

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ANDRÉ JOLIVET

**La séparation des variables angulaires et radiales
dans les équations d'ondes des particules de
spin quelconque en interaction**

Annales de l'I. H. P., section A, tome 14, n° 4 (1971), p. 335-351

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__14_4_335_0

© Gauthier-Villars, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

La séparation des variables angulaires et radiales dans les équations d'ondes des particules de spin quelconque en interaction

par

André JOLIVET

Collège Scientifique Universitaire, 49-Angers.

RÉSUMÉ. — Nous traitons dans cet article des applications d'une étude précédente [1] où nous avons étudié les systèmes linéaires du premier ordre et de rang fini, d'équations aux dérivées partielles et de forme invariante par rapport au groupe de Lorentz orthochrone. Ces systèmes décrivent une particule de spin quelconque en interaction avec un champ extérieur.

Nous appliquons ici, les résultats que nous avons obtenus dans le cas général, au cas particulier important où le champ d'interaction est à symétrie sphérique. Nous obtenons très facilement les équations radiales. Ceci nous montre l'un des avantages de la représentation que nous avons choisi, représentation particulièrement bien adaptée aux problèmes à symétrie sphérique.

Plusieurs auteurs ont utilisé pour décrire les particules une théorie particulière appelée « Théorie de la Fusion ». Pour cette théorie nous avons introduit d'autres représentations, il se trouve que pour certains types d'interactions ces représentations conduisent à une écriture plus simple. Notamment l'une de ces représentations que nous avons appelée « représentation Γ_4 diagonale » est particulièrement intéressante.

Avec cette représentation et dans le cas d'une interaction de type potentiel, nous sommes conduits à un système d'équations radiales qui est formé par deux systèmes indépendants. Un cas particulier connu est donné par le cas de la particule de spin $\frac{1}{2}$, les deux systèmes indépendants sont alors irréductibles. Un autre cas particulier est donné par la particule de spin 1,

les équations radiales ont été obtenues par Bartlett [2] en utilisant une méthode nécessitant de longs calculs. Ces équations sont un cas particulier des équations radiales que nous avons obtenues par une méthode générale pour une particule de spin quelconque.

I. INTRODUCTION

Soit $g \rightarrow T(g)$ une certaine représentation finie du groupe $\mathcal{L}_+^\uparrow$. R l'espace de cette représentation.

Soit le système linéaire, de rang fini d'équations aux dérivées partielles du premier ordre et de forme invariante par rapport à $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

$$(1) \quad (\Sigma B_{a\rho}^\gamma T_\gamma^{a\rho} - iM_0 c)\psi = 0$$

où ψ appartient à un espace de Hilbert, c'est une fonction vectorielle inconnue des x^μ à valeur dans R ($\mu = 1, 2, 3, 4$; $x^4 = i$ ct).

Les $T_\beta^{a\rho}$ sont des opérateurs linéaires dans R .

Les $B_{a\rho}^\gamma(x^\mu)$ sont des opérateurs différentiels du premier ordre ou des opérateurs multiplicatifs dépendant des x^μ et sont tels que; ce champ d'opérateurs est à symétrie sphérique c'est-à-dire vérifié :

$$B_{a\rho}^{\prime\gamma}(x^p) = B_{a\rho}^\gamma(x^p) \quad (p = 1, 2, 3)$$

(B' est le transformé de B par rotation d'espace).

M_0 et c sont des nombres réels positifs.

Nous montrons que la solution de l'équation s'écrit sous la forme :

$$\psi_{k\nu}^\alpha(r\theta\varphi t) = \Sigma \langle k\nu l\sigma | kljm \rangle Y_l^\sigma(\theta\varphi) F_{kl}^\alpha(r, t)$$

où les $\langle k\nu l\sigma | kljm \rangle$ sont les coefficients de Clebsh-Gordon relatifs aux fonctions sphériques normées, et où les $Y_l^\sigma(\theta, \varphi)$ sont les fonctions sphériques normées.

Les $F_{kl}^\alpha(r, t)$ sont solutions de :

$$\Sigma (-1)^{k'+l+j} \left\{ \begin{matrix} k & l & j \\ l' & k' & a \end{matrix} \right\} g(\alpha\alpha'\gamma k k' a)(\alpha | T_\gamma | \alpha')(l | B_\gamma^a | l') F_{k'l'}^\alpha - iM_0 c F_{kl}^\alpha(r, t) = 0$$

où les $\left\{ \begin{matrix} k & l & j \\ l' & k' & a \end{matrix} \right\}$ sont les symboles à six j de Wigner et ont été tabulés.

Les $(l | B_\gamma^a | l')$ sont des éléments de matrices réduits.

Les $(\alpha | T_\gamma | \alpha')$ sont des éléments de matrices « réduits » provenant d'une double réduction.

Les $g(\alpha\alpha'\gamma k k'a)$ sont des coefficients que j'ai calculés pour certaines valeurs de γ .

Dans le cas de la théorie de la Fusion et pour une interaction de type potentiel, nous montrons que pour la représentation « Γ_4 diagonale » la solution de l'équation (1) s'écrit :

$$\psi_{kv}^{k_0} = \Sigma(kv|\sigma | kljm) Y_l'^\sigma(\theta\varphi) F_{kl}^{'k_0}(r, t)$$

où les $(kv|\sigma | kljm)$ sont les coefficients de Clebsch-Gordon, relatifs aux fonctions sphériques non normées.

Les $Y_l'^\sigma(\theta\varphi)$ sont les fonctions sphériques non normées.

Les $F_{kl}^{'k_0}(r, t)$ sont solutions de :

$$\left\{ [p_4 + U(r, t)] k_0 + T' - \frac{im_0 c}{2} \right\} F'(r, t)_{kl}^{k_0} = 0$$

où $p_4 = -\frac{h}{c} \frac{\partial}{\partial t}$; $U(r, t)$ est une fonction connue.

Les éléments de matrice de T' sont donnés par les formules (2).

Dans la suite de cet article nous écrirons indifféremment les équations (1) sous la forme :

$$\{ \Sigma B_{a\rho}^\gamma T_\gamma^{a\rho} - iM_0 c \} \psi = 0$$

$$\text{ou} \quad \{ \Sigma p_\mu \Gamma_\mu + \Sigma B_{a\rho}^\gamma T_\gamma^{a\rho} - iM_0 c \} \psi = 0$$

car $\Sigma p_\mu \Gamma_\mu$ est de la forme $\Sigma B_{a\rho}^\gamma T_\gamma^{a\rho}$.

