

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

D. P. CHEVALLIER

Structures de variétés bimodelées et dynamique analytique des milieux continus

Annales de l'I. H. P., section A, tome 21, n° 1 (1974), p. 43-76

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1974__21_1_43_0

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Structures de variétés bimodelées et dynamique analytique des milieux continus

par

D. P. CHEVALLIER

1, rue de Coulanges,
94370 Sucy-en-Brie

INTRODUCTION

Ces dernières années ont vu paraître un certain nombre de travaux visant à exprimer des théories physiques décrivant l'évolution de systèmes à une infinité de degrés de liberté — notamment des milieux continus — en des termes géométriques analogues à ceux qui permettent d'exprimer la dynamique analytique classique mais en usant de variétés de Banach au lieu de variétés différentielles de dimension finie. Citons à ce propos Arnold, Mme Blancheton, Chevallier, Ebin, Marsden dont les travaux sont donnés dans les références bibliographiques.

De telles études semblent être susceptibles de soulever deux espèces de difficultés. La première espèce a trait à l'interprétation géométrique des « solutions faibles » des problèmes d'évolution qui se révèle problématique dans le cadre des seules structures de variétés de Banach. Pour fixer les idées, la forme d'un tel problème peut être : « étant donné deux espaces de Banach V et W , $j : V \rightarrow W$ une injection linéaire continue d'image dense dans W déterminer $u : [0, T[\rightarrow V$, vérifiant une condition initiale et telle que :

$$(1) \quad \frac{d}{dt}(ju(t)) = A(t, u(t)) \quad t \in [0, T[.$$

où $A : [0, T[\times V \rightarrow W$ est un opérateur, linéaire ou non « dépendant de t ». Or (1) n'a pas la forme convenable pour être interprétée comme la traduction dans une carte de l'équation définissant intrinsèquement les intégrales d'un champ de vecteurs sur une variété (s'il en était ainsi la dérivée du

1^{er} membre et les valeurs de A seraient prises dans V). La seconde espèce de difficulté a trait à la limitation de l'existence des structures symplectiques canoniques des espaces cotangents aux seules variétés réflexives ce qui a pour effet d'entraver le développement de la dynamique analytique sous forme hamiltonienne lorsque l'espace des configurations du système considéré est une variété non réflexive.

L'exemple simple des fils inextensibles (exposé dans Chevallier II) est un cas typique d'un milieu continu dont l'espace des configurations est une variété de Banach non réflexive et non plate, et pour lequel l'étude géométrique de la dynamique reste ainsi incomplète. Cet exemple montre aussi que les conditions de dérivabilité par rapport au temps nécessaire pour développer ce qui peut l'être de cette étude géométrique sont plus fortes qu'il est souhaitable. Ces remarques traduisent l'inadaptation des seules structures de variétés de Banach sur les espaces des configurations pour parvenir à un développement suffisamment complet de l'étude géométrique de certains problèmes de mécanique. L'objet de cet article est d'étudier des structures que nous appelons variétés bimodelées, structures qui peuvent apparaître comme des structures additionnelles sur des variétés de Banach et permettent de surmonter les deux difficultés évoquées plus haut ; l'article se termine par l'exposé d'un schéma général pour la mécanique analytique des systèmes dont l'espace des configurations est une variété bimodelée. Des exemples d'application à des cas concrets de systèmes mécaniques à une infinité de degrés de liberté seront traités dans une publication ultérieure.

§ 1 FIBRÉS VECTORIELS, δ -FIBRÉS VECTORIELS

Dans la suite nous utiliserons des fibrés vectoriels dont les fibres sont des espaces localement convexes (e. l. c.) non normables ; les exemples pratiques étant surtout constitués d'espaces de Banach ou de duals d'espaces de Banach munis de topologies faibles. Ce paragraphe a pour objet de poser sans aucun développement les définitions utiles.

1 Fibrés vectoriels dont les fibres sont des e. l. c.

Soient Γ une catégorie formée d'e. l. c. séparés sur $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , \mathfrak{S} un foncteur de Γ aux ensembles tels que :

- 1.1 Si E et F sont dans Γ : $\text{Mor}(E, F) \subseteq \mathcal{L}(E, F)$.
- 1.2. $\mathfrak{S}(E)$ est un recouvrement de E formé de parties bornées (si besoin est on supposera $\mathfrak{S}(E)$ saturé par homothétie, somme et réunion finie, enveloppe équilibrée).
- 1.3. Si $u \in \text{Mor}(E, F)$ le morphisme $\mathfrak{S}(u) : \mathfrak{S}(E) \rightarrow \mathfrak{S}(F)$ est l'extension canonique de u aux parties de $\mathfrak{S}(E)$ (donc $u(\mathfrak{S}(E)) \subseteq \mathfrak{S}(F)$).

Dans ces conditions on notera $\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties de $\mathfrak{S}(E)$.

DÉFINITION 1.1. — Soient B un espace topologique séparé, E et F des e. l. c. de Γ et $f: B \rightarrow \text{Mor}(E, F) (\subseteq \mathcal{L}(E, F))$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$ (resp. : $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}$) si f vérifie les conditions 1.4 et 1.5 (resp. : 1.4 et 1.6) ci-dessous (*).

1.4. f est continue de B dans $\mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(E, F)$.

1.5. $\forall M \in \mathfrak{S}(E), \forall m_0 \in B, \exists N \in \mathfrak{S}(F)$ et V voisinage de m_0 tels que

$$f(m)(M) \subseteq N \quad \text{pour } m \in V.$$

1.6. $\forall m_0 \in B, \exists V$ voisinage de m_0 tel que $\{f(m) \mid m \in V\}$ soit une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E, F)$.

Si \mathfrak{S} est le foncteur $b: \ll \text{ensemble des parties bornées} \gg$, 1.5 signifie que $f(m)$ est localement fortement borné quand m décrit B et 1.6 entraîne 1.5, si de plus E est infratonné (ou bien simplement bornologique ou tonnelé) 1.5 et 1.6 sont équivalents. Pour les applications ultérieures la propriété importante est :

1.7. Si $f: B \rightarrow \text{Mor}(E, F), g: B \rightarrow \text{Mor}(F, G)$ sont de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$ (resp. $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}$) alors $h: B \rightarrow \text{Mor}(E, G): m \rightsquigarrow g(m) \circ f(m)$ est de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$ (resp. : $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}$).

Si $\eta = (\mathcal{V}, B, \pi)$ est un triplet dans lequel \mathcal{V} est un ensemble, B un espace topologique séparé, $\pi: \mathcal{V} \rightarrow B$ une surjection on appellera carte vectorielle de η dans Γ tout triplet $c = (U, \Phi, V)$ où U (domaine de c) est un ouvert de B, V un e. l. c. de $\Gamma, \Phi: \pi^{-1}(u) \rightarrow U \times V$ une bijection telle que $p_1 \circ \Phi(v) = \pi(v)$.

DÉFINITION 1.2. — Les cartes vectorielles

$$c_1 = (U_1, \Phi_1, V_1), \quad c_2 = (U_2, \Phi_2, V_2)$$

de η dans Γ sont dites $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$ (resp. : $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}$)-compatibles si soit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, soit les applications de transition $g_{\beta\alpha}$ définies par $\Phi_{\beta} \circ \Phi_{\alpha}^{-1}(m, v) = (m, g_{\beta\alpha}(m)v)$ sont des applications de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$ (resp. : $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}$) de $U_1 \cap U_2$ dans

$$\text{Iso}(V_{\alpha}, V_{\beta}), (\alpha, \beta) = (1, 2) \text{ ou } (2, 1).$$

Un atlas vectoriel de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$ (resp. : $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}$) de η dans Γ est un ensemble de cartes vectorielles de η , deux à deux compatibles et dont les domaines recouvrent B . Une structure de fibré vectoriel de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$ (resp. : $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}$) sur η est définie par un atlas vectoriel maximal de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$ (resp. : $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}$).

(*) Le choix des axiomes 1.5 et 1.6 est dicté par les propriétés d'hypocontinuité de l'application bilinéaire canonique $E \times \mathcal{L}(E, F) \rightarrow F: (x, u) \rightsquigarrow u(x)$ (Cf. Bourbaki I, en particulier l'exercice 7, § 4).

Les fibrés ainsi définis peuvent avoir des propriétés qui diffèrent sensiblement de celles des fibrés de Banach ; ainsi sur l'espace \mathcal{V} d'un fibré de classe $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}$ existe une topologie naturelle telle que les cartes vectorielles $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times V$ soient des homéomorphismes, par contre sur l'espace \mathcal{V} d'un fibré de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$ on ne peut définir qu'une pseudo-topologie. Sur chaque V de Γ on définit une « \mathfrak{E} -pseudo-topologie » pour laquelle les filtres convergeant vers 0 sont les filtres qui contiennent un ensemble $\in \mathfrak{E}(V)$ (*) et qui convergent dans l'e. l. c. V ; il existe alors une \mathfrak{E} -pseudo-topologie sur \mathcal{V} telle que les cartes vectorielles déterminent des homéomorphismes d'espaces pseudo-topologiques $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times V$.

Si $\eta_1 = (\mathcal{V}_1, B_1, \pi_1)$, $\eta_2 = (\mathcal{V}_2, B_2, \pi_2)$ sont des fibrés vectoriels de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$ (resp. : $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}$) à fibres dans Γ , $f : B_1 \rightarrow B_2$ une application continue, un f -morphisme de η_1 à η_2 est une application $g : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ telle que $f \circ \pi_1 = \pi_2 \circ g$ et qui s'exprime dans les cartes vectorielles de η_1 et η_2 par des applications de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$ (resp. : $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}$). Avec cette définition des morphismes les fibrés vectoriels de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$ (resp. : $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}$) à fibres dans Γ forment une catégorie.

Une section continue de $\eta = (\mathcal{V}, B, \pi)$ est une section de l'application π qui s'exprime dans chaque carte (U, Φ, V) de η par une application continue de U dans V muni de la \mathfrak{E} -pseudo-topologie si η est de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$ et continue de U dans l'e. l. c. V si η est de classe $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}$.

2 δ -fibrés vectoriels

DÉFINITION 1.3. — On appelle δ -couple (resp. δ -couple strict) d'e. l. c. tout triplet $\Delta = (V, W, j)$ où V et W sont des e. l. c. séparés, $j : V \rightarrow W$ une injection linéaire continue (resp. : d'image dense dans W).

On peut définir des catégories de δ -couples d'e. l. c. de la manière suivante :

1.8. Γ_1 et Γ_2 sont des catégories d'e. l. c. sur \mathbb{K} ayant la propriété 1.1.

1.9. Ξ est une collection de δ -couples $\Delta = (V, W, j)$ avec V dans Γ_1 , W dans Γ_2 .

1.10. Si $\Delta_1 = (V_1, W_1, j_1)$, $\Delta_2 = (V_2, W_2, j_2)$ sont dans Ξ , $\text{Mor}(\Delta_1, \Delta_2)$ est un ensemble de couples (g, h) où $g \in \text{Mor}(V_1, V_2)$, $h \in \text{Mor}(W_1, W_2)$ et

$$h \circ j_1 = j_2 \circ g.$$

Si \mathfrak{S}_1 et \mathfrak{S}_2 sont des foncteurs sur Γ_1 et Γ_2 respectivement et ayant les propriétés 1.2 et 1.3 on supposera dans ces conditions que :

1.11. Si $\Delta = (V, W, j)$ est dans Ξ alors $j(\mathfrak{S}_1(V)) \subseteq \mathfrak{S}_2(W)$.

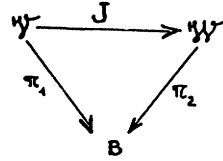
Un δ -fibré vectoriel de base B s'obtient en recollant des δ -couples attachés aux points de l'espace topologique B . Plus précisément soient

$$\eta_1 = (\mathcal{V}, B, \pi_1), \quad \eta_2 = (\mathcal{W}, B, \pi_2)$$

(*) $\mathfrak{E}(V)$ est supposé convenablement saturé (Cf. 1.2).

des fibrés de classe \mathcal{C}_{Ξ} (resp. : \mathcal{H}_{Ξ}) à fibres dans Γ_1 et Γ_2 respectivement et $J : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ une injection telle que :

$$\pi_2 \circ J = \pi_1.$$



DÉFINITION 1.4. — (η_1, η_2, J) est un δ -fibré vectoriel à fibres dans Ξ et de classe \mathcal{C}_{Ξ} (resp. : \mathcal{H}_{Ξ}) s'il existe deux atlas vectoriels de classe (*) \mathcal{C}_{Ξ} (resp. : \mathcal{H}_{Ξ}) de η_1 et η_2 au-dessus du même recouvrement de B :

$$\mathcal{A}_1 = \{ c_\alpha^1 = (U_\alpha, \Phi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I} \}, \quad \mathcal{A}_2 = \{ c_\alpha^2 = (U_\alpha, \Psi_\alpha, W_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I} \}$$

tels que

- (a) V_α et W_α sont les espaces d'un δ -couple $\Delta_\alpha = (V_\alpha, W_\alpha, j_\alpha)$ de Ξ .
- (b) $\forall \alpha \in \mathcal{I} : \Psi_\alpha \circ J \circ \Phi_\alpha^{-1} = id_{U_\alpha} \times j_\alpha$ (autrement dit l'expression de J dans les cartes c_α^1 et c_α^2 est une injection linéaire continue indépendante de la fibre de $m \in U_\alpha$).
- (c) Si $m \in U_\alpha \cap U_\beta : (g_{\beta\alpha}(m), h_{\beta\alpha}(m)) \in \text{Mor}(\Delta_\alpha, \Delta_\beta)$ où $g_{\beta\alpha}$ et $h_{\beta\alpha}$ sont définies par $\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(m, v) = (m, g_{\beta\alpha}(m)v)$, $\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}(m, w) = (m, h_{\beta\alpha}(m)w)$.

Une structure de δ -fibré vectoriel de classe \mathcal{C}_{Ξ} (resp. : \mathcal{H}_{Ξ}) à fibres dans Ξ sur (η_1, η_2, J) est déterminée par un couple maximal d'atlas $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ ayant les propriétés de la définition 1.4. Les δ -fibrés vectoriels forment une catégorie dont les morphismes sont définis de la façon suivante : si $\xi = (\eta_1, \eta_2, J)$, $\xi' = (\eta'_1, \eta'_2, J')$ sont des δ -fibrés vectoriels à fibres dans Ξ et de bases B et B' respectivement $\text{Mor}(\xi, \xi')$ est l'ensemble des (f, g_1, g_2) où

1.12. $f : B \rightarrow B'$ est continue, $g_1 : \eta_1 \rightarrow \eta'_1$, $g_2 : \eta_2 \rightarrow \eta'_2$ sont des f -morphismes tels que $J' \circ g_1 = g_2 \circ J$.

3 Détermination des fibrés et des δ -fibrés par des applications de transition

Nous appellerons ici cocycle de classe \mathcal{C}_{Ξ} (resp. : \mathcal{H}_{Ξ}) subordonné au recouvrement ouvert $\{ U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I} \}$ de B toute famille d'applications « de transition »

$$\{ g_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{I} \} \quad \text{et} \quad U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$$

où $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Iso}(V_\alpha, V_\beta)$ avec V_α et V_β dans Γ et

1.13. pour $m \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma : g_{\gamma\beta}(m) \circ g_{\beta\alpha}(m) = g_{\gamma\alpha}(m)$.

On montre par le procédé habituel « des classes d'équivalence » qu'un tel cocycle détermine, à un isomorphisme près, un fibré vectoriel de classe \mathcal{C}_{Ξ} (resp. : \mathcal{H}_{Ξ}) à fibres dans Γ et dont les applications de transition sont les $g_{\beta\alpha}$. Pour les δ -fibrés on a la

PROPOSITION 1.1. — Dans les conditions 1.8, 1.9, 1.10, 1.11 si $\{ U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I} \}$

(*) Cf. note page suivante.

est un recouvrement ouvert de B et si les deux cocycles subordonnés à ce recouvrement

$$g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Iso}(V_\alpha, V_\beta), \quad h_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Iso}(W_\alpha, W_\beta)$$

sont de classe (*) $\mathcal{C}_\mathfrak{E}$ (resp. : $\mathcal{H}_\mathfrak{E}$) et tels que :

- . $\forall \alpha \in \mathcal{I}$ V_α et W_α sont les espaces d'un δ -couple $\Delta_\alpha = (V_\alpha, W_\alpha, j_\alpha)$ de Ξ .
- . $\forall m \in U_\alpha \cap U_\beta$ $(g_{\beta\alpha}(m), h_{\beta\alpha}(m)) \in \text{Mor}(\Delta_\alpha, \Delta_\beta)$.

