{\alpha\beta\rho\sigma}^* = \frac{1}{2} \eta_{\rho\sigma}^{\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

Les équations de conservation appliquées au tenseur

$$T_{\alpha\beta} = EU_{\alpha}U_{\beta} - \mathcal{P}\pi_{\alpha\beta} - \mu h_{\alpha}h_{\beta}; \quad E = c^2rf + \frac{\mu}{2}|h|^2 - p; \quad \mathcal{P} = p + \frac{\mu}{2}|h|^2$$

fournissent entre autres la relation

$$\dot{E} + \theta \left\langle E + \mathcal{P} - \frac{\mu}{3}|h|^2 \right\rangle + \mu h^{\alpha}h^{\beta}\sigma_{\alpha\beta} = 0$$

L'évaluation du dernier terme découle des équations de Maxwell $\nabla_{\beta}[h^{\alpha}U^{\beta} - h^{\beta}U^{\alpha}] = 0$; ceci donne

$$\sigma_{\alpha\beta}h^{\alpha}h^{\beta} + \frac{2\theta}{3}|h|^2 + \frac{1}{2}(|h|^2)^{\cdot} = 0$$

Donc

$$\dot{E} - \frac{\mu}{2}(|h|^2)^{\cdot} + \theta \langle E + \mathcal{P} - \mu|h|^2 \rangle = 0$$

Signalons la décomposition suivante de $T_{\alpha\beta}$

$$T_{\alpha\beta} = (\rho U_{\alpha}U_{\beta} - p\pi_{\alpha\beta}) + M_{\alpha\beta} - \Pi_{\alpha\beta}$$

$$\rho = c^2rf - p; \quad M_{\alpha\beta} = \frac{\mu}{2}|h|^2U_{\alpha}U_{\beta} - \frac{\mu}{6}|h|^2\pi_{\alpha\beta};$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \mu \left\langle h_{\alpha}h_{\beta} + \frac{\pi_{\alpha\beta}}{3}|h|^2 \right\rangle; \quad \Pi^{\alpha}_{\alpha} = 0; \quad \Pi_{\alpha\beta}U^{\beta} = 0;$$

$$\Pi_{\alpha\beta}h^{\beta} = -\frac{4}{3}\mu|h|^2h_{\alpha}; \quad T^{\alpha\beta} = EU^{\alpha}U^{\beta} - P\pi^{\alpha\beta} - \Pi^{\alpha\beta};$$

$$E = \rho + \frac{\mu}{2}|h|^2; \quad P = p + \frac{\mu}{6}|h|^2;$$

$$\nabla_{\beta}(EU^{\beta}) + P\theta - U_{\alpha}\nabla_{\beta}(\Pi^{\alpha\beta}) = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\beta}(EU^{\beta}) + P\theta + \Pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = 0$$

Les équations du mouvement sont enfin

$$(E + P)\dot{U}^{\alpha} - \pi^{\alpha\beta}P_{\beta} - \nabla_{\beta}(\Pi^{\alpha\beta}) - U^{\alpha}(\Pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}) = 0; \quad \Pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = \mu\sigma_{\alpha\beta}h^{\alpha}h^{\beta}$$

III. LES TRAJECTOIRES DE $\tilde{h}$.

Nous appliquerons maintenant les mêmes techniques à l'étude des trajectoires de $\tilde{h}$.

Posons

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} = \pi_{\alpha}^{\rho}\pi_{\beta}^{\sigma}h_{\rho;\sigma} = \pi_{\alpha}^{\rho} \langle h_{\rho;\beta} - \dot{h}_{\rho}U_{\beta} \rangle$$

Une contraction par $\tilde{U}$ de l'identité de Ricci en $\tilde{h}$ nous donne

$$U^{\gamma} \langle h_{\alpha;\beta;\gamma} - h_{\alpha;\gamma;\beta} - h^{\sigma}R_{\sigma\alpha\beta\gamma} \rangle = 0$$

soit

$$\langle h_{\alpha;\beta} \rangle - U^\gamma h_{\alpha;\gamma;\beta} - h^\sigma R_{\sigma\alpha\beta\gamma} U^\gamma = 0.$$

