

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

BÉCHIR MAHJOUB

Système d'évolution d'un fluide relativiste conducteur de chaleur

Annales de l'I. H. P., section A, tome 14, n° 2 (1971), p. 113-137

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1971__14_2_113_0

© Gauthier-Villars, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Système d'évolution d'un fluide relativiste conducteur de chaleur (*)

par

Béchir MAHJOUR

Laboratoire de Physique Mathématique, Collège de France (**).

RÉSUMÉ. — On établit le système d'équations aux dérivées partielles régissant l'évolution d'un fluide relativiste conducteur de chaleur. On démontre qu'il est hyperbolique non strict admettant une solution unique dans une classe de Gevrey d'indice $\alpha = 6/5$ puis, qu'il est physiquement équivalent à un système hyperbolique strict admettant une solution unique dans un espace de Sobolev.

ABSTRACT. — The system of partial derivatives equations governing the evolution of a relativistic fluid with heat conduction is established. It is shown that it is non-strictly hyperbolic having a unique solution in a Gevrey class of index $\alpha = 6/5$ then, that it is physically equivalent to a strictly hyperbolic system having a unique solution in a certain Sobolev space.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.	114
CHAPITRE PREMIER. — SCHÉMA FLUIDE RELATIVISTE CONDUCTEUR DE CHALEUR.	115
1. Variété espace-temps et équations d'Einstein	115
2. Description du schéma fluide étudié	116

(*) Article recouvrant en partie la thèse de Doctorat d'État ès-Sciences Mathématiques soutenue le 23 juin 1970 à Paris et enregistrée au C. N. R. S. sous le numéro A. O. 4591.

(**) Adresse actuelle : Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, 8, rue de Rome, Tunis (Tunisie).

3. Loi de conduction de la chaleur	117
4. Le système d'évolution (S) du fluide étudié	118
CHAPITRE II. — QUELQUES RÉSULTATS CONCERNANT LES SYSTÈMES QUASI-LINÉAIRES HYPERBOLIQUES	119
5. Opérateurs différentiels hyperboliques stricts	119
6. Systèmes quasi-linéaires hyperboliques stricts.	120
7. Classes de Gevrey	122
8. Systèmes quasi-linéaires diagonaux hyperboliques non stricts	123
9. Diagonalisation des systèmes quasi-linéaires et critère d'hyperbolicité non stricte	124
CHAPITRE III. — ÉTUDE DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES (S).	127
10. Quelques propriétés des gaz polytropiques	127
11. Caractère quasi-linéaire du système (S)	129
12. Variétés caractéristiques du système (S)	130
13. Ondes et vitesses de propagation	131
14. Caractère hyperbolique non strict du système (S)	134
15. Caractère hyperbolique strict du système (S)	136
BIBLIOGRAPHIE.	137

INTRODUCTION

La théorie de l'hydrodynamique des fluides relativistes parfaits, chargés ou non chargés, a atteint un très haut degré de développement. Le système d'équations aux dérivées partielles régissant l'évolution de ces fluides est, selon le cas, hyperbolique strict ou non strict et admet une solution unique respectivement dans des espaces de Sobolev ou des classes de Gevrey convenables [2] [4] [14] [15].

Mais des difficultés se présentent dès que l'on tente d'introduire dans la théorie des phénomènes dissipatifs. Dans le cas de la conduction de la chaleur, de différentes descriptions ont été données mais elles présentent toutes le grave défaut de donner des équations aux dérivées partielles paraboliques.

Nous nous proposons, dans ce travail, de construire un schéma fluide relativiste conducteur de chaleur dont le système d'évolution est, sous une hypothèse faite sur l'équation d'état du fluide, hyperbolique strict. On trouvera dans le chapitre III les résultats originaux concernant le schéma fluide considéré.

Nous donnons dans le premier chapitre la description du schéma fluide relativiste conducteur de chaleur que nous nous proposons d'étudier :

nous adoptons une équation de conduction de la chaleur du type Cattaneo-Vernotte [1] [21] généralisée par Kranys [6] [7] [8]; pour décrire le fluide nous considérons le point de vue de Landau et Lifchitz [9] [19]. Nous établissons alors le système (S) d'équations aux dérivées partielles que nous nous proposons d'étudier.

Nous rappelons dans le deuxième chapitre les théorèmes relatifs aux systèmes quasi-linéaires diagonaux hyperboliques stricts et non stricts (Leray, Ohya) [11] [12] ainsi qu'un critère suffisant d'hyperbolicité non stricte pour un système quasi-linéaire quelconque (Mme Choquet-Bruhat) [5].

Nous étudions dans le troisième chapitre le système (S) : c'est un système quasi-linéaire du type Cauchy-Kowalewski; nous mettons en évidence ses variétés caractéristiques : ondes matérielles et ondes hydrodynamiques. Celles-ci sont orientées dans le temps et se décomposent en deux types d'ondes : lentes et rapides. Nous montrons d'abord que le système (S) est hyperbolique non strict admettant une solution unique dans des classes de Gevrey convenables d'indice $\alpha = 6/5$, puis, qu'il est physiquement équivalent à un système hyperbolique strict admettant une solution unique dans des espaces de Sobolev convenables [17].

CHAPITRE I

SCHÉMA FLUIDE RELATIVISTE CONDUCTEUR DE CHALEUR

1. Variété espace-temps et équations d'Einstein.

a) Le cadre de la relativité générale est un espace-temps V_4 , variété différentiable à quatre dimensions [13] munie d'une métrique riemannienne hyperbolique normale ds^2 , de signature $(+, -, -, -)$. Dans un système de coordonnées locales admissibles x^α , cette métrique peut s'écrire :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta, \text{ tout indice grec} = 0, 1, 2, 3)$$

où les $g_{\alpha\beta}$ sont dits les potentiels de gravitation. Nous supposons que la variété V_4 et les potentiels $g_{\alpha\beta}$ sont de classes de différentiabilité suffisantes pour justifier les calculs suivants.

