

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. CRUMEYROLLE

Schémas d'Einstein-Dirac en spin $1/2$ et généralisations

Annales de l'I. H. P., section A, tome 23, n° 3 (1975), p. 259-274

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__23_3_259_0>

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Schémas d'Einstein-Dirac en spin $1/2$ et généralisations

par

A. CRUMEYROLLE

Toulouse III

INTRODUCTION

Nous nous sommes d'abord proposés d'obtenir les résultats déjà donnés en théorie d'Einstein-Dirac par certains auteurs, mais sans introduire aucune technique de tétrapodes, utilisant essentiellement nos méthodes d'approche spinorielles. Nous examinons certains schémas et discutons brièvement l'hypothèse d'identification des tenseurs de torsion et de spin.

Les connexions spin-euclidiennes pseudo-riemanniennes (ou riemanniennes) ont un tenseur de Ricci identiquement nul. Nous envisageons l'hypothèse de réduction du groupe structural du fibré des repères de l'espace-temps à un groupe de spinorialité élargi.

Nous considérons enfin des systèmes de particules élémentaires ; pour ces systèmes l'amplifiée de l'algèbre de Clifford du fibré tangent par une algèbre commutative semble fournir un bon cadre pour obtenir la généralisation naturelle des équations de Dirac et des termes d'interactions fortes dans le lagrangien.

Nous interprétons dans ce cadre la notion d'hypercharge et d'isospin généralisés.

CHAPITRE II

SCHÉMAS D'EINSTEIN-DIRAC EN SPIN $1/2$ ET GÉNÉRALISATIONS

I

Nous reprenons autant que possible les notations du Chapitre I [3, d]. V est la variété espace-temps. Le groupe structural du fibré des repères orthonormés sera supposé, sauf au n° VII, réductible à la composante

connexe du groupe de Lorentz, et de plus il est postulé que V possède une structure Spin Q -spinorielle. D'après ces hypothèses il existe dans le fibré tangent complexifié un champ f de 2-vecteurs isotropes, f étant défini localement par un produit $e_1^* e_2^*$, (e_1^*, e_2^*) complétés par (e_1, e_2) de manière que $(e_1, e_2)_x$ et $(e_1^*, e_2^*)_x$ déterminent en $x \in V$ une décomposition de l'espace tangent en somme directe de deux sous-espaces totalement isotropes maximaux. Bien entendu les repères $(e_1, e_2, e_1^*, e_2^*)_x$ ne sont pas naturellement associées à des coordonnées locales.

Nous posons $g(e_\alpha, e_{\beta*}) = g_{\alpha\beta*}$, α et β variant de 1 à 2,

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha*\beta*} = 0.$$

Plus loin les indices latins $i, j, k \dots$ varieront de 1 à 4, $*$ = ± 2 .

Une forme hermitienne fondamentale non dégénérée $\mathcal{H}$ peut être introduite au moyen de :

$$\tilde{\beta}(\bar{u}f)vf = k\mathcal{H}(uf, vf)\gamma f,$$

k est un scalaire complexe qu'on peut choisir de manière à assurer l'hermiticité de $\mathcal{H}$ (on peut prendre $k = 1$), γ est le champ de spineurs purs déterminé à l'aide de f et de la conjugaison complexe [3, b]. L'expression locale explicite de k et de γ ne sera pas utilisée dans ce qui suit.

Des repères de Witt « adaptés » à la structure spinorielle peuvent se définir localement ; pour cela si $\det \|g_{ij}\| = g$, alors $(\det \|g_{\alpha\beta*}\|)^2 = -g$, nous posons $h = \det \|g_{\alpha\beta*}\|$ et ensuite :

$$e_{2*} = h^{1/2} e^{\alpha} = h^{1/2} g^{\alpha\lambda*} e_{\lambda*}, \quad e_{\underline{\alpha}} = h^{-1/2} e_{\alpha},$$

$$\underline{f}(x) = (e_1^* e_2^*)_x = f(x).$$

[La définition de $h^{1/2}$ au-dessus de l'ouvert $U_\alpha \cap U_\beta$ introduit une difficulté que l'on peut éliminer en supposant que le recouvrement des ouverts de trivialisations du fibré tangent est tel que les $U_\alpha \cap U_\beta$ soient simplement connexes, contractiles, cela est possible sous des hypothèses très larges].

Selon la remarque faite au chapitre I, VIII [3, d] $x \rightarrow (uf, vf)_x$, définit une densité de poids 1/2 comme h .

Nous n'utiliserons aucune technique de « tétrapodes ».

II. La variation d'un lagrangien de Dirac.

Nous considérons comme au chapitre I [3, d] :

$$\begin{aligned} L &= (e^i \nabla_i \psi, \psi) + (\psi, e^i \nabla_i \psi) - 2m(\psi, \psi) \\ \text{soit} \quad L &= (e^i \nabla_i \psi, \psi) - m(\psi, \psi) + (\text{e. c.}), \quad \begin{aligned} e^i &= g^{ik} e_k, \\ \nabla_i &= \nabla_{e_i} (*). \end{aligned} \end{aligned} \tag{1}$$

Par variation arbitraire de ψ nous obtiendrons les équations de Dirac. Le calcul se conduit comme au chapitre I. On observera toutefois que

(*) ∇ a un excès nul.

d'après [3, b] il est loisible de choisir localement un champ de repères orthonormés réels (E_i) avec :

$$(E_1)^2 = -1, \quad (E_i)^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

et

$$\begin{aligned} e'_1 &= \frac{E_1 + E_4}{\sqrt{2}}, & e'_2 &= \frac{iE_2 + E_3}{\sqrt{2}} \\ e'_{1*} &= \frac{E_1 - E_4}{\sqrt{2}}, & e'_{2*} &= \frac{iE_2 - E_3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

On aura alors $e^i \nabla_i \psi = E^i \nabla_i \psi$, de sorte que l'on pourra utiliser ces repères réels et cette remarque simplifiera considérablement les calculs. Comme au chapitre I on obtiendra :

$$\underline{e^i \nabla_i \psi = m\psi} \quad (2)$$

Il serait loisible d'envisager ∇ avec un excès non nul en couplant le champ de Dirac avec un champ électromagnétique de potentiel $\theta_i e^i$.