On en tire

$$(h^\alpha{}_{;\alpha}) - U^\gamma h^\beta{}_{;\gamma;\beta} + R_{\alpha\beta} h^\alpha U^\beta = 0$$

En vertu des équations d'Einstein $R_{\alpha\beta} U^\beta = K U_\alpha$; par conséquent $R_{\alpha\beta} h^\alpha U^\beta = 0$; il reste

$$\langle \nabla_\beta(h^\beta) \rangle = U^\gamma \nabla_\beta \nabla_\gamma(h^\beta) = \nabla_\beta(h^\beta) - h^{\beta;\alpha} U_{\alpha;\beta}$$

La relation se transcrit sous la forme

$$\begin{aligned} \langle \nabla_\beta(h^\beta) \rangle &= \nabla_\beta(\dot{h}^\beta) - \sigma_{\alpha\beta} h^{(\alpha;\beta)} - \frac{\theta}{3} \pi_{\alpha\beta} h^{(\alpha;\beta)} + \omega_{\alpha\beta} h^{[\alpha;\beta]} - h^{\beta;\alpha} \dot{U}_\alpha U_\beta; \\ \pi_{\alpha\beta} h^{(\alpha;\beta)} &= \nabla_\beta(h^\beta) - U^\beta \dot{h}_\beta \end{aligned}$$

Or les équations de Maxwell

$$\nabla_\beta[h^\alpha U^\beta - h^\beta U^\alpha] = 0 \Rightarrow \dot{h}^\alpha + \theta h^\alpha - U^\alpha \nabla_\beta(h^\beta) - h^\beta U_{\alpha;\beta} = 0$$

nous donnent $U_\alpha \dot{h}^\alpha - \nabla_\beta(h^\beta) = 0$. Donc

$$\langle \nabla_\beta(h^\beta) \rangle = \nabla_\beta(\dot{h}^\beta) - \sigma_{\alpha\beta} h^{(\alpha;\beta)} + \omega_{\alpha\beta} h^{[\alpha;\beta]} - h^{(\alpha;\beta)} \dot{U}_\alpha U_\beta + h^{[\alpha;\beta]} \dot{U}_{[\alpha} U_{\beta]}$$

Portant dans $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ la valeur de $\langle h_{\rho;\sigma} \rangle$ il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\alpha\beta} &= -\dot{U}_\alpha U^\rho h_{\rho;\beta} - U_\alpha \dot{U}^\rho h_{\rho;\beta} + \dot{U}_\alpha U_\beta (U^\rho \dot{h}_\rho) + U_\alpha U_\beta (\dot{U}^\rho \dot{h}_\rho) - \dot{U}_\beta \dot{h}_\alpha \\ &\quad - U_\beta (\dot{U}^\rho h_{\alpha;\rho}) + \dot{U}_\beta U_\alpha (U^\rho \dot{h}_\rho) + U_\alpha U_\beta (U^\rho \dot{U}^\sigma h_{\rho;\sigma}) \\ &\quad + \pi_\alpha{}^\rho \pi_\beta{}^\sigma \langle \nabla_\sigma(\dot{h}_\rho) - h_{\rho;\gamma} U^\gamma{}_{;\sigma} + h^\tau R_{\tau\rho\sigma\gamma} U^\gamma \rangle \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \mathcal{A}_{\alpha\beta} &= \pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \{ -\dot{U}_\alpha U^\rho h_{\rho;\beta} - \dot{h}_\alpha \dot{U}_\beta + \nabla_\beta(\dot{h}_\alpha) - h_{\alpha;\gamma} U^\gamma{}_{;\beta} + h^\rho R_{\rho\alpha\beta\sigma} U^\sigma \} \\ \pi^{\alpha\beta} \mathcal{A}_{\alpha\beta} &= \nabla_\beta(\dot{h}^\beta) - (h^{\beta;\gamma} U_{\gamma;\beta}) - (\dot{h}^\beta U_\beta) \end{aligned}$$