II. INTÉGRALES PREMIÈRES

Considérons le système d'équations (1) que nous écrivons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_4 \psi = -\frac{ic}{\hbar} H \psi$$

Soit un opérateur A ne dépendant pas explicitement du temps.

Si $[A, H]$ et $[A, \Gamma_4]$ sont nuls $\frac{d}{dt} \int (\xi, A \Gamma_4 n) dv$ est nul et l'élément de matrice $\int (\xi, A \Gamma_4 n) dv$ est constant au cours du temps.

Nous prendrons la définition suivante pour les intégrales premières : un opérateur hermitien est intégrale première s'il commute avec Γ_4 et H .

Soit $\mathcal{D}_1(g)$ et $\mathcal{D}_2(g)$ deux représentations $g \rightarrow \mathcal{D}(g)$ du groupe des rotations d'espaces tel que :

$$\psi'(gx^p)_{kv}^\alpha = \mathcal{D}_1(g)_{kv,v'}^\alpha \psi(x^p)_{kv'}^\alpha \quad \text{et} \quad \psi(g^{-1}x^p)_{kv}^\alpha = \mathcal{D}_2(g) \psi(x^p)_{kv}^\alpha$$

où $\mathcal{D}_1(g)$ et $\mathcal{D}_2(g)$ sont somme directe de représentations irréductibles.

$\mathcal{D}_{n1}$ et $\mathcal{D}_{n2}$ sont les matrices infinitésimales ($n = 1, 2, 3$) ; posons :

$$S_n = i\hbar \mathcal{D}_{n1} \quad ; \quad L_n = i\hbar \mathcal{D}_{n2} \quad ; \quad J_n = i\hbar(\mathcal{D}_{n1} + \mathcal{D}_{n2})$$

L'interaction étant à symétrie sphérique, B_a^γ est un opérateur tensoriel irréductible par rapport au groupe des rotations d'espace. Par suite $\mathcal{D}_{n1} + \mathcal{D}_{n2}$ commute avec $\Sigma T_\gamma^{a\rho} B_{a\rho}^\gamma$; en effet :

$$\begin{aligned} \sum_\rho [\mathcal{D}_{n1} + \mathcal{D}_{n2}, T_\gamma^{a\rho} B_{a\rho}^\gamma] &= \sum_\rho [\mathcal{D}_{n1}, T_\gamma^{a\rho}] B_{a\rho}^\gamma + \sum_\rho T_\gamma^{a\rho} [\mathcal{D}_{n1}, B_{a\rho}^\gamma] \\ &= \sum_{\rho\rho'} T_\gamma^{a\rho'} (\mathcal{D}_n)_{a\rho\rho'} B_{a\rho}^\gamma - T_\gamma^{a\rho} (\mathcal{D}_n)_{a\rho\rho'} B_{a\rho}^\gamma \end{aligned}$$

expression qui est identiquement nulle.

Par suite $\Sigma T_\gamma^{a\rho} B_{a\rho}^\gamma$ commute avec les J_n .

Les opérateurs hermitiens J_3 et $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ qui commutent entre eux et avec Γ_4 sont donc intégrales premières. Les J_n sont les composantes du moment cinétique.

III. FORME DE LA SOLUTION DANS LE CAS D'UNE INTERACTION A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

La solution de l'équation d'ondes est vecteur propre de J_3 et J^2 pour les valeurs propres $\hbar m$ et $\hbar^2 j(j+1)$.

$|jm\rangle$ est une combinaison linéaire des $|lkjm\rangle$ car L^2 et S^2 ne commutent pas avec l'hamiltonien.

$$\text{On a :} \quad \psi^{(jm)} = |jm\rangle = \sum_{k,l} F_{kl}^j(r, t) |\alpha k l j m\rangle$$

et en tenant compte de

$$|\alpha k l j m\rangle = \sum_{v,\sigma} \langle k v l \sigma | k l j m \rangle |\alpha k v l \sigma\rangle$$

où les $\langle kvl\sigma | kljm \rangle$ sont les coefficients de Clebsch-Gordan et où les $|\alpha kvl\sigma\rangle$ sont les $|\sigma\rangle | \alpha kv \rangle = Y_l^q(\theta\varphi) | kv \rangle$; nous notons respectivement $|kv\rangle$, $|\sigma\rangle$, $|kljm\rangle$ les vecteurs de base des représentations $\mathcal{D}_{n1}$, $\mathcal{D}_{n2}$, $\mathcal{D}_{n1} + \mathcal{D}_{n2}$.

Notons que les $|\sigma\rangle$ sont les fonctions sphériques normées. Nous avons :

$$\begin{aligned} L_3 |\sigma\rangle &= \hbar\sigma |\sigma\rangle \quad ; \quad L^2 |\sigma\rangle = \hbar^2 l(l+1) |\sigma\rangle \\ S_3 |kv\rangle &= \hbar v |kv\rangle \quad ; \quad S^2 |kv\rangle = \hbar^2 k(k+1) |kv\rangle \\ L^2 |kljm\rangle &= \hbar^2 l(l+1) |kljm\rangle \\ S^2 |kljm\rangle &= \hbar^2 k(k+1) |kljm\rangle \\ J_3 |kljm\rangle &= \hbar m |kljm\rangle \quad ; \quad J^2 |kljm\rangle = \hbar^2 j(j+1) |kljm\rangle. \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire la solution sous les formes suivantes

$$\begin{aligned} |jm\rangle &= \sum_{\alpha kvl} F_{kl}^{\alpha}(r, t) \langle kvl\sigma | kljm \rangle | \alpha kvl\sigma \rangle \\ |jm\rangle &= \sum_{\alpha kvl} F_{kl}^{\alpha}(r, t) \langle kvl\sigma | kljm \rangle Y_l^q(\theta\varphi) | \alpha kv \rangle \\ |jm\rangle &= \sum_{\alpha kv} \psi_{kv}^{\alpha} | \alpha kv \rangle \end{aligned}$$

en posant

$$\psi_{kv}^{\alpha} = \sum_l F_{kl}^{\alpha}(r, t) \langle kvl\sigma | kljm \rangle Y_l^q(\theta\varphi)$$

Les ψ_{kv}^{α} sont les composantes de la fonction d'onde. Par la suite nous prendrons indifféremment l ou μ avec $l = j + \mu$.