III. La variation d'un lagrangien d'Einstein-Dirac.

On considère sur V une connexion pseudo-euclidienne ∇ (c'est-à-dire telle que $\nabla g_{ij} = 0$), dont le tenseur de torsion n'est pas nécessairement nul, et on introduit la densité lagrangienne :

$$\sqrt{|g|} R_{ij} g^{ij} + a \sqrt{|h|} L \quad (3)$$

(on rappelle que L est de poids 1/2).

R_{ij} est le tenseur de Ricci, de la connexion ∇ .

En repères naturels de coordonnées :

$$L_{jk}^i = \{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \} + B_{jk}^i$$

où $\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \}$ est la combinaison algorithmique de Christoffel. Si les S_{jk}^i sont les composantes du tenseur de torsion, on a, après des calculs faciles :

$$B_{jk}^i = g^{ir} (g_{ij} S_{rk}^l + g_{lk} S_{rj}^l) + S_{jk}^i \quad (4)$$

Le tenseur B_{jk}^i est appelé « contorsion » dans [5].

Si D est la connexion riemannienne et $\dot{R}_{ij}$ le tenseur de Ricci correspondant, alors :

$$R_{ij} = \dot{R}_{ij} + D_r B_{ij}^r - B_{ir}^s B_{sj}^r \quad (5)$$

On observera que

$$\begin{aligned} B_{kj}^k &= -2S_j, & B_{jk}^k &= 0, \\ B_{ijk} &= -B_{kji}, & B_{ijk} &\equiv S_{jik} + S_{kij} + S_{ij k} \\ 2S_{ijk} &= B_{ijk} + B_{jki}. \end{aligned}$$

Les coefficients B_{jk}^i ne sont donc pas indépendants.

1° Faisons varier arbitrairement le tenseur de torsion (c'est imposer une

condition très forte, on pourrait évidemment en envisager d'autres plus faibles).

Le terme $(D_r B_{ij}^r) g^{ij}$ donnera 0, puisqu'on a là une divergence. Il restera simplement à tenir compte de :

$$- B_{ir}^k B_{kj}^r g^{ij} = (S_{jik} + S_{kji} + S_{ijk})(S^{kji} + S^{ikj} + S^{jki})$$

et cette expression a une signification intrinsèque, indépendante de tout repère, naturel ou non.

Les g_{ij} ne variant pas, plaçons-nous en repères de Witt canoniques, dans ces repères :

$$- B_{jik} B^{kji} = \Sigma(S_{ijk} + S_{kji} + S_{jik})(S_{i^*j^*k^*} + S_{i^*k^*j^*} + S_{j^*k^*i^*})$$

en faisant la convention d'écrire B_{ijk} pour $B_{\underline{ijk}}$..., etc. ...

Nous prenons pour ∇ un excès nul.

$$\nabla \psi = d\psi_{\underline{s}} + \frac{1}{4} \omega_{\underline{j}}^i e_{\underline{i}} e^j \psi \quad (\text{cf. chapitre I}).$$

Et on a à faire varier, venant de L :

$$\frac{a}{4} (B_{kj}^i e^j e_{\underline{i}} e^k \psi, \psi) + (\text{e. c.}) = \frac{a}{4} (B_{ikj} e^j e^k e_{\underline{i}} \psi, \psi) + (\text{e. c.}).$$

On a donc à annuler la variation de :

$$B_{jik} B^{kji} + \frac{a}{4} \Sigma(S_{kij} + S_{jik} + S_{ijk})(e_{\underline{j}} e_{\underline{i}} e_{\underline{k}}^* \psi, \psi) + (\text{e. c.}),$$

soit :

$$\begin{aligned} & \delta \Sigma S_{jik} (3S_{i^*k^*j^*} + S_{k^*i^*j^*} + S_{j^*k^*i^*}) \\ &= \Sigma - \frac{a}{4} \delta S_{kij} [(e_j e_{i^*} e_{k^*} + e_{k^*} e_{j^*} e_{i^*} + e_{j^*} e_{k^*} e_{i^*}) \psi, \psi] + (\text{e. c.}) \quad (6) \end{aligned}$$

On obtient aisément :

$$S_{ijk} = -\frac{a}{8} [(e_{\underline{i}} e_{\underline{k}} e_{\underline{j}} - e_{\underline{j}} e_{\underline{k}} e_{\underline{i}}) \psi, \psi] \quad (7)$$

et en repères quelconques :

$$S_{ijk} = \frac{-a}{8\sqrt{|h|}} [(e_i e_k e_j - e_j e_k e_i) \psi, \psi] \quad (8)$$

$$S_{jk}^i = \frac{-a}{8\sqrt{|h|}} (e^i e_k e_j - e_j e_k e^i \psi, \psi). \quad (8 \text{ bis})$$

On voit aisément que S_{ijk} est antisymétrique en tous ses indices, donc le vecteur de torsion est nul et la connexion est décomposable :

$$B_{jk}^i = S_{jk}^i \quad \text{et} \quad L_{jk}^i = \{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \} + S_{jk}^i,$$

en repères naturels.

Ces résultats sont en accord avec ceux de M. Lenoir [6].

2° Nous varions maintenant les coefficients g^{ij} dans les conditions données au chapitre I [3, d].

Posant :

$$\begin{aligned}\hat{S} &= S_{ijk} S^{ijk}, \\ \dot{R} &= \dot{R}_{ij} g^{ij} \\ R &= \dot{R} - \hat{S} = R_{ij} g^{ij},\end{aligned}$$

on obtient :

$$\dot{R}_{ij} - \frac{1}{2}(\dot{R} - \hat{S})g_{ij} = T_{(ij)} \quad (9)$$

avec

$$T_{ij} = - \frac{a}{\sqrt{|h|}} (e_i \nabla_j \psi, \psi) + (\text{e. c.}) \quad (10)$$

De (8), on tire facilement :

$$D_i(\sqrt{|h|} S_{jk}^i) = -a/2 \quad \text{Ant}(e_j \nabla_k \psi, \psi) + (\text{e. c.})$$

(Ant signifie antisymétrisé).