Nous désignons par ∂_α la dérivation ordinaire par rapport à la coordonnée locale x^α , par ∇_α l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion définie par la métrique.

b) Le cadre géométrique étant ainsi précisé, les équations d'Einstein limitent la généralité du tenseur fondamental de gravitation $g_{\alpha\beta}$ et le relient aux distributions énergétiques de l'espace-temps V_4 . Elles s'écrivent

$$(1.1) \quad S_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta}$$

où $S_{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}$ sont des tenseurs symétriques et où k désigne une constante. $T_{\alpha\beta}$ de signification purement mécanique doit décrire au mieux la distribution énergétique dans V_4 : c'est le tenseur d'impulsion-énergie. $S_{\alpha\beta}$ de signification purement géométrique est donné par :

$$S_{\alpha\beta} = h \left[R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (R + a) g_{\alpha\beta} \right]$$

où $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci de la variété riemannienne, $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$, h et a deux constantes arbitraires. Ainsi en supprimant le facteur surabondant h et la constante cosmologique a , les équations aux dérivées partielles (1.1) s'écrivent :

$$(1.2) \quad S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta}.$$

Le tenseur $S_{\alpha\beta}$ étant, d'après les identités de Bianchi, conservatif, nous avons :

$$(1.3) \quad \nabla_\alpha S^{\alpha\beta} = 0.$$

Nous déduisons alors de (1.2) et (1.3) que $T^{\alpha\beta}$ est conservatif :

$$(1.4) \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0.$$

2. Description du schéma fluide étudié.

Nous nous plaçons dans toute la suite dans un système d'unités tel que la vitesse de la lumière dans le vide soit égale à 1.

a) Dans V_4 , un fluide parfait est décrit [14] par un tenseur d'énergie de la forme :

$$(2.1) \quad T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta},$$

où ρ est la densité propre d'énergie du fluide, p sa pression et u^α le vecteur vitesse unitaire (orienté dans le futur) du fluide :

$$(2.2) \quad g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1.$$

Selon le point de vue de Taub [20] adopté par Lichnerowicz [14], la

densité propre d'énergie ρ se décompose en densité propre de la matière et densité d'énergie interne du fluide. Nous posons dans la suite :

$$(2.3) \quad \rho = r(1 + \varepsilon) \quad r > 0$$

où r est la densité propre de matière et ε l'énergie interne spécifique du fluide. Ainsi dans (2.1) apparaît le scalaire :

$$\rho + p = r(1 + \varepsilon + p/r) = rf, \quad f > 0$$

où f est l'indice du fluide.

Le tenseur d'énergie (2.1) s'écrit alors sous la forme :

$$(2.4) \quad T^{\alpha\beta} = rfu^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}.$$

La température propre θ du fluide et son entropie spécifique S sont définies, comme en hydrodynamique classique, par la relation différentielle

$$\theta dS = d\varepsilon + pd(1/r)$$

qui s'écrit, compte tenu de ce qui précède :

$$(2.5) \quad dp = rdf - r\theta dS.$$

b) Dans la formulation de Landau et Lifchitz [9] [10], un fluide relativiste conducteur de chaleur est décrit par le tenseur d'énergie (2.4) et par le vecteur courant de matière-courant de chaleur :

$$(2.6) \quad P^\alpha = ru^\alpha + q^\alpha$$

où q^α est le vecteur courant de chaleur.

Les équations de mouvement sont données par la conservation du tenseur d'énergie

$$(2.7) \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

auxquelles on joint la condition de conservation du vecteur courant de matière-courant de chaleur

$$(2.8) \quad \nabla_\alpha P^\alpha = 0$$

et la loi de conduction de la chaleur que nous allons étudier dans ce qui suit.

3. Loi de conduction de la chaleur.

a) Plusieurs auteurs [3] [4] [18] [19] ont étudié des schémas fluides relativistes conducteurs de chaleur. Comme dans le cas non relativiste, l'étude

du problème de Cauchy montre que les systèmes d'évolution de ces fluides contiennent des équations paraboliques et met en évidence des variétés caractéristiques de vitesse de propagation infinie, éventualité inadmissible du point de vue relativiste. Ce paradoxe est dû essentiellement au choix de l'équation de conduction de la chaleur.

b) Cattaneo [1] et Vernotte [2] en physique non relativiste, Kranys [6] [7] [8] en physique relativiste, ont proposé de modifier la loi de conduction de la chaleur de Fourier en y introduisant un terme de relaxation. La formulation covariante de l'équation ainsi rectifiée est donnée par

$$(3.1) \quad q^\beta + \kappa u^\alpha \nabla_\alpha q^\beta = -\chi(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha \theta$$

où κ et χ sont deux constantes physiques positives : κ représente le temps moyen entre deux collisions successives de molécules ; χ est le coefficient de conductibilité thermique du fluide.

4. Le système d'évolution (S) du fluide étudié.

a) Dans le cadre de la relativité générale, les équations (2.7) sont des conséquences des équations d'Einstein. Dans le présent travail, afin de simplifier la présentation de la suite, nous faisons abstraction de ces équations et nous nous plaçons dans une métrique donnée de V_4 . Nous prenons les variables p et S comme variables thermodynamiques fondamentales ; toutes les autres variables seront donc considérées comme des fonctions données de p et S .

