ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ALICE CHALJUB-SIMON

Sur les conditions globales du problème des conditions initiales du cas extérieur

Annales de l'I. H. P., section A, tome 16, nº 3 (1972), p. 223-234
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__16_3_223_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVI, n° 3, 1972, p. 223-234.

Section A :
Physique théorique.

Sur les conditions globales du problème des conditions initiales du cas extérieur

par

Alice CHALJUB-SIMON

RÉSUMÉ. — On commence par rappeler les différentes formulations du problème des conditions initiales, et les solutions globales déjà trouvées lorsque la variété initiale est complète. Dans ce cas, il existe une solution unique, à condition de supposer la métrique « faiblement gravitationnelle », et avec des conditions à l'infini précisées. On étudie ensuite le cas où la variété initiale V_3 est compacte sans bord. Le système des conditions initiales se ramène à un système de trois équations aux dérivées partielles du premier ordre et une équation elliptique quasi-linéaire du second ordre. A l'aide du noyau élémentaire d'un opérateur elliptique associé à cette dernière équation, on se ramène à la recherche des points fixes d'une transformation intégro-différentielle dans $C^1(V_3)$, et on trouve des conditions pour l'existence de solutions du problème des conditions initiales.

1. POSITION DU PROBLÈME

Le problème de Cauchy pour les équations d'Einstein se décompose en deux problèmes distincts : problème des conditions initiales et problème d'évolution (Y. Choquet-Bruhat; *Gravitation,* Witten, chap. IV). Le second de ces problèmes a été résolu dans les travaux de M^me^ Choquet-Bruhat [3]. Après avoir rappelé les résultats globaux du premier problème déjà obtenus, on étudie le cas d'une variété initiale compacte sans bord. On obtient, en particulier, la condition d'existence et d'unicité de la solution du problème dans le cas statique.

Le problème des conditions initiales se formule ainsi : étant donnée une variété initiale à trois dimensions, section de l'espace-temps de la relativité générale par l'hypersurface $t = 0$, trouver deux tenseurs symétriques Ω et g, dont les composantes Ω_{ij} et g_{ij} vérifient les quatre équations :

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \nabla_j (\Omega^{ij} - g^{ij}\,\mathrm{K}) = 0 \\ (2) & \mathrm{R} + \mathrm{K}^2 - \mathrm{H}^2 = 0 \end{array}\right\} (\mathrm{S}),$$

avec

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{K} = g^{k1}\,\Omega_{k1}, \\ \mathrm{H}^2 = \Omega^i_j\,\Omega^j_i. \end{array}\right.$$

Dans le cas particulier *statique* ($\Omega = 0$), le système (S) se réduit à l'équation

$$(4) \qquad \mathrm{R} = 0.$$

On peut obtenir une autre forme du système (S). Supposons les coordonnées harmoniques $\Big[$ i. e. les quatre équations :

$$(5) \qquad \mathrm{F}^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\lambda\,(\sqrt{-g}\,g^{\lambda\mu}) = 0$$

sont vérifiées $\Big]$.

Un tel choix est toujours possible. Le système (S) s'écrit alors dans une carte locale (χ, U) :

$$\left.\begin{array}{ll} (6) & g^{ij}\,\partial_{ij}\,\mathrm{G}^{00} - 2\,g^{0i}\,\partial_{ij}\,\mathrm{G}^{j0} = g^{00}\,\partial_{i0}\,\mathrm{G}^{i0} - \mathrm{H}^{00} \\ (7) & g^{ij}\,\partial_{ij}\,\mathrm{G}^{0j} = g^{00}\,\partial_{i0}\,\mathrm{G}^{ij} - 2\,g^{0i}\,\partial_{ij}\,\mathrm{G}^{0j} - \mathrm{H}^{0j} \end{array}\right\} (\mathrm{S}_1),$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{G}^{0\alpha} = \sqrt{-g}\,g^{0\alpha}, \\ \mathrm{H}^{0\alpha} = \mathrm{H}^{0\alpha}(\mathrm{G}^{0\alpha}, \partial_i\,\mathrm{G}^{0\alpha}). \end{array}\right.$$