IV. ÉQUATIONS RADIALES

Nous avons :

$$\{ \Sigma T_{\gamma}^{\alpha\rho} B_{\alpha\rho}^{\gamma} - iM_0 c \} |jm\rangle$$

ce qui nous donne en multipliant à gauche par $\langle \alpha k' l' j m |$

$$\sum_{\alpha' k' l'} \langle \alpha k' l' j m | T_{\gamma}^{\alpha\rho} B_{\alpha\rho}^{\gamma} | \alpha' k' l' j m \rangle F_{k'l'}^{\alpha'}(r, t) - iM_0 c F_{kl}^{\alpha}(r, t) = 0$$

Racah [3] a montré que les éléments de matrices $\langle \alpha k' l' j m | T_{\gamma}^{\alpha\rho} B_{\alpha\rho}^{\gamma} | \alpha' k' l' j m \rangle$ sont indépendants de m et de ρ .

Les équations écrites sous la forme précédente sont donc les équations radiales.

Racah a calculé la valeur des éléments de matrice, il trouve

$$\langle \alpha k l j m | T_{\gamma}^{\alpha\rho} B_{\alpha\rho}^{\gamma} | \alpha' k' l' j m \rangle = (-1)^{k+l'-j} W(k l k' l'; j a) (\alpha k | T_{\gamma}^a | \alpha' k') (l | B_{\gamma}^a | l')$$

Les $W(k l k' l'; j a)$ sont les coefficients de Racah, les $(\alpha k | T_{\gamma}^a | \alpha' k')$ et $(l | B_{\gamma}^a | l')$ sont les éléments de matrices réduits des opérateurs tensoriels T_{γ}^a et B_{γ}^a .

Nous pouvons donc écrire les équations radiales

$$\sum_{\alpha' k' l'} (-1)^{k+l'-j} W(k l k' l'; j a) (\alpha k | T_{\gamma}^a | \alpha' k') (l | B_{\gamma}^a | l') F_{k' l'}^{\alpha'}(r, t) - i M_0 c F_{k l}^{\alpha}(r, t) = 0$$

On peut au lieu des coefficients de Racah utiliser les symboles à « six j » de Wigner [4] définis par

$$\left\{ \begin{matrix} k & l & j \\ l' & k' & a \end{matrix} \right\} = (-1)^{k+l+k'+l'} W(k l k' l'; j a)$$

qui obéissent à des relations de symétrie.

Avec les symboles à « six j » les équations radiales s'écrivent :

$$\sum_{\alpha' k' l'} (-1)^{k'+l+j} \left\{ \begin{matrix} k & l & j \\ l' & k' & a \end{matrix} \right\} (\alpha k | T_{\gamma}^a | \alpha' k') (l | B_{\gamma}^a | l') F_{k' l'}^{\alpha'}(r, t) - i M_0 c F_{k l}^{\alpha}(r, t) = 0$$

ou encore en séparant le terme interaction du terme différentiel qui caractérise la particule libre :

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha'} (\alpha k | \Gamma_{(0,2)}^0 | \alpha' k) (l | p_{(0,2)}^0 | l) F_{k l}^{\alpha}(r, t) \\ & + \sum_{\alpha' k' l'} (-1)^{k'+l+j} \left\{ \begin{matrix} k & l & j \\ l' & k' & 1 \end{matrix} \right\} (\alpha k | \Gamma_{(0,2)}^1 | \alpha' k') (l | p_{(0,2)}^1 | l') F_{k' l'}^{\alpha'}(r, t) \\ & + \Sigma (-1)^{k'+l+j} \left\{ \begin{matrix} k & l & j \\ l' & k' & a \end{matrix} \right\} (\alpha k | T_{\gamma}^a | \alpha' k') (l | B_{\gamma}^a | l') F_{k' l'}^{\alpha'}(r, t) - i M_0 c F_{k l}^{\alpha}(r, t) = 0 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (\alpha k | \Gamma_{(0,2)}^0 | \alpha' k) &= (\alpha k v | \Gamma_4 | \alpha' k v) \quad ; \quad P_{(0,2)}^0 = p_4 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^4} \\ \Gamma_{(0,2)}^{11} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma_1 + i\Gamma_2) \quad ; \quad \Gamma_{(0,2)}^{10} = \Gamma_3 \quad ; \quad \Gamma_{(0,2)}^{1-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma_1 - i\Gamma_2) \\ p_{(0,2)}^{11} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 + ip_2) \quad ; \quad p_{(0,2)}^{10} = p_3 \quad ; \quad p_{(0,2)}^{1-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 - ip_2) \end{aligned}$$

Les symboles à « six j » de Wigner où les coefficients W ont été calculés et donnés sous forme de tables dans les cas où l'un des nombres composants a la valeur :

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}$$

Jahn [5] et Biederman [6], ont donné les valeurs de ces coefficients dans les cas où l'un des nombres composants a la valeur :

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2.$$

Le cas de $\frac{5}{2}$ est donné par Edmonds et Flowers [7].

Les coefficients ont été tabulés par Yato [8] pour :

$$3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}$$

Nous avons vu que les $(\alpha k | T_{\gamma}^a | \alpha' k')$ s'écrivaient :

$$(\alpha k | T_{\gamma}^a | \alpha' k') = g(\alpha \alpha' \gamma k k' a)(\alpha | T_{\gamma} | \alpha')$$

Nous avons calculé les fonctions $g(\alpha \alpha' \gamma k k' a)$ pour $\gamma = (0, 2); (1, 2); (-1, 2); (2, 3); (-2, 3); (0, 3)$.

En particulier les $(\alpha k | T_{(0,2)}^0 | \alpha' k')$ et les $(\alpha k | T_{(0,2)}^1 | \alpha' k')$ s'expriment en fonction des $(\alpha | T_{(0,2)} | \alpha')$.