Soit encore :

$$D_k S_{ij}^k = - \frac{a}{\sqrt{|h|}} \quad \text{Ant}(e_i \nabla_j \psi, \psi) + (\text{e. c.}) = T_{[ij]} \quad (11)$$

D'après (5), (9), (11) on peut écrire :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = T_{ij} + S_{ri}^s S_{sj}^r \quad (12)$$

(12) équivaut à (9) et (11). On comparera encore avec [6].

IV. Quelques interprétations physiques.

On peut introduire la *densité de courant* de poids 1/2 :

$$J_k = \frac{ia}{2} [(e_k \psi, \psi) - \text{e. c.}] = \frac{ia}{2} (X_k - \bar{X}_k)$$

avec $X_k = (e_k \psi, \psi)$.

En repères réels on aurait : $J_k = iaX_k$.

Selon un calcul facile (prendre des repères réels), on a :

$$\left. \begin{aligned} D_k(\sqrt{|h|} X^k) &= 0 \\ D_k J^k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Par ailleurs S_{ijk} fait intervenir un tenseur T_{ijk} :

$$T_{ijk} = \frac{-a}{4\sqrt{|h|}} (e_i e_k e_j \psi, \psi)$$

$$S_{jk}^i = \mathcal{R}_e(T_{jk}^i) = T_{[jk]}^i$$

Posons :

$$\Sigma_{jk}^i = \mathcal{I}_m(T_{jk}^i)$$

$\mathcal{R}_e$ et $\mathcal{I}_m$ désignant les parties réelles et imaginaires.

$\mathcal{I}_m(T_{jk}^i)$ est symétrique en j et k .

Nous trouvons aisément :

$$D_k T_{ij}^k = D_k T_{[ij]}^k = - \frac{a}{\sqrt{|h|}} \text{Ant}(e_i \nabla_j \psi, \psi),$$

avec

$$T_{jk}^i = - \frac{a}{4\sqrt{|h|}} (e^i e_k e_j \psi, \psi).$$

Faut-il voir dans S_{jk}^i le tenseur densité de spin ?

La formule (11) apporte un argument favorable dans ce cas particulier, mais lorsque l'on suppose *a priori* la connexion pseudo-riemannienne, il faut observer que S_{jk}^i s'annule, mais point nécessairement le tenseur $T_{[jk]}^i$ (cf. *infra* n° V et VI), si ψ n'est pas particularisé.

Remarque. — Supposons la torsion nulle. Il vient de (9) :

$$\dot{R} = \frac{am(\psi, \psi)}{\sqrt{|h|}}.$$

Si nous avons un schéma relativiste matière pure, $\dot{R} = -\chi\rho$, on peut alors identifier formellement (10) aux équations de la gravitation en posant

$$(\psi, \psi) = \rho$$

$$a = - \frac{\chi \hbar}{m_0 c}, \quad \text{si } m_0 \neq 0,$$

avec $m = \frac{1}{\hbar} m_0 c$, m_0 masse au repos de la particule, $\hbar$ constante de Planck normalisée.

V. Schémas avec connexions spin-euclidiennes.

Dans les repères $(e_\alpha, e_{\beta*})$ introduits au (I), la condition pour une connexion d'être spin-euclidienne au sens strict se traduit par :

$$\omega_{\beta*}^\alpha = 0, \quad \omega_{\alpha*}^{\alpha*} = 0. \quad (13)$$

En effet, d'après [3, b], il faut exprimer que $\nabla f = \underline{\nabla} f = 0$, en dérivant dans l'algèbre de Clifford.

Au sens large on a seulement $\omega_{\beta*}^\alpha = 0$.

$\nabla g_{ij} = 0$ se traduit par des conditions qui impliquent, en explicitant que :

$$\omega_\alpha^\alpha = (dg_{\alpha\beta*})g^{\alpha\beta*} = \frac{dg}{g}.$$

Supposons, avant toute application de principe variationnel que l'on se donne *a priori* une connexion *spin-euclidienne au sens large*. L'existence d'une telle connexion suit de celle de la structure spinorielle.

Nous pourrions, pour faire des calculs locaux, introduire des repères de Witt, réels, adaptés à la structure spinorielle et une conjugaison complexe

tenant compte de la signature (pour plus de détails, voir n° VI, plus bas) de manière que les conditions de réalité s'expriment comme en signature elliptique.

Alors dans ces repères de Witt adaptés on aura, compte tenu de la réalité de la connexion :

$$\underline{L}_{\beta^*k}^{\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{L}_{\beta k}^{\alpha^*} = 0,$$

soit encore :

$$\underline{L}_{\alpha^*\beta^*k^*} = \underline{L}_{\alpha\beta k} = 0. \quad (* = \pm 2)$$

En repères quelconques, non naturels, les coefficients de connexion s'expriment par :

$$\underline{L}_{jk}^i = \{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \} + \frac{1}{2} (b_{rjk} + b_{kjr} + b_{jkr}) g^{ir} + S_{jk}^i,$$

$\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \}$ étant construit avec des dérivées de Plaff et $d\theta^i = \frac{1}{2} b_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k$, [7].

En repères de Witt :

$$\underline{L}_{ijk} = \frac{1}{2} (\underline{b}_{ijk} + \underline{b}_{kji} + \underline{b}_{jki}) + S_{ijk}.$$

On aura donc maintenant :

$$\underline{S}_{\alpha^*\beta^*k^*} = -\frac{1}{2} (\underline{b}_{\alpha^*\beta^*k^*} + \underline{b}_{k^*\beta^*\alpha^*} + \underline{b}_{\beta^*k^*\alpha^*}) \quad (14)$$

$$\underline{S}_{\alpha^*k^*\beta^*} = -\underline{S}_{\alpha^*\beta^*k^*}$$

et des formules analogues donnent $\underline{S}_{\alpha\beta k}$ et $\underline{S}_{\alpha k\beta}$.