On se donne sur V_3 les fonctions G^{ij}, $\partial_0\,\mathrm{G}^{ij}$; il s'agit de déterminer les quatre fonctions $\mathrm{G}^{0\alpha}$. Le système (S_1) est un système de quatre équations aux dérivées partielles du second ordre elliptique, et qui n'est ni fortement elliptique, ni quasi linéaire. Dans une carte locale de V_3, (S_1) est équivalent à

$$\left.\begin{array}{ll} (8) & \mathrm{G}^{ij}\,\partial_{ij}\,\mathrm{G}^0 - 2\,\mathrm{G}^i\,\partial_{ij}\,\mathrm{G}^j = -\,\mathrm{G}^0\,\partial_{ij}\,\mathrm{G}^{ij} - \sqrt{-g}\,\mathrm{H}^{00} \\ (9) & \mathrm{G}^{ij}\,\partial_{ij}\,\mathrm{G}^k = 2\,\mathrm{G}^i\,\partial_{ij}\,\mathrm{G}^{jk} + \mathrm{G}^0\,\partial_{0i}\,\mathrm{G}^{ik} - \sqrt{-g}\,\mathrm{H}^{0k} \end{array}\right\} (\mathrm{S}_2).$$

(S_2) est un système quasi linéaire; mais il n'est pas associé à un opérateur différentiel linéaire sur V_3; en effet, l'expression :

$\mathrm{G}^{ij}\,\partial_{ij}$ ne définit pas un opérateur différentiel sur une variété, car les fonctions G^{ij} ne sont pas les composantes d'un deux-tenseur, mais d'une densité tensorielle.

2. RÉSULTATS DÉJA CONNUS

Depuis les travaux de Lichnerowicz [5], on sait que le problème de Dirichlet relatif au système (S) a des solutions dans un ouvert suffisamment petit de V_3 (solutions locales) ou dans un ouvert de diamètre quelconque, moyennant des restrictions sur les données. Le problème est de savoir, si ce dernier type de solutions peut être étendu à toute la variété. La première solution globale de (S), définie sur toute la variété initiale, a été donnée par Araki en 1959, dans le cas statique [1]. V_3 est supposée *complète*, et *homéomorphe* à R^3; la dernière hypothèse simplifie notablement le problème, à cause de l'existence de coordonnées globales sur V_3.

Le système (S) se réduit à l'équation (4). Suivant une méthode due à Lichnerowicz, on se donne une métrique g sur V_3, et l'on cherche la métrique inconnue sous la forme (*cf.* Araki [1], A. Vaillant [7])

$$\hat{g}_{ij} = \Phi^4 g_{ij}. \tag{10}$$

L'équation (4) devient :

$$\Delta\Phi - \frac{1}{8} R \Phi = 0. \tag{11}$$

Le résultat obtenu par Araki est le suivant : supposant la métrique donnée g régulière, et asymptotiquement euclidienne, il existe une fonction Φ unique, dans $C^2(V_3)$, tendant vers $+1$ à l'infini et satisfaisant à (11); il existe donc une métrique régulière asymptotiquement euclidienne unique, solution de (4); à toute métrique g, on peut donc faire correspondre une solution unique du problème des conditions initiales du cas statique, et donc un espace-temps extérieur unique au voisinage de V_3.

Dans le cas général, non statique, le système (S) est difficile. Les systèmes (S_1) et (S_2) semblent plus indiqués à l'étude dans un ouvert de V_3, ou sur une variété complète homéomorphe à R^3. Des résultats généraux ont été obtenus par l'auteur (A. Simon-Vaillant [8]). Dans un ouvert de V_3, ou sur V_3 homéomorphe à R^3, (S_2) est équivalent à (S_1). L'étude de (S_2) permet d'arriver au résultat suivant : donnons-nous des fonctions G^{ij}, $\partial_0 G^{ij}$ satisfaisant à une hypothèse de « faible gravitation », et telles que les fonctions : $(G^{ij} - \delta^{ij})$ tendent vers zéro exponentiellement à l'infini. Alors il existe une solution unique du problème des conditions initiales « faiblement gravitationnelle », régulière ($G^{\alpha\beta} \in C^{2,h}(V_3)$), telle que $(G^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha\beta})$ tendent vers zéro exponentiellement à l'infini. Ces résultats sont obtenus grâce au noyau élémentaire de l'opérateur elliptique injectif :

$$P_k \equiv G^{ij} \partial_{ij} - k^2 \qquad (k > 0) \tag{12}$$

et à l'aide des théorèmes classiques de points fixes (Schauder). Mais ces méthodes ne peuvent pas s'étendre à l'étude effective sur une variété compacte pour les raisons invoquées plus haut.