Nous avons les valeurs suivantes pour les éléments de matrices réduits des opérateurs tensoriels $p_{(0,2)}^0$ et $p_{(0,2)}^1$

$$\begin{aligned} (l | p_{(0,2)}^0 | l) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^4} \quad ; \quad (l+1 | p_{(0,2)}^1 | l) = -i\hbar(l+1)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r} \right) \\ (l-1 | p_{(0,2)}^1 | l) &= i\hbar l^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r} \right) \end{aligned}$$

Les équations radiales s'écrivent en définitive

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha'} &-i\hbar g(\alpha \alpha' (0,2) k k 0)(\alpha | \Gamma_{(0,2)} | \alpha') \frac{\partial}{\partial x^4} F_{k'}^{\alpha'}(r, t) \\ &+ \sum_{\alpha' k' l'} (-1)^{k'+l+j} \left\{ \begin{matrix} k & l & j \\ l' & k' & 1 \end{matrix} \right\} g(\alpha \alpha' (0,2) k k' 1)(\alpha | \Gamma_{(0,2)} | \alpha') (l | p_{(0,2)}^1 | l') F_{k'l'}^{\alpha'}(r, t) \\ &+ \Sigma (-1)^{k'+l+j} \left\{ \begin{matrix} k & l & j \\ l' & k' & a \end{matrix} \right\} g(\alpha \alpha' \gamma k k' a)(\alpha | T_{\gamma} | \alpha') (l | B_{\gamma}^a | l') F_{k'l'}^{\alpha'}(r, t) \\ &- iM_0 c F_{kl}^{\alpha}(r, t) = 0 \end{aligned}$$

En résumé nous avons écrit les équations radiales en fonction des $(\alpha | T_\gamma | \alpha')$ qui caractérisent les matrices de l'interaction et des éléments de matrices réduits $(l | B_\gamma^a | l')$ du champ d'interaction.

Si l'interaction ne dépend pas du temps on cherche une solution.

$$F(r, t)_{kl}^a = F(r)_{kl}^a e^{-\frac{i}{\hbar} W t}$$

Les $F(r)_{kl}^a$ étant solution de l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{W}{C} \sum_{\alpha} g(\alpha \alpha' (0,2) k k 0) (\alpha | \Gamma_{(0,2)} | \alpha') F_{kl}^{a'}(r) \\ + \sum_{\alpha' k' l'} (-1)^{k'+l+j} \left\{ \begin{matrix} k & l & j \\ l' & k' & 1 \end{matrix} \right\} g(\alpha \alpha' (0,2) k k' 1) (\alpha | \Gamma_{(0,2)} | \alpha') (l | p_{(0,2)}^1 | l') F_{k'l'}^{a'}(r) \\ + \Sigma (-1)^{k'+l+j} \left\{ \begin{matrix} k & l & j \\ l' & k' & 1 \end{matrix} \right\} g(\alpha \alpha' \gamma k k' a) (\alpha | T_\gamma | \alpha') (l | B_\gamma^a | l') F_{k'l'}^{a'}(r) \\ - i M_0 c F_{kl}^a(r) = 0 \end{aligned}$$

Nous donnons maintenant les équations radiales sous une forme qui nous sera utile par la suite.

En tenant compte de la relation [1]: $\Gamma_p = -i[\Gamma_4, B_p]$, nous avons $\Gamma_{(0,2)}^{1q} = -i[\Gamma_{(0,2)}^0, B^{1q}]$ en posant :

$$B^{11} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + iB_2) \quad ; \quad B^{10} = B_3 \quad ; \quad B^{1-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 - iB_2)$$

(les B_k sont les opérateurs infinitésimaux fondamentaux de $\mathcal{L}_+^1$). B^1 est un opérateur tensoriel par rapport au groupe des rotations d'espace.

Les équations radiales s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha'} (\alpha k | \Gamma_{(0,2)}^0 | \alpha' k) (l | p_{(0,2)}^0 | l') F_{kl}^{a'}(r, t) \\ - i \sum_{\alpha' k' l'} \langle \alpha k l j m | [\Gamma_{(0,2)}^0, B^1] p_1^{(0,2)} | \alpha' k' l' j m \rangle F_{k'l'}^{a'}(r, t) \\ + \sum_{\alpha' k' l'} (-1)^{k'+l+j} \left\{ \begin{matrix} k & l & j \\ l' & k' & a \end{matrix} \right\} (\alpha k | T_\gamma^a | \alpha' k') (l | B_\gamma^a | l') F_{k'l'}^{a'}(r, t) \\ - i M_0 c F_{kl}^a(r, t) = 0 \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \langle \alpha k l j m | [\Gamma_{(0,2)}^0, B^1] p_{(0,2)}^1 | \alpha' k' l' j m \rangle &= \langle \alpha k l j m | [\Gamma_{(0,2)}^0, B^1 p_{(0,2)}^1] | \alpha' k' l' j m \rangle \\ &= (\alpha k | \Gamma_{(0,2)}^0 | \alpha' k) \langle \alpha' k l j m | B^1 p_{(0,2)}^1 | \alpha' k' l' j m \rangle \\ &- \langle \alpha k l j m | B^1 p_{(0,2)}^1 | \alpha k' l' j m \rangle \langle \alpha k' | \Gamma_{(0,2)}^0 | \alpha' k' \rangle \end{aligned}$$