Les 10 variables u^β , q^β , p et S sont ainsi déterminées par le système des 10 équations : (2.2), (2.7), (2.8) et (3.1).

b) En développant (2.8) et compte tenu de (2.6), nous obtenons :

$$(4.5) \quad r \nabla_\alpha u^\alpha + r'_p u^\alpha \partial_\alpha p + r'_S u^\alpha \partial_\alpha S + \nabla_\alpha q^\alpha = 0.$$

Le système (2.7) donne

$$(4.6) \quad \nabla_\alpha (r f u^\alpha) u^\beta + r f u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - g^{\alpha\beta} \partial_\alpha p = 0$$

dont le produit contracté par u^β fournit l'équation de continuité

$$(4.7) \quad \nabla_\alpha (r f u^\alpha) - u^\alpha \partial_\alpha p = 0$$

qui s'écrit, compte tenu de (2.5)

$$(4.8) \quad r f \nabla_\alpha u^\alpha + f r'_p u^\alpha \partial_\alpha p + (r f)'_S u^\alpha \partial_\alpha S = 0$$

ou bien compte tenu de (4.5)

$$(4.9) \quad r f'_S u^\alpha \partial_\alpha S - f \nabla_\alpha q^\alpha = 0.$$

Enfin, compte tenu de (4.7), le système (4.6) donne le système aux lignes de courant

$$(4.10) \quad rfu^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha p = 0.$$

c) Ainsi le système formé par les équations (2.2), (2.7), (2.8) et (3.1) est équivalent au système (S) dont les équations satisfaites par les grandeurs physiques, inconnues du problème posé, u^β , q^β , p et S , sont données par (4.10), (3.1), (4.8) et (4.9) :

CHAPITRE II

QUELQUES RÉSULTATS CONCERNANT LES SYSTÈMES QUASI-LINÉAIRES HYPERBOLIQUES

5. Opérateurs différentiels hyperboliques stricts [11].

a) Soit V_{l+1} une variété différentiable de dimension $(l + 1)$, de classe C^k où k est suffisamment grand. Soit $a(x, D)$ un opérateur différentiel agissant sur des fonctions, où $x \in V_{l+1}$ et où D désigne la dérivation ordinaire $D = \{ \partial_\alpha \}$, $(\alpha = 0, 1, \dots, l)$.

T_x est l'espace vectoriel tangent en x à la variété V_{l+1} et T_x^* l'espace dual. Si m est l'ordre de l'opérateur $a(x, D)$, alors $a(x, \xi)$, où $\xi \in T_x^*$, est un polynôme réel en ξ de degré m . Nous considérons la partie principale $h(x, \xi)$ de $a(x, \xi)$, qui est définie par l'ensemble des termes homogènes de degré m de $a(x, \xi)$. Soit $V_x(h)$ le cône de T_x^* défini par l'équation $h(x, \xi) = 0$ pour x fixé. L'opérateur $a(x, D)$ est *hyperbolique strict* en x si :

Il existe dans T_x^ des éléments ξ tels que toute droite issue de ξ et ne passant pas par le sommet, coupe la surface du cône $V_x(h)$ en m points réels distincts.*

L'ensemble de ces points ξ forme l'intérieur de deux demi-cônes convexes fermés opposés $\Gamma_x^+(a)$ et $\Gamma_x^-(a)$ dont les frontières appartiennent à $V_x(h)$. L'un au moins des $\Gamma_x^+(a)$ et $\Gamma_x^-(a)$ est non vide.

b) L'opérateur différentiel $a(x, D)$ est *régulièrement hyperbolique* si les conditions suivantes sont satisfaites :

1° $a(x, D)$ est hyperbolique strict en chaque point $x \in V_{l+1}$.

2° L'intersection $\Gamma(a) = \bigcap_{x \in V_{l+1}} \Gamma_x(a)$, où $\Gamma_x(a) = \Gamma_x^+(a) \cup \Gamma_x^-(a)$, a un intérieur $\hat{\Gamma}(a)$ non vide.

3° Si $\|x\|$ tend vers l'infini, $h(x, \xi)$ ne tend pas vers zéro ; ce qui signifie que $V_x(h)$ n'a aucune génératrice singulière à l'infini.

c) Considérons la matrice $A(x, D)$ suffisamment différentiable en x

$$A(x, D) = \begin{pmatrix} a_1(x, D) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_N(x, D) \end{pmatrix}$$

où les termes $a_i(x, D)$ ($i = 1, \dots, N$) sont des opérateurs différentiels d'ordre respectif $m(i)$. La matrice $A(x, D)$ est dite *hyperbolique stricte* en x si :

- 1° Les opérateurs a_i sont hyperboliques stricts en x .
- 2° Les deux demi-cônes convexes opposés

$$\Gamma_x^+(A) = \bigcap_i \Gamma_x^+(a_i), \quad \Gamma_x^-(A) = \bigcap_i \Gamma_x^-(a_i)$$

ont un intérieur non vide.

d) Considérons dans T_x le demi-cône convexe $C_x^+(A)$ dual de $\Gamma_x^+(A)$ et le demi-cône opposé $C_x^-(A)$ dual de $\Gamma_x^-(A)$ et soit $C_x(A) = C_x^+(A) \cup C_x^-(A)$. Un chemin de V_{l+1} est *temporel relativement à A* si la demi-tangente en chaque point x appartient à $C_x^+(A)$. Une hypersurface Σ régulière de V_{l+1} est *spatiale relativement à A* si le sous-espace vectoriel tangent en x à Σ est extérieur à $C_x(A)$.

Soit Ω un domaine ouvert connexe de V_{l+1} . La matrice $A(x, D)$ est *hyperbolique stricte dans Ω* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- 1° $A(x, D)$ est hyperbolique stricte en chaque point x de Ω .
- 2° L'ensemble des chemins temporels (relativement à A) joignant dans Ω deux points x, x' de Ω est compact ou vide (par rapport à la topologie de la convergence uniforme, Ω étant considéré comme un ensemble de chemins différentiables).

Nous considérons dans la suite un tel domaine Ω .

6. Systèmes quasi-linéaires hyperboliques stricts.

a) Considérons, sur la variété différentiable V_{l+1} , le système différentiel quasi-linéaire dont les inconnues sont :

$$v(x) = (v_i(x)) \quad \text{où} \quad i = 1, \dots, N$$

et qui s'écrit

$$(6.1) \quad A(x, v, D)v = B(x, v)$$

avec

$$A(x, v, D) = \begin{pmatrix} a_1(x, v, D) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_N(x, v, D) \end{pmatrix} \quad \text{et } B(x, v) = (b_i(x, v)), \quad i = 1, \dots, N;$$

les termes $a_i(x, v, D)$ de A sont des opérateurs différentiels d'ordre respectif $m(i)$.