3. ÉTUDE DU SYSTÈME (S) SUR UNE VARIÉTÉ INITIALE COMPACTE SANS BORD

Soit V_3 une variété compacte sans bord.

L'équation (2) se traite par la méthode de la métrique conforme [*cf.* équation (10)]. Supposons donnée une métrique g^* définie, positive, régulière. Cherchons la métrique inconnue sous la forme :

$$g_{ij} = e^{2\theta} g^*_{ij}. \tag{13}$$

Nous choisissons ici comme facteur de conformité e^θ à la place de Φ; en effet sur une variété compacte sans bord, aucune condition ne vient remplacer la condition de comportement à l'infini (par exemple, si V_3 est une variété complète, on impose la condition : Φ tend vers 1 à l'infini). On démontre l'existence d'une solution de l'équation transformée de (2) à l'aide d'un théorème de point fixe, et il n'est pas facile de décider si les fonctions obtenues sont non triviales ($\Phi \equiv 0$). Sous la forme (13), cette difficulté disparaît, mais on obtient une équation un peu plus compliquée pour déterminer θ.

La courbure de V_3 dans la métrique conforme (13) est donnée par (*cf.* Avez [2])

$$e^{2\theta} R = R^* - 8\, e^{-\theta/2}\, \Delta^* (e^{\theta/2}). \tag{14}$$

(Les éléments relatifs à la métrique g^* sont affectés de *.) L'équation (2) devient

$$8\, e^{-\theta/2}\, \Delta^* (e^{\theta/2}) - R^* - L^2 e^{2\theta} = 0, \tag{15}$$

où

$$L^2 = K^2 - H^2.$$

Dans une carte locale (χ, U), (15) s'écrit :

$$4\, \Delta^* \theta + 2\, g^{*ij}(x) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \chi_i} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \chi_j} - R^* - L^2 e^{2\theta} = 0, \tag{16}$$

avec

$$\theta = \theta \circ \overset{-1}{\chi}.$$

Soit S l'application non linéaire ($C^1(V_3) \to C(V_3)$) définie en coordonnées locales par

$$\overline{S\,\theta}\,(x) = g^{*ij}(x) \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\chi_i}\,\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\chi_j}.$$

Le système (1)-(2) est équivalent à

$$4\,\Delta^*\,\theta + 2\,S(\theta) - R^* - L^2 e^{2\theta} = 0, \tag{17}$$

$$\nabla_j (\Omega^{ij} - g^{ij} K) = 0. \tag{18}$$

Dans le cas *statique*, le système (17)-(18) se réduit à :

$$4\,\Delta^*\,\theta + 2\,S(\theta) - R^* = 0. \tag{19}$$

L'équation (19) est une équation elliptique quasi linéaire. Dans le cas général — non statique — le système (17)-1(8) est composé d'une équation elliptique quasi linéaire du second ordre en θ, et de trois équations aux dérivées partielles du premier ordre en Ω_{ij}. On connaît des solutions de (18) (*cf.* Perès [6]). Nous nous proposons ici, d'étudier les solutions de (19) définies globalement sur V_3, et plus généralement les solutions de l'équation elliptique quasi linéaire sur V_3 :

$$\Delta\theta + \frac{1}{2} S(\theta) = \frac{1}{4} f(\theta). \tag{20}$$

(On a supprimé le signe *, pour des raisons évidentes de simplicité.)

Pour démontrer l'existence de solutions de (20), nous construisons l'inverse de l'opérateur elliptique bijectif $P_\alpha = \Delta - \alpha^2$ ($\alpha \neq 0$) sur V_3, et nous avons ensuite à chercher les points fixes d'une transformation intégrale.

Remarque. — L'équation (20) est équivalente à (Lichnerowicz [5])

$$\Delta\varphi - \frac{1}{8} R\,\varphi - L^2\,\varphi^5 = 0 \qquad (\varphi = e^{\theta/2}). \tag{20'}$$

A toute solution de (20) correspond une solution de (20′), et réciproquement [la solution $\varphi = 0$ de (20′) correspond à $\theta = -\infty$, et ne fournit pas de solution du problème des conditions initiales]. Les équations (20) et (20′) étant elliptiques, le principe du maximum s'applique.