Il existe alors un δ -fibré vectoriel $\zeta = (\eta_1, \eta_2, J)$, de base B , à fibres dans Ξ et de classe $\mathcal{C}_\mathfrak{E}$ (resp. : $\mathcal{H}_\mathfrak{E}$), déterminé à un isomorphisme près et dont un couple d'atlas $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ (Def. 1.4) admet les $g_{\beta\alpha}$ et $h_{\beta\alpha}$ pour applications de transition.

Dans les conditions de la proposition η_1 et η_2 sont déterminés par les cocycles $g_{\beta\alpha}$ et $h_{\beta\alpha}$ respectivement.

4 Dualité des fibrés et des δ -fibrés vectoriels

Dans les conditions 1.1, 1.2, 1.3 on définit la catégorie $\Gamma'_\mathfrak{E}$ des espaces

$$V'_\mathfrak{E} (= \mathcal{L}_\mathfrak{E}(V, \mathbb{K}))$$

où V est dans Γ et dont les morphismes sont les transposés des morphismes de Γ . On désignera par \mathcal{E} le foncteur « ensemble des parties équi continues » défini sur Γ' (la distinction entre parties équi continues et parties fortement bornées n'a d'ailleurs d'intérêt que dans les duals d'e. l. c. non tonnelés).

PROPOSITION 1.2. — Si $\eta = (\mathcal{V}, B, \pi)$ est un fibré vectoriel de classe $\mathcal{C}_\mathfrak{E}$ (resp. : $\mathcal{H}_\mathfrak{E}$) à fibres dans Γ et déterminé par le cocycle des

$$g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Iso}(V_\alpha, V_\beta)$$

alors

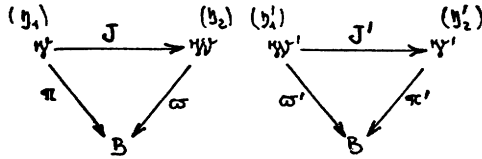
(a) Le cocycle $g_{\beta\alpha} = 'g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Iso}(V'_{\alpha\mathfrak{E}}, V'_{\beta\mathfrak{E}})$ détermine un fibré vectoriel $\eta' = (\mathcal{V}', B, \chi)$ de classe $\mathcal{C}_\mathfrak{E}$ (resp. : $\mathcal{H}_\mathfrak{E}$) à fibres dans $\Gamma'_\mathfrak{E}$.

(b) Il existe une application canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V}' \times_B \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{K}$ bilinéaire et continue sur chaque $\mathcal{V}'_m \times \mathcal{V}_m$ pseudo-topologique, ($m \in B$).

(c) Si $s : B \rightarrow \mathcal{V}$, $s' : B \rightarrow \mathcal{V}'$ sont des sections continues de η et η' (cf. n° 1), l'application $m \rightsquigarrow \langle s'(m), s(m) \rangle$ est continue.

Dans les conditions de 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, on définit la catégorie $\Xi'_\mathfrak{E}$ des δ -couples $\Delta'_\mathfrak{E} = (W'_\mathfrak{E}, V'_\mathfrak{E}, 'j)$ où $\Delta = (V, W, j)$ est dans Ξ et dont les morphismes sont les $('h, 'g)$ où (g, h) est un morphisme de Ξ . Par dualité, un δ -fibré $\zeta = (\eta_1, \eta_2, J)$ à fibres dans Ξ donne un δ -fibré $\zeta' = (\eta'_2, \eta'_1, J')$ à fibres dans $\Xi'_\mathfrak{E}$.

(*) Lorsque $\mathfrak{E} = (\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$, \mathfrak{E}_1 ou \mathfrak{E}_2 doivent figurer en indice nous les notons \mathfrak{E} sans distinction.



5 Affaiblissement de structure

Si Γ est une catégorie d'e. l. c. séparés ayant la propriété 1.1, Γ' désignera la catégorie formée des duals E' des e. l. c. de Γ et dont les morphismes sont les transposés des morphismes de Γ , on pose :

DÉFINITION 1.5.

1° Un foncteur de Mackey sur Γ est un foncteur \mathcal{M} de Γ aux ensembles tel que

(α) $\mathcal{M}(E)$ est un recouvrement de E par des ensembles convexes équilibrés et compacts pour la topologie $\sigma(E, E')$.

(β) Si $u \in \text{Mor}(E, F) : u(\mathcal{M}(E)) \subseteq \mathcal{M}(F)$.

2° Un foncteur de Mackey sur Γ' est un foncteur \mathcal{M}' de Γ' aux ensembles tel que :

(α) $\mathcal{M}'(E')$ est un recouvrement de E' par des ensembles convexes équilibrés équicontinus et fermés pour la topologie $\sigma(E', E)$.

(β) Si $u \in \text{Mor}(E, F) : {}^t u(\mathcal{M}'(F')) \subseteq \mathcal{M}'(E')$.

Le choix des propriétés (α) est motivé par le fait qu'une partie équicontinue de E' est compacte pour $\sigma(E', E)$ et par les théorèmes de Mackey (Bourbaki II, chapitre IV, § 2, proposition 2 et théorème 2). Dans ces conditions pour tout E de Γ on peut définir la \mathcal{M}' -topologie sur E , moins fine que la topologie initiale de E , et la \mathcal{M} -topologie sur E' , topologies de la convergence uniforme sur les parties de $\mathcal{M}'(E')$ et de $\mathcal{M}(E)$ respectivement. Ces topologies sont compatibles avec la dualité entre E et E' . On peut choisir en particulier :

1.14. $\mathcal{M}(E)$ = ensemble des enveloppes convexes équilibrées des parties finies de E , la \mathcal{M} -topologie sur E' est alors la topologie faible $\sigma(E', E)$ (notation E'_s).

1.15. $\mathcal{M}'(E')$ = ensemble des enveloppes convexes équilibrées des parties finies de E' , la \mathcal{M}' -topologie sur E est alors la topologie affaiblie $\sigma(E, E')$ (notation E_σ).

Avec la définition 1.5 on montre facilement que

1.16. $u \in \text{Mor}(E, F) (\subseteq \mathcal{L}(E, F)) \Rightarrow u \in \mathcal{L}(E_{\mathcal{M}'}, F_{\mathcal{M}'})$.

1.17. Si les topologies initiales de E et F sont les topologies de Mackey :

$u \in \mathcal{L}(E_{\mathcal{M}'}, F_{\mathcal{M}'}) \Rightarrow u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1.18. $u \in (\text{Mor}(E, F)) \Rightarrow {}^t u \in \mathcal{L}(F'_{\mathcal{M}'}, E'_{\mathcal{M}'})$.

1.19. $v \in \mathcal{L}(F'_{\mathcal{M}'}, E'_{\mathcal{M}'}) \Rightarrow v \in \mathcal{L}(F'_s, E'_s)$.

et cela suggère d'introduire les deux catégories et le foncteur \mathcal{F} définis par

1.20. $\Gamma_{\mathcal{M}'} =$ catégorie des e. l. c. $E_{\mathcal{M}'}$ avec $\text{Mor}(E_{\mathcal{M}'}, F_{\mathcal{M}'}) = \text{Mor}(E, F)$.

1.21. $\Gamma'_{\mathcal{M}'} =$ catégorie des e. l. c. $E'_{\mathcal{M}'}$ avec $\text{Mor}(E'_{\mathcal{M}'}, F'_{\mathcal{M}'}) = \text{Mor}(E, F)$.

1.22. $\mathcal{F}(E_{\mathcal{M}'}) = \mathfrak{S}(E)$ (dans les conditions 1.2 et 1.3).

PROPOSITION 1.3. — Soient $\eta = (\mathcal{V}, B, \pi)$ muni d'une structure de fibré vectoriel à fibres dans Γ , $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \Phi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ un atlas vectoriel de η ,

$$\check{\mathcal{A}} = \{(U_\alpha, \Phi_\alpha, V'_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$$

un atlas vectoriel de $\eta' = (\mathcal{V}', B, \pi')$.

1° Si η est de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}$, $\check{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}'} = \{(U_\alpha, \check{\Phi}_\alpha, V_{\alpha_{\mathcal{M}'}}) \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ est un atlas vectoriel qui définit sur (\mathcal{V}, B, π) une structure de fibré vectoriel à fibres dans $\Gamma_{\mathcal{M}'}$ de classe $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ notée $\eta_{\mathcal{M}'}$ ($\eta, \eta_{\mathcal{M}'}, I$), $I =$ identité de \mathcal{V} est un δ -fibré vectoriel strict.

2° Si η est de classe $\mathcal{H}_{\mathfrak{S}}$ et si $\mathcal{M}(E) \subseteq \mathfrak{S}(E)$, $\mathcal{A}_{\mathcal{M}} = \{(U_\alpha, \Phi_\alpha, V'_{\alpha_{\mathcal{M}}})\}$ est un atlas vectoriel qui définit sur (\mathcal{V}', B, π') une structure de fibré vectoriel à fibres dans $\Gamma'_{\mathcal{M}}$ de classe $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ notée $\eta'_{\mathcal{M}}$ ($\eta', \eta'_{\mathcal{M}}, I'$), $I' =$ identité de \mathcal{V}' est un δ -fibré vectoriel strict.

COROLLAIRE : 1° Si η est de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}$, il existe un fibré η_σ affaibli de η , à fibres dans Γ_σ .

2° Si η est de classe $\mathcal{H}_{\mathfrak{S}}$, il existe un fibré η'_s dual faible de η à fibres dans Γ'_s .

Remarquons que les affaiblissements de structure sont définis pour les seuls fibrés de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}}$ et pour les duals des seuls fibrés de classe $\mathcal{H}_{\mathfrak{S}}$. Dans le cas des fibrés de Banach, qui sont à la fois de classe \mathcal{C}_b et \mathcal{H}_b , on peut définir des structures affaiblies à la fois sur les fibrés eux-mêmes et sur leurs duals.

§ 2 VARIÉTÉS BIMODELÉES

Dans ce paragraphe Ξ désigne une catégorie de δ -couples stricts d'e. l. c. attachée à des catégories Γ_1 et Γ_2 , $\mathfrak{S} = (\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$ un couple de foncteurs comme en 1.8, ..., 1.11. De plus on suppose que :

2.1. Γ_1 est formée d'espaces de Banach et $\mathfrak{S}_1 = b$ foncteur « ensemble des parties bornées ».

Dans les applications les morphismes de Γ_1 seront le plus souvent les applications linéaires continues, il n'est pas utile de le supposer en général. Par contre il sera commode de convenir que \mathbb{R}, \mathbb{C} sont dans Γ_1 , et Γ_2 , $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, id)$ et $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, id)$ dans Ξ et que

$$\text{Mor}(\mathbf{E}, \mathbf{K}) = \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{K}), \text{Mor}(\mathbf{K}, \mathbf{E}) = \mathcal{L}(\mathbf{K}, \mathbf{E}) \quad \text{pour } \mathbf{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

et \mathbf{E} dans Γ_1 ou Γ_2 . La propriété suivante

2.2. PROPRIÉTÉ A. — Si W est dans Γ_2 tout arc continu compact de W

est contenu dans un ensemble de $\mathfrak{S}_2(W)$ sera souvent utilisée. De plus Δ (resp. : Δ_x) désignera toujours le δ -couple de Ξ dont l'expression est (V, W, j) (resp. : V_x, W_x, j_x).

1 Applications bidifférentiables

DÉFINITION 2.1. — Soient Δ_1 et Δ_2 des δ -couples de Ξ , U un ouvert de V_1 , $f: U \rightarrow V_2$

a) f est dite bidifférentiable si f est continûment différentiable et s'il existe $f': U \rightarrow \text{Mor}(W_1, W_2)$ appelée « pseudo-différentielle » de f telle que :

$$\forall x \in U : (f'(x), f'(x)) \in \text{Mor}(\Delta_1, \Delta_2).$$

b) f est dite bidifférentiable de classe \mathcal{C}_{Ξ}^1 (resp. : \mathcal{H}_{Ξ}^1) si f est bidifférentiable et si f' est de classe \mathcal{C}_{Ξ} (resp. : \mathcal{H}_{Ξ}).

c) Si Ξ est une catégorie de δ -couples d'espaces de Banach, f est dite bidifférentiable de classe $\mathcal{C}^k (k \geq 1)$ si f est bidifférentiable et si f' et f' sont de classe \mathcal{C}^{k-1} .

Les δ -couples intervenant étant stricts, la pseudo-différentielle de f , si elle existe, est unique. Lorsqu'interviennent des propriétés « de classe \mathcal{C}^k » on se référera toujours sans avoir à le préciser à une catégorie Ξ de δ -couples d'espaces de Banach. Si f est bidifférentiable on peut définir les applications tangente $Tf: U \times V_1 \rightarrow V_2 \times V_2$ et pseudo-tangente

$$\tilde{T}f: U \times W_1 \rightarrow V_2 \times W_2$$

par :

$$2.3. \quad Tf(x, v) = (f(x), f'(x)v), \quad \tilde{T}f(x, w) = (f(x), f'(x)w).$$

et les relations $f'(x) \circ j_1 = j_2 \circ f'(x)$ (cf. 1.10) entraînent :

$$2.4. \quad \tilde{T}f \circ (id_U \times j_1) = (id_U \times j_2) \circ Tf.$$

Par composition les applications bidifférentiables de classe $\mathcal{C}_{\Xi}^1, \mathcal{H}_{\Xi}^1, \mathcal{C}^k$ donnent des applications de même nature ; si $f: U_1 \rightarrow V_2, g: U_2 \rightarrow V_3$ (U_x ouvert de V_x) sont bidifférentiables (resp. $\mathcal{C}_{\Xi}^1, \mathcal{H}_{\Xi}^1, \mathcal{C}^k$) avec $f(U_1) \subset U_2$ alors $g \circ f$ est bidifférentiable (resp. $\mathcal{C}_{\Xi}^1, \mathcal{H}_{\Xi}^1, \mathcal{C}^k$) et :

$$2.5. \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x), \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x), x \in U_1.$$

Cette propriété s'établit en usant de 1.7, elle entraîne

$$2.6. \quad T(g \circ f) = Tg \circ Tf, \quad \tilde{T}(g \circ f) = \tilde{T}g \circ \tilde{T}f.$$

Le théorème de Schwartz conduit à la propriété suivante :

2.7. Si $f: U_1 \rightarrow V_2$ est bidifférentiable de classe \mathcal{C}^2 alors

$$\forall x \in U_1, f''(x)(v_1, j_1 v_2) = f''(x)(v_2, j_1 v_1) = j_2 f'''(x)(v_1, v_2), v_1, v_2 \in V_1$$

DÉFINITION 2.2. — Soient Δ_1 et Δ_2 des δ -couples de Ξ , U_1, U_2 des ouverts de V_1, V_2 , $f: U_1 \rightarrow U_2$ est un bidifféomorphisme (resp. : bidifféomorphisme de classe $\mathcal{C}_{\Xi}^1, \mathcal{H}_{\Xi}^1, \mathcal{C}^k$) si f est une bijection et si f et f^{-1} sont bidifférentiables (resp. : et de classe $\mathcal{C}_{\Xi}^1, \mathcal{H}_{\Xi}^1, \mathcal{C}^k$).