On associe à chaque inconnue v_j un indice entier $s(j) \geq 1$ et à chaque équation d'indice i un entier $t(i) \geq 1$ tels que

$$m(i) = s(i) - t(i) + 1.$$

Nous supposons que les b_i et les coefficients des opérateurs différentiels a_i sont des fonctions suffisamment régulières de x , des v_j et des dérivées des v_j d'ordre $\leq s(j) - t(i)$. Si $s(j) - t(i) < 0$ les b_i et les coefficients des a_i sont indépendants des v_j . Les indices $s(j)$ et $t(i)$ sont définis à une constante additive près.

b) Soit Σ une hypersurface régulièrement plongée dans un domaine Ω de V_{t+1} . Dans un voisinage de Σ , nous considérons

$$w(x) = (w_j(x)), \quad j = 1, \dots, N,$$

où les dérivées des w_j d'ordre $\leq s(j) + 1$ sont de carrés localement intégrables.

Nous supposons que :

1° La matrice $A(x, w, D)$ est hyperbolique stricte dans Ω et l'hypersurface Σ est spatiale relativement à cette matrice $A(x, w, D)$.

2° Les différences $a_i(x, w, D) - b_i(x, w)$ et leurs dérivées d'ordre $< t(i)$ s'annulent sur Σ .

Nous considérons, sous ces hypothèses, le problème de Cauchy défini pour le système (6.1) par les données de Cauchy déterminées par w . Une solution de ce problème de Cauchy est une solution $v = (v_i)$ de (6.1) dont les dérivées d'ordre $\leq s(i)$ sont de carrés localement intégrables et telle que les $v_i(x) - w_i(x)$ et leurs dérivées d'ordre $< s(i)$ s'annulent sur Σ .

Pour ce problème, Leray [11] a établi le théorème d'existence et d'unicité suivant :

THÉORÈME 1. — Si $x \in \Sigma$, le problème de Cauchy pour le système (6.1) admet, sous les hypothèses précédentes, au moins une solution dans le voisinage de x . Si $v = (v_i)$ et $\bar{v} = (\bar{v}_i)$ sont deux solutions du problème de Cauchy dans le voisinage de x et si v_i et $\bar{v}_i$ ont des dérivées d'ordre $\leq s(i) + 1$ de carrés localement intégrables, ces deux solutions coïncident.

7. Classes de Gevrey.

a) Nous notons les coordonnées de $\mathbb{R}^{l+1}$: $(x_0, x_1, \dots, x_l)$ et

$$D_x^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_0^{\beta_0} \dots \partial x_l^{\beta_l}}.$$

Soit X la bande de $\mathbb{R}^{l+1}$ d'équation: $0 \leq x_0 \leq |X|$ et Σ_t l'hyperplan de X d'équation: $x_0 = t$. Notons K_t les cubes, de côté 1, appartenant à Σ_t ; considérons enfin les normes habituelles de la fonction $f: X \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \|f, \Sigma_t\|_p &= \left[\int_{\Sigma_t} |f|^p dx_1 \dots dx_l \right]^{1/p}; \\ \|f, K_t\|_p &= \left[\int_{K_t} |f|^p dx_1 \dots dx_l \right]^{1/p}. \end{aligned}$$

Étant donné un entier $n \geq 0$, nous appelons quasi-normes d'une fonction $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, les deux fonctions de t :

$$\|D_x^\alpha f, \Sigma_t\|_p = c \sup_\beta \|D_x^\beta f, \Sigma_t\|_p, \quad \|D_x^\alpha f, \Sigma_t\|_p = c \sup_{\beta, K_t} \|D_x^\beta f, K_t\|_p, \quad (|\beta| \leq n)$$

où c est une fonction de (l, n) , croissante en n et assez grande pour que ces deux normes soient des normes d'algèbres et que l'on ait la formule du produit [12].

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$ et $p \geq 1$.

1° Nous désignons par $\gamma_p^{(\alpha)}(\Sigma_0)$ l'ensemble des fonctions $f: \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\sup_\sigma \frac{1}{[1 + |\sigma|]^\alpha} [\|D_x^\sigma f, \Sigma_0\|_p]^{1/(1+|\sigma|)} < \infty \quad \text{où} \quad \sigma_0 = 0.$$

C'est la classe de Gevrey classique pour $p = \infty$. Pour $\alpha = 1$, c'est la classe des fonctions analytiques.

2° X étant la bande $0 \leq x_0 \leq |X|$, nous désignons par $\gamma_p^{n,(\alpha)}(X)$ l'ensemble des fonctions $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\sup_{\beta, \sigma, t} \frac{1}{[1 + |\sigma|]^\alpha} [\|D_x^{\beta+\sigma} f, \Sigma_t\|_p]^{1/(1+|\sigma|)} < \infty, \quad |\beta| \leq n, \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \leq t \leq |X|.$$

Remarque. — Nous appliquons la définition de $\gamma^{(\alpha)}$ avec $\alpha = \infty$, en convenant que dans ce cas

$$\frac{1}{[1 + |\sigma|]^\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{si } |\sigma| = 0 \\ 0 & \text{si } |\sigma| > 0. \end{cases}$$

$\gamma_p^{(\infty)}(\Sigma_0)$ est donc l'espace $L_p(\Sigma_0)$ des fonctions sur Σ_0 dont la puissance $p^{\text{ième}}$ est sommable; $\gamma_p^{n,(\infty)}(X)$ est l'espace $L_{\infty,p}^n(X)$ des fonctions sur X dont les quasi-normes $|D_x^n f, \Sigma_t|_p$ sont des fonctions bornées de t (f et ses dérivées appartiennent alors à des espaces de Sobolev).