Les autres coefficients $\underline{S}_{ijk}$ se calculent alors comme plus haut à l'aide de (6) et (7).

On en déduit encore que le vecteur de torsion de la connexion est nul.

En résumé. — Lorsque nous varions la torsion de la connexion, en supposant *a priori* qu'elle est spin-euclidienne au sens large (et réelle), le tenseur covariant d'ordre 3, déduit par isomorphisme « musical » du tenseur de torsion n'est plus nécessairement totalement antisymétrique.

Si nous admettons, comme au n° IV que $T_{[jk]}^i$ représente le tenseur densité de spin, puisque l'on a toujours :

$$D_k T_{[ij]}^K = -\frac{a}{\sqrt{|h|}} \quad \text{Ant } (e_i \nabla_j \psi, \psi)$$

et

$$D_k T_{[ij]}^k = T_{[ij]},$$

celui-ci ne s'identifie plus au tenseur de torsion.

VI. Schémas avec connexions spin-euclidiennes pseudo-riemanniennes.

Digression de géométrie différentielle.

1° Sur une variété V de dimension $n = 2r$, munie d'une structure pseudo-riemannienne, admettant une structure Pin Q-spinorielle, introduisons

une connexion spin-euclidienne au sens strict. Supposons de plus que cette connexion soit à torsion nulle.

Nous introduirons dans cette digression des repères de Witt canoniques, (e_α, e_{β^*}) mais pour simplifier, nous ne soulignerons pas les indices.

$$\text{Écrivons :} \quad \Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k, \quad (15)$$

où Ω_j^i, ω_j^i , sont les composantes locales, respectivement des formes de courbure et de torsion.

$$\begin{aligned} \omega_j^i &= -\omega_i^{j*}, & i, j &= 1, 2 \dots 2r, & * &= \pm r. \\ \omega_\alpha^z &= 0, & \omega_{\beta^*}^z &= 0. \end{aligned}$$

De (15) on tire aisément :

$$\Omega_{\beta^*}^z = 0, \quad \Omega_j^i + \Omega_i^{j*} = 0, \quad \Omega_\alpha^z = \Omega_{\alpha^*}^z = 0.$$

Des identités de Bianchi :

$$\sum_{\substack{p, c \\ j, k, l}} R_{jkl}^i = 0, \quad \text{où} \quad \Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l,$$

on obtient immédiatement, tenant compte de $\Omega_{\beta^*}^z = 0$:

$$R_{\beta^* \lambda^* \mu^*}^\alpha = 0, \text{ entraînant } R_{\beta^* \lambda^* \mu^*}^{\alpha^*} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{R_{\alpha^* \beta^*} = 0}.$$

$$R_{\beta^* \lambda^* \mu}^\alpha = -R_{\mu \beta^* \lambda^*}^\alpha, \text{ entraînant } R_{\mu \alpha \lambda^*}^\alpha = 0.$$

$$R_{\mu \alpha^* \lambda}^\alpha = R_{\alpha \mu \alpha^* \lambda} = R_{\alpha^* \lambda \alpha \mu} = R_{\lambda \alpha \mu}^\alpha \quad (\text{avec ou sans sommation en } \alpha).$$

$$R_{\lambda \alpha \mu^*}^\alpha = R_{\alpha^* \lambda \alpha \mu^*} = R_{\alpha \mu^* \alpha^* \lambda} = R_{\mu^* \alpha^* \lambda}^\alpha = 0.$$

Cela implique : $\underline{R_{\alpha^* \beta^*}} = \underline{R_{\alpha \beta^*}} = 0$.

Finalement les coefficients $R_{\alpha \beta^*}$ sont seuls susceptibles d'être non nuls et

$$R_{\alpha \beta} = R_{\alpha \lambda^* \beta}^{\lambda^*} + R_{\alpha \lambda \beta}^z = R_{\alpha \lambda^* \beta}^{\lambda^*} + R_{\beta \lambda^* \alpha}^{\lambda^*}.$$

On peut construire en $x \in V$, un repère de Witt, « réel », adapté à la structure spinorielle $(e_{\alpha^*}, e_{\beta^*})_x$, les e_{α^*} sous-tendant le même s. t. i. m. que les $(e_{\alpha^*})_x$ [3, b, p. 193].

Ce repère n'est pas en général « canonique ». Si un repère de Witt « canonique » en $x \in V$ est $(e_{\alpha^*}, e_{\beta^*})_x$, on a :

$$e_{\alpha^*} = A_{\alpha^*}^{\lambda^*} e_{\lambda^*}$$

$$e_{\alpha'} = A_{\alpha'}^{\lambda} e_{\lambda} + A_{\alpha'}^{\lambda^*} e_{\lambda^*}.$$

Après changement de repères on vérifie que :

$$\omega_{\beta^*}^{\alpha'} = 0$$

$$\omega_{\alpha'}^{\alpha} = \omega_{\alpha}^{\alpha} + \frac{da}{a} \quad (\text{où } a = \det || A_{\beta'}^{\alpha'} ||)$$

$$\omega_{\alpha'}^{\alpha'} = \frac{da}{a} = -\omega_{\alpha^*}^{\alpha^*}.$$

On trouvera encore :

$$\Omega_{\alpha'}^{\alpha'} = \Omega_{\alpha''}^{\alpha''} = 0$$

$$\Omega_{\beta''}^{\alpha'} = 0,$$

et seules les composantes $R_{\alpha'\beta'}$ sont susceptibles d'être non nulles.

Prenons d'abord une métrique définie. Alors les conditions de réalité s'expriment par :

$$\omega_{\beta'}^{\alpha'} = \bar{\omega}_{\beta''}^{\alpha''}$$

$$\omega_{\beta''}^{\alpha''} = \bar{\omega}_{\beta'}^{\alpha'}$$

donc $\omega_{\beta''}^{\alpha''}$ est aussi nul et $R_{\alpha'\beta'} = 0$.