Un bidifféomorphisme est donc aussi un difféomorphisme. On établit que :

$$2.8. \quad f^{-1}(y) = f'(x)^{-1}, \quad \tilde{f}^{-1}(y) = f(x)^{-1} \quad \text{si} \quad y = f(x).$$

On a donc aussi les propriétés :

$$\mathbb{T}f^{-1} = (\mathbb{T}f)^{-1}, \quad \tilde{\mathbb{T}}f^{-1} = (\tilde{\mathbb{T}}f)^{-1}, \quad (f'(x), f'(x)) \in \text{Iso}(\Delta_1, \Delta_2), \quad x \in U_1.$$

2 Applications pseudo-différentiables

Les applications bidifférentiables du n° 1 ont une différentielle et une pseudo-différentielle ; les applications pseudo-différentiables sont des applications pour lesquelles l'existence de la seule pseudo-différentielle est assurée. Pour ce que nous avons en vue le cas des applications définies sur un intervalle I de \mathbb{R} est suffisant.

DÉFINITION 2.3. — Soient Δ dans Ξ , $f: I \rightarrow V$, $t \in I$. On dit que f est pseudo-différentiable au point t (resp. : sur I) si f est continue de I dans V au point t (resp. : sur I) et si $j \circ f$ est dérivable de I dans W au point t (resp. : sur I).

Dans ces conditions on pose

$$2.9. \quad f'(t) = \frac{d}{dt} j \circ f(t), \quad \tilde{\mathbb{T}}f(t) = (f(t), f'(t))$$

Si l'on compose une application pseudo-différentielle par une application différentiable on obtient encore une application pseudo-différentiable ; plus précisément on établit dans D. Chevallier I :

2.10. Soient Δ_1 et Δ_2 dans Ξ , U un ouvert de V_1 , $f: I \rightarrow V_1$ une application pseudo-différentiable au point t (resp. : sur I) telle que $f(I) \subset U$, $g: U \rightarrow V_2$ une application bidifférentiable. On suppose que la propriété A a lieu et que g' est continue de U dans $\mathcal{L}_{\Xi_2}(W_1, W_2)$, alors $g \circ f$ est pseudo-différentiable en t (resp. : sur I) et

$$(g \circ f)'(t) = g'(f(t))(f'(t)), \quad \tilde{\mathbb{T}}(g \circ f)(t) = \tilde{\mathbb{T}}g \circ \tilde{\mathbb{T}}f(t).$$

La propriété 2.10 vaut en particulier si g est bidifférentiable de classe $\mathcal{C}_{\Xi}^1, \mathcal{H}_{\Xi}^1$ ou \mathcal{C}^k .

3 Structure de variété bimodelée dans Ξ

Soit Ω un ensemble, on appelle δ -carte de Ω dans Ξ tout triplet $c = (U, \varphi, \Delta)$ où Δ est dans Ξ , U (domaine de c) une partie de Ω , φ une bijection de U

sur un ouvert de V . La carte $c^0 = (U, \varphi, V)$ est dite associée à la δ -carte c .

2.11. Deux δ -cartes $c_1 = (U_1, \varphi_1, \Delta_1)$, $c_2 = (U_2, \varphi_2, \Delta_2)$ de Ω dans Ξ sont dites \mathcal{C}_{Ξ}^1 (resp. : $\mathcal{H}_{\Xi}^1, \mathcal{C}^k$) compatibles si soit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ soit $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ et $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ sont ouverts dans V_1 et V_2 respectivement et les applications de transition

$\gamma_{12} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ et $\gamma_{21} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ sont des bidifféomorphismes de classe \mathcal{C}_{Ξ}^1 (resp. : $\mathcal{H}_{\Xi}^1, \mathcal{C}^k$).

Les deux cartes associées c_1^0 et c_2^0 sont alors \mathcal{C}^1 (resp. : $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^k$) compatibles.

Un δ -atlas de classe \mathcal{C}_{Ξ}^1 (resp. : $\mathcal{H}_{\Xi}^1, \mathcal{C}^k$) de Ω dans Ξ est un ensemble

$$\mathcal{A} = \{c_{\alpha} \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$$

de δ -cartes de Ω deux à deux \mathcal{C}_{Ξ}^1 (resp. : $\mathcal{H}_{\Xi}^1, \mathcal{C}^k$) compatibles et dont les domaines recouvrent Ω .

DÉFINITION 2.4. — Une structure de variété bimodelée dans Ξ de classe \mathcal{C}_{Ξ}^1 (resp. : $\mathcal{H}_{\Xi}^1, \mathcal{C}^k$) sur Ω est déterminé par un δ -atlas maximal de classe \mathcal{C}_{Ξ}^1 (resp. : $\mathcal{H}_{\Xi}^1, \mathcal{C}^k$) sur Ω .

Si $\mathcal{A} = \{c_{\alpha} \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ est un δ -atlas de Ω alors $\mathcal{A}^0 = \{c_{\alpha}^0 \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ est un atlas qui détermine sur Ω une structure de variété de Banach modelée dans Γ_1 de classe \mathcal{C}^1 (resp. : $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^k$) appelée structure de variété sous-jacente (*).

Cette structure sous-jacente est une variété ordinaire lorsque les morphismes de Γ_1 sont les applications linéaires continues, lorsqu'il n'en est pas ainsi ce peut être une variété déjà munie d'une structure additionnelle (par exemple une structure de Fredholm ou une « layer structure » au sens de J. Eells et Elworthy I). Les variétés bimodelées apparaissent comme des variétés munies de structures additionnelles ; une structure de variété bimodelée sur Ω détermine en particulier une topologie sur Ω qui est aussi la topologie de la variété sous-jacente.

Soient Ω et Ω' des variétés bimodelées de même classe \mathcal{C}_{Ξ}^1 (resp. : \mathcal{H}_{Ξ}^1 ou \mathcal{C}^k) dans Ξ , l'application continue $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est dite bidifférentiable et de classe \mathcal{C}_{Ξ}^1 (resp. : \mathcal{H}_{Ξ}^1 ou \mathcal{C}^k) si les expressions locales de f dans les cartes d'un δ -atlas de Ω et d'un δ -atlas de Ω' sont bidifférentiables de classe \mathcal{C}^1 (resp. : \mathcal{H}_{Ξ}^1 ou \mathcal{C}^k) (Définition 2.1) il en est alors de même dans toutes cartes de Ω et Ω' (d'après 2.5). Les variétés bimodelées dans Ξ des diverses classes forment ainsi des catégories dont les morphismes sont les applications bidifférentiables des classes correspondantes.

On suppose maintenant la propriété A vérifiée, si I est un intervalle de \mathbb{R} l'application continue $f : I \rightarrow \Omega$ est dite pseudo-différentiable en t si l'expression locale de f dans une δ -carte de Ω en $f(t)$ est pseudo-différen-

(*) Bien entendu si \mathcal{A} est un δ -atlas maximal, l'atlas \mathcal{A}^0 n'est pas en général maximal.

table en t (Définition 2.3) il en est alors de même dans toute δ -carte de Ω (d'après 2.10) et cette définition a bien un sens intrinsèque. Lorsqu'on compose une application pseudo-différentiable $f: I \rightarrow \Omega$ par une application bidifférentiable de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}^1$, $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}^1$ ou \mathcal{C}^k on obtient une application $g \circ f$ qui est aussi pseudo-différentiable.

§ 3 LE δ -FIBRÉ VECTORIEL TANGENT A UNE VARIÉTÉ BIMODELÉE

1 Notations

Les notations sont celles du § 2. Si Ω est une variété bimodelée dans Ξ de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}^1$ (resp. : $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}^1$ ou \mathcal{C}^k) et si $\mathcal{A} = \{c_\alpha = (U_\alpha, \varphi_\alpha, \Delta_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ est un δ -atlas de Ω les applications de transition

$$\gamma_{\beta\alpha} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathcal{I})$$

sont des bidifféomorphismes et l'on peut définir (§ 2 n° 1)

$$3.1. \quad (\gamma'_{\beta\alpha}, \gamma^*_{\beta\alpha}) : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \text{Iso}(\Delta_\alpha, \Delta_\beta)$$

d'où l'on déduit un couple de cocycles défini par

$$3.2. \quad (g_{\beta\alpha}, h_{\beta\alpha}) : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Iso}(\Delta_\alpha, \Delta_\beta) : m \rightsquigarrow (\gamma'_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha(m)), \gamma^*_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha(m)))$$

et qui, avec la proposition 1.3, détermine un δ -fibré vectoriel à fibres dans Ξ et de classe $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$ (resp. : $\mathcal{H}_{\mathfrak{E}}$ ou \mathcal{C}^k).

DÉFINITION 3.1. — Le δ -fibré vectoriel strict déterminé par les cocycles 3.2 est appelé δ -fibré tangent à Ω et est noté $(\tau(\Omega), \tilde{\tau}(\Omega), J) : \tau(\Omega) = (T\Omega, \Omega, p)$, fibré tangent à Ω , s'identifie au fibré tangent à la variété sous-jacente, $\tilde{\tau}(\Omega) = (\tilde{T}\Omega, \Omega, \tilde{p})$, fibré pseudo-tangent à Ω , est essentiellement relatif à la structure bimodelée de Ω .

L'espace $\tilde{T}\Omega$ du fibré $\tilde{\tau}(\Omega)$ est l'espace pseudo-tangent dont les éléments sont les vecteurs pseudo-tangents à Ω . Les cartes vectorielles du δ -fibré tangent sont les $c_\alpha^1 = (U_\alpha, \Phi_\alpha, V_\alpha)$ et les $c_\alpha^2 = (U_\alpha, \Psi_\alpha, W_\alpha)$ $\alpha \in \mathcal{I}$, $\Delta_\alpha = (V_\alpha, W_\alpha, j_\alpha)$ dans Ξ et pour $\mathbf{v} \in p^{-1}(U_\alpha)$, $\mathbf{w} \in \tilde{p}^{-1}(U_\alpha)$.

$$3.3. \quad \Phi_\alpha(\mathbf{v}) = (m, v_\alpha), \Psi_\alpha(\mathbf{w}) = (m, w_\alpha) \quad \text{où } m = p(\mathbf{v}) = \tilde{p}(\mathbf{w}), v_\alpha \in V_\alpha, w_\alpha \in W_\alpha$$

sont les représentants de \mathbf{v} et \mathbf{w} dans c_α^1 et c_α^2 .

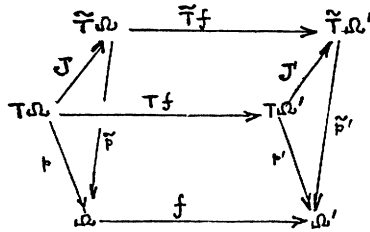
L'expression locale de $J : T\Omega \rightarrow \tilde{T}\Omega$ sur $p^{-1}(U_\alpha)$ est

$$3.4. \quad J_\alpha = \Psi_\alpha \circ J \circ \Phi_\alpha^{-1} : (m, v_\alpha) \rightsquigarrow (m, j_\alpha v_\alpha).$$

Si Ω et Ω' sont des variétés bimodelées de même classe dans Ξ et $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ une application bidifférentiable on peut définir un f -morphisme $(Tf, \tilde{T}f)$

du δ -fibré tangent à Ω dans le δ -fibré tangent à Ω' appelé morphisme tangent à f .

$$Tf: \tau(\Omega) \rightarrow \tau(\Omega'), \quad \tilde{T}f: \tilde{\tau}(\Omega) \rightarrow \tilde{\tau}(\Omega')$$



Les deux f -morphisms de fibrés vectoriels (applications tangente et pseudo-tangente à f) s'expriment localement dans la δ -carte c_α de Ω sur U_α et la δ -carte c'_α , de Ω' sur $U'_\alpha \supset f(U_\alpha)$ par :

$$Tf_{\alpha\alpha'} : (m, v_\alpha) \rightsquigarrow (f(m), f'_{\alpha\alpha'}(\varphi_\alpha(m))v_\alpha)$$

$$\tilde{T}f_{\alpha\alpha'} : (m, w_\alpha) \rightsquigarrow (f(m), f_{\alpha\alpha'}(\varphi_\alpha(m))w_\alpha)$$

avec

$$f_{\alpha\alpha'} = \varphi_{\alpha'} \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}.$$

On suppose maintenant que la propriété A est vérifiée. Si I est un intervalle de \mathbb{R} et $f: I \rightarrow \Omega$ est pseudo-différentiable l'existence de la seule application pseudo-tangente $\tilde{T}f: I \rightarrow \tilde{T}\Omega$ est assurée et son expression locale dans la δ -carte c_α de Ω est :

$$\tilde{T}f_\alpha : t \rightsquigarrow (f(t), f'_\alpha(t)) \quad \text{où} \quad f'_\alpha = \varphi_\alpha \circ f.$$

Sur une variété bimodelée on peut définir des champs de vecteurs (sections de $\tau(\Omega)$) et des champs de pseudo-vecteurs (sections de $\tilde{\tau}(\Omega)$).

DÉFINITION 3.2. — Soit $Y: \Omega \rightarrow \tilde{T}\Omega$ un champ de pseudo-vecteurs sur Ω , une intégrale de Y est une application pseudo-différentiable $f: I \rightarrow \Omega$ telle que

$$\tilde{T}f(t) = Y(f(t)) \quad t \in I.$$

(En fait on peut ne requérir l'existence de $\tilde{T}f$ qu'en « presque tout point de I »). Par un artifice de forme classique, en introduisant la variété bimodelée produit $\Omega \times \mathbb{R}$, le cas des champs de pseudo-vecteurs $Y: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{T}\Omega$ dépendant de t entre dans le cadre de cette définition (cf. D. Chevallier (I)). Un problème d'évolution de forme géométrique générale est alors la recherche des intégrales f du champ de pseudo-vecteurs Y passant par un point $m_0 \in \Omega$; c'est-à-dire

$$3.5. \quad \begin{cases} f(t_0) = m_0 \\ \tilde{T}f(t) = Y(f(t)) \quad (\text{ou } Y(f(t), t)) \quad t \in I. \end{cases}$$

La seconde relation s'exprime localement dans la δ -carte c_α de Ω par :

$$\frac{d}{dt} j_\alpha \circ f_\alpha(t) \equiv \dot{f}(t) = \mathbf{Y}_\alpha(f_\alpha(t)) \quad (\text{ou } \mathbf{Y}_\alpha(f(t), t)).$$

et la dérivée du 1^{er} membre est prise selon une topologie plus faible que celle de V_α à savoir la topologie de W_α . La forme géométrique intrinsèque de ce problème d'évolution est essentiellement relative à la structure de variété bimodelée de Ω et n'a en général pas de signification intrinsèque dans la structure de variété sous-jacente. En englobant la recherche de solutions faibles d'équations fonctionnelles (en particulier d'équations aux dérivés partielles) elle constitue l'un des principaux apports de la notion de variété bimodelée.

2 Structure affaiblie d'une variété bimodelée

On reprend les notations du 2, n° 3; si \mathcal{M}' est un foncteur de Mackey sur Γ'_2 (Définition 1.5) on note $\Xi_{\mathcal{M}'}$ la catégorie des δ -couples stricts $\Delta_{\mathcal{M}'} = (V, W_{\mathcal{M}'}, j)$ avec $\Delta = (V, W, j)$ dans Ξ et dont les morphismes sont ceux de Ξ . On définit le foncteur $\mathcal{T} = (\mathfrak{S}_1, \mathcal{T}_2)$ avec $\mathcal{T}_2(W_{\mathcal{M}'}) = \mathfrak{S}_2(W)$. Dans ces conditions si

$$\mathcal{A} = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha, \Delta_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I} \} \quad \text{est un } \delta\text{-atlas de classe } \mathcal{C}_\mathfrak{E} \text{ sur } \Omega,$$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{M}'} = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha, \Delta_{\alpha\mathcal{M}'}) \mid \alpha \in \mathcal{I} \} \quad \text{est un } \delta\text{-atlas de classe } \mathcal{C}_\mathfrak{E} \text{ sur } \Omega;$$

on pose la

DÉFINITION 3.3. — Si Ω est une variété bimodelée de classe $\mathcal{C}_\mathfrak{E}$ dont \mathcal{A} est un δ -atlas, la structure de variété bimodelée déterminée par le δ -atlas $\mathcal{A}_{\mathcal{M}'}$ est appelée \mathcal{M}' -structure sur Ω associée à la structure initiale.