Or : (20) s'écrit : $F(\theta_{ij}, \theta_i, \theta) \equiv 0$,
(20′) s'écrit : $G(\varphi_{ij}, \varphi_i, \varphi) \equiv 0$.

Le principe du maximum appliqué à (20) donne la propriété suivante : si $F_\theta = -2\,L^2 e^{2\theta}$ est strictement négatif sur V_3, il existe au plus une solution de (20) régulière sur V_3. On a donc au plus une solution régulière de (20′), c'est la solution triviale. Donc si L^2 est strictement positif sur V_3, l'équation (20) ne possède pas de solution régulière sur V_3.

Dans le cas *statique*, on a les deux équations équivalentes :

(19) $$\Delta\theta + \frac{1}{2} S(\theta) - R = 0,$$

(19′) $$\Delta\varphi - \frac{1}{8} R\, \varphi = 0.$$

Le principe du maximum appliqué à (19′) donne l'existence d'au plus une solution régulière sur V_3 entière si $R > 0$ sur V_3, c'est dire que le problème des conditions initiales du cas statique n'admet pas de solution régulière sur V_3, si R est strictement positif sur V_3.

4. THÉORÈME D'EXISTENCE DE LA SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DE P_α

A partir de maintenant, nous fixons un recouvrement ouvert fini de V_3 $(\chi_\alpha\, U_\alpha)$. Soit (Ψ_α) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement précédent.

Définition. — On dit qu'une fonction $f\,(V_3 \to R)$ est dans $C^{p,h}(V_3)$ (p entier positif ou nul, $0 < h < 1$), si pour toute carte locale (χ, U), la fonction $f \circ \overset{-1}{\chi}$ est dans $C^{p,h}(\chi(U))$. [On rappelle que si Ω est un ouvert de R^n, l'espace $C^{p,h}(\Omega)$ est le sous-espace de $C^p(\Omega)$ des fonctions f, telles que

(20) $$\sup_{\substack{x\in\Omega \\ y\in\Omega}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^h} < +\infty;$$

$C^{p,h}(\Omega)$ est un espace de Banach.]

On montre que $C^{p,h}(V_3)$ est un espace de Banach, et on peut définir sa topologie par la norme :

(21) $$\| f \|_{p,h} = \sum_\alpha \| (\Psi_a f)_0\, \overset{-1}{\chi_\alpha} \|_{C^{p,h}(\chi_\alpha(U_\alpha))}.$$

Si $f\, C^1(V_3)$, on posera :

(22) $$| f |_1 = \operatorname*{Max}_i \sum_\alpha \left\| \Psi_\alpha\, (\overset{-1}{\chi_\alpha})\, \frac{\partial}{\partial z_i} (f_0\, \overset{-1}{\chi_\alpha})\,(z) \right\|_{C(\chi_\alpha(U_\alpha))}.$$

Soit g la métrique elliptique donnée sur V_3; nous verrons plus tard qu'elle ne peut être choisie de manière arbitraire.

Les hypothèses de régularité sur g seront exprimées par

$$g_{ij} \in C^{2,h}(V_3) \qquad (h \text{ donné dans }]0, 1[).$$

Alors on démontre le :

THÉORÈME 1. — *Il existe $\alpha_0 > 0$, tel que pour $\alpha \geqq \alpha_0$, l'opérateur différentiel P_α ait pour inverse un opérateur intégral dont le noyau $-G_\alpha(x, y)$ satisfait aux conditions :*

$$\text{(i)} \quad -P_\alpha(\underline{G}_\alpha f) = f \quad \textit{pour tout } f \in C^{0,h}(V_3);$$

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(ii)} \quad \left\| \displaystyle\int_{V_3} G_\alpha(x, y) f(y)\, dy \right\| \leqq \dfrac{\text{Cte}}{\gamma(1-\beta)} \times \dfrac{1}{\alpha^2} \| f \|_0 \\ \qquad\qquad \textit{pour tout } f \in C(V_3); \end{array} \right.$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(iii)} \quad \left| \displaystyle\int_{V_3} G_\alpha(x, y) f(y)\, dy \right| \leqq \dfrac{\text{Cte}}{\gamma(1-\beta)} \times \dfrac{1}{\alpha} \| f \|_0 \\ \qquad\qquad \textit{pour tout } f \in C(V_3), \end{array} \right.$$

où :

— $\gamma = \inf\limits_{z \in V_3} [\det g^{ij}(z)]$; $0 < \beta < 1$.