3° Soit Y un ouvert d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Nous désignons par $\gamma_p^{n,(a)}(X, Y)$ l'ensemble des fonctions $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\sup_{\beta, \sigma, \tau, t} \frac{1}{[1 + |\sigma| + |\tau|]^\alpha} [|D_x^{\beta+\sigma} D_y^\tau f, \Sigma_t \times Y|_p]^{\frac{1}{1+|\sigma|+|\tau|}} < \infty$$

où

$$|\beta| \leq n, \quad \sigma_0 = 0, \quad \tau_0 = 0.$$

Si nous remplaçons $|\dots|$ par $\|\dots\|$ nous aurons des classes semblables notées $\gamma_{[p]}^{n,(a)}(X)$. Remarquons que $\gamma_{[p]}^{n,(a)}(X) \subset \gamma_p^{n,(a)}(X)$.

8. Systèmes quasi-linéaires diagonaux hyperboliques non stricts.

a) Considérons sur une bande de $\mathbb{R}^{l+1}$, $X: 0 \leq x_0 \leq |X|$, de bord $\Sigma_0: x_0 = 0$, le problème de Cauchy relatif au système d'équations aux dérivées partielles diagonal, suivant:

$$(8.1) \quad \begin{cases} a^k(x, D^{\mu_k - v_k - 1} v^h, \tilde{D}^{\mu_k - v_k}) v^k + b^k(x, D^{\mu_k - v_k - 1} v^h) = 0, \\ D_0^j v^k|_{\Sigma_0} \quad \text{donné} \quad \in \gamma_2^{(a)}(\Sigma_0), \quad j < \mu_k - v_k, \end{cases}$$

où h, k valent $1, \dots, N$; les inconnues sont les N fonctions numériques complexes $v^k(x)$; D^σ désigne l'ensemble des dérivations partielles d'ordre $\leq \sigma$, $\tilde{D}^\sigma$ celles d'ordre σ .

Nous supposons que :

1° $a^k(x, y, \tilde{D}^{\mu_k - v_k}) \in \gamma_{[2]}^{v_k + m, (a)}(X, Y)$ et $b^k(x, y) \in \gamma_2^{v_k + m, (a)}(X, Y)$ sont respectivement N opérateurs différentiels d'ordres $\mu_k - v_k$ et N fonctions, données sur X , dépendant d'un paramètre $y \in Y$; Y est un ouvert de l'espace vectoriel complexe de dimension égale au nombre des dérivées des v^k d'ordre $< \sup_h \mu_h - v_k$; Y contient l'adhérence des valeurs prises par les données de Cauchy $D_0^j v^k|_{\Sigma_0}$.

2° Chaque opérateur a^k est le produit de p_k opérateurs

$$a^k \equiv a_1^k \dots a_{p_k}^k(x, D^{\mu_k - \mu_k^j - p_k + j - 1} v^h, \tilde{D}^{l_j^h}) \dots a_{p_k}^k,$$

où

$$a_j^k(x, y, \tilde{D}^{l_j^h}) \in \gamma_{[2]}^{\mu_k^j + m - j + 1, (a)}(X, Y)$$

est un opérateur régulièrement hyperbolique sur $X \times Y$; on a noté l_j^k l'ordre de l'opérateur a_j^k et on a posé :

$$\mu_k^j = v_k + l_1^k + \dots + l_{j-1}^k, \quad \text{avec} \quad \mu_k^{p_k+1} = \mu_k, \quad \mu_k^1 = v_k.$$

La variété initiale Σ_0 est supposée « spatiale » pour chaque a_j^k , ce qui implique que les intérieurs des cônes caractéristiques de ces opérateurs ont, en chaque point, une intersection non vide.

3° Enfin

$$(8.2) \quad m > \frac{l}{2} + \sup_h p_h - \inf_i v_i,$$

$$(8.3) \quad \alpha = \inf_h \frac{p_h}{p_h - 1}.$$

b) THÉORÈME 2 d'existence et d'unicité. — Il existe une bande X' : $0 \leq x_0 \leq |X'|$ ($X' \subset X$) sur laquelle le problème de Cauchy (8.1) possède une solution $v^i \in \gamma_2^{\mu_i+m,(\alpha)}(X')$. Sur aucune bande plus petite X'' il ne possède de solution $\in \gamma_2^{\mu_i+m,(\alpha)}(X'')$, autre que v^i .

Remarque. — Si $p_h = 1 \quad \forall h$, on peut prendre $\alpha = \infty$, c'est-à-dire employer des espaces de Sobolev au lieu des classes de Gevrey; le système considéré est alors équivalent à un système hyperbolique strict.

c) THÉORÈME 3 local d'unicité (domaine d'influence). — Soient, sur un domaine Ω de X' , deux solutions v^i et $\bar{v}^i \in \gamma_2^{\mu_i+m,(\alpha)}(X')$ du problème de Cauchy (8.1). Supposons que Ω possède la propriété suivante, relativement au cône caractéristique de l'opérateur $\prod_k a^k$: l'émission rétrograde dans X' de tout point de Ω appartient à $\Omega \cup \Sigma_0$. Alors $v^i = \bar{v}^i$ sur Ω .

9. Diagonalisation des systèmes quasi-linéaires et critère d'hyperbolicité non stricte.

a) Considérons un système de N équations aux dérivées partielles quelconques à N inconnues v^k

$$(9.1) \quad F_j(x, D^{B_{jk}} v^k) = 0 \quad j, k \dots = 1, \dots, N,$$

où B_{jk} est un ensemble de N^2 entiers ≥ 0 , ou $-\infty$ (si $B_{jk} = -\infty$, v^k ne

figure pas dans F_j). Aux N^2 entiers B_{jk} on peut toujours faire correspondre $2N$ entiers ≥ 0 , m_k et n_j tels que $B_{jk} \leq m_k - n_j$ et

$$(9.2) \quad d = \sup_{\pi} \sum_{k=1}^N B_{\pi(k)k} = \sum_{k=1}^N m_k - \sum_{j=1}^N n_j$$

où π désigne une permutation quelconque des entiers $1, \dots, N$.