Nous allons calculer les éléments de matrices $\langle \alpha k l j m | B^1 p_{(0,2)}^1 | \alpha k' l' j m \rangle$ de l'invariant $B^1 p_{(0,2)}^1$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \hbar_{k\mu}^{(\alpha)} | T_{k'\mu'}^{(\alpha)} \rangle &= \langle \alpha k j + \mu j m | B^1 p_{(0,2)}^1 | \alpha k' j + \mu' j m \rangle \\ &= (-1)^{k'+2j+\mu} \left\{ \begin{matrix} k & j + \mu & j \\ j + \mu' & k' & 1 \end{matrix} \right\} (\alpha k | B^1 | \alpha k') (j + \mu | p_{(0,2)}^1 | j + \mu') \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{matrix} \alpha \\ k\mu \end{matrix} \middle| T \middle| \begin{matrix} \alpha \\ k+1, \mu-1 \end{matrix} \right) \\ &= - \left[\frac{(k-\mu+1)(k-\mu+2)(2j+\mu-k-1)(2j+\mu-k)}{[2(j+\mu)-1][2(j+\mu)+1]} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{C_{k+1}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r} \right) \\ & \left(\begin{matrix} \alpha \\ k\mu \end{matrix} \middle| T \middle| \begin{matrix} \alpha \\ k+1, \mu+1 \end{matrix} \right) \\ &= + \left[\frac{(k+\mu+1)(k+\mu+2)(2j+\mu+k+3)(2j+\mu+k+2)}{[2(j+\mu)+3][2(j+\mu)+1]} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{C_{k+1}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\mu+2}{r} \right) \\ & \left(\begin{matrix} \alpha \\ k\mu \end{matrix} \middle| T \middle| \begin{matrix} \alpha \\ k, \mu-1 \end{matrix} \right) \\ &= \left[\frac{(k+\mu)(k-\mu+1)(2j+\mu-k)(2j+\mu+k+1)}{[2(j+\mu)-1][2(j+\mu)+1]} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{A_k}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r} \right) \\ & \left(\begin{matrix} \alpha \\ k\mu \end{matrix} \middle| T \middle| \begin{matrix} \alpha \\ k, \mu+1 \end{matrix} \right) \\ &= \left[\frac{(k-\mu)(k+\mu+1)(2j+\mu-k+1)(2j+\mu+k+2)}{[2(j+\mu)+3][2(j+\mu)+1]} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{A_k}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\mu+2}{r} \right) \\ & \left(\begin{matrix} \alpha \\ k\mu \end{matrix} \middle| T \middle| \begin{matrix} \alpha \\ k-1, \mu-1 \end{matrix} \right) \\ &= - \left[\frac{(k+\mu)(k+\mu-1)(2j+\mu+k+1)(2j+\mu-k+1)}{[2(j+\mu)+3][2(j+\mu)+1]} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{C_k}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r} \right) \\ & \left(\begin{matrix} \alpha \\ k\mu \end{matrix} \middle| T \middle| \begin{matrix} \alpha \\ k-1, \mu+1 \end{matrix} \right) \\ &= + \left[\frac{(k-\mu)(k-\mu-1)(2j+\mu-k+1)(2j+\mu-k+2)}{[2(j+\mu)+3][2(j+\mu)+1]} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{C_k}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\mu+2}{r} \right) \end{aligned}$$

Nous avons écrit les équations radiales sous la forme :

$$\{ p_4 \Gamma_{(0,2)}^0 - i\hbar [\Gamma_{(0,2)}^0, T] + T_\gamma^a B_a^\gamma - iM_{0c} \} F_{k\mu}^a(r, t) = 0$$

avec

$$\left(\begin{matrix} \alpha \\ k\mu \end{matrix} \middle| T_\gamma^a B_a^\gamma \middle| \begin{matrix} \alpha' \\ k'\mu' \end{matrix} \right) = (-1)^{k'+2j+\mu} \left\{ \begin{matrix} k & j + \mu & j \\ j + \mu' & k' & a \end{matrix} \right\} (\alpha k | T_\gamma^a | \alpha' k') (l | B_a^\gamma | l')$$

Effectuons le changement de fonction

$$F_{k\mu}^a(r, t) = \frac{\langle k, -k, j + \mu, m + k | k, j + \mu; j, m \rangle}{[N(j + \mu, m + k)]^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{(j - m)!}{(j + m)!} \right]^{\frac{1}{2}} F_{k\mu}^a(r, t)$$

où l'on a posé :

$$N(l, \sigma) = \frac{4\pi(l + \sigma)!}{(2l + 1)(l - \sigma)!}$$

Avec ce changement de fonction nous trouvons des expressions plus simples pour les éléments de matrices.

Nous obtenons les équations

$$[p_4 \Gamma_{(0,2)}^0 - i\hbar[\Gamma_{(0,2)}^0, T'] + (T'_\gamma B_a^\gamma)' - iM_0 c]F_{k\mu}^{\alpha}(r, t) = 0$$

avec :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ k\mu \end{smallmatrix} \middle| T'_\gamma B_a^\gamma \middle| \begin{smallmatrix} \alpha' \\ k'\mu' \end{smallmatrix} \right) \\ &= \frac{\langle k', -k', j + \mu', m + k' | k', j + \mu', j, m \rangle [N(j + \mu, m + k)]^{\frac{1}{2}}}{\langle k, -k, j + \mu, m + k | k, j + \mu, j, m \rangle [N(j + \mu', m + k')]^{\frac{1}{2}}} \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ k\mu \end{smallmatrix} \middle| T'_\gamma B_a^\gamma \middle| \begin{smallmatrix} \alpha' \\ k'\mu' \end{smallmatrix} \right) \end{aligned}$$

et pour T' les expressions plus simples :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ k\mu \end{smallmatrix} \middle| T' \middle| \begin{smallmatrix} \alpha \\ k+1, \mu-1 \end{smallmatrix} \right) \\ &= - \frac{(k - \mu + 1)(k - \mu + 2)(2j + \mu - k - 1)(2j + \mu - k)}{[2(j + \mu) - 1][2(k + 1)(2k + 1)]^{\frac{1}{2}}} \frac{C_{k+1}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j + \mu - 1}{r} \right) \\ (2) \quad & \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ k\mu \end{smallmatrix} \middle| T' \middle| \begin{smallmatrix} \alpha \\ k+1, \mu+1 \end{smallmatrix} \right) \\ &= + \frac{(k + \mu + 1)(k + \mu + 2)(2j + \mu + k + 3)(2j + \mu + k + 2)}{[2(j + \mu) + 3][2(k + 1)(2k + 1)]^{\frac{1}{2}}} \frac{C_{k+1}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j + \mu + 2}{r} \right) \\ & \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ k\mu \end{smallmatrix} \middle| T' \middle| \begin{smallmatrix} \alpha \\ k, \mu-1 \end{smallmatrix} \right) = + [2(j + \mu) - 1]^{-1} (k - \mu + 1)(2j + \mu - k) \frac{A_k}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j + \mu - 1}{r} \right) \\ & \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ k\mu \end{smallmatrix} \middle| T' \middle| \begin{smallmatrix} \alpha \\ k, \mu+1 \end{smallmatrix} \right) = + [2(j + \mu) + 3]^{-1} (k + \mu + 1)(2j + \mu + k + 2) \frac{A_k}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j + \mu + 2}{r} \right) \\ & \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ k\mu \end{smallmatrix} \middle| T' \middle| \begin{smallmatrix} \alpha \\ k-1, \mu-1 \end{smallmatrix} \right) = - [2(j + \mu) - 1]^{-1} [2k(2k - 1)]^{\frac{1}{2}} \frac{C_k}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j + \mu - 1}{r} \right) \\ & \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ k\mu \end{smallmatrix} \middle| T' \middle| \begin{smallmatrix} \alpha \\ k-1, \mu+1 \end{smallmatrix} \right) = + [2(j + \mu) + 3]^{-1} [2k(2k - 1)]^{\frac{1}{2}} \frac{C_k}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j + \mu + 2}{r} \right) \end{aligned}$$