— Cte désigne une constante ne dépendant pas de α, mais dépendant de g.

— La notation $\underline{H}$, où $(x, y) \mapsto H(x, y)$ est un noyau sur V_3 désigne l'opérateur intégral associé à ce noyau, i. e. :

$$\underline{H} f(x) = \int_{V_3} H(x, y) f(y)\, dy.$$

Nous employons les notations de Courrège-Durand [4].

Nous ne donnons que l'ébauche de la démonstration. Celle-ci un peu technique sera publiée à part. La construction du noyau élémentaire de l'opérateur P_α se fait par analogie avec les travaux classiques de Levi-Giraud, relatifs aux ouverts de R^n.

Soient (Φ_j) des fonctions $(\Phi_j : V_3 \times V_3 \to R)$, telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad \text{Sup}(\Phi_j) \subset U_j \times U_j, \\ \displaystyle\sum_j \Phi_j(x, y) = 1 \quad \text{au voisinage de la diagonale de } V_3 \times V_3. \end{array} \right.$$

Désignant par $H_\alpha^j(x, y)$ une paramétrix de l'opérateur elliptique induit par P_α sur l'ouvert U_j, on définit une paramétrix de P_α sur $V_3 \times V_3$, en posant

$$H_\alpha(x, y) = \sum_j \Phi_j(x, y)\, H_\alpha^j(\chi_j(x), \chi_j(y))\, [g^{x_j}(y)]^{-1/2}. \tag{26}$$

Posons :

$$K_\alpha(x, y) = P_\alpha H_\alpha(x, y). \tag{26'}$$

On démontre que l'on a alors :

$$-P_\alpha(\underline{H}_\alpha f) = f - \underline{K}_\alpha f, \quad \forall f \in C^{0,h}(V_3).$$

Cherchons le noyau élémentaire de P_α sous la forme :

$$G_\alpha(x, y) = H_\alpha(x, y) + \int_{V_3} H_\alpha(x, z)\, \Psi(z, y)\, dz. \tag{27}$$

Pour que le noyau défini par (27) satisfasse à la relation :

$$-P_\alpha(\underline{G}_\alpha f) = f,$$

il faut et il suffit que $\Psi(x, y)$ soit solution de l'équation intégrale :

$$\Psi - \underline{K}_\alpha \Psi = K_\alpha. \tag{28}$$

Or, on peut choisir $\alpha \geqq \alpha_0$, de manière que

$$\| \underline{K}_\alpha \|_{\mathcal{L}(C(V_3), C(V_3))} < 1.$$

α étant ainsi choisi, l'équation (28) a une solution unique, et le noyau élémentaire de P_α est donné par

$$G_\alpha(x, y) = H_\alpha(x, y) + \sum_{n \geqq 1} \int_{V_3} H_\alpha(x, z)\, K_\alpha^{(n)}(z, y)\, dz. \tag{29}$$

Les majorations (24) et (25) s'obtiennent de manière classique.

5. APPLICATION A LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION (20)

L'équation (20) s'écrit :

$$P_\alpha \theta = -\alpha^2 \theta - \frac{1}{2} S(\theta) + \frac{1}{4} f(\theta). \tag{30}$$

Associons à (30) la transformation $T : (\theta \mapsto T\theta = \Psi)$ définie par

$$\Psi(x) = \int_{V_3} G_\alpha(x, y) \left[\alpha^2 \theta(y) + \frac{1}{2} S\theta(y) - \frac{1}{4} f(\theta)(y) \right] dy. \tag{31}$$

Soit Ω la boule fermée de $C^1(V_3)$ de centre O et de rayon m.

Si E et F sont deux espaces vectoriels normés, et A une partie ouverte de E, on appellera Lip (A, F) l'ensemble des applications lipschitziennes de A dans F. On peut alors énoncer le :

THÉORÈME 2. — *Si* $f \in \mathrm{Lip}\,(C(V_3), C(V_3))$, *on peut choisir la métrique* g *sur* V_3 *de manière que* T *soit une contraction de* Ω *dans lui-même.*

LEMME. — $S \in \mathrm{Lip}\,(\Omega, C(V_3))$.