Le système (9.1) s'écrit alors

$$(9.3) \quad F_j(x, D^{m_k - n_j} v^k) = 0.$$

Considérons le déterminant d'éléments

$$(9.4) \quad h_k^j = \frac{\partial F_j}{\partial \left(\frac{\partial^{m_k - n_j} v^k}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_{m_k - n_j}}} \right)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_{m_k - n_j}}},$$

$$h = \det (h_k^j) = \sum_{\pi} \sigma(\pi) h_{\pi(1)}^1 \dots h_{\pi(N)}^N;$$

La partie principale $\tilde{h}$ de h qui est sa partie homogène d'ordre d est le *polynôme caractéristique* associé au système. Si ce polynôme n'est pas identiquement nul, le système est dit régulier (au sens de Cauchy-Kowalewski généralisé par Leray-Gårding).

b) Un système d'équations aux dérivées partielles écrit sous la forme (9.3) est quasi-linéaire si F_j est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre $m_k - n_j$ des v^k ; nous pouvons l'écrire alors

$$(9.5) \quad h_i^j(x, D^{m_k - n_j - 1} v^k, \tilde{D}^{m_i - n_j} v^i) + b^j(x, D^{m_k - n_j - 1} v^k) = 0$$

où h_i^j est un opérateur différentiel homogène d'ordre $m_i - n_j$ (qui peut être nul), appelé partie principale de l'opérateur différentiel F_j , pour l'inconnue v^i .

Mme Choquet-Bruhat a démontré dans [5] le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — Un système quasi-linéaire peut toujours être écrit sous forme d'un système quasi-linéaire diagonal.

La forme du système obtenu est différente selon que la condition

$$(9.6) \quad d \geq \sup_k m_k - \inf_j n_j$$

est vérifiée ou non. Elle est vérifiée en particulier si tous les entiers $m_k - n_j$ sont ≥ 0 : c'est le cas du système (S). Dans ce cas le système (9.5) s'écrit sous la forme d'un système quasi-linéaire diagonal

$$(9.7) \quad \tilde{h}(x, D^{\mu_h - \nu_k - 1} v^h, \tilde{D}^{\mu_k - \nu_k} v^k) + B^k(x, D^{\mu_h - \nu_k - 1} v^h) = 0$$

avec

$$(9.8) \quad \begin{cases} \mu_h = d + m_h \\ v_k = m_k. \end{cases}$$

c) Supposons que $\tilde{h}$ soit la partie principale du produit de p opérateurs h_j régulièrement hyperboliques, homogènes d'ordres d_j tels que :

$$\sum_{j=1}^p d_j = d.$$

Le système diagonalisé (9.7) est alors du type Leray-Ohya (cf. 8) si

$$(9.9) \quad \sup_j d_j \geq \sup_k m_k - \inf_i n_i.$$

Remarquons que (9.9) entraîne évidemment (9.6). Nous obtenons ainsi le

CRITÈRE SUFFISANT D'HYPERBOLICITÉ NON STRICTE. — *Le système quasi-linéaire*

$$h_i^j(x, D^{m_k - n_j - 1} v^k, \tilde{D}^{m_i - n_j}) v^i + b^i(x, D^{m_k - n_j - 1} v^k) = 0$$

tel que la partie principale $\tilde{h}$ de $\det(h_i^j)$ soit celle du produit de p opérateurs hyperboliques h_j d'ordres d_j vérifiant

$$\sup_j d_j \geq \sup_k m_k - \inf_i n_i$$

est hyperbolique non strict.

Le problème de Cauchy correspondant à des données de Cauchy satisfaisant les hypothèses du paragraphe 8 de Leray-Ohya pour le système (9.7) aura donc une solution et une seule dans un voisinage de l'hypersurface initiale Σ

$$(9.10) \quad v^i \in \gamma_2^{\mu_i + m_i(\alpha)}(X')$$

où X' et X sont deux bandes, voisinages de Σ et $X' \subset X$, et

$$(9.11) \quad \begin{cases} \mu_i = d + m_i, \\ m > \frac{l}{2} + p - \inf_i m_i, \\ \alpha = p/(p-1). \end{cases}$$

d) Désignons par H_j^k le mineur de h_k^i dans le déterminant $h = \det(h_k^i)$, opérateur différentiel d'ordre $d - m_k + n_j$. Supposons que $\tilde{H}_j^k$ (pour tout couple j, k) soit la partie principale d'un produit $h_{i_1}, \dots, h_{i_{p'}} \cdot \hat{H}_j^k$, où $h_{i_1}, \dots, h_{i_{p'}} (p' < p)$ sont p' des facteurs $h_1, \dots, h_p$, indépendants de j, k

et $\hat{H}_j^k$ un opérateur différentiel homogène d'ordre $d - m_k + n_j - d'$, d' étant défini par

$$d' = d_{i_1} + \dots + d_{i_{p'}}.$$

En désignant par $\hat{h}$ la partie principale du produit $h_1, \dots, h_p$ dont on a exclu les facteurs $h_{i_1}, \dots, h_{i_{p'}}$, le système quasi-linéaire (9.5) est alors équivalent au système quasi-linéaire diagonal

$$(9.12) \quad \hat{h}(x, D^{\mu_h - \nu_k - 1} v^h, \tilde{D}^{\mu_k - \nu_k} v^k + B^k(x, D^{\mu_h - \nu_k - 1} v^h) = 0$$

avec

$$(9.13) \quad \begin{cases} \mu_h = d - d' + m_h \\ \nu_k = m_k \end{cases}$$

si la condition suivante est vérifiée :