V. THÉORIE DE LA FUSION

Dans la représentation [1] que nous avons appelée représentation 2 les équations radiales s'écrivent :

$$\left(p_4 L_4 + \hbar T' + (T'_\gamma B_a^\gamma)' - i n \frac{m_0 c}{2} \right) F(r, t)_{k\mu}^\alpha = 0$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha_{k\mu} | L_4 | \alpha'_{k\mu} \rangle &= (\Gamma_4)_{kk;\nu\nu}^{\alpha\alpha'} \\
 \langle \alpha_{k\mu} | (T_\gamma^a B_a^\gamma)' | \alpha'_{k'\mu'} \rangle \\
 &= (-1)^{k'+2j+\mu} \begin{Bmatrix} k & j+\mu & j \\ j+\mu' & k' & a \end{Bmatrix} (\alpha k | T_\gamma^a | \alpha' k') (j+\mu | B_\gamma^a | j'+\mu')
 \end{aligned}$$

T' étant donné par les formules (2).

VI. REPRÉSENTATION Γ_4 DIAGONAL

Si nous comparons les valeurs des éléments de matrice des Γ_p de la « représentation 2 » et les valeurs des éléments de matrices des Γ_p que nous avons calculées dans la représentation « Γ_4 diagonale » ; nous déduisons à partir des valeurs des éléments de matrices de l'opérateur T' dans la représentation 2, les valeurs des éléments de matrices de T' dans la représentation Γ_4 diagonale qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \langle k_0 | T' | k_0 \pm 1, \mu \pm 1 \rangle &= + \frac{(k+\mu+1)(k+\mu+2)(2j+\mu+k+3)(2j+\mu+k+2)}{2[2(j+\mu)+3][2(k+1)(2k+1)]^{\frac{1}{2}}} C_{k,k+1}^{k_0,k_0\pm 1} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\mu+2}{r} \right) \\
 \langle k_0 | T' | k_0 \pm 1, \mu - 1 \rangle &= - \frac{(k-\mu+1)(k-\mu+2)(2j+\mu-k-1)(2j+\mu-k)}{2[2(j+\mu)-1][2(k+1)(2k+1)]^{\frac{1}{2}}} C_{k,k+1}^{k_0,k_0\pm 1} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r} \right) \\
 \langle k_0 | T' | k_0 \pm 1, \mu \pm 1 \rangle &= \pm \frac{(k+\mu+1)(2j+\mu+k+2)}{2[2(j+\mu)+3]} C_{k,k}^{k_0,k_0\pm 1} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\mu+2}{r} \right) \\
 \langle k_0 | T' | k_0 \pm 1, \mu - 1 \rangle &= \pm \frac{(k-\mu+1)(2j+\mu-k)}{2[2(j+\mu)-1]} C_{k,k}^{k_0,k_0\pm 1} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r} \right) \\
 \langle k_0 | T' | k_0 \pm 1, \mu \pm 1 \rangle &= \frac{+ [2k(2k-1)]^{\frac{1}{2}}}{2[2(j+\mu)+3]} C_{k,k-1}^{k_0,k_0\pm 1} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+\mu+2}{r} \right) \\
 \langle k_0 | T' | k_0 \pm 1, \mu - 1 \rangle &= - \frac{[2k(2k-1)]^{\frac{1}{2}}}{2[2(j+\mu)-1]} C_{k,k-1}^{k_0,k_0\pm 1} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{j+\mu-1}{r} \right)
 \end{aligned}$$

Les équations radiales s'écrivent :

$$\left\{ p_4 L_4 + T' + (T_\gamma^a B_a^\gamma)' - \frac{im_0 c}{2} \right\} F(r, t)_{k\mu}^{k_0} = 0$$

avec

$$\langle k_0 | L_4 | k_0 \rangle = (\Gamma_4)_{k,k;\nu,\nu}^{k_0,k_0} = k_0 \delta_{k_0 k_0}$$

Si le champ d'interaction à symétrie sphérique se réduit à la composante $B_{00}^{0,2}$ les équations deviennent : $B_{00}^{0,2} = U(r, t)$

$$\left\{ [p_4 + U(r, t)]k_0 + T' - \frac{im_0c}{2} \right\} F(r, t)_{k\mu}^{k_0} = 0$$

si B ne dépend pas de t nous pouvons écrire

$$F(r, t)_{k\mu}^{k_0} = e^{\frac{i}{\hbar} W_t} F(r)_{k\mu}^{k_0}$$

$F(r)_{k\mu}^{k_0}$ étant solution de l'équation :

$$\left(K_1 k_0 - \frac{n}{2} X_0 \right) F(r)_{k\mu}^{k_0} - i \binom{k_0}{k\mu} T' \binom{k_0}{k'\mu'} F(r)_{k'\mu'}^{k_0} = 0$$

ou
$$K_1 = \frac{W}{\hbar c} + \frac{e}{\hbar c} A_0(r) \quad ; \quad \frac{ie}{c} A_0(r) = U(r) \quad ; \quad X_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}$$

En considérant la forme de la matrice T' et en tenant compte du fait que L_4 est diagonal, nous voyons que le système d'équations radiales se sépare en deux systèmes indépendants.