L'opérateur différentiel S est défini par son expression dans une carte locale : si $\theta \in \Omega$,

$$S\,\theta \circ \overset{-1}{\chi}(z) = g^{ij}(\overset{-1}{\chi}(z))\,\frac{\partial\bar\theta}{\partial z_i}\,\frac{\partial\bar\theta}{\partial z_j} \qquad (\bar\theta = \theta \circ \overset{-1}{\chi}).$$

Appliquant la définition (21) :

$$\| S\,\theta_1 - S\,\theta_2 \|_0 = \sum_\alpha \| \Psi_\alpha(\overset{-1}{\chi}_\alpha) \times (S\,\theta_1 \circ \overset{-1}{\chi}_\alpha - S\,\theta_2 \circ \overset{-1}{\chi}_\alpha) \|_{C(\chi_\alpha(U_\alpha))}$$

$$= \sum_\alpha \sup_{z \in \Omega_\alpha} \left| \Psi_\alpha(\overset{-1}{\chi}_\alpha(z))\, \frac{\left\{ g^{ij}(\overset{-1}{\chi}_\alpha(z)) \left(\frac{\partial\bar\theta_1^\alpha}{\partial z_i}\frac{\partial\bar\theta_1^\alpha}{\partial z_j} - \frac{\partial\bar\theta_2^\alpha}{\partial z_i}\frac{\partial\bar\theta_2^\alpha}{\partial z_j} \right) \right\}}{A} \right|$$

(avec $\bar\theta_i^\alpha = \theta_i \circ \overset{-1}{\chi}_\alpha$; $i = 1, 2$). Or :

$$A = g^{ij}(\overset{-1}{\chi}_\alpha(z)) \left[\left(\frac{\partial\bar\theta_1^\alpha}{\partial z_i} - \frac{\partial\bar\theta_1^\alpha}{\partial z_j} \right) \frac{\partial\bar\theta_1^\alpha}{\partial z_j} + \frac{\partial\bar\theta_2^\alpha}{\partial z_i} \left(\frac{\partial\bar\theta_1^\alpha}{\partial z_i}\,\frac{\partial\bar\theta_2^\alpha}{\partial z_j} \right) \right].$$

On obtient alors la majoration :

$$(32) \qquad \| S\,\theta_2 - S\,\theta_1 \|_0 \leqq \mathrm{Cte}\,(m, g)\, |\, \theta_1 - \theta_2 \,|_1$$

comme : $|\,\theta\,|_1 \leqq \|\,\theta\,\|_1$, pour tout $\theta \in C^1(V_3)$, on obtient l'inégalité :

$$(33) \qquad \| S\,\theta_1 - S\,\theta_2 \|_0 \leqq \mathrm{Cte}\,(m, g)\, \|\, \theta_1 - \theta_2 \,\|_1$$

ce qui démontre le lemme.

Démonstration du théorème 2. — On suppose qu'il existe une constante $k(m) > 0$, telle que

$$(34) \qquad \| f(\theta_1) - f(\theta_2) \|_0 \leqq k(m)\, \|\, \theta_1 - \theta_2 \,\|_0.$$

Or, d'après la définition de la norme de $C^1(V_3)$:

$$\| T\theta_1 - T\theta_2 \|_1 = \| \Psi_1 - \Psi_2 \|_1 = \sum_\alpha \sup_{z \in \Omega_\alpha} \left| \Psi_\alpha \left(\overset{-1}{\chi_\alpha}(z)\right) \times (\Psi_1 - \Psi_2) \circ \overset{-1}{\chi_\alpha}(z) \right|$$

$$+ \operatorname{Max}_k \sup_{z \in \Omega_\alpha} \left| \frac{\partial}{\partial z_k} \left[\Psi_\alpha \left(\overset{-1}{\chi_\alpha}(z)\right) (\Psi_1 - \Psi_2) \left(\overset{-1}{\chi_\alpha}(z)\right) \right| \right.$$
$$\left. \leq \mathrm{Cte} \, \| \Psi_1 - \Psi_2 \|_0 + | \Psi_1 - \Psi_2 |_1 \right].$$

D'après les inégalités (24), (33) et (34) :

$$(35) \quad \| \Psi_1 - \Psi_2 \|_0 \leq \frac{\mathrm{Cte}}{\gamma(1-\beta)} \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \alpha^2 \| \theta_1 - \theta_2 \|_0 + \mathrm{Cte}(m, g) \| \theta_1 - \theta_2 \|_1 \right.$$
$$\left. + \frac{k(m)}{4} | \theta_1 - \theta_2 |_0 \right\}.$$