La \mathcal{M}' -structure sur Ω est moins fine que la structure initiale. En particulier si \mathcal{M}' est le foncteur 1.15 la \mathcal{M}' -structure est la structure affaiblie.

Le δ -fibré vectoriel tangent à Ω muni de la \mathcal{M}' -structure n'est autre que $(\tau(\Omega), \tau_{\mathcal{M}'}(\Omega), \mathbf{J})$ ($(\tau(\Omega), \tau_\sigma(\Omega), \mathbf{J})$) pour la structure affaiblie (Proposition 1.3, 1° et corollaire). Ces structures permettent de définir des classes plus larges d'applications pseudo-différentiables; voici le cas particulier utile dans la suite.

DÉFINITION 3.4. — On suppose que la propriété A est vérifiée dans $\Gamma_{2\sigma}$ avec le foncteur \mathcal{T}_2 (ce qui a lieu en particulier si $\mathfrak{S}_2 = b$). $f: \mathbf{I} \rightarrow \Omega$ est dite faiblement pseudo-différentiable si f est pseudo-différentiable quand Ω est munie de sa structure affaiblie.

3 Exemples de variétés bimodelées

Les détails de ces exemples, qu'il serait trop long d'exposer ici, figurent dans D. Chevallier I et seront traités dans une publication ultérieure.

1° Soient $I=[0, L]$, \mathcal{E} un espace vectoriel euclidien de dimension finie, E l'espace de Banach formé des applications $X : I \rightarrow \mathcal{E}$ dont la dérivée distribution X' est dans $L^\infty_{\mathcal{E}}(I)$ muni de la norme $\text{Sup}(|X(0)|_{\mathcal{E}}, N_\infty(X'))$. L'ensemble Ω formé des $X \in E$ tels que $|X'(s)| = 1$ p.p sur I peut être muni de structures de variétés bimodelées dont la structure de variété sous-jacente est décrite dans D. Chevallier II. Ω est l'espace des configurations d'un fil inextensible de longueur L .

2° Soit M une variété compacte \mathcal{C}^∞ , les ensembles de sections continues et vérifiant diverses autres conditions de régularité des espaces fibrés de base M peuvent être munis de nombreuses structures de variétés bimodelées dont les variétés sous-jacentes sont les variétés étudiées dans Palais I. Cet exemple montre qu'il existe des classes très larges de variétés bimodelées.

§ 4 STRUCTURE DE VARIÉTÉ BIMODELÉE SUR $T\Omega$. CALCUL DIFFÉRENTIEL SUR LES ESPACES TANGENT ET PSEUDO-TANGENT

Dans ce paragraphe Ξ est une catégorie de δ -couples d'espaces de Banach et Ω une variété bimodelée de classe $\mathcal{C}^k (k \geq 2)$ dans Ξ , les autres notations sont celles des paragraphes précédents. Dans ces conditions l'espace tangent $T\Omega$ est muni d'une structure canonique de variété bimodelée, on peut alors développer un calcul différentiel riche en propriétés n'ayant pas d'analogue dans le calcul différentiel sur les espaces tangents aux variétés ordinaires. Nous avons sélectionné celles de ces propriétés qui présentent de l'intérêt en mécanique analytique.

1 Structure de variété bimodelée de $T\Omega$

On note $\Xi \times \Xi$ la catégorie formée des δ -couples stricts

$$\Delta^2 = (V \times V, W \times W, j \times j)$$

où $\Delta = (V, W, j)$ est dans Ξ et dont les morphismes de Δ_α^2 à Δ_β^2 sont les couples (F, G) tels que :

$$\begin{aligned} 4.1. \quad F : V_\alpha \times V_\alpha &\rightarrow V_\beta \times V_\beta : (v_1, v_2) \rightsquigarrow (f(v_1), f(v_2) + h(v_1)) \\ G : W_\alpha \times W_\alpha &\rightarrow W_\beta \times W_\beta : (w_1, w_2) \rightsquigarrow (g(w_1), g(w_2) + k(w_1)) \end{aligned}$$

avec $(f, g) \in \text{Mor}(\Delta_\alpha, \Delta_\beta)$, $h \in \mathcal{L}(V_\alpha, V_\beta)$, $k \in \mathcal{L}(W_\alpha, W_\beta)$ et $k \circ j_\alpha = j_\beta \circ h$.

On a donc en particulier $G \circ (j_\alpha \times j_\alpha) = (j_\beta \times j_\beta) \circ F$. La propriété importante est la suivante : si Δ_α et Δ_β sont dans Ξ et si $f : U \rightarrow V_\beta$ (U ouvert de V_α) est bidifférentiable de classe $\mathcal{C}^k (k \geq 2)$ alors Tf est bidifférentiable de classe \mathcal{C}^{k-1} relativement à $\Xi \times \Xi$ et

$$\tilde{T}Tf : (U \times V_\alpha) \times (W_\alpha \times W_\alpha) \rightarrow (V_\beta \times V_\beta) \times (W_\beta \times W_\beta)$$

est l'application définie par :

$$4.2. \quad \tilde{T}Tf((x, u), (w_1, w_2)) = ((f(x), f'(x)u), (f'(x)w_1, f'(x)w_2 + f''(x)(u, w_1))).$$

Autrement dit $(Tf)'(x, u) = (f'(x)w_1, f'(x)w_2 + f''(x)(u, w_1))$ et l'on peut remarquer que si dans $(Tf)'$ la différentiation précède la pseudo-différentiation, l'existence de $(Tf)'$ ne requiert que celle de f'' et non celle de f'' (dont la définition ne serait d'ailleurs pas évidente !).

THÉORÈME 4.1. — Si Ω est une variété bimodelée de classe $\mathcal{C}^k (k \geq 2)$ dans Ξ il existe sur $T\Omega$ une structure canonique de variété bimodelée de classe \mathcal{C}^{k-1} dans $\Xi \times \Xi$. Pour cette structure la projection $p_\Omega : T\Omega \rightarrow \Omega$ est bidifférentiable de classe \mathcal{C}^{k-1} .

La propriété 4.2 permet en effet de montrer que

$$\mathcal{A}^2 = \{ c \times c = (p_\Omega^{-1}(U), T\varphi, \Delta^2), c = (U, \varphi, \Delta) \in \mathcal{A} \}$$

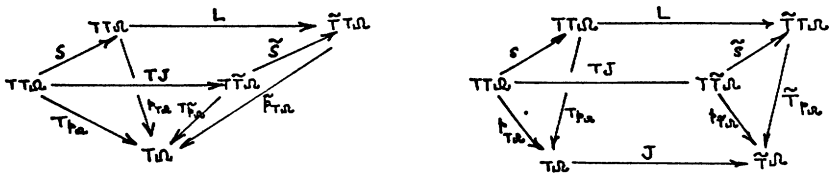
est un δ -atlas de classe \mathcal{C}^{k-1} dans $\Xi \times \Xi$ sur $T\Omega$. On notera $(\tau(T\Omega), \tilde{\tau}(T\Omega), L)$ le δ -fibré tangent à $T\Omega$ et $\tau(T\Omega) = (TT\Omega, T\Omega, p_{T\Omega})$, $\tilde{\tau}(T\Omega) = (\tilde{T}T\Omega, T\Omega, \tilde{p}_{T\Omega})$.

La bidifférentiabilité de p_Ω permet de définir deux fibrés vectoriels :

$$\begin{aligned} \tau(\tau(\Omega)) &= (TT\Omega, Tp_\Omega, T\Omega) \text{ fibré tangent à } \tau(\Omega), \\ \tilde{\tau}(\tau(\Omega)) &= (\tilde{T}T\Omega, \tilde{T}p_\Omega, \tilde{T}\Omega) \text{ fibré pseudo-tangent à } \tau(\Omega), \end{aligned}$$

et $\tilde{T}\Omega$ étant une variété différentielle de classe \mathcal{C}^{k-1} , elle admet un fibré tangent $\tau(\tilde{T}\Omega) = (T\tilde{T}\Omega, \tilde{T}\Omega, p_{\tilde{T}\Omega})$.

PROPOSITION 4.2. — 1° Il existe deux isomorphismes canoniques $s : \tau(T\Omega) \rightarrow \tau(\tau(\Omega))$ ($id_{T\Omega}$ -morphisme), $\tilde{s} : \tau(\tilde{T}\Omega) \rightarrow \tilde{\tau}(T\Omega)$ ($id_{\tilde{T}\Omega}$ -morphisme) tels que $s \circ \tilde{s} = \text{identité sur } TT\Omega$ et que les diagrammes suivants commutent.



2° Si $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ est bidifférentiable de classe \mathcal{C}^k alors $Tf : T\Omega \rightarrow T\Omega'$ est bidifférentiable de classe \mathcal{C}^{k-1} pour les structures de variétés bimodelées canonique de $T\Omega$ et $T\Omega'$, et si s, s' sont les isomorphismes relatifs à Ω et Ω' alors $\tilde{T}Tf \circ \tilde{s} = \tilde{s}' \circ T\tilde{T}f$.

En particulier si $f : \Omega \rightarrow E$ (espace de Banach) et si l'on introduit les opérateurs $d = pr_2 T, \tilde{d} = pr_2 \tilde{T}$ on a : $\tilde{d}d f \circ \tilde{s} = d\tilde{d} f (*)$.

(*) Dans ces conditions E est considéré comme une variété bimodelée triviale dont un δ -atlas est formé de l'unique δ -carte $c = (E, id_E, \Delta)$ où $\Delta = (E, E, id)$!

PROPOSITION 4.3. — Si Ω est une variété bimodelée de classe \mathcal{C}^k alors :

1° Il existe deux champs de vecteurs canoniques \mathbf{V} sur $T\Omega$ et \mathbf{W} sur $\tilde{T}\Omega$ tels que $\mathbf{W} \circ J = TJ \circ \mathbf{V}$.

2° Si $f: \tilde{T}\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur chaque fibre de $\tilde{\tau}(\Omega)$ alors $f \circ J$ est différentiable sur chaque fibre de $\tau(\Omega)$ et : $\mathbf{V} \cdot (f \circ J) = (\mathbf{W} \cdot f) \circ J$. \mathbf{V} est le champ canonique de Liouville sur $T\Omega$ et \mathbf{W} est déterminé de façon unique par \mathbf{V} .

Expressions locales. — Dans les cartes $c \times c$ les diverses applications introduites s'expriment par :

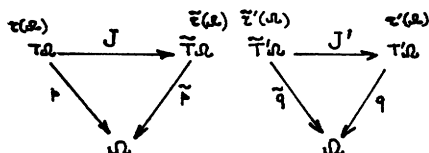
$$\begin{aligned} L &: ((x, v), (v_1, v_2)) \rightsquigarrow ((x, v), (jv_1, jv_2)) \\ TJ &: ((x, v), (v_1, v_2)) \rightsquigarrow ((x, jv), (v_1, jv_2)) \\ \Gamma p_\Omega &: ((x, v), (v_1, v_2)) \rightsquigarrow (x, v_1), \quad \tilde{\Gamma} \tilde{p}_\Omega : ((x, w), (v_1, w_1)) \rightsquigarrow (x, v_1) \\ \tilde{\Gamma} \tilde{p}_\Omega &: ((x, v), (w_1, w_2)) \rightsquigarrow (x, w_1) \\ s &: ((x, v), (v_1, v_2)) \rightsquigarrow ((x, v_1), (v, v_2)), \quad \tilde{s} : ((x, w), (v_1, w_2)) \rightsquigarrow ((x, v_1), (w, w_2)) \\ \mathbf{V} &: (x, v) \rightsquigarrow ((x, v), (0, v)), \quad \mathbf{W} : (x, w) \rightsquigarrow ((x, w), (0, w)). \end{aligned}$$

où $x, v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W, ((x, v), (v_1, v_2))$ est le représentant dans $c \times c$ d'un point de $TT\Omega$ se projetant sur $T\Omega$ par $p_{T\Omega}$ en un point de représentant (x, v) dans $c, ((x, v), (w_1, w_2))$ est le représentant dans $c \times c$ d'un point de $\tilde{T}T\Omega$ se projetant par $\tilde{p}_{T\Omega}$ en un point de $T\Omega$ de représentant (x, v) dans c .

§ 5 STRUCTURE DE VARIÉTÉ BIMODELÉE SUR L'ESPACE PSEUDO-COTANGENT D'UNE VARIÉTÉ BIMODELÉE

D'une manière générale si Ω est une variété bimodelée son δ -fibré tangent $(\tau(\Omega), \tilde{\tau}(\Omega), J)$ donne, par dualité le δ -fibré cotangent $(\tilde{\tau}'(\Omega), \tau'(\Omega), J')$. Les fibres de $\tilde{\tau}'(\Omega)$ sont dans $\Gamma'_{2\mathcal{E}}$ et, de plus :

- . Si Ω est de classe $\mathcal{C}^1_{\mathcal{E}}$ $\tilde{\tau}'(\Omega)$ est de classe $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$
- . Si Ω est de classe $\mathcal{H}^1_{\mathcal{E}}$ $\tilde{\tau}'(\Omega)$ est de classe $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$
- . Si Ω est de classe \mathcal{C}^k $\tilde{\tau}'(\Omega)$ est de classe \mathcal{C}^{k-1} .



Le fibré $\tau'(\Omega)$, s'identifie au fibré cotangent à la variété sous-jacente à Ω ($\Gamma'_{1\mathcal{E}}$ est formée de duals forts d'espaces de Banach et $\tau'(\Omega)$ est de classe \mathcal{C}^0 et \mathcal{C}^{k-1} si Ω est \mathcal{C}^k). En général le δ -fibré cotangent à Ω n'est pas strict.

1 Structure de $\tilde{T}'\Omega$

On se place maintenant dans les conditions du § 3; Ω est de classe \mathcal{C}^k avec $k \geq 2$ et l'espace pseudo-cotangent $\tilde{T}'\Omega$ est une variété de classe \mathcal{C}^{k-1} . En fait $\tilde{T}'\Omega$ peut être muni de diverses structures de variétés bimodélées que nous allons étudier. Établissons d'abord une formule, soient c_α et c_β deux δ -cartes de Ω $U = U_\alpha \cap U_\beta$, $\gamma = \gamma_{\beta\alpha} : \varphi_\alpha(U) \rightarrow \varphi_\beta(U)$ l'application de transition de c_α à c_β . Sur l'ouvert $q_{\Omega}^{-1}(U)$ de $\tilde{T}'\Omega$ l'application de transition correspondante est :

$$\theta_{\beta\alpha} : \varphi_\alpha(U) \times W'_\alpha \rightarrow \varphi_\beta(U) \times W'_\beta : (x, w') \rightsquigarrow (\gamma(x), {}^t\gamma'(x)^{-1}w')$$

est de classe \mathcal{C}^1 et il existe une application

$$\theta_{\beta\alpha}^* : \varphi_\alpha(U) \times W'_\alpha \rightarrow \mathcal{L}(W_\alpha \times V'_\alpha, W_\beta \times V'_\beta) \quad (*)$$

telle que pour $(x_0, w'_0) \in \varphi_\alpha(U) \times W'_\alpha$, $w \in W_\alpha$, $v' \in V'_\alpha$:

5.1.

$$\theta_{\beta\alpha}^*(x_0, w'_0) \circ (j_\alpha \times {}^tj_\alpha) = (j_\beta \times {}^tj_\beta) \circ \theta_{\beta\alpha}^*(x_0, w'_0)$$

$$\theta_{\beta\alpha}^*(x_0, w'_0)(w, v') = (\gamma'(x_0)w, v' \circ \gamma'(x_0)^{-1} - w'_0 \circ \gamma'(x_0)^{-1} \circ \gamma''(x_0)(\gamma'(x_0)^{-1})'(w))$$

Si (x_0, w'_0) est l'expression de $w' \in \tilde{T}'\Omega$ dans c_α , 5.1 exprime aussi qu'il existe

$$\begin{aligned} G_{\beta\alpha} : \tilde{q}_{\Omega}^{-1}(U) &\rightarrow \mathcal{L}(V_\alpha \times W'_\alpha, V_\beta \times W'_\beta) \quad \text{avec} \quad G_{\beta\alpha}(w') = \theta_{\beta\alpha}^*(x_0, w'_0) \\ H_{\beta\alpha} : \tilde{q}_{\Omega}^{-1}(U) &\rightarrow \mathcal{L}(W_\alpha \times V'_\alpha, W_\beta \times V'_\beta) \quad \text{avec} \quad H_{\beta\alpha}(w') = \theta_{\beta\alpha}^*(x_0, w'_0) \end{aligned}$$

tels que :

$$5.2. \quad H_{\beta\alpha}(w') \circ (j_\alpha \times {}^tj_\alpha) = (j_\beta \times {}^tj_\beta) \circ G_{\beta\alpha}(w')$$

La démonstration de 5.1 et 5.2 est une simple question de calcul. Les triplets $(V \times W', W \times V', j \times {}^tj)$ où (V, W, j) est dans Ξ détermineront des δ -couples stricts si l'on munit les espaces W et V' de topologies compatibles avec les dualités entre W et W' et entre V et V' (sauf si V était réflexif, $j \times {}^tj(V \times W')$ ne serait pas dense dans $W \times V'$ si V' était muni de sa topologie forte). On est ainsi conduit à raisonner dans les conditions suivantes :

- 5.3. 1) \mathcal{M}_1 (resp. : \mathcal{M}_2) est un foncteur de Mackey sur Γ_1 (resp. : Γ_2),
 2) Si $g \in \mathcal{L}(V, W'_2) : g(\mathcal{M}_1(V)) \subseteq \mathcal{M}_2(W')$,
 3) On pose $\mathcal{M}(W' \times V) = \{ A' \times B \text{ où } A' \in \mathcal{M}_2(W'), B \in \mathcal{M}_1(V) \}$.