Si la variété est pseudo-riemannienne, et si $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est un repère orthonormé réel en x , avec $N(E_i) = \pm 1$, nous associons à tout vecteur $z^j E_j$ le vecteur $N(E_j) \bar{z}^j E_j$ où la barre désigne la conjugaison complexe dans $\mathbb{C}^n$ et N la norme spinorielle. Avec cette conjugaison pour les champs de tenseurs on retrouve formellement la situation première et on a encore $R_{\alpha'\beta'} = 0$, venant de $\omega_{\beta''}^{\alpha''} = 0$.

Ainsi nous avons :

PROPOSITION. — *Si une variété de dimension paire, pseudo-riemannienne, ou riemannienne propre, admet une structure Pin Q-spinorielle, et si la connexion spin-euclidienne au sens strict est sans torsion, le tenseur de Ricci de la connexion est identiquement nul.*

En relativité générale, et dans les mêmes conditions, le tenseur d'Einstein $S_{\alpha\beta}$ est donc identiquement nul et à cette situation on peut associer un schéma extérieur purement gravitationnel.

2° Dans les conditions du 1°, supposons que la connexion soit spin-euclidienne au sens large seulement. Nos calculs rappelant ceux du 1° :

$$\Omega_{\alpha}^{\alpha} = d\omega_{\alpha}^{\alpha}$$

$$R_{\beta\lambda^*\mu}^{\alpha} = R_{\beta^*\lambda^*\mu}^{\alpha^*} = 0 \quad \text{et} \quad R_{\alpha^*\beta^*} = 0$$

$$R_{\mu\alpha^*\lambda}^{\alpha^*} = R_{\lambda\alpha\mu}^{\alpha}, \quad R_{\lambda\alpha\mu}^{\alpha} = R_{\mu\alpha^*\lambda}^{\alpha^*}, \quad R_{\lambda\alpha^*\mu}^{\alpha^*} = R_{\mu\alpha\lambda}^{\alpha}$$

avec ou sans sommation.

$$R_{\mu\alpha\lambda^*}^{\alpha} = -R_{\alpha\lambda^*\mu}^{\alpha} \neq 0$$

$$R_{\beta^*\alpha^*\mu}^{\alpha^*} - R_{\mu\alpha^*\beta^*}^{\alpha^*} = R_{\alpha^*\beta^*\mu}^{\alpha^*} \neq 0,$$

$$R_{\lambda^*\mu}^{\alpha^*} = R_{\lambda^*\alpha^*\mu}^{\alpha^*},$$

$$R_{\mu\lambda^*}^{\alpha} = R_{\mu\alpha\lambda^*}^{\alpha} + R_{\mu\alpha^*\lambda^*}^{\alpha^*},$$

$$R_{\lambda\mu}^{\alpha} = R_{\lambda\alpha^*\mu}^{\alpha^*} + R_{\mu\alpha^*\lambda}^{\alpha^*},$$

$$R_{\lambda^*\mu}^{\alpha^*} = R_{\mu\lambda^*}^{\alpha^*} \quad \text{entraîne} \quad R_{\mu\alpha^*\lambda^*}^{\alpha^*} = 0.$$

Des identités de Bianchi, il vient :

$$R_{\lambda^*\alpha^*\mu}^{\alpha^*} = R_{\alpha^*\lambda^*\mu}^{\alpha^*},$$

de sorte que

$$R_{\lambda^*\mu} = R_{\alpha^*\lambda^*\mu}^{\alpha^*} = -R_{\alpha\lambda^*\mu}^{\alpha}.$$

La condition de réalité permet alors d'écrire :

$$R_{\alpha^*\beta^*} = R_{\alpha'\beta'} = 0$$

$$R_{\alpha'\beta^*} = R_{\lambda'\alpha'\beta^*}^{\lambda'},$$

formules analogues à celles que l'on obtient pour les variétés pseudo-kähleriennes [7].

Comme les identités de Bianchi donnent, compte tenu de :

$$R_{\lambda\alpha\mu}^{\alpha} = R_{\mu\alpha^*\lambda}^{\alpha^*} = 0,$$

$$R_{\alpha\lambda\mu}^{\alpha} = R_{\alpha\lambda^*\mu^*}^{\alpha^*} = 0,$$

il vient :

$$\Omega_{\alpha'}^{\alpha'} = d\omega_{\alpha'}^{\alpha'} = \frac{1}{2} R_{\alpha'\lambda'\mu^*}^{\alpha'} \theta^{\lambda'} \wedge \theta^{\mu^*} = \frac{1}{2} R_{\alpha'\beta^*}^{\alpha'} \theta^{\alpha'} \wedge \theta^{\beta^*}.$$

que l'on comparera aux résultats de Lichnerowicz dans [7].

Remarque. — Dans [7] ce même auteur démontre :

Pour qu'une variété pseudo-kählienne (donc kählienne), simplement connexe, admette un groupe d'holonomie sous-groupe de $SU(n, \mathbb{C})$, il faut et il suffit que la courbure de Ricci de la variété soit nulle.

Il semblerait plausible de conjecturer :

Pour qu'une variété à structure spinorielle, simplement connexe, admettant une connexion pseudo-riemannienne (ou riemannienne propre), spin-euclidienne au sens large, admette un groupe d'holonomie sous-groupe du groupe de spinorialité au sens strict $\mathfrak{S}$, il faut et il suffit que la courbure de Ricci de la variété soit nulle.

Revenons maintenant aux problèmes relativistes. Si nous supposons le tenseur de torsion identiquement nul et appliquons le principe variationnel, nous trouvons les équations :

$$\dot{S}_{ij} = T_{(ij)} \quad (17)$$

$$e^i \nabla_i \psi = m\psi \quad (18)$$

avec T_{ij} donné par (10).