D'après (25), (33) et (34) :

$$(36) \quad | \Psi_1 - \Psi_2 |_1 \leq \frac{\mathrm{Cte}}{\gamma(1-\beta)} \frac{1}{\alpha}$$
$$\times \left\{ \alpha^2 \| \theta_1 - \theta_2 \|_0 + \mathrm{Cte}(m) \| \theta_1 - \theta_2 \|_1 \right.$$
$$+ \frac{k(m)}{4} \| \theta_1 - \theta_2 \|_0 < \frac{\mathrm{Cte}}{\gamma(1-\beta)}$$
$$\left. \times \frac{1}{\alpha} \{ \alpha^2 + K(m) \} \| \theta_1 - \theta_2 \|_1 \right\}.$$

Rassemblant les inégalités (35) et (36), on obtient finalement :

$$(37) \qquad \| \Psi_1 - \Psi_2 \|_1 < \frac{C(\alpha, m)}{\gamma(1-\beta)} \| \theta_1 - \theta_2 \|_1,$$

où $C(\alpha, m)$ est une constante, qui dépend de la métrique choisie g par l'intermédiaire des bornes des fonctions (g_{ij}) et (g^{ij}) sur V_3.

Pour que T soit une contraction de Ω dans lui-même, il suffit que

$$(38) \qquad \frac{C(\alpha, m)}{\gamma(1-\beta)} < 1.$$

L'inégalité (38) est une condition à imposer à la métrique g. Si cette condition est vérifiée, alors T est contractante.

6. APPLICATION AU PROBLÈME DES CONDITIONS INITIALES SUR UNE VARIÉTÉ COMPACTE SANS BORD

On montre par un raisonnement classique, que le point fixe de la transformation T est, en fait un élément de $C^{2,h}(V_3)$. L'équation : $\theta = T\theta$ est alors équivalente à l'équation (20), dont on a construit une solution régulière.

Cas statique. — $f(\theta) = R$. La fonction f satisfait aux hypothèses du théorème 2, avec $k(m) = 0$. Si la métrique g satisfait à la condition (38), alors l'équation (19) a une solution unique dans toute boule Ω de $C^1(V_3)$. Or le problème des conditions initiales, dans le cas statique, est entièrement exprimé par l'équation (19). On peut donc énoncer :

THÉORÈME 3. — *Soit* V_3 *une section spatiale de l'espace-temps, compacte, connexe, sans bord. A toute métrique définie, positive, régulière, donnée sur* V_3, *satisfaisant à* (38), *on peut associer une solution unique régulière du problème des conditions initiales du cas statique, et donc un espace-temps extérieur unique au voisinage de* V_3.

Cas général (non statique). — $f(\theta) = R + L^2 e^{2\theta}$. Donc :

$$f(\theta_1) = f(\theta_2) - L^2(e^{2\theta_1} - e^{2\theta_2}) = L^2(e^{\theta_1} - e^{\theta_2})(e^{\theta_1} + e^{\theta_2}),$$

d'où

$$\| f(\theta_1) - f(\theta_2) \|_0 < \sup | L^2 | \, 2\, e^{2m} \| \theta_1 - \theta_2 \|_0,$$

f satisfait donc à l'hypothèse du théorème 2. On obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 4. — *Soit* V_3 *une section spatiale de l'espace-temps. A toute métrique elliptique régulière sur* V_3, *satisfaisant à* (38), *on peut associer une solution unique de l'équation* (17).

Pour obtenir un résultat plus complet sur l'existence et l'unicité du problème des conditions initiales sur une variété compacte sans bord, il faut encore étudier les solutions globales du système formé par les trois équations (18).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Araki, *Annals of Physics*, 1959.
[2] Avez, *Thèse*.
[3] Y. Choquet-Bruhat, *Acta Mathematica*, 1952.
[4] Courrège-Durand, *C. R. Acad. Sc.*, t. 271, série A, 1970, p. 349.
[5] Lichnerowicz, *J. Math. pures et appliquées*, 1944.
[6] Peres, *Nuovo Cimento*, t. 10, 1962, p. 26.
[7] A. Simon-Vaillant, *Thèse* 3e *cycle*, Paris, 1964.
[8] A. Simon-Vaillant, *J. Math. pures et appliquées*, 1969.

(*Manuscrit reçu le* 8 *mars* 1971.)