Par antisymétrisation en μ et ν

$$\begin{aligned} \pi_{[\mu}{}^\alpha \pi_{\nu]}{}^\beta \mathcal{A}_{\alpha\beta} &= \pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \mathcal{A}_{[\alpha\beta]} \\ &= \pi_{[\mu}{}^\alpha \pi_{\nu]}{}^\beta \{ -\dot{U}_\alpha U^\rho h_{\rho;\beta} - \dot{h}_\alpha \dot{U}_\beta + \dot{h}_{\alpha;\beta} - h_{\alpha;\gamma} U^\gamma{}_{;\beta} + h^\rho R_{\rho\alpha\beta\sigma} U^\sigma \} \end{aligned}$$

Par ailleurs, en calculant $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ à partir de

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} = h_{\alpha;\beta} - U_\alpha U^\rho h_{\rho;\beta} - \dot{h}_\alpha U_\beta + U_\alpha U_\beta (U^\rho \dot{h}_\rho)$$

on trouve

$$\pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \mathcal{A}_{[\alpha\beta]} = \pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \langle \{ h_{[\alpha;\beta]} \} - \dot{U}_{[\alpha} h_{\rho];\beta]} U^\rho - \dot{h}_{[\alpha} \dot{U}_{\beta]} \rangle$$

D'où en égalant les deux expressions

$$\pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \langle h_{[\alpha;\beta]} \rangle = \pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \{ \dot{h}_{[\alpha;\beta]} - h_{[\alpha;\gamma]} U^\gamma{}_{;\beta]} + h^\rho R_{\rho[\alpha\beta]\sigma} U^\sigma \}$$

Mais

$$\begin{aligned} \pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta h^\rho R_{\rho[\alpha\beta]\sigma} U^\sigma &= -\frac{1}{2} \pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta h^\rho U^\sigma R_{\rho\sigma\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2} h^\rho U^\sigma \langle R_{\rho\sigma\mu\nu} + U^\alpha R_{\rho\sigma\alpha[\mu} U_{\nu]} \rangle \\ &\quad - \pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta h_{[\alpha;\gamma]} U^\gamma{}_{;\beta]} = U^\gamma{}_{;[\mu} h_{\nu];\gamma} - U_{[\mu} h_{\nu];\gamma} \dot{U}^\gamma + U_{[\mu} U^\gamma{}_{;\nu]} U^\alpha h_{\alpha;\gamma} \end{aligned}$$

Soit en développant les deux premiers termes

$$- \pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta h_{[\alpha;\gamma]} U_{;\beta]}^\gamma \\ = \langle \sigma_{[\mu}^\gamma + \omega_{[\mu}^\gamma \rangle h_{\nu];\gamma} - \frac{\theta}{3} h_{[\mu;\nu]} + \frac{\theta}{3} \dot{h}_{[\mu} U_{\nu]} - h^\alpha U_{\alpha;\gamma} U_{[\mu} U_{;\nu]}^\gamma$$

Il reste finalement

$$\pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \langle h_{[\alpha;\beta]} \rangle = \pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \dot{h}_{[\alpha;\beta]} + \langle \sigma_{[\mu}^\gamma + \omega_{[\mu}^\gamma \rangle h_{\nu];\gamma} - \frac{\theta}{3} h_{[\mu;\nu]} + \frac{\theta}{3} \dot{h}_{[\mu} U_{\nu]} \\ - h^\alpha U_{\alpha;\gamma} U_{[\mu} U_{;\nu]}^\gamma - \frac{1}{2} h^\rho U^\sigma \langle R_{\rho\sigma\mu\nu} + U^\alpha R_{\rho\sigma\alpha[\mu} U_{\nu]} \rangle$$

D'autre part $\dot{\mathcal{A}}_{[\alpha\beta]} = \langle \dot{\pi}_\alpha^\rho \pi_\beta^\sigma + \pi_\alpha^\rho \dot{\pi}_\beta^\sigma \rangle h_{[\rho;\sigma]} + \pi_\alpha^\rho \pi_\beta^\sigma \langle h_{[\rho;\sigma]} \rangle$ donc

$$\pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \dot{\mathcal{A}}_{[\alpha\beta]} = 2\pi_{[\mu}^\sigma \dot{U}_{\nu]} U^\rho h_{[\rho;\sigma]} + \pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \langle h_{[\alpha;\beta]} \rangle$$

Ce qui relie les lois de propagation de $h_{[\alpha;\beta]}$ et $\mathcal{A}_{[\alpha\beta]}$.