Dans ces conditions $\mathcal{M}(W' \times V)$ est un recouvrement de $W' \times V$ par des parties convexes équilibrées et compactes pour la topologie $\sigma(W' \times V, W \times V')$; on vérifie que :

$$5.4. \quad (W \times V')_{\mathcal{M}} = W_{\mathcal{M}_2} \times V'_{\mathcal{M}_1}.$$

(*) Les topologies sur $W_\alpha \times V'_\alpha$ et $W_\beta \times V'_\beta$ assurant la continuité de $\theta_{\beta\alpha}^*(x, w')$ seront examinées plus loin.

Par les procédés utilisés dans Bourbaki II, chapitre IV, § 4 on montre à partir de 5.3 que si $(V_\alpha, W_\alpha, j_\alpha)$ et $(V_\beta, W_\beta, j_\beta)$ sont dans Ξ alors :

$$5.5. \quad \begin{aligned} \cdot f \in \text{Mor}(V_\alpha, V_\beta) &\Rightarrow {}'f \in \mathcal{L}(V'_{\beta, \mathcal{M}_1}, V'_{\alpha, \mathcal{M}_1}) \\ \cdot g \in \text{Mor}(W_\alpha, W_\beta) &\Rightarrow g \in \mathcal{L}(W_{\alpha, \mathcal{M}_2}, W_{\beta, \mathcal{M}_2}) \\ \cdot h \in \mathcal{L}(W_\alpha, V'_{\beta b}) &\Rightarrow h \in \mathcal{L}(W_{\alpha, \mathcal{M}_2}, V'_{\beta, \mathcal{M}_1}) \end{aligned}$$

On notera $\Pi_{\mathcal{M}}$ la catégorie des δ -couples stricts

$$\Delta^\pi = (V \times W'_b, (W \times V')_{\mathcal{M}}, j \times {}'j)$$

où $\Delta = (V, W, j)$ est dans Ξ et dont les morphismes de Δ^π_α à Δ^π_β sont les couples (G, H) avec :

5.6.

$$\begin{aligned} \cdot G \in \mathcal{L}(V_\alpha \times W'_\alpha, V_\beta \times W'_\beta) &\text{ où } G(v, w') = (f_1(v), {}'f_2(w') + h(v)) \\ \cdot H \in \mathcal{L}((W_\alpha \times V'_\alpha)_{\mathcal{M}}, (W_\beta \times V'_\beta)_{\mathcal{M}}) &\text{ où } H(w, v') = (g_1(w), {}'g_2(v') + k(w)) \\ \cdot f_1 \in \text{Mor}(V_\alpha, V_\beta), f_2 \in \text{Mor}(W_\beta, W_\alpha), h \in \mathcal{L}(V_\alpha, V'_{\beta b}) \\ \cdot g_1 \in \text{Mor}(W_\alpha, W_\beta), g_2 \in \text{Mor}(V_\beta, V_\alpha), k \in \mathcal{L}(W_\alpha, V'_{\beta b}) \\ \cdot H \circ (j_\alpha \times {}'j_\alpha) &= (j_\beta \times {}'j_\beta) \circ G. \end{aligned}$$

Sur $\Pi_{\mathcal{M}}$ on définit le foncteur $\mathfrak{S} = (b, b)$ noté simplement « b », alors (Théorème de Mackey) :

5.7. $b(W \times V')_{\mathcal{M}}$ = ensemble des bornés de $(W \times V')_{\mathcal{M}}$ = exemple des bornés de $W \times V'_b$.

Dans ces conditions les applications figurant dans 5.1 ou 5.2 sont de classe \mathcal{C}_b et déterminent pour chaque $w' \in \tilde{T}'\Omega$ un isomorphisme de la catégorie $\Pi_{\mathcal{M}}$, donc :

THÉORÈME 5.1. — Soient Ω une variété bimodelée dans Ξ et de classe $\mathcal{C}^k (k \geq 2)$, $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ un foncteur vérifiant 5.3, l'espace pseudo-cotangent à $\tilde{T}'\Omega$ admet une structure de variété bimodelée dans $\Pi_{\mathcal{M}}$ de classe \mathcal{C}_b .

DÉFINITION 5.1. — La structure de variété bimodelée du théorème 5.1 sera appelée \mathcal{M} -structure sur $\tilde{T}'\Omega$.

On peut en particulier choisir les foncteurs \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 de la façon suivante:

$$\begin{aligned} (\alpha_1) : \mathcal{M}_1(V) &= \{ \text{enveloppes convexes équilibrées des parties finies de } V \}; \\ &\text{alors } V'_{\mathcal{M}_1} = V'_s. \\ (\alpha_2) : \mathcal{M}_1(V) &= \{ \text{parties convexes équilibrées compactes pour } \sigma(V, V') \\ &\text{de } V \} \text{ alors } V'_{\mathcal{M}_1} = V'_\tau \text{ (*)}. \\ (\alpha_3) \text{ Si les espaces « } V \text{ » sont réflexifs : } \mathcal{M}_1(V) &= \{ \text{parties convexes équi-} \\ &\text{librées fermées bornées de } V \}, \text{ alors } V'_{\mathcal{M}_1} = V'_b. \\ (\beta_1) : \mathcal{M}_2(W') &= \{ \text{enveloppes convexes équilibrées des parties finies} \\ &\text{de } W' \} \text{ alors } W_{\mathcal{M}_2} = W_\sigma. \end{aligned}$$

(*) C'est-à-dire que \mathcal{M}_1 définit la topologie de Mackey $\tau(V', V)$.

$(\beta_2) : \mathcal{M}_2(W') = \{ \text{parties convexes équilibrées fermées bornées de } W' \}$
alors $W_{\mathcal{M}_2} = W_b$.

Les propriétés 5.3 ont lieu dans les cas (α_1) et (β_1) , (α_1) et (β_2) , (α_2) et (β_2) , (α_3) et (β_2) donc :

COROLLAIRE 5.1. — Dans les conditions du théorème 5.1, $\tilde{T}'\Omega$ peut être muni de structures de variétés bimodelées de classe \mathcal{C}_b dans chacune des catégories de δ -couples suivantes :

$$\begin{aligned} & \Pi_{\sigma s} \text{ des } (V \times W'_b, W_\sigma \times V'_s, j \times 'j) \\ & \Pi_{\sigma s} \text{ des } (V \times W'_b, W_b \times V'_s, j \times 'j) \\ & \Pi_{b\tau} \text{ des } (V \times W'_b, W_b \times V'_\tau, j \times 'j) \end{aligned}$$

où $\Delta = (V, W, j)$ est dans Ξ .

COROLLAIRE 5.2. — Si de plus les espaces V de Γ_1 sont réflexifs $\tilde{T}'\Omega$ peut être muni d'une structure de variété bimodelée dans la catégorie Π_b des $(V \times W'_b, W_b \times V'_b, j \times 'j)$.

En fait les conditions de ce corollaire sont trop restrictives et ce sont les structures relatives à $\Pi_{\sigma s}$ et Π_{bs} qui sont les plus intéressantes en dynamique analytique. Remarquons à ce propos, qu'à partir du moment où le recours aux conditions du corollaire 5.2 est exclu, l'introduction de variétés bimodelées dans des δ -couples d'e. l. c. non normables et de fibrés vectoriels dont les fibres sont de tels e. l. c. paraît inévitable. C'est pourquoi l'on est amené à la présentation quelque peu compliquée du Théorème 5.1. On notera $(\tau(\tilde{T}'\Omega), \tilde{\tau}_{\mathcal{M}}(\tilde{T}'\Omega), L'_{\mathcal{M}})$ le δ -fibré tangent à $\tilde{T}'\Omega$ muni de la \mathcal{M} -structure. Si \mathcal{M} et \mathcal{N} sont deux foncteurs vérifiant 5.3 et tels que

$$\mathcal{M}(W' \times V) \subseteq \mathcal{N}(W' \times V) \quad \text{pour } (V, W, j)$$

dans Ξ alors la \mathcal{N} -structure est plus fine que la \mathcal{M} -structure et le couple (I, \tilde{I}) où I (resp. : \tilde{I}) est l'identité sur $T\tilde{T}'\Omega$ (resp. : $\tilde{T}\tilde{T}'\Omega$) est un morphisme du δ -fibré tangent à la \mathcal{N} -structure dans le δ -fibré tangent à la \mathcal{M} -structure. En particulier la σs -structure (cas (α_1) et (β_1)) est la moins fine et la $b\tau$ -structure (cas (α_2) et (β_2)) est la plus fine des \mathcal{M} -structures. Que l'on soit ou non les conditions du corollaire 5.2 on notera

$$(\tau(\tilde{T}'\Omega), \tilde{\tau}_b(\tilde{T}'\Omega), L'_b)$$

le δ -fibré à fibres dans la catégorie Π_b déterminé par les applications 5.2 ; ce δ -fibré n'est ni strict ni un δ -fibré tangent lorsque Γ_1 n'est pas constituée d'espaces réflexifs.

PROPOSITION 5.2. — Dans les conditions du Théorème 5.1 on suppose que \mathcal{M}_2 est le foncteur du cas (β_2) ci-dessus alors $\tilde{q}_\Omega : \tilde{T}'\Omega \rightarrow \Omega$ est bidifférentiable de classe \mathcal{C}_b pour la \mathcal{M} -structure sur $\tilde{T}'\Omega$.

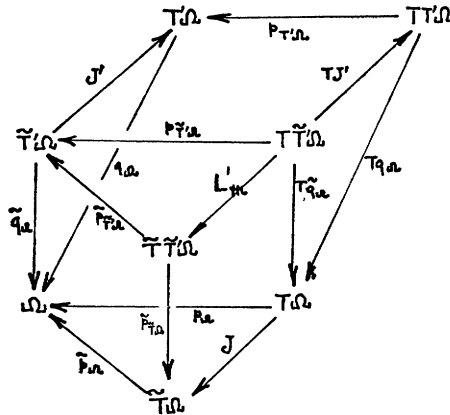
Expressions locales. — Dans la δ -carte (U, φ, Δ) de Ω les expressions locales des applications sont :

$$\begin{aligned}
 5.8. \quad & L'_{\mathcal{M}} : ((x, w'), (v_1, w'_1)) \rightsquigarrow ((x, w'), (jv_1, {}^i jw'_1)) \\
 & \tilde{q}_{\Omega} : (x, w') \rightsquigarrow x, \quad T\tilde{q}_{\Omega} : ((x, w'), (v_1, w'_1)) \rightsquigarrow (x, v_1) \\
 & J \circ T\tilde{q}_{\Omega} : ((x, w'), (v_1, w'_1)) \rightsquigarrow (x, jv_1) \\
 & \tilde{T}\tilde{q}_{\Omega} : ((x, w'), (w_1, v'_1)) \rightsquigarrow (x, w_1).
 \end{aligned}$$

Avec $x, v_1 \in V, v'_1 \in V', w_1 \in W$ et $w', w'_1 \in W'$.

2 Les formes et pseudo-formes canoniques sur $T'\Omega$ et $\tilde{T}'\Omega$

Le dual du fibré de Banach $\tau(\tilde{T}'\Omega)$ se construit classiquement, le dual de $\tilde{\tau}_{\mathcal{M}}(\tilde{T}'\Omega)$ noté $\tilde{\tau}'_{\mathcal{M}}(\tilde{T}'\Omega)$ est un fibré vectoriel de classe $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ à fibres dans la catégorie formée des $W'_b \times V_b$ (avec $\Delta = (V, W, j)$ dans Ξ) et dont les morphismes sont les transposés des « morphismes H » (cf. 5.6) de $\Pi_{\mathcal{M}}$. Les résultats du n° 1 permettent de construire le diagramme commutatif suivant :



PROPOSITION 5.3. — 1) Les applications $l_0: TT'\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $l_1: \tilde{T}\tilde{T}'\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{aligned}
 l_0(u) &= \langle p_{T'\Omega}u, Tq_{\Omega}u \rangle \quad (u \in TT'\Omega) \\
 l_1(u) &= \langle \tilde{p}_{\tilde{T}'\Omega}u, \tilde{T}\tilde{q}_{\Omega}u \rangle \quad (u \in \tilde{T}\tilde{T}'\Omega)
 \end{aligned}$$

définissent respectivement une forme canonique sur $T'\Omega$ et une pseudo-forme canonique sur $\tilde{T}'\Omega$ (section continue de $\tilde{\tau}'_{\mathcal{M}}(\tilde{T}'\Omega)$).

2) $l = l_0 \circ TJ' = l_1 \circ L'_{\mathcal{M}}$ est une forme différentielle canonique sur $\tilde{T}'\Omega$. l_0 est la forme canonique classique sur un espace cotangent et les propriétés 1) sont immédiates à partir des définitions.

Avec le diagramme de la figure 5.1 on voit que pour $u \in \tilde{T}\tilde{T}'\Omega$:

$$\begin{aligned}
 5.9. \quad & l_0(TJ'u) = \langle p_{T'\Omega} \circ TJ'u, Tq_{\Omega} \circ TJ'u \rangle = \langle J' \circ p_{\tilde{T}'\Omega}u, T\tilde{q}_{\Omega}u \rangle \\
 & l_1(L'_{\mathcal{M}}u) = \langle p_{\tilde{T}'\Omega} \circ L'_{\mathcal{M}}u, \tilde{T}\tilde{q}_{\Omega} \circ L'_{\mathcal{M}}u \rangle = \langle p_{\tilde{T}'\Omega}u, J \circ T\tilde{q}_{\Omega}u \rangle
 \end{aligned}$$

et l'égalité des deux expressions découle de l'identité :

$$\langle J'w', v \rangle = \langle w', Jv \rangle \quad \text{si } v \in T\Omega, w' \in \tilde{T}'\Omega, p_\Omega v = \tilde{q}_\Omega w'.$$

Dans la δ -carte $c = (U, \varphi, \Delta)$ de Ω les expressions locales de l_0, l_1, l sont :

$$\begin{aligned} 5.10. \quad l_0 : ((x, v'), (v_1, v'_1)) &\rightsquigarrow \langle v', v_1 \rangle \\ l_1 : ((x, w'), (w_1, w'_1)) &\rightsquigarrow \langle w', w_1 \rangle \\ l : ((x, w'), (v_1, w'_1)) &\rightsquigarrow \langle w', jv_1 \rangle = \langle 'jw', v_1 \rangle \end{aligned}$$

3 Structure pseudo-symplectique sur $\tilde{T}'\Omega$

THÉORÈME 5.4. — Dans les conditions du théorème 5.1, il existe une section canonique unique \mathbf{S} du fibré d'applications bilinéaires

$$\mathcal{L}_2(\tilde{\tau}_b(\tilde{T}'\Omega), \tau(\tilde{T}'\Omega); \mathbb{R})$$

telle que $dl(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{S}(L'_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ (l = forme canonique sur $\tilde{T}'\Omega$).