1) SYSTÈME 1

$$\left[[p_4 + B(r, t)]k_0 - \frac{im_0c}{2} \right] F(r, t)_{k\mu_1}^{k_0} + \hbar \binom{k_0}{k\mu_1} T' \binom{k_0}{k'\mu'_1} F(r, t)_{k'\mu'_1}^{k_0} = 0$$

où les μ_1 associés aux k, k_0 prennent les valeurs $-k + 2n \leq k$ (n entier > 0) si $(s - k_0)$ est impair et prennent les valeurs $-k + 1 + 2n \leq k - 1$ si $(s - k_0)$ est pair.

2) SYSTÈME 2

$$\left[(p_4 + U(r, t))k_0 - \frac{im_0c}{2} \right] F(r, t)_{k\mu_2}^{k_0} + \hbar \binom{k_0}{k\mu_2} T' \binom{k_0}{k'\mu'_2} F(r, t)_{k'\mu'_2}^{k_0} = 0$$

où les μ_2 associés aux k, k_0 prennent les valeurs $-k + 2n \leq k$ (n entier positif) si $(s - k_0)$ est pair et prennent les valeurs $-k + 1 + 2n \leq k - 1$ si $(s - k_0)$ est impair.

Nous voyons donc que l'un des avantages de cette représentation est de séparer la solution en deux types de solutions indépendantes.

Si U ne dépend pas de t on est dans le cas d'un potentiel de type électrostatique et les équations radiales s'écrivent :

$$\left\{ \left(\frac{W}{c} + \frac{e}{c} A_0(r) \right) k_0 - i\hbar T' - \frac{nm_0c}{2} \right\} F(r)_{k\mu}^{k_0} = 0$$

ou encore
$$\left(K_1 k_0 - \frac{n}{2} X_0\right) F(r)_{k\mu}^{k_0} - i \langle \frac{k_0}{k\mu} | T' | \frac{k'_0}{k'\mu} \rangle F(r)_{k'\mu}^{k'_0} = 0$$

Particule $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de spin $\frac{1}{2}$

Considérons le cas de l'électron à spin de Dirac qui correspond dans la présente classification à la particule $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Nous avons les équations radiales :

1) SYSTÈME 1

$$\begin{cases} \frac{1}{2} [K_1 - X_0] F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} - i \langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | T' | \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} \rangle F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 0 \\ \frac{1}{2} [-K_1 - X_0] F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} - i \langle \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} | T' | \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rangle F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$$

qui s'écrit :

$$\begin{cases} (K_1 - X_0) F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + i \left(\frac{d}{dr} - \frac{j - \frac{1}{2}}{r} \right) F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 0 \\ (K_1 + X_0) F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + i \left(\frac{d}{dr} + \frac{j + \frac{3}{2}}{r} \right) F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$$

2) SYSTÈME 2

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (K_1 - X_0) F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} - i \langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | T' | \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} \rangle F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 0 \\ \frac{1}{2} (-K_1 - X_0) F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} - i \langle \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} | T' | \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rangle F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$$

s'écrit :

$$\begin{cases} (K_1 - X_0) F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + i \left(\frac{d}{dr} + \frac{j + \frac{3}{2}}{r} \right) F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 0 \\ (K_1 + X_0) F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + i \left(\frac{d}{dr} - \frac{j - \frac{1}{2}}{r} \right) F(r)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$$

Particule (2,1) de spin 1.

A) Résolution du système 1: ce système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\mathbf{K}_1 - \mathbf{X}_0)\mathbf{F}_{10}^1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right)\mathbf{F}_{11}^0 - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right)\mathbf{F}_{1-1}^0 = 0 \\ + \mathbf{X}_0\mathbf{F}_{11}^0 + \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{j}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)(\mathbf{F}_{10}^1 - \mathbf{F}_{10}^{-1}) = 0 \\ + \mathbf{X}_0\mathbf{F}_{1-1}^0 + \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{j+1}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)(\mathbf{F}_{10}^1 - \mathbf{F}_{10}^{-1}) = 0 \\ + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{X}_0)\mathbf{F}_{10}^{-1} + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right)\mathbf{F}_{11}^0 + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right)\mathbf{F}_{1-1}^0 = 0 \end{array} \right.$$

ou encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{10}^1 + \mathbf{F}_{10}^{-1} = \frac{\mathbf{K}_1}{\mathbf{X}_0}(\mathbf{F}_{10}^1 - \mathbf{F}_{10}^{-1}) = 0 \\ \mathbf{F}_{11}^0 = \frac{i}{\sqrt{2}\mathbf{X}_0}\frac{j}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)(\mathbf{F}_{10}^1 - \mathbf{F}_{10}^{-1}) = 0 \\ \mathbf{F}_{1-1}^0 = \frac{i}{\sqrt{2}\mathbf{X}_0}\frac{j+1}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)(\mathbf{F}_{10}^1 - \mathbf{F}_{10}^{-1}) = 0 \\ \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} + (\mathbf{K}_1^2 - \mathbf{X}_0^2) \right\} (\mathbf{F}_{10}^1 - \mathbf{F}_{10}^{-1}) = 0 \end{array} \right.$$

La résolution de ce système se ramène à la résolution d'une équation différentielle du second ordre, dont les solutions sont bien connues.

B) Résolution du système 2: ce système s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\mathbf{K}_1 - \mathbf{X}_0)\mathbf{F}_{11}^1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{j}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)\mathbf{F}_{10}^0 - \frac{i}{2}\frac{1}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)\mathbf{F}_{00}^0 = 0 \\ -(\mathbf{K}_1 - \mathbf{X}_0)\mathbf{F}_{1-1}^1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{j+1}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)\mathbf{F}_{10}^0 + \frac{i}{2}\frac{1}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)\mathbf{F}_{00}^0 = 0 \\ + \mathbf{X}_0\mathbf{F}_{10}^0 + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right)(\mathbf{F}_{11}^1 - \mathbf{F}_{11}^{-1}) + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right)(\mathbf{F}_{1-1}^1 - \mathbf{F}_{1-1}^{-1}) = 0 \\ + \mathbf{X}_0\mathbf{F}_{00}^0 + i(j+1)\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right)(\mathbf{F}_{11}^1 + \mathbf{F}_{11}^{-1}) - ij\left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right)(\mathbf{F}_{1-1}^1 + \mathbf{F}_{1-1}^{-1}) = 0 \\ + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{X}_0)\mathbf{F}_{1-1}^{-1} + \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{j+1}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)\mathbf{F}_{10}^0 + \frac{i}{2}\frac{1}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)\mathbf{F}_{00}^0 = 0 \\ + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{X}_0)\mathbf{F}_{11}^{-1} + \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{j}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)\mathbf{F}_{10}^0 - \frac{i}{2}\frac{1}{2j+1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)\mathbf{F}_{00}^0 = 0 \end{array} \right.$$

En posant : $F_{1-1}^1 + F_{1-1}^{-1} = f_1$; $F_{11}^1 + F_{11}^{-1} = f_2$; $F_{10}^0 = -f_3$; $F_{00}^0 = -f_4$;
 $F_{1-1}^1 - F_{1-1}^{-1} = f_5$, $F_{11}^1 - F_{11}^{-1} = f_6$.