La remarque du IV permet d'identifier formellement (17) aux équations d'un schéma gravitationnel pur en posant :

$$(\psi, \psi) = \rho, \quad a = \frac{-\chi \hbar}{m_0 c}, \quad m_0 \neq 0.$$

Si la connexion est supposée spin-euclidienne au sens strict alors $\dot{S}_{ij} \equiv 0$ et $T_{(ij)} \equiv 0$, mais $T_{(ij)} \equiv 0$ entraîne en tenant compte de (18) que $am(\psi, \psi) = 0$, donc si $m \neq 0$, on a $(\psi, \psi) = 0$, la probabilité de présence de la particule est nulle. Si donc (17) est interprétée comme équation gravitationnelle pure, on a bien $\rho = 0$, avec nos hypothèses sur la connexion, comme dans la théorie d'Einstein. Il y a là une confluence remarquable de résultats.

VII. Quelle sorte de structure spinorielle doit-on introduire sur l'espace-temps ?

Nous avons supposé, que l'espace-temps V possède une structure Spin Q -spinorielle. Selon nos résultats antérieurs le groupe structural du fibré pseudo-riemannien se réduit à un groupe de spinorialité au sens strict et réciproquement. Il se trouve que le fibré des repères est trivial, autrement dit V est parallélisable. Ce résultat d'abord annoncé par Geroch [4] se démontre facilement dans notre approche [3, a]. Cette hypothèse de réduction est donc très forte, elle semblerait s'imposer s'il était nécessaire de définir sans ambiguïté des champs de spineurs sur V . Or certaines exigences physiques supportent une indétermination des champs de spineurs, définis seulement modulo un coefficient multiplicatif $e^{i\varphi}$. Il semble donc intéressant, au moins du point de vue mathématique, d'étudier la réduction à un groupe de spinorialité élargi.

H_e est le sous-groupe des éléments γ de Spin Q tels que $\gamma f = \chi e^{i\varphi} f$, $\chi \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$ (en signature elliptique on aurait $\chi = 1$ [3, c]). Des considérations topologiques amènent à considérer, dans le cas non elliptique, le sous-groupe H_e des éléments γ tels que $\gamma f = e^{i\varphi} f$.

$p(H_e) = \mathfrak{S}_e$, sera dit groupe de spinorialité élargi réduit. Il est de dimension $r^2 + \frac{k(k-1)}{2} - 1$ pour $0 \leq k \leq r$, si Q est de signature $(k, n-k)$.

Dans l'espace-temps $\dim \mathfrak{S}_e = 3$.

Prenant les E_i comme au n° II, et remplaçant $e'_1, e'_2, e'_{1*}, e'_{2*}$, respectivement par $x_1, x_2, y_1, y_2, u \in \mathcal{L}(H_e)$ a la forme :

$$\alpha x_1 y_1 + \rho x_1 y_2 + \gamma x_2 y_1 + \delta x_2 y_2 + \alpha' y_1 y_2 + \lambda \quad (\lambda \text{ imaginaire pur}).$$

La condition de réalité et $\beta(u) + u = 0$ donnent :

$$\alpha = \rho = 0, \quad \alpha' = \bar{\gamma}, \quad \delta = id, \quad d \text{ réel}, \quad \lambda - \bar{\lambda} = 2\bar{\delta},$$

$$u = \gamma x_2 y_1 + id x_2 y_2 + \bar{\gamma} y_1 y_2 - id$$

$$u = (AE_2 + BE_3)(E_1 - E_4) + CE_2 E_3,$$

A, B, C réels.

L'algèbre de Lie du petit groupe que définit $(E_1 - E_4)$ se calcule en écrivant que $v \in \text{Spin } Q$ commute avec $E_1 - E_4$ ce qui donne immédiatement v de la même forme que u .

Donc : $\mathfrak{S}_e$ et Δ , petit groupe associé à un vecteur isotrope sont localement isomorphes.

Un groupe de spinorialité élargi réduit s'identifie localement au petit groupe Δ d'un vecteur isotrope (qui est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$, groupe non simplement connexe).

Postulons donc la réduction du groupe du fibré pseudo-riemannien

à $\mathfrak{S}_e$. Alors les champs de spineurs ne sont définis que *modulo* un facteur complexe de module 1 (spineurs projectifs).

Si nous introduisons alors dans le lagrangien L une forme $i\theta_k e^k = i\theta$, c'est-à-dire un excès non nul pour la dérivation, celui-ci se transformant selon la règle :

$$\theta' = \theta - d\varphi, \quad (17)$$

quand le changement de repères apporte le facteur $e^{i\varphi}$ pour le spineur ψ , alors le lagrangien est « covariant » et la variation conduit aux équations de Dirac :

$$e^k \nabla_k \psi = (m - i\theta) \psi. \quad (18)$$

Ainsi, dans les considérations globales sur l'espace-temps, on devrait associer à tout champ de Dirac un potentiel créé par une particule de spin 1, masse nulle, cependant, localement il serait loisible dans un certain repère d'annuler ce potentiel et donc de négliger ce « couplage ».

La réduction au groupe $\mathfrak{S}_e$ fait donc apparaître naturellement une relation entre la charge et la jauge.

On notera l'analogie de ces résultats avec la théorie de Weyl [8].

Faut-il voir dans (18) une « interaction de la particule avec le vide », selon l'expression de Bogolioubov et Chirkov [2, chapitre III] ?

On rapprochera aussi ce point de vue de celui, bien connu, de Yang et Mills. Nous avons « agrandi » le groupe dans lequel la forme de connexion prend ses valeurs pour sauvegarder la « covariance ».

VIII. Le couplage associé aux fibrations en twisteurs d'ordre 2.

Dans [3, c], nous avons montré qu'à toute fibration spinorielle sur l'espace-temps, est attachée « canoniquement » une autre fibration spinorielle et une seule. On peut alors définir une forme hermitienne, extension naturelle des formes hermitiennes spinorielles :

$$\langle uf + u' f', vf + v' f' \rangle = \mathcal{K}(uf, vf) + \mathcal{K}'(u' f', v' f') + \mathcal{K}_1(u' f', vf) + \overline{\mathcal{K}_1(v' f', uf)},$$

soit avec d'autres notations :

$$\langle \langle \psi + \psi', \varphi + \var' \rangle \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle + \langle \psi', \var' \rangle + \langle \psi', \varphi \rangle + \overline{\langle \var', \psi \rangle},$$

et il apparaît un lagrangien, naturelle extension de L :

$$\hat{L} = \langle \langle e^i \nabla_i (\psi + \psi'), \psi + \psi' \rangle \rangle - m \langle \langle \psi + \psi', \psi + \psi' \rangle \rangle + (\text{e. c.}).$$

Ce lagrangien est la somme de celui de deux particules de spin 1/2, même masse et de termes d'interaction.