$$(9.14) \quad d - d' \geq \sup_k m_k - \inf_j n_j.$$

Ce système sera hyperbolique non strict comme le système (9.7) si

$$(9.15) \quad \sup_{i_r} d_{i_r} \geq \sup_k m_k - \inf_j n_j$$

où les d_{i_r} sont les ordres des opérateurs $h_{i_1}, \dots, h_{i_{(p-p')}}.$

Si (9.15) est vérifiée, le théorème 3 d'existence et d'unicité s'applique au système avec

$$(9.16) \quad \begin{cases} \mu_i = d - d' + m_i, \\ m > \frac{l}{2} + p - p' - \inf_i m_i, \\ \alpha = (p - p')/(p - p' - 1), \end{cases}$$

dans une classe de Gevrey plus large, puisque α est plus grand. Si l'on peut se ramener à $p - p' = 1$ le système est évidemment équivalent à un système hyperbolique strict et les théorèmes sont valables dans des espaces de Sobolev.

CHAPITRE III

ÉTUDE DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES (S)

10. Quelques propriétés des gaz polytropiques.

a) Un gaz polytropique vérifie la relation

$$pV = p/r = (c_p - c_v)\theta$$

où c_p , c_v ($c_p > c_v$) sont des constantes positives définissant les chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant. On a ainsi

$$(10.1) \quad \psi = c_p/c_v > 1.$$

L'énergie interne du fluide et son enthalpie spécifique sont données respectivement par

$$\varepsilon = c_v \theta = \frac{c_v}{c_p - c_v} \frac{p}{r} = \frac{1}{\psi - 1} \frac{p}{r} \quad \text{et} \quad i = c_p \theta = \varepsilon + \frac{p}{r} = \frac{\psi}{\psi - 1} \frac{p}{r}.$$

Son indice est alors donné par

$$(10.2) \quad f = 1 + \frac{\psi}{\psi - 1} \frac{p}{r}$$

et la densité propre de matière s'exprime par

$$(10.3) \quad r = p^{1/\psi} \exp(-S/c_p).$$

Nous avons alors

$$(10.4) \quad \theta = \frac{1}{c_p} \frac{\psi}{\psi - 1} p^{\frac{\psi-1}{\psi}} \exp(S/c_p).$$

b) En dérivant θ par rapport à p et S , nous obtenons successivement

$$\theta'_p = \frac{1}{c_p} p^{-\frac{1}{\psi}} \exp(S/c_p) \quad \text{et} \quad \theta'_S = \frac{1}{c_p^2} \frac{\psi}{\psi - 1} p^{\frac{\psi-1}{\psi}} \exp(S/c_p),$$

dont il résulte, compte tenu de (10.1), que

$$\theta'_p > 0 \quad \text{et} \quad \theta'_S > 0.$$

En exprimant rf en fonction de p et S , nous obtenons compte tenu de (10.2) et (10.3):

$$(10.5) \quad rf = p^{1/\psi} \exp(-S/c_p) + \frac{\psi}{\psi - 1} p$$

dont la dérivée par rapport à S à p constant s'écrit

$$(rf)'_S = -\frac{1}{c_p} p^{1/\psi} \exp(-S/c_p) < 0.$$

Nous pouvons ainsi énoncer le

THÉORÈME 5. — Pour un gaz polytropique les inégalités

$$(P) \quad \theta'_S > 0, \quad \theta'_p > 0, \quad (rf)'_S < 0$$

sont satisfaites.

11. Caractère quasi-linéaire du système (S).

a) Reprenons le système (S) dont les équations satisfaites par les grandeurs physiques, inconnues du problème posé, u^β , q^β , p et S sont données par

$$(S) \quad \begin{cases} \text{I} & r f u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha p = 0, \\ \text{II} & \kappa u^\alpha \nabla_\alpha q^\beta + \chi \theta'_p (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha p + \chi \theta'_S (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha S + q^\beta = 0, \\ \text{III} & r f \nabla_\alpha u^\alpha + f r'_p u^\alpha \partial_\alpha p + (r f)'_S u^\alpha \partial_\alpha S = 0, \\ \text{IV} & r f'_S u^\alpha \partial_\alpha S - f \nabla_\alpha q^\alpha = 0. \end{cases}$$

b) Soit x un point du domaine Ω de V_4 occupé par le fluide étudié. Désignons par v^i une quelconque des 10 inconnues u^β , q^β , p , S , par E^j une quelconque des 10 équations du système (S). Le système (S) est quasi-linéaire si nous pouvons trouver des indices m_i et n_j tels qu'il s'écrive

$$(11.1) \quad E^j \equiv h^j_i(x, D^{m_k - n_j - 1} v^k, \tilde{D}^{m_i - n_j} v^i) + b^j(x, D^{m_k - n_j - 1} v^k) = 0, \\ i, j, \dots = 1, \dots, 10.$$

Le système (S) sera alors quasi-linéaire pour le choix suivant des indices de Leray :

$$(11.2) \quad \begin{cases} m(u^\beta) = m(q^\beta) = m(p) = m(S) = 1, \\ n(\text{I}) = n(\text{II}) = n(\text{III}) = n(\text{IV}) = 0. \end{cases}$$

Les parties principales relativement aux inconnues u^β , q^β , p , S dans les équations de (S) sont ainsi toutes d'ordre $m_i - n_j = 1$, $i, j = 1, \dots, 10$. Le système (S) est du type de Cauchy-Kowalewski (généralisé par Leray-Garding) si la partie principale, d'ordre

$$\sum_{k=1}^{10} m_k - \sum_{j=1}^{10} n_j = 10,$$

du déterminant h des h^j_i , défini par

$$h = \sum_{\pi} \sigma(\pi) h^1_{\pi(1)} \dots h^{10}_{\pi(10)}$$

n'est pas nulle, $\sigma(\pi)$ désignant la signature d'une permutation quelconque des entiers $1, \dots, 10$. Il est équivalent de dire aussi que le polynôme homogène de degré 10, H , n'est pas identiquement nul :

$$(11.3) \quad H = \det(\bar{h}^j_i) \neq 0$$

où $\bar{h}^j_i$ est le polynôme homogène en l_α obtenu en remplaçant dans h^j_i la dérivation ∂_α par le vecteur covariant l_α .