Un calcul analogue aboutit, dans le cas de symétrisation, à la formule

$$\pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \langle h_{(\alpha;\beta)} \rangle = \pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \dot{h}_{(\alpha;\beta)} - \langle \sigma_{(\mu}^\gamma + \omega_{(\mu}^\gamma \rangle h_{\nu);\gamma} - \frac{\theta}{3} \langle h_{(\mu;\nu)} - \dot{h}_{(\mu} U_{\nu)} \rangle \\ - h^\alpha U_{\alpha;\gamma} \left\langle \sigma_{(\mu}^\gamma + \frac{\theta}{3} \pi_{(\mu}^\gamma + \omega_{(\mu}^\gamma \right\rangle U_{\nu)} + h^\rho U^\sigma \langle R_{\rho(\mu\nu)\sigma} - U_{(\mu} R_{\nu)\sigma\rho\alpha} U^\alpha \rangle$$

Puis $\pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \dot{\mathcal{A}}_{(\alpha\beta)} = -2\pi_{(\mu}^\sigma \dot{U}_{\nu)} h_{(\rho;\sigma)} U^\rho + \pi_\mu^\alpha \pi_\nu^\beta \langle h_{(\alpha;\beta)} \rangle$.

D'après l'identité de Ricci nous avons

$$g^{\alpha\gamma} \pi^{\mu\beta} \langle h_{\alpha;\beta;\gamma} - h_{\alpha;\gamma;\beta} - h^\sigma R_{\sigma\alpha\beta\gamma} \rangle = 0, \\ \pi^{\mu\beta} \langle \nabla_\gamma (h_{\mu}^\gamma{}_{;\beta}) - \nabla_\beta [\nabla_\nu (h^\nu{}_\mu)] - R_{\beta\sigma} h^\sigma{}_\mu \rangle = 0.$$

Or $\tilde{h}$ est un vecteur propre du tenseur de Ricci

$$R_{\beta\sigma} h^\sigma = L h_\beta; \quad 2L = \chi(\mu | h |^2 - c^2 r f + 2p) + 2\Lambda$$

Par conséquent $\pi_\mu^\beta \langle \nabla_\gamma (h^{\gamma;\beta}) - \nabla^\beta (h^\nu{}_\nu) \rangle = L h^\mu$.

Tout vecteur $\tilde{X}$ satisfaisant la relation $X_{[\alpha;\beta;\gamma]} = 0$, on a :

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{\alpha;\beta;\gamma} h_\delta = 0$$

Introduisons le vecteur $2\Omega^\alpha = \eta^{\alpha\beta\mu\nu} h_\beta h_{[\mu;\nu]} |h|^{-1}$; $\Omega^\alpha h_\alpha = 0$. Par inversion $h_{[\mu;\nu]} = \eta_{\mu\nu\rho\sigma} \Omega^\rho h^\sigma |h|^{-1}$.

$$2\nabla_\alpha (|h| \Omega^\alpha) + \eta^{\alpha\beta\mu\nu} h_{[\alpha;\beta]} h_{[\mu;\nu]} = 0 \Leftrightarrow \nabla_\alpha (|h| \Omega^\alpha) + h_{[\alpha;\beta]} h^{*\alpha\beta]} = 0$$

Dans l'équation

$$2h_\rho \eta_{(\alpha}^{\rho\mu\nu} h_{\beta);\mu;\nu} + h_\rho h^\sigma \eta_{(\alpha}^{\rho\mu\nu} R_{\beta)\sigma\mu\nu} = 0$$

qui est une conséquence directe de l'identité de Ricci, il est commode de faire apparaître le tenseur polaire à droite :

$$2R^*_{\alpha\beta\rho\sigma} = \eta_{\rho\sigma}^{\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

il vient alors

$$2h_\rho \eta_{(\alpha}^{\rho\mu\nu} h_{\beta);\mu;\nu} - 2h^\rho h^\sigma R^*_{\rho(\alpha\beta)\sigma} = 0$$