Le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 f_5 - X_0 f_1 + \frac{i}{2j+1} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) f_4 = 0 \\ K_1 f_6 - X_0 f_2 - \frac{i}{2j+1} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) f_4 = 0 \\ K_1 f_1 - X_0 f_5 - \frac{i\sqrt{2}(j+1)}{2j+1} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) f_3 = 0 \\ K_1 f_2 - X_0 f_6 - \frac{i\sqrt{2}j}{2j+1} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) f_3 = 0 \\ -X_0 f_3 + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) f_5 + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) f_6 = 0 \\ -X_0 f_4 - ij \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) f_1 + i(j+1) \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) f_2 = 0 \end{array} \right.$$

Nous exprimons f_1, f_2, f_5, f_6 en fonction de f_3 et f_4 .

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{K_1^2 - X_0^2} \left[-iX_0 \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) f_4 + \frac{i\sqrt{2}K_1(j+1)}{2j+1} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) f_3 \right] \\ f_5 &= \frac{1}{K_1^2 - X_0^2} \left[-iK_1 \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) f_4 + \frac{i\sqrt{2}X_0(j+1)}{2j+1} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) f_3 \right] \\ f_2 &= \frac{1}{K_1^2 - X_0^2} \left[-iK_1 \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) f_4 + \frac{i\sqrt{2}K_1j}{2j+1} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) f_3 \right] \\ f_6 &= \frac{1}{K_1^2 - X_0^2} \left[iK_1 \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) f_4 + \frac{i\sqrt{2}X_0j}{2j+1} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) f_3 \right] \end{aligned}$$

Si nous portons ces expressions de f_1, f_2, f_5, f_6 dans les deux dernières équations du système précédent, nous obtenons un système de deux équations différentielles du second ordre.

$$\begin{aligned} (K_1^2 - X_0^2) \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{j(j+1)}{r^2} + (K_1^2 - X_0^2) \right] f_3 \\ - 2K_1K_1' \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{2} \right) f_3 + \frac{(K_1^2 + X_0^2)}{\sqrt{2}X_0r} K_1' f_4 = 0 \\ (K_1^2 - X_0^2) \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} + (K_1^2 - X_0^2) \right] f_4 \\ - 2K_1K_1' \frac{d}{dr} f_4 + \frac{2j(j+1)(K_1^2 + X_0^2)}{X_0r} K_1' f_3 = 0 \end{aligned}$$

où

$$K'_1 = \frac{d}{dr}(K_1)$$

En posant

$$\Lambda = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} + (K_1^2 - X_0^2)$$

et en faisant le changement de fonctions: $f_3 = g_1$, $f_4 = [2j(j+1)]^{\frac{1}{2}} g_2$ nous obtenons :

$$\begin{cases} (K_1^2 - X_0^2) \Lambda g_1 - 2K_1 K'_1 \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) g_1 + [j(j+1)]^{\frac{1}{2}} \frac{(K_1^2 + X_0^2)}{X_0 r} K'_1 g_2 = 0 \\ K_1^2 - X_0^2 \Lambda g_2 - 2K_1 K'_1 \frac{d}{dr} g_2 + [j(j+1)]^{\frac{1}{2}} \frac{K_1^2 - X_0^2}{X_0 r} K'_1 g_1 = 0 \end{cases}$$

Cette dernière forme des équations radiales nous semble plus symétrique que celle donnée par Bartlett.

Remarquons que pour un potentiel constant ces équations se réduisent à $\Lambda g_1 = 0$, $\Lambda g_2 = 0$ dont les solutions sont les fonctions de Bessel sphériques $j_1(kr)$. Si nous éliminons f_3 , f_4 dans le système linéaire précédent nous retrouvons les équations de Gunn [9].

CONCLUSION

La méthode que nous avons utilisée pour la séparation des variables angulaires et radiales peut se généraliser sans difficultés à un système linéaire de rang fini d'équations aux dérivées partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre de forme invariante par rapport au groupe de Lorentz.

RÉFÉRENCES

- [1] A. JOLIVET, Sur les interactions dans les équations d'ondes des particules à spin. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. XIII, n° 4, 1970, p. 345-362.
- [2] J. H. BARTLETT, *The vector Mesotron*, t. 72, 1947, p. 219.
- [3] G. RACAH, Theory of complex Spectra II. *Phys. Rev.*, t. 62, 1942, p. 438.
- [4] E. P. WIGNER, *On the matrices wich reduce the Kronecker products of simply reducible groups*. Princeton, 1951.
- [5] H. A. JAHN, Theoretical studies in nuclear structure. *Proc. Roy. Soc.*, t. 205, 1951 A, p. 192.
- [6] L. C. BIEDENHARN, *Tables of the Racah Coefficients*. OAK Ridge National Laboratory, physics Division, ORNL 1501, suppl. 1, February 1954.

- L. C. BIEDENHARN et A. SIMON, *Revised Z tables of the Racah coefficients*. OAK Ridge National Laboratory, Physics Division.
- [7] A. R. EDMONDS et B. D. FLOWERS, Studies in *jj*-coupling. *Proc. Roy. Soc.*, t. **214**, 1952 A, p. 515.
- [8] M. SATO, *Prog. Theor. Phys.*, t. **13**, 1955, p. 405.
- [9] J. C. GUNN, Interaction of mesons with a potentiel field. *Proc. Roy. Soc.*, t. **A 193**, 1948, p. 559.

Manuscrit reçu le 11 janvier 1971.