Par variation on obtiendra les mêmes équations de Dirac que plus haut, mais le deuxième membre des équations d'Einstein-Dirac sera modifié, T_{ij} , J_k , T_{jk}^i contiendront des termes d'interaction. De tels termes d'interaction pourront s'introduire aussi en spin 1 (cf. Chapitre I) [3, d].

IX. Systèmes de particules associés aux structures hypercomplexes et symétries unitaires.

Considérons l'amplifié du fibré tangent par une algèbre associative $\mathbb{A}$ sur le corps des réels ou des complexes, de base finie.

Le plus naturel est de choisir d'abord une algèbre commutative, sur le corps des complexes, sans élément nilpotent. Une telle algèbre, selon un résultat connu de Weierstrass et Dedekind est composée directe de P corps identiques à $\mathbb{C}$. Il existe donc une base $\{e_L\}$ de $\mathbb{A}$, $L = I, II, \dots, P$, avec :

$$(e_J)^2 = e_J, e_J e_L = 0 \quad \text{si} \quad J \neq L \quad \text{et} \quad e_I + e_{II} + \dots + e_P = 1.$$

Un automorphisme de $\mathbb{A}$ peut être défini par le cycle de longueur P :

$$\sigma(e_I) = e_{II}, \quad \sigma(e_{II}) = e_{III}, \dots, \sigma(e_P) = e_I.$$

Il serait loisible d'introduire aussi bien une permutation σ de (e_L) décomposée en plusieurs cycles.

Une telle algèbre commutative sans élément nilpotent, admet une base (ε_A) dont la table est isomorphe à celle des racines $P^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Il faut et il suffit pour cela que $\|a_A^L\|$ soit une matrice régulière telle que :

$$\varepsilon_A = a_A^L e_L, \quad \text{avec} \quad (a_1^L)^P = 1, \quad (a_1^L)^A = a_A^L,$$

ε_A et $\exp \frac{2i\pi A}{P}$ étant associés par cet isomorphisme de groupe.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension finie.

$E_A = A \otimes E$ est l'amplifié de E par A .

$$A \otimes E \simeq (e_I \otimes E) \oplus (e_{II} \otimes E) \oplus \dots (e_P \otimes E) \simeq \bigoplus_1^P E$$

$$\text{Si } a = \sum_L a_L e_L, \text{ et } y = \sum_L b_L e_L \otimes x_L, \quad a_L, b_L \in \mathbb{C}, x_L \in E,$$

$$ay = \sum_L a_L b_L e_L \otimes x_L.$$

Si nous munissons $\mathbb{A}$ d'une structure hermitienne H avec $H(e_L) = 1$, et si E est l'espace d'une représentation irréductible de $\text{Spin } Q'$, alors E_A devient naturellement l'espace d'une représentation irréductible de $\text{SU}(P, \mathbb{C}) \times \text{Spin } Q'$.

Observons que si $y = \sum b_L e_L \otimes x_L$
et $y' = \sum b'_M e_M \otimes x'_M$

$$\begin{aligned} \langle y, y' \rangle &= \sum_{L, M} \langle b_L e_L, b'_M e_M \rangle \langle x_L, x'_M \rangle \\ &= \sum_L b_L \bar{b}'_L \langle x_L, x'_L \rangle \end{aligned}$$

Si $E = C(Q')f$ est l'espace d'une représentation spinorielle

$$E_A = A \otimes C(Q')f = \oplus (e_L \otimes C(Q')f)$$

et les éléments uf, vf , de $A \otimes C(Q')f$ s'écrivent :

$$uf = \sum_L (b_L e_L \otimes u_L)f, \quad vf = \sum_M (b'_M e_M \otimes u'_M)f$$

$$\tilde{\beta}(\bar{u}f)vf = \sum \bar{b}_L \bar{b}'_L \tilde{\beta}[(\overline{e_L \otimes u_L})f] [(e_L \otimes u'_L)f]$$

et si $\bar{e}_L = e_L$,

$$\begin{aligned} &= \sum \bar{b}_L \bar{b}'_L e_L \otimes \tilde{\beta}(u_L f)(u'_L f) \\ &= \sum e_L \otimes \bar{b}_L \bar{b}'_L \tilde{\beta}(\overline{u_L f})(u'_L f) \end{aligned}$$

Si $y = uf, y' = vf$, on voit donc que $\langle y, y' \rangle$ s'obtient encore à partir de :

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(\overline{u}f)vf &= \sum e_L \otimes \bar{b}_L \bar{b}'_L \langle x_L, x'_L \rangle yf \\ &= \sum \bar{b}_L \bar{b}'_L \langle x_L, x'_L \rangle (e_L \otimes yf). \end{aligned}$$

Ainsi la structure hermitienne introduite sur $E_A = A \otimes C(Q')f$ est la structure hermitienne associée naturellement à la décomposition de E_A en une somme de P espaces de spineurs complexes, c'est-à-dire à la structure twistorielle de E_A .

Nous retrouverons donc une situation formellement analogue à celle du VIII, en ce qui concerne le lagrangien qui contiendra des termes d'interactions, les équations de Dirac n' , étant pas modifiées.

Si on introduit une permutation σ , décomposée en plusieurs cycles, cela voudra dire que le système mécanique est un système de particules, les particules identiques étant associées aux divers cycles de la permutation. La décomposition d'un twisteur en ses composantes spinorielles devra mettre en évidence des composantes invariantes par l'action des cycles respectifs, le lagrangien correspondant possédera alors les mêmes symétries que le système des (e_L) .

L'hypercharge et l'isospin.