Par projection dans l'espace associé à $\tilde{U}$ et développement du second terme :

$$\pi_\lambda^\alpha \pi_\tau^\beta h_\rho \eta_{(\alpha}^{\rho\mu\nu} h_{\beta);\mu;\nu} = h^\rho h^\sigma \langle R^*_{\sigma(\lambda\tau)\rho} - U_\tau U^\beta R^*_{\sigma(\lambda\beta)\rho} - U_\lambda U^\beta R^*_{\sigma(\beta\tau)\rho} + U_\lambda U_\tau U^\alpha U^\beta R^*_{\sigma(\alpha\beta)\rho} \rangle$$

$$\text{Soit en définissant } \Phi^*_{\alpha\beta} = R^*_{\alpha\beta\mu\nu} U^{[\mu} h^{\nu]}; \quad {}^* \Phi_{\mu\nu} = R^*_{\alpha\beta\mu\nu} U^{[\alpha} h^{\beta]}$$

$$\pi_\lambda^\alpha \pi_\tau^\beta h_\rho \eta_{(\alpha}^{\rho\mu\nu} h_{\beta);\mu;\nu} = h^\sigma R^*_{\sigma(\lambda\tau)\rho} h^\rho - h^\rho \Phi^*_{\rho(\lambda} U_{\tau)} + U_{(\lambda} {}^* \Phi_{\tau)\rho} h^\rho + U_\lambda U_\tau (h^\alpha U^\beta \Phi^*_{\alpha\beta})$$

Le tenseur polaire à gauche $2^* R_{\alpha\beta\rho\sigma} = \eta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} R_{\mu\nu\rho\sigma}$ est lié au tenseur polaire à droite par l'égalité ${}^* R_{\alpha\beta\rho\sigma} = R^*_{\rho\sigma\alpha\beta}$. On en déduit $h^\alpha U^\beta \Phi^*_{\alpha\beta} = {}^* \Phi_{\alpha\beta} U^\beta h^\alpha$ puis

$$h^\rho \{ U_{(\lambda} ({}^* \Phi_{\tau)\rho} - \Phi^*_{\rho(\lambda} U_{\tau)} \} = \frac{h^\rho}{2} \langle U_\lambda ({}^* R_{\tau\rho\alpha\beta} + R^*_{\tau\rho\alpha\beta}) + U_\tau ({}^* R_{\lambda\rho\alpha\beta} + R^*_{\lambda\rho\alpha\beta}) \rangle U^\alpha h^\beta$$

Remarquant en outre que

$$h^\rho h^\sigma R^*_{\rho(\lambda\tau)\sigma} = \frac{h^\rho h^\sigma}{2} ({}^* R_{\sigma\lambda\tau\rho} + R^*_{\sigma\lambda\tau\rho})$$

on a

$$\pi_\lambda^\alpha \pi_\tau^\beta h_\rho \eta_{(\alpha}^{\rho\mu\nu} h_{\beta);\mu;\nu} = \frac{1}{2} h^\rho \hat{R}_{\rho\lambda\tau\sigma} h^\sigma + h^\rho U^\alpha h^\beta U_{(\lambda} \hat{R}_{\tau)\rho\alpha\beta} + \frac{U_\lambda U_\tau}{2} h^\alpha U^\beta (\hat{R}_{\alpha\beta\rho\sigma}) U^\rho h^\sigma$$

$$\text{avec } \hat{R}_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv {}^* R_{\alpha\beta\mu\nu} + R^*_{\alpha\beta\mu\nu}$$

RÉFÉRENCES

- [1] G. F. R. ELLIS, Relativistic Cosmology in *General relativity and cosmology*, edited by R. K. Sachs, p. 104-170, Int. School of Physics Enrico Fermi, course XL.
- [2] A. LICHNEROWICZ, Ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Section A, Vol. V, n° 1, 1966, p. 37-75.

(Manuscrit reçu le 7 mars 1975).