Si, dans la δ -carte (U, φ, Δ) de Ω , $w' \in \tilde{T}'\Omega$ est représenté par (x, w') , $v \in \tilde{T}\tilde{T}'\Omega$ par $((x, w'), (w_1, v'_1))$, $\mathbf{u} \in T\tilde{T}'\Omega$ par $((x, w'), (v_1, w'_1))$ avec $x \in V$, $v'_1 \in V'$, $w_1 \in W$, $w', w'_1 \in W'$ alors :

$$\mathbf{S}(v, \mathbf{u}) = \langle v'_1, v_1 \rangle - \langle w'_1, w_1 \rangle$$

THÉORÈME 5.5. — Dans les conditions du théorème 5.4 si l'on suppose que les espaces W de Γ_2 sont réflexifs alors l'application $\mathbf{S}_b : v \rightsquigarrow \mathbf{S}(v, \cdot)$ qui applique la fibre $\tilde{T}'_{w'}(\tilde{T}'\Omega)$ dans la fibre $T'_{w'}(\tilde{T}'\Omega)$ détermine un isomorphisme du fibré $\tilde{\tau}_{\mathcal{M}}(\tilde{T}'\Omega)$ sur $\tilde{\tau}'_{\mathcal{M}}(\tilde{T}'\Omega)$ et un isomorphisme du fibré $\tilde{\tau}_b(\tilde{T}'\Omega)$ sur $\tau'_b(\tilde{T}'\Omega)$.

Le Théorème 5.4 met en évidence une généralisation de la 2-forme canonique sur un espace cotangent, le théorème 5.5 exprime qu'il existe sur l'espace pseudo-cotangent d'une variété bimodelée une structure analogue à la structure symplectique canonique de l'espace cotangent d'une variété de Banach réflexive. L'intérêt de ce théorème, qui ne requiert que la réflexivité des espaces de Γ_2 , est de s'appliquer dans des conditions où, la variété sous-jacente à Ω n'étant pas réflexive, la structure symplectique classique n'existe pas. Avec la notion d'intégrale d'un champ de pseudo-vecteurs (§ 3), on peut généraliser la notion de système dynamique hamiltonien.

DÉFINITION 5.2. — Soit Ω une variété bimodelée dans Ξ de classe $\mathcal{C}^1_{\mathbb{E}}$, \mathcal{M} (resp. : \mathcal{N}) un foncteur de Mackey sur Γ'_2 (resp. : Γ_1). Une structure pseudo-symplectique sur Ω est déterminée par la donnée d'une 2-forme fermée ω sur la variété sous-jacente à Ω et telle qu'il existe une section \mathbf{S} du fibré $\mathcal{L}_2(\tilde{\tau}(\Omega), \tau(\Omega); \mathbb{R})$ vérifiant :

- $\omega(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{S}(J\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ (J = injection du δ -fibré tangent à Ω).
- $\mathbf{S}_b : v \rightsquigarrow \mathbf{S}(v, \cdot) = \mathbf{S}_b(v)$ est un isomorphisme du fibré $\tilde{\tau}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ sur $\tau'_{\mathcal{N}}(\Omega)$.

DÉFINITION 5.3. — Si $\mathbf{H} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable il

existe un champ de pseudo-vecteurs \mathbf{Y}_H unique tel que $S_b \circ \mathbf{Y}_H = -dH$ appelé système dynamique hamiltonien associé à H . Les intégrales du système dynamique hamiltonien associé à H sont les arcs pseudo-différentiables $f: I \rightarrow \Omega$ tels que $\tilde{T}f = \mathbf{Y}_H \circ f$.

THÉORÈME 5.5 (2^e forme). — Dans les conditions du théorème 5.4, si Γ_2 est formée d'espaces réflexifs alors le couple $(\omega = dl, \mathbf{S})$ détermine une structure pseudo-symplectique sur l'espace pseudo-cotangent à $\Omega\tilde{T}'\Omega$ pseudo-cotangent $\tilde{T}'\Omega$.

Si l'on donne alors un hamiltonien $H: \tilde{T}'\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sur l'espace pseudo-cotangent $\tilde{T}'\Omega$, l'expression locale du système dynamique hamiltonien \mathbf{Y}_H dans la δ -carte $(U, \varphi, \Delta) = c$ est :

$$5.11. \quad \mathbf{Y}_H : (x, w') \rightsquigarrow ((x, w'), (i\partial_2 H_c(x, w'), -\partial_1 H_c(x, w')))$$

où $H_c: \varphi(U) \times W' \rightarrow \mathbb{R}$ est l'expression locale de H , $i: W'' \rightarrow W$ l'isomorphisme canonique. Les intégrales de \mathbf{Y}_H sont déterminées dans c par les applications pseudo-différentiables $I \rightarrow \varphi(U) \times W': t \rightsquigarrow (q(t), p(t))$ telles que :

$$5.12. \quad \begin{aligned} p'(t) &\equiv \frac{d}{dt} {}^t j p(t) = -\partial_1 H_c(q(t), p(t)) \\ q'(t) &\equiv \frac{d}{dt} j q(t) = i\partial_2 H_c(q(t), p(t)) \end{aligned}$$

Equations généralisant les équations de Hamilton classiques.

§ 6 LES FORMES DE PFAFF SEMI-BASIQUES ET LA TRANSFORMATION DE LEGENDRE (*)

Les conditions sont celles du § 4 : Ω est une variété bimodelée de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 2$.

1 Les homomorphismes canoniques $\lambda, \bar{\lambda}, \tilde{\lambda}, \mu, \bar{\mu}, \tilde{\mu}$ et les endomorphismes verticaux

Considérons les trois fibrés vectoriels images réciproques :

$$p_{\Omega}^* \tau(\Omega), \quad \tilde{p}_{\Omega}^* \tau(\Omega), \quad \bar{p}_{\Omega}^* \tau(\Omega),$$

dont les espaces sont respectivement $T\Omega \times_{\Omega} T\Omega, \tilde{T}\Omega \times_{\Omega} T\Omega, \bar{T}\Omega \times_{\Omega} \tilde{T}\Omega$.

On notera

$$\pi_1 \text{ et } \pi_2 \quad (\text{resp. : } \bar{\pi}_1 \text{ et } \bar{\pi}_2, \tilde{\pi}_1 \text{ et } \tilde{\pi}_2)$$

(*) Pour ce qui concerne l'aspect classique de ces questions (en dimension finie) on pourra se reporter au livre de C. Godbillon ou au livre de R. Abraham.

les restrictions des projections naturelles des ensembles produits à

$$T\Omega \times_{\Omega} T\Omega \quad (\text{resp. : } \tilde{T}\Omega \times_{\Omega} T\Omega, \tilde{T}\Omega \times_{\Omega} \tilde{T}\Omega);$$

$\pi_1, \bar{\pi}_1, \tilde{\pi}_1$ sont les projections des trois fibrés précédents sur leurs bases $T\Omega, \tilde{T}\Omega, \tilde{T}\Omega$. Si l'on factorise les applications $Tp_{\Omega}, T\tilde{p}_{\Omega}, J \circ T\tilde{p}_{\Omega}$ en usant de la propriété universelle des fibrés images réciproques on obtient les homomorphismes :

6.1.

$$\mu : \tau(T\Omega) \rightarrow p_{\Omega}^* \tau(\Omega) \quad (\text{morphisme au-dessus de } T\Omega \text{ tel que } Tp_{\Omega} = \pi_2 \circ \mu)$$

$$\bar{\mu} : \tau(\tilde{T}\Omega) \rightarrow \tilde{p}_{\Omega}^* \tau(\Omega) \quad (\text{morphisme au-dessus de } \tilde{T}\Omega \text{ tel que } T\tilde{p}_{\Omega} = \bar{\pi}_2 \circ \bar{\mu})$$

$$\tilde{\mu} : \tau(\tilde{T}\Omega) \rightarrow \tilde{p}_{\Omega}^* \tilde{\tau}(\Omega) \quad (\text{morphisme au-dessus de } \tilde{T}\Omega \text{ tel que } J \circ T\tilde{p}_{\Omega} = \tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\mu})$$

et l'on a la proposition suivante :

PROPOSITION 6.1. — a) Il existe deux J-morphismes canoniques

$$G_0 : p_{\Omega}^* \tau(\Omega) \rightarrow \tilde{p}_{\Omega}^* \tau(\Omega) \quad \text{et} \quad G : p_{\Omega}^* \tau(\Omega) \rightarrow \tilde{p}_{\Omega}^* \tilde{\tau}(\Omega)$$

tels que $\bar{\pi}_2 \circ G_0 = \pi_2$ et $\tilde{\pi}_2 \circ G = J \circ \pi_2$.

b) Il existe des homomorphismes de fibrés vectoriels

$$\lambda : p^* \tau(\Omega) \rightarrow \tau(T\Omega) \quad (\text{morphisme au-dessus de } T\Omega)$$

$$\bar{\lambda} : \tilde{p}^* \tau(\Omega) \rightarrow \tau(\tilde{T}\Omega) \quad (\text{morphisme au-dessus de } \tilde{T}\Omega)$$

$$\tilde{\lambda} : \tilde{p}^* \tilde{\tau}(\Omega) \rightarrow \tau(\tilde{T}\Omega) \quad (\text{morphisme au-dessus de } \tilde{T}\Omega)$$

tels que $TJ \circ \lambda = \bar{\lambda} \circ G_0 = \tilde{\lambda} \circ G$.

c) De plus $\mu \circ \lambda = 0, \bar{\mu} \circ \bar{\lambda} = 0, \tilde{\mu} \circ \tilde{\lambda} = 0$ et $\bar{\lambda} \circ \bar{\mu} = \tilde{\lambda} \circ \tilde{\mu}$.

DÉFINITION 6.1. — On appelle endomorphismes verticaux les deux endomorphismes

$$v = \lambda \circ \mu \text{ de } \tau(T\Omega) \quad \text{et} \quad \tilde{v} = \bar{\lambda} \circ \bar{\mu} = \tilde{\lambda} \circ \tilde{\mu} \text{ de } \tau(\tilde{T}\Omega).$$

Dans une δ -carte $c = (U, \varphi, \Delta)$ de Ω les expressions locales de ces homomorphismes sont

$$G_0 : (x, v_1, v_2) \rightsquigarrow (x, jv_1, v_2),$$

$$G : (x, v_1, v_2) \rightsquigarrow (x, jv_1, jv_2)$$

$$\mu : ((x, v), (v_1, v_2)) \rightsquigarrow (x, v, v_1),$$

$$\lambda : (x, v, v_1) \rightsquigarrow ((x, v), (0, v_1))$$

$$\bar{\mu} : ((x, w), (v_1, w_1)) \rightsquigarrow (x, w, v_1),$$

$$\bar{\lambda} : (x, w, v_1) \rightsquigarrow ((x, w), (0, jv_1))$$

$$\tilde{\mu} : ((x, w), (v_1, w_1)) \rightsquigarrow (x, w, jv_1),$$

$$\tilde{\lambda} : (x, w, w_1) \rightsquigarrow ((x, w), (0, w_1))$$

$$v : ((x, v), (v_1, v_2)) \rightsquigarrow ((x, v), (0, v_1)),$$

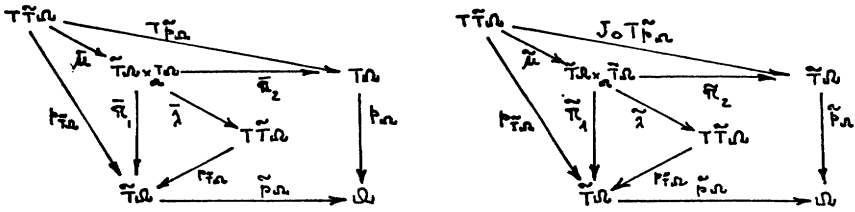
$$\tilde{v} : ((x, w), (v_1, w_1)) \rightsquigarrow ((x, w), (0, jv_1)).$$

Bien entendu les morphismes λ, μ, v correspondent aux morphismes habituels de la théorie classique pour la structure de variété sous-jacente à Ω , en particulier le diagramme $0 \rightarrow p_{\Omega}^* \tau(\Omega) \xrightarrow{\lambda} \tau(T\Omega) \xrightarrow{\mu} p_{\Omega}^* \tau(\Omega) \rightarrow 0$ est exact, par contre dans les diagrammes

$$\tilde{p}_{\Omega}^* \tau(\Omega) \xrightarrow{\bar{\lambda}} \tau(\tilde{T}\Omega) \xrightarrow{\bar{\mu}} \tilde{p}_{\Omega}^* \tau(\Omega)$$

$$\tilde{p}_{\Omega}^* \tilde{\tau}(\Omega) \xrightarrow{\tilde{\lambda}} \tau(\tilde{T}\Omega) \xrightarrow{\tilde{\mu}} \tilde{p}_{\Omega}^* \tilde{\tau}(\Omega)$$

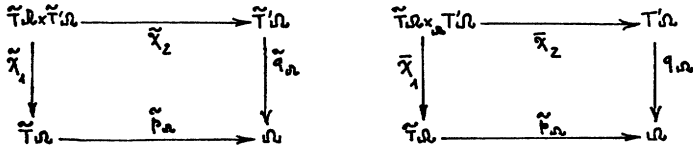
l'image de l'injection $\bar{\lambda}$ est dense dans le noyau de $\bar{\mu}$ qui est un morphisme surjectif, $\bar{\lambda}$ est un morphisme injectif dont l'image est le noyau de $\bar{\mu}$ et l'image de $\bar{\mu}$ est dense dans $\tilde{T}\Omega \times_{\Omega} \tilde{T}\Omega$.



2 Les deux espèces de formes semi-basiques

Les fibrés images réciproques $\tilde{p}_{\Omega}^* \tau'(\Omega)$ et $\tilde{p}_{\Omega}^* \tilde{\tau}'(\Omega)$ sont respectivement en dualité avec les fibrés $\tilde{p}_{\Omega}^* \tau(\Omega)$ et $\tilde{p}_{\Omega}^* \tilde{\tau}(\Omega)$. En effet (cf. fig. 6. 1, 6. 2, 6. 3, 6. 4) les applications

$$\begin{aligned} (u', u) &\rightsquigarrow \langle \bar{\chi}_2 u', \bar{\pi}_2 u \rangle && \text{(dualité } \tau'_m(\Omega), \tau_m(\Omega)) \\ (v', v) &\rightsquigarrow \langle \bar{\chi}_2 v', \bar{\pi}_2 v \rangle && \text{(dualité } \tilde{\tau}'_m(\Omega), \tilde{\tau}_m(\Omega)) \end{aligned}$$



où $\bar{\chi}_1 u' = \bar{\pi}_1 u = \bar{\chi}_1 v' = \bar{\pi}_1 v = w \in \tilde{T}\Omega$, $\tilde{p}_{\Omega} w = m$ déterminent respectivement un isomorphisme de $\tilde{p}_{\Omega}^* \tau'(\Omega)$ sur $\tilde{p}_{\Omega}^* \tau(\Omega)'$ et un isomorphisme de $\tilde{p}_{\Omega}^* \tilde{\tau}'(\Omega)$ sur $\tilde{p}_{\Omega}^* \tilde{\tau}(\Omega)'$. Par suite si ω est une forme de Pfaff sur $\tilde{T}'\Omega$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

6. 2. a) Il existe une section α de $\tilde{p}_{\Omega}^* \tau'(\Omega)$ telle que $\omega(u) = \langle \alpha(p_{\tilde{T}\Omega} u), \bar{\mu}(u) \rangle$ (crochet de dualité entre $\tilde{p}_{\Omega}^* \tau'(\Omega)$ et $\tilde{p}_{\Omega}^* \tau(\Omega)$).

b) Il existe une application $F : \tilde{T}\Omega \rightarrow T'\Omega$ telle que

$$q_{\Omega} \circ F = \tilde{p}_{\Omega} \quad \text{et} \quad \omega(u) = \langle F(p_{\tilde{T}\Omega} u), T\tilde{p}_{\Omega} u \rangle$$

(crochet de dualité entre $\tau'(\Omega)$ et $\tau(\Omega)$).