12. Variétés caractéristiques du système (S).

a) Les vecteurs l_x qui annulent en un point $x \in \Omega$ le polynôme H (si celui-ci n'est pas identiquement nul) sont les normales en ce point aux variétés caractéristiques ou fronts d'onde dont les équations sont données alors par la nullité du polynôme H. H est un déterminant d'ordre 10, d'éléments H_i^j que nous pouvons écrire sous la forme suivante :

$$H = \begin{vmatrix} & u^0 & u^1 & u^2 & u^3 & q^0 & q^1 & q^2 & q^3 & p & S \\ \text{I} \left\{ \begin{array}{l} rfc & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d^0 & 0 \\ 0 & rfc & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d^1 & 0 \\ 0 & 0 & rfc & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rfc & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d^3 & 0 \end{array} \right. \\ \text{II} \left\{ \begin{array}{l} 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa c & 0 & 0 & 0 & \chi \theta'_p d^0 & \chi \theta'_s d^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa c & 0 & 0 & \chi \theta'_p d^1 & \chi \theta'_s d^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa c & 0 & \chi \theta'_p d^2 & \chi \theta'_s d^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa c & \chi \theta'_p d^3 & \chi \theta'_s d^3 \end{array} \right. \\ \text{III} & rfl_0 & rfl_1 & rfl_2 & rfl_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & fr'_p c & (rf)'_s c \\ \text{IV} & 0 & 0 & 0 & 0 & -fl_0 & -fl_1 & -fl_2 & -fl_3 & 0 & rf'_s c \end{vmatrix}$$

où nous avons posé :

$$c = u^\alpha l_\alpha \quad \text{et} \quad d^\beta = (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha.$$

b) Par un calcul élémentaire, nous obtenons l'expression de H :

$$(12.1) \quad H = \kappa^3 r^4 f^4 (u^\alpha l_\alpha)^6 \left\{ \chi f \theta'_s (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta \right. \\ \left. \left[(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta + \left(fr'_p - \frac{\theta'_p}{\theta'_s} (rf)'_s \right) (u^\alpha l_\alpha)^2 \right] \right. \\ \left. + \kappa rf'_s (u^\alpha l_\alpha)^2 [(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta + fr'_p (u^\alpha l_\alpha)^2] \right\},$$

que nous pouvons mettre sous la forme

$$(12.2) \quad H = \kappa^3 r^4 f^4 (u^\alpha l_\alpha)^6 P(l)$$

avec

$$(12.3) \quad P(l) = \{ a(\gamma_0 - 1) - b(\gamma_1 - 1) \} (u^\alpha l_\alpha)^4 \\ + \{ a + b(\gamma_1 - 2) \} l^\rho l_\rho (u^\alpha l_\alpha)^2 + b(l^\rho l_\rho)^2$$

où nous avons posé :

$$(12.4) \quad a = \kappa r f'_S = \kappa r \theta \quad \text{et} \quad b = \chi f \theta'_S$$

$$(12.5) \quad \gamma_0 = f r'_p \quad \text{et} \quad \gamma_1 = f r'_p - \frac{\theta'_p}{\theta'_S} (r f)'_S.$$

13. Ondes et vitesses de propagation.

a) Soit $\varphi = 0$ l'équation locale d'une hypersurface régulière du domaine Ω et $\partial_\alpha \varphi = l_\alpha$. En annulant chaque facteur du polynôme H, nous obtenons les équations des variétés caractéristiques du système (S) qui sont :

1° les ondes matérielles, solution de : $\Gamma_M(l) \equiv u^\alpha l_\alpha = 0$,

2° les ondes hydrodynamiques, solutions de : $\Gamma_H(l) \equiv P(l) = 0$.

Les vitesses de propagation par rapport au fluide, correspondant à ces ondes, sont les pentes spatio-temporelles, dans un repère orthonormé, du plan tangent à une telle variété en un point. Si Σ est une telle onde, sa vitesse v_Σ est donnée par

$$(13.1) \quad v_\Sigma^2 = - \frac{(u^\alpha l_\alpha)^2}{(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta}.$$

Ces vitesses sont inférieures à la vitesse relativiste limite (soit 1 ici) si les cônes $\Gamma_i(l) = 0$, où les $\Gamma_i(l)$ sont les facteurs irréductibles de H, contiennent dans leur intérieur le cône fondamental de la métrique, défini par

$$\Gamma(l) \equiv g^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta = 0.$$

b) Le cône Γ_M correspond aux ondes matérielles de vitesse nulle par rapport au fluide et il est extérieur au cône fondamental Γ puisque le vecteur vitesse u est un vecteur temporel.

Le cône Γ_H correspond aux ondes hydrodynamiques définies par $P(l) = 0$. Pour étudier leurs vitesses de propagation par rapport au fluide, nous posons $y = v_\Sigma^2$ et nous considérons le trinôme du second degré en y

$$(13.2) \quad \Pi(y) = \frac{P(l)}{[(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) l_\alpha l_\beta]^2} = a \gamma_0 y^2 - (b \gamma_1 + a) y + b,$$

dont les racines détermineront les vitesses des ondes hydrodynamiques par rapport au fluide.

c) Afin d'étudier l'existence des racines réelles de $\Pi(y)$ et leurs positions par rapport aux nombres 0 et 1, valeurs entre lesquelles doivent être comprises les vitesses relativistes, nous sommes amenés à faire les hypothèses (K) suivantes sur l'équation d'état du fluide étudié :

K_1 — Le fluide vérifie l'hypothèse de compressibilité $\tau'_p < 0$ ($\tau = f/r$) qui est équivalente à dire que la vitesse v