Les éléments $a = \sum_L a^L e_L$, avons-nous dit, définissent des endomor-

phismes linéaires de A et E_A qui commutent avec l'action du groupe $SU(P, C) \times \text{Spin } Q'$. Ce sont donc des « invariants » pour ces groupes. Généralisant la terminologie des physiciens, on pourrait appeler « hypercharge » un élément de A de trace nulle ($\sum a^L = 0$). Ces éléments de trace nulle correspondent à l'algèbre de Lie des endomorphismes appartenant à $SU(P, C)$ induits par des éléments de A ($|a^L| = 1$ pour $L = I, II, \dots, P$ et $\pi a^L = 1$).

En particulier les éléments $\frac{1}{P} \varepsilon_A = a_A^L e_L$ avec

$$a_A^L = \exp \frac{2i\pi LA}{P}, \quad (A \neq P),$$

forment un repère orthonormé de $\mathbb{A}$, et définissent des « hypercharges ».

Nous introduisons la notion « d'isospin » en remarquant que si le « spin » est associé à la base canonique de l'algèbre de Lie de $SU(2, \mathbb{C})$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ avec :

$$\begin{aligned}\lambda_1(e_I) &= e_{II}, & \lambda_1(e_{II}) &= e_I, & \lambda_1(e_{III}) &= 0, \\ \lambda_2(e_I) &= ie_{II}, & \lambda_2(e_I) &= -ie_I, & \lambda_2(e_{III}) &= 0, \\ \lambda_3(e_I) &= e_I, & \lambda_3(e_{II}) &= -e_{II}, & \lambda_3(e_{III}) &= 0,\end{aligned}$$

et si τ est une permutation quelconque de $(I, II, \dots, P)$ les éléments distincts de la forme :

$$\tau \circ \lambda_1 \circ \tau^{-1}, \quad \tau \circ \lambda_2 \circ \tau^{-1}, \quad \text{en nombre } P(P-1)$$

et les éléments :

$$\sigma^A \circ \lambda_3 \circ \sigma^{-A} \quad (\sigma \text{ étant le cycle de longueur } P \text{ défini plus haut})$$

$$A = 0, 1, \dots, P-2,$$

constituent une base de $SU(P, \mathbb{C})$. L'ensemble des $P^2 - 1$ matrices semblables à λ_1, λ_2 et λ_3 constitue l'isospin généralisé.

Pour obtenir le modèle des « quarks » [1] on prend $P = III$ et pour l'opération d'hypercharge $a^I = \frac{i}{3}$, $a^{II} = \frac{-2i}{3}$, $a^{III} = \frac{i}{3}$.

Les matrices d'isospin sont :

$$\begin{aligned}\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, & \quad \sigma \circ \lambda_1 \circ \sigma^{-1}, & \quad \sigma \circ \lambda_2 \circ \sigma^{-1}, & \quad \sigma^2 \circ \lambda_1 \circ \sigma^{-2}, \\ & \quad \sigma^2 \circ \lambda_2 \circ \sigma^{-2}, & \quad \sigma \circ \lambda_3 \circ \sigma^{-1}.\end{aligned}$$

Il est alors immédiat de donner la généralisation relativiste de l'isospin ainsi défini, il suffit de remplacer une base de $SU(2, \mathbb{C})$ par une base de $SL(2, \mathbb{C})$. On observera que l'hypercharge a d'emblée une signification relativiste générale.

CONCLUSION

Il nous semble possible de généraliser les considérations précédentes dans deux directions.

1° Soit remplacer l'algèbre commutative $\mathbb{A}$ de dimension finie par une algèbre non commutative également de dimension finie.

2° Soit remplacer l'algèbre $\mathbb{A}$ par une algèbre de dimension infinie et introduire sur $\mathbb{A}$ une structure hilbertienne. On obtiendra encore des termes d'interaction. Il faudrait postuler ici des conditions de convergence et cette étude se rapprocherait dans son esprit de la théorie de la matrice S d'interaction [2], mais avec l'avantage considérable, que dès le départ « la covariance relativiste » serait assurée. Les équations d'Einstein-Dirac donneraient alors l'interaction avec le champ gravitationnel.

Indépendamment, l'introduction d'excès non nuls dans les dérivations peut s'interpréter comme fournissant d'autres types d'interaction (« habillage » des masses).

On voit le rôle fondamental du fibré de Clifford de l'espace-temps et les propriétés de périodicité bien connues des algèbres de Clifford devraient jouer dans la classification et l'étude des particules un rôle essentiel qui à ce jour n'a pas été explicité, du moins à notre connaissance.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. BACRY, *Leçons sur la théorie des groupes et les symétries des particules élémentaires*, Gordon and Breach, 1967.
- [2] N. BOGOLIOBOV et D. CHIRKOV, *Introduction à la théorie quantique des champs*, Dunod, Paris, 1960.
- [3] A. CRUMEYROLLE,
 - a) Groupes de spinorialité. *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. X, n° 1, 1971.
 - b) Dérivations, formes et opérateurs usuels sur les champs spinoriels. *Ibid.*, Vol. XVI, n° 3, 1972.
 - c) Fibrations spinorielles et twisteurs généralisés. *Periodica Mathematica Hungarica*, t. 6, (2), 1975.
 - d) Une théorie d'Einstein-Dirac en spin maximum 1. *Ann. I. H. P.*, vol. 22, n° 1.
- [4] R. GEROCH, Spinor structure of space-time in general relativity. *Journal of math. Phys.*, Vol. 9, n° 11, 1968.
- [5] F. HEHL et P. VON DER HYDE, Spin and the structure of space-time, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Vol. XIX, n° 2, 1973-1974.
- [6] M. LENOIR, Sur les équations des particules de spin 1/2. *C. R. A. S. Paris*, t. 273, Série A, 1971, p. 943-946.
- [7] A. LICHNEROWICZ, *Th. globale des connexions et des groupes d'holonomie*. Cremonese, Rome, 1955.
- [8] M. A. TONNELAT, *Les théorèmes unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*. Gauthier-Villars, Paris, 1965.

(Manuscrit reçu le 10 octobre 1974).