De même les propriétés suivantes sont équivalentes :

6. 3. c) Il existe une section β de $\tilde{p}_{\Omega}^* \tilde{\tau}'(\Omega)$ telle que $\omega(u) = \langle \beta(p_{\tilde{T}\Omega} u), \bar{\mu}(u) \rangle$ (crochet de dualité entre $\tilde{p}_{\Omega}^* \tilde{\tau}'(\Omega)$ et $\tilde{p}_{\Omega}^* \tilde{\tau}(\Omega)$).

d) Il existe une application $D : \tilde{T}\Omega \rightarrow \tilde{T}'\Omega$ telle que

$$\bar{q}_{\Omega} \circ D = \tilde{p}_{\Omega} \quad \text{et} \quad \omega(u) = \langle D(p_{\tilde{T}\Omega} u), J \circ T\tilde{p}_{\Omega} u \rangle$$

(crochet de dualité entre $\tilde{\tau}'(\Omega)$ et $\tilde{\tau}(\Omega)$).

DÉFINITION 6.2. — Les formes ω sur $\tilde{T}\Omega$ qui vérifient les conditions équivalentes (a) et (b) (resp. : (c) et (d)) sont appelées formes de Pfaff semi-basiques de 1^{re} (resp. : 2^e) espèce sur $\tilde{T}\Omega$.

Si ω est semi-basique de 2^e espèce ω est aussi semi-basique de 1^{re} espèce car dans les conditions (d) : $\omega(\mathbf{u}) = \langle J' \circ D(p_{\tilde{T}\Omega}\mathbf{u}), T\tilde{p}_\Omega\mathbf{u} \rangle$, la réciproque est bien entendu inexacte.

En utilisant le principe du prolongement des identités on montre que :

PROPOSITION 6.2. — Pour qu'une forme de Pfaff ω sur $\tilde{T}\Omega$ soit semi-basique de 1^{re} espèce il faut et il suffit que ω soit nulle sur l'image de l'endomorphisme vertical.

De plus on a (cf. Proposition 5.3) :

PROPOSITION 6.3. — Dans les conditions de (b) si F est différentiable alors $\omega = F^*l_0$ dans les conditions de (d) si D est différentiable alors $\omega = D^*l$.

En effet, d'après 5.9 on a

$$l_0(\mathbf{x}) = \langle p_{T'\Omega}\mathbf{x}, Tq_\Omega\mathbf{x} \rangle, \quad \mathbf{x} \in TT'\Omega$$

$$l(\mathbf{x}) = \langle p_{\tilde{T}\Omega}\mathbf{x}, J \circ T\tilde{q}_\Omega\mathbf{x} \rangle, \quad \mathbf{x} \in T\tilde{T}'\Omega,$$

dans les conditions de (b) $\omega(\mathbf{u}) = \langle p_{T'\Omega} \circ TF(\mathbf{u}), Tq_\Omega \circ TF(\mathbf{u}) \rangle = F^*l_0(\mathbf{u})$,
dans les conditions de (d) $\omega(\mathbf{u}) = \langle p_{\tilde{T}\Omega} \circ TD(\mathbf{u}), J \circ T\tilde{q}_\Omega \circ TD(\mathbf{u}) \rangle = D^*l(\mathbf{u})$.

Exemple de forme semi-basique de 2^e espèce. — La différentielle verticale d'une application $f: \tilde{T}\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$6.4. \quad d_v f(\mathbf{u}) = df(\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{u}).$$

Expressions locales des formes semi-basiques sur $\tilde{T}\Omega$. — Si $c = (U, \varphi, \Delta)$ est une δ -carte de Ω , dans les conditions ci-dessus

$$6.5. \quad \omega(\mathbf{u}) = \langle F_c(x, w), v \rangle \quad (\text{conditions de (b)})$$

$$\omega(\mathbf{u}) = \langle D_c(x, w), jv \rangle \quad (\text{conditions de (d)})$$

\mathbf{u} admettant pour représentant $((x, w), (v, w_1))$ dans c ,

$$F_c \text{ (resp. : } D_c) : \varphi(U) \times W \rightarrow V' \text{ (resp. : } W')$$

étant l'expression locale de F (resp. : D) dans c . Si $f: \tilde{T}\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ admet pour expression locale $f_c: \varphi(U) \times W \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$6.6. \quad d_v f(\mathbf{u}) = \partial_2 f_c(x, w)(jv)$$

3 Transformation de Legendre

DÉFINITION 6.3. — Le morphisme $D: \tilde{\tau}(\Omega) \rightarrow \tilde{\tau}'(\Omega)$ d'espaces fibrés au-dessus de Ω déterminé selon (d) par la forme de Pfaff semi-basique de 2^e espèce ω sur $\tilde{T}\Omega$ est appelé transformation de Legendre associée à ω ; si ω est de classe \mathcal{C}^1 la transformation de Legendre est caractérisée par

$$\tilde{q}_\Omega \circ D = \tilde{p}_\Omega \quad \text{et} \quad D^*l = \omega \quad (\text{cf. Proposition 6.3}).$$

En mécanique analytique des systèmes à une infinité de degrés de liberté la « puissance des forces » est représentée par une forme semi-basique de 1^{re} espèce tandis que la différentielle verticale de « l'énergie cinétique » est une forme semi-basique de 2^e espèce à laquelle correspond la transformation de Legendre caractérisée par $\tilde{q}_\Omega \circ D = \tilde{p}_\Omega$ et $D^*l = d_v \mathbf{K}$.

§ 7 SCHÉMA DE LA DYNAMIQUE ANALYTIQUE DES MILIEUX CONTINUS

1 Le principe des puissances virtuelles et les équations de Lagrange sur une variété bimodelée

Pour un milieu continu soumis à des liaisons et dont l'espace des configurations est une variété bimodelée Ω nous allons préciser ce que l'on entend par principe des puissances virtuelles; plus précisément nous poserons un axiome abstrait qui paraît susceptible de décrire des milieux continus assez généraux, et montrerons que, sous des hypothèses de régularité *a priori* très faibles sur le mouvement considéré, ce principe se traduit localement par une équation qui généralise l'équation classique de Lagrange.

Soient Ω une variété bimodelée de classe \mathcal{C}^2 , E un espace de Banach sur \mathbb{R} , $\zeta : \tilde{T}\Omega \rightarrow E$ est une application tels que :

- 7.1. a) ζ est différentiable et linéaire continue sur chaque fibre de $\tilde{\tau}(\Omega)$.
 b) $\zeta \circ J : T\Omega \rightarrow E$ est bidifférentiable de classe \mathcal{C}^1 comme application de la variété bimodelée $T\Omega$ dans E (cf. Théorème 4.1).
 c) $(\zeta \circ J)'(\tilde{\mathbf{u}}) = \zeta'(\mathbf{u})$ pour $\mathbf{u} \in T\tilde{T}\Omega$ (cf. Proposition 4.2.2° et note correspondante).

Dans une δ -carte $c = (U, \varphi, \Delta)$ de Ω l'expression locale de ζ est

$$\zeta_c : \varphi(U) \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

et les conditions 7.1 s'expriment par :

- 7.1 bis. a) ζ_c est différentiable et $\zeta_c(x, \cdot) \in \mathcal{L}(W, E)$ pour $x \in \varphi(U)$.
 b) $\zeta_c \circ (id \times j) : \varphi(U) \times V \rightarrow E$ est bidifférentiable et de classe \mathcal{C}^1 .
 c) $\tilde{\partial}_1(\zeta_c \circ (id \times j))(x, v)(w) = \partial_1 \zeta_c(x, w)(v)$, $v \in V$, $w \in W$, $x \in \varphi(U)$
 et $\tilde{\partial}_1$ est la pseudo-différentielle partielle par rapport à la variable x ,

Les conditions 7.1 ont lieu en particulier lorsque $\zeta = p_2 \tilde{T}f$ où $f : \Omega \rightarrow E$ est bidifférentiable de classe \mathcal{C}^2 (cf. Proposition 4.2). On suppose aussi que

7.2. E est muni d'une forme bilinéaire symétrique continue χ .

Nous verrons plus loin que χ est liée à « l'énergie cinétique »; le plus

(*) Des exemples concrets seront donnés dans une publication ultérieure. Le schéma classique, relatif aux systèmes à un nombre fini de degrés de liberté est exposé dans C. GODBILLON et ABRAHAM.

souvent E sera un espace hilbertien et χ le produit scalaire. Le mouvement étudié est défini par une application :

$\mathbf{M} : I \rightarrow \Omega$ ($I =$ intervalle de \mathbb{R}) et l'on supposera que :

7.3. \mathbf{M} est faiblement pseudo-différentiable (cf. § 3 n° 4).

7.4. $\zeta\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{M} : I \rightarrow E$ est « faiblement dérivable » au sens suivant : pour chaque $t \in I$ il existe :

$$\Gamma(t) \in T'_{\mathbf{M}(t)}\Omega \quad \text{tel que} \quad \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{M}(t)}\Omega : \frac{d}{dt}(\zeta\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{M}, \zeta\mathbf{J}\mathbf{v})(t) = \langle \Gamma(t), \mathbf{v} \rangle$$

Autrement dit si $\chi_d \in \mathcal{L}(E, E')$ est l'application linéaire droite associée à χ , l'application $s \rightsquigarrow \chi_d(\zeta\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{M}(s)) \circ \zeta \circ \mathbf{J}_{\mathbf{M}(t)} \in T'_{\mathbf{M}(t)}$ (faible) admet $\Gamma(t)$ pour dérivée au point t .

7.5. Pour chaque $t \in I$ les quotients $\frac{1}{h}(\zeta\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{M}(t+h) - \zeta\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{M}(t))$ restent dans un borné de E pour h assez petit et $\neq 0$.

DÉFINITION 7.1. — La forme $\Gamma(t) \in T'_{\mathbf{M}(t)}\Omega$ est appelée puissance virtuelle des quantités d'accélération du mouvement \mathbf{M} dans la configuration $\mathbf{M}(t)$. Remarquons qu'il n'a pas été supposé que « $\Gamma(t) \in E'$ », de plus on peut vérifier que cette définition correspond bien à l'aspect classique de la notion de puissance des quantités d'accélération. Pour obtenir l'expression lagrangienne de la puissance des quantités d'accélération on introduit d'abord la fonction énergie cinétique :

$$7.6. \quad \mathbf{K} : \tilde{\mathbf{T}}\Omega \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{w} \rightsquigarrow \frac{1}{2}\chi(\zeta\mathbf{w}, \zeta\mathbf{w});$$

les expressions locales de \mathbf{K} et du mouvement \mathbf{M} dans la δ -carte $c = (U, \varphi, \Delta)$ sont

$$7.7. \quad \mathbf{K}_c : \varphi(U) \times W \rightarrow \mathbb{R} : (x, w) \rightsquigarrow \frac{1}{2}\chi(\zeta_c(x, w), \zeta_c(x, w)) = \mathbf{K}_c(x, w).$$

$$7.8. \quad q : t \rightsquigarrow \varphi \circ \mathbf{M}(t) = q(t) \quad (t \in \mathbf{M}^{-1}(U))$$

où q admet une pseudo-dérivée $\dot{q}(t) = \frac{d}{dt}jq(t)$ (dérivée dans W_σ). Alors

PROPOSITION 7.1. — Dans les conditions 7.1 à 7.5, sur tout intervalle de \mathbb{R} tel que $\mathbf{M}(t) \in U$:

$$\langle \Gamma(t), \mathbf{v} \rangle = \left[\frac{d}{dt} {}^t j \circ \partial_2 \mathbf{K}_c(q, \dot{q}) - \partial_1 \mathbf{K}_c(q, \dot{q}) \right] (\mathbf{v}) \quad q \equiv q(t), \quad \dot{q} \equiv \dot{q}(t),$$

$\mathbf{v} \in T_{\mathbf{M}(t)}\Omega$, $v = p_2\mathbf{T}(\mathbf{v})$ et la dérivée $\frac{d}{dt}$ est prise dans V'_s .

On a en effet :

$$\partial_1 \mathbf{K}_c(q, \dot{q})(v) = \chi(\zeta_c(q, \dot{q}), \partial_1 \zeta_c(q, \dot{q})(v)), \quad \partial_2 \mathbf{K}_c(q, \dot{q})(jv) = \chi(\zeta_c(q, \dot{q}), \zeta_c(q, jv))$$

Calculons la dérivée $\frac{d}{dt} \partial_2 \mathbf{K}_c(q, \dot{q})(jv) \equiv \frac{d}{dt} (j \circ \partial_2 \mathbf{K}_c(q, \dot{q}))(v)$, en posant

$$\varphi(t) = \chi(\zeta_c(q(t), \dot{q}(t)), \zeta_c(q(t), jv))$$

on a :

$$\begin{aligned} 7.9. \quad \frac{1}{h} (\varphi(t+h) - \varphi(t)) &= \chi \left(\frac{1}{h} (\zeta \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{M}(t+h) - \zeta \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{M}(t)), \zeta \mathbf{J}\mathbf{v} \right) \\ &+ \chi \left(\frac{1}{h} (\zeta_c(q(t+h), \dot{q}(t+h)) - \zeta_c(q(t), \dot{q}(t))), \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. \zeta_c(q(t+h), jv) - \zeta_c(q(t), jv) \right) \\ &+ \chi \left(\zeta_c(q(t), \dot{q}(t)), \frac{1}{h} (\zeta_c(q(t+h), jv) - \zeta_c(q(t), jv)) \right). \end{aligned}$$

Lorsque $h \rightarrow 0$ le premier terme tend vers $\langle \Gamma(t), \mathbf{v} \rangle$ par définition (cf. 7.4), le second tend vers 0 compte tenu de 7.5 et de la continuité de q . Par application de 2.10 :

$$\frac{1}{h} (\zeta_c(q(t+h), jv) - \zeta_c(q(t), jv))$$

tend vers $\tilde{\partial}_1(\zeta_c \circ (id \times j)(q(t), v))(\dot{q}(t)) = \partial_1 \zeta_c(q(t), \dot{q}(t))(v)$ et la proposition découle de 7.9 qui s'écrit à la limite :

$$\frac{d}{dt} \partial_2 \mathbf{K}_c(q, \dot{q}) \circ j(v) = \langle \Gamma(t), \mathbf{v} \rangle + \chi(\zeta_c(q, \dot{q}), \partial_1 \zeta_c(q, \dot{q}))(v).$$

Dans les conditions où nous nous plaçons l'espace des phases est l'espace pseudo-tangent $\tilde{\mathbf{T}}\Omega$: un « état du système » (position et vitesse) est déterminé par un élément $\mathbf{w} \in \tilde{\mathbf{T}}\Omega$; on pose (cf. § 6).

DÉFINITION 7.2. — On appelle vitesse virtuelle dans l'état $\mathbf{w} \in \tilde{\mathbf{T}}\Omega$ tout élément $\mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{T}}\Omega \times_{\Omega} \mathbf{T}\Omega$ tel que $\tilde{\pi}_1 \mathbf{u} = \mathbf{w}$. \mathbf{w} étant fixé \mathbf{u} est entièrement déterminé par la donnée de $\mathbf{u}^* = \tilde{\pi}_2 \mathbf{u} \in \mathbf{T}\Omega$.

Dans ces conditions $\tilde{p}_\Omega \mathbf{w} = p_\Omega \mathbf{u}^*$ représente une « configuration du système » et \mathbf{u}^* un « champ de vitesses ». La puissance virtuelle des « forces appliquées, ce qui comprend ici la puissance des forces extérieures » et la puissance des « efforts intérieurs » dans le cas d'un milieu continu, s'exprime par une forme semi-basique de 1^{re} espèce sur $\tilde{\mathbf{T}}\Omega$ ou, ce qui revient au même par une section \mathbf{Q} du fibré $\tilde{p}_\Omega \tau'(\Omega)$ identifié au dual de $\tilde{p}_\Omega^* \tau(\Omega)$:

$$\mathcal{P} \equiv \langle \mathbf{Q}(\mathbf{w}), \mathbf{u} \rangle = \langle \tilde{\chi}_2 \mathbf{Q}(\mathbf{w}), \mathbf{u}^* \rangle$$

Dans la δ -carte $c = (U, \varphi, \Delta)$ l'expression locale de \mathcal{P} est

$$7.10. \quad \mathcal{P} = \langle \mathbf{Q}_c(x, w), v \rangle$$

où (x, w) et (x, v) sont les représentants dans c de \mathbf{w} et \mathbf{u}^* , $\mathbf{Q}_c: \varphi(U) \times W \rightarrow V'$ l'expression de \mathbf{Q} .

7.11. Principe des puissances virtuelles : Le mouvement $t \rightsquigarrow \mathbf{M}(t)$

doit satisfaire à la condition suivante : à chaque instant t la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la puissance virtuelle des forces appliquées :

7.12. $\forall \mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{T}}\Omega \times_{\Omega} \mathbf{T}\Omega$ avec $\bar{\pi}_1 \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{M}(t) : \langle \Gamma(t), \bar{\pi}_2 \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{Q}(\mathbf{T}\mathbf{M}(t)), \mathbf{u} \rangle$
ou bien, ce qui est équivalent :

7.13. $\forall \mathbf{u}^* \in \mathbf{T}\Omega$ avec $p_{\Omega} \mathbf{u}^* = \mathbf{M}(t) : \langle \Gamma(t), \mathbf{u}^* \rangle = \langle \bar{\chi}_2 \mathbf{Q}(\mathbf{T}\mathbf{M}(t)), \mathbf{u}^* \rangle$.

La première forme des équations de la dynamique découle de la proposition suivante :

PROPOSITION 7.2. — « Le principe des puissances virtuelles équivaut aux équations de Lagrange généralisées » ; plus précisément 7.1 à 7.5 étant vérifiés les propriétés suivantes sont équivalentes

a) Le mouvement $t \rightsquigarrow \mathbf{M}(t)$ est faiblement pseudo-différentiable et satisfait à 7.11.

b) Quelle que soit la δ -carte $c = (\mathbf{U}, \varphi, \Delta)$ de Ω et l'intervalle I_c de \mathbb{R} contenu dans $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{U})$ q est faiblement pseudo-différentiable et vérifie l'équation

$$7.14. \quad \frac{d}{dt} {}^t j \partial_2 \mathbf{K}_c(q, \dot{q}) - \partial_1 \mathbf{K}_c(q, \dot{q}) = \mathbf{Q}_c(q, \dot{q}) \quad q \equiv q(t), \quad \dot{q} \equiv \dot{q}(t), \quad t \in I_c$$

où la dérivée $\frac{d}{dt}$ est prise dans \mathbf{V}'_s (notation de 7.7, 7.8, 7.10).

Bien entendu ce résultat s'applique immédiatement dans le cas moins général où la pseudo-différentiabilité faible de \mathbf{M} et q est remplacée par la pseudo-différentiabilité.

2 La transformation de Legendre et la forme hamiltonienne des équations de la dynamique

L'interprétation géométrique intrinsèque de 7.14 ne peut se faire par une extension aux variétés bimodelées de la notion de structure lagrangienne du moins si l'on exclut le recours à un surcroît peu admissible d'hypothèses quant à Ω et la régularité du mouvement considéré. Par contre la transformation de Legendre et la structure pseudo-symplectique de $\tilde{\mathbf{T}}'\Omega$ permettent de traduire les propriétés équivalentes (a) et (b) en termes de recherche d'intégrales d'un champ de pseudo-vecteurs sur $\tilde{\mathbf{T}}'\Omega$ (ce qui s'exprime localement par les « équations de Hamilton généralisées ») ; dans les conditions où nous nous plaçons, l'espace des moments est l'espace pseudo-cotangent $\tilde{\mathbf{T}}'\Omega$.

Les structures hamiltoniennes constituent donc l'aspect le plus général de la dynamique analytique dans le schéma décrit. Les résultats du n° 1 suggèrent de poser la définition suivante :

DÉFINITION 7.3. — Soit Ω une variété bimodelée dans Ξ (catégorie

de δ -couples d'espaces de Banach de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 2$. On appelle système mécanique sur Ω tout couple (\mathbf{K}, \mathbf{Q}) où

- . $\mathbf{K} : \tilde{\mathbf{T}}\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^{k-1} (« énergie cinétique »).
- . $\mathbf{Q} : \tilde{\mathbf{T}}\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme de Pfaff semi-basique de 1^{re} espèce sur $\tilde{\mathbf{T}}\Omega$ (« travail des forces »).

La différentielle verticale $d_v \mathbf{K}$ est alors une forme de Pfaff semi-basique de 2^e espèce sur $\tilde{\mathbf{T}}\Omega$ (cf. 6.4) et, avec la définition 6.3 on peut adapter aux circonstances présentes la condition de dualité de Lagrange-Hamilton :

DÉFINITION 7.4. — On suppose $k > 2$, le système mécanique (\mathbf{K}, \mathbf{Q}) satisfait à la condition de dualité (resp. : dualité forte) si la transformation de Legendre $D : \tilde{\mathbf{T}}\Omega \rightarrow \tilde{\mathbf{T}}\Omega$ déterminée par $\tilde{q}_\Omega \circ D = \tilde{p}_\Omega$, $D^*l = d_v \mathbf{K}$ est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^{k-1} (resp. : et un isomorphisme de fibrés vectoriels de $\tilde{\tau}(\Omega)$ sur $\tilde{\tau}'(\Omega)$).

Si l'hypothèse de dualité est vérifiée les espaces « \mathbf{W} » intervenant dans les δ -cartes de Ω sont réflexifs et l'on peut supposer que Γ_2 est formée d'espaces de Banach réflexifs. Par suite le théorème 5.5 s'applique et l'on a (notations du théorème 5.5 et de la proposition 4.3) :

THÉORÈME 7.3. — Si le système mécanique (\mathbf{K}, \mathbf{Q}) vérifie la condition de dualité et si l'on pose :

$$7.13. \quad \mathbf{H} = D^{-1*}(\mathbf{W} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{Q}), \mathbf{F} = D^{-1*}\mathbf{Q}$$

(\mathbf{W} = champ de vecteurs canonique sur $\tilde{\mathbf{T}}\Omega$).

. Il existe un champ de pseudo-vecteurs unique \mathbf{Y} sur la variété bimodélée $\tilde{\mathbf{T}}'\Omega$ dans Π_{ss} (corollaire 5.1) tel que $\mathbf{S}_b \mathbf{Y} = -d\mathbf{H} + \mathbf{F}$.

. Si 7.1, 7.2, 7.3 ont lieu la propriété (b) de la proposition 7.2 équivaut à

(c) $D \circ \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{M} : \mathbf{I} \rightarrow \tilde{\mathbf{T}}'\Omega$ est une intégrale du champ de pseudo-vecteurs \mathbf{Y} .

. Si les propriétés 7.1 à 7.5 ont lieu les propriétés (a) (b) (c) sont équivalentes.

Lorsque le mouvement \mathbf{M} est supposé pseudo-différentiable on remplace Π_{ss} par Π_{bs} . L'existence du champ de pseudo-vecteurs \mathbf{Y} découle du théorème 5.5, si l'on raisonne localement dans une δ -carte $c = (U, \varphi, \Delta)$ de Ω les expressions locales sont données par 7.7, 7.10 et :

$$\begin{aligned} D_c : (x, w) &\rightsquigarrow (x, L(x, w)) \equiv (x, \partial_2 \mathbf{K}_c(x, w)) \\ D_c^{-1} : (x, w') &\rightsquigarrow (x, L^-(x, w')) \\ \mathbf{H}_c : (x, w') &\rightsquigarrow \partial_2 \mathbf{K}_c(x, L^-(x, w'))(L^-(x, w')) - \mathbf{K}_c(x, L^-(x, w')) \\ \mathbf{Y}_c : (x, w') &\rightsquigarrow ((x, w'), (i\partial_2 \mathbf{H}_c(x, w'), -\partial_1 \mathbf{H}_c(x, w') + \mathbf{F}_c(x, w'))) \end{aligned}$$

où $x \in \varphi(U)$, $w \in \mathbf{W}$, $w' \in \mathbf{W}'$. En usant de l'identité $\partial_2 \mathbf{K}_c(x, L^-(x, w')) = w'$ et des identités qui s'en déduisent par dérivation on trouve aisément :

$$\partial_1 \mathbf{H}_c(x, w') = -\partial_1 \mathbf{K}_c(x, L^-(x, w')), \partial_2 \mathbf{H}_c(x, w') = i^{-1} L^-(x, w')$$

où $i : \mathbf{W}'' \rightsquigarrow \mathbf{W}$ est l'isomorphisme canonique. Par suite si l'expression de $\mathbf{D} \circ \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{M}$ dans c est $t \rightsquigarrow (q(t), p(t)) \equiv (q(t), \mathbf{L}(q(t), \dot{q}(t)))$ l'équation

$$\frac{d}{dt} {}^t j \partial_2 \mathbf{K}_c(q, \dot{q}) - \partial_1 \mathbf{K}_c(q, \dot{q}) = \mathbf{Q}_c(q, \dot{q}) \quad q \equiv q(t), \quad \dot{q} \equiv \dot{q}(t)$$

équivalent à

$$7.14. \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} {}^t j p = -\partial_1 \mathbf{H}_c(q, p) + \mathbf{F}_c(q, p) \\ \frac{d}{dt} j q = i \partial_2 \mathbf{H}_c(q, p), \quad q \equiv q(t), \quad p \equiv p(t) \end{cases}$$

ce qui est l'expression locale de la propriété (c) (cf. 5.12). Aux premiers membres de 7.14 les dérivées $\frac{d}{dt} {}^t j p$ et $\frac{d}{dt} j q$ sont prises respectivement dans \mathbf{V}'_s et \mathbf{W}'_σ .

Dans les hypothèses de dualité forte, si l'on suppose \mathbf{K} « nulle sur la section nulle de $\tilde{\tau}(\Omega)$ », il existe une métrique riemannienne g sur $\tilde{\tau}(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2} g(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{D} &= g_\flat : \tilde{\tau}(\Omega) \rightarrow \tilde{\tau}'(\Omega) : \mathbf{w} \rightsquigarrow g(\mathbf{w}, \cdot) = g_\flat(\mathbf{w}) \\ \mathbf{D}^{-1} &= g_\sharp : \tilde{\tau}'(\Omega) \rightarrow \tilde{\tau}(\Omega) \end{aligned}$$

et la fonction \mathbf{H} de 7.13 est définie par $\mathbf{H}(\mathbf{w}') = \frac{1}{2} g(g_\sharp(\mathbf{w}'), g_\sharp(\mathbf{w}'))$.

Cas des systèmes Lagrangiens : \mathbf{Q} est alors de la forme $d(U \circ \tilde{p}_\Omega)$ où U est une fonction différentiable sur Ω , on introduit alors le hamiltonien défini, non par 7.13 mais par :

$$7.15. \quad \mathbf{H} = \mathbf{D}^{-1} * (\mathbf{W} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{K} - U \circ \tilde{p}_\Omega) : \tilde{\mathbf{T}}'\Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$7.14. \quad \mathbf{L} = \mathbf{K} + U \circ \tilde{p}_\Omega : \tilde{\mathbf{T}}\Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Lagrangien})$$

le principe des puissances virtuelles s'exprime alors par les conditions équivalentes :

$$\cdot \frac{d}{dt} ({}^t j \partial_2 \mathbf{L}(q, \dot{q})) - \partial_1 \mathbf{L}(q, \dot{q}) = 0 \quad (\text{localement})$$

$$\cdot \frac{d}{dt} {}^t j p = -\partial_1 \mathbf{H}(q, p) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} j q = i \partial_2 \mathbf{H}(q, p) \quad (\text{localement})$$

· $t \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{M}(t)$ est une intégrale du champ de pseudo-vecteurs \mathbf{Y} sur $\tilde{\mathbf{T}}'\Omega$ tel que $\mathbf{S}_\flat \mathbf{Y} = -d\mathbf{H}$.

3 CONCLUSION

La structure de variété bimodelée sur l'espace des configurations d'un système mécanique à une infinité de degrés de liberté permet une des-

cription géométrique de la dynamique qui ne fait appel *a priori* qu'à trois hypothèses de régularité sur le mouvement étudié :

. L'hypothèse 7.3 qui traduit uniquement la possibilité de définir intrinsèquement une vitesse appartenant au domaine de définition de la fonction énergie cinétique,

. L'hypothèse 7.4 qui traduit l'existence de l'accélération en un sens très faible,

. L'hypothèse 7.5 qui assure l'équivalence entre le principe des puissances virtuelles et les équations de la dynamique sous forme lagrangienne ou hamiltonienne.

Ces hypothèses sont nettement plus faibles que celles auxquelles il serait inévitable de recourir si l'on restait dans le cadre des seules variétés de Banach, de plus 7.3 et 7.4 suffisent pour donner une signification géométrique intrinsèque au problème d'évolution posé. Il serait certes souhaitable d'établir des théorèmes d'existence assez généraux pour la solution de ce problème dans la classe de solutions faibles ainsi définie, ce point qui est de toutes façons assez délicat eu égard à la non linéarité et à la généralité du problème, n'est pas envisagé dans cet article qui ne traite que des questions de géométrie différentielle mais bien entendu les champs de pseudo-vecteurs \mathbf{Y} du théorème 7.3 qui ont des propriétés convenables lorsqu'on les exprime dans une δ -carte conduisent localement à des théorèmes d'existence ; cette façon de procéder n'est cependant pas entièrement satisfaisante. Ainsi le schème décrit repose sur un système d'hypothèses qui offre l'avantage de n'être pas très contraignant *a priori* et à partir duquel on peut chercher de tels théorèmes d'existence en étant assuré de ne pas détruire le caractère géométrique de la théorie.

Par ailleurs, sous réserve que soit vérifiée la condition de dualité, ce schéma contient une généralisation de la dynamique hamiltonienne adaptée à des cas où, l'espace des configurations ayant une structure de variété bimodelée dont la variété sous-jacente n'est pas réflexive, la forme classique de la dynamique hamiltonienne, qui serait relative à cette variété sous-jacente, n'est pas valable.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ABRAHAM, *Foundation of Mechanics*, Benjamin.
 ARNOLD, Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Grenoble*, t. 16, 1966, p. 319-361.
 BLANCHETON (Mme), Mécanique analytique des milieux continus. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, A, vol. VII, n° 3, 1967, p. 189-213.
 BOURBAKI, I. *Espaces vectoriels topologiques*, chapitre III. II. *Espaces vectoriels topologiques*, chapitre IV.

- CHERNOFF and MARSDEN, Some remarks on Hamiltonian systems and quantum mechanics. Lecture presented to the conference on the foundations of probability and statistics and statistical theories of science, London, Ontario, May, 1973.
- CHEVALLIER D. P., I. Thèse de Doctorat, Paris, 1973. II. Étude géométrique de la dynamique des fils inextensibles. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **270**, p. 1562-1564.
- EBIN, The group of diffeomorphisms and motion of fluids. Symposium on differential equations and dynamical systems. *Lecture notes in Mathematics*, vol. **206**, Springer, 1971.
- EBIN and MARSDEN, On the motion of incompressible fluids. *Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice 1970*, Gauthier-Villars.
- EELLS and ELWORTHY, On Fredholm manifolds. *Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice 1970*, Gauthier-Villars.
- GODBILLON, *Géométrie différentielle et Mécanique analytique*. Hermann, Paris, 1969.
- MARSDEN, Hamiltonian one parameter groups. *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, t. **28**, 1968, p. 362-396.
- MARSDEN, EBIN and FISCHER, Diffeomorphism groups, hydrodynamics and relativity. *Proceedings of the thirteenth biennial seminar of the Canadian Mathematical Congress, Montreal (1972)*.
- PALAIS I., *Foundation of global non-linear analysis*, Benjamin.

(Manuscrit reçu le 9 janvier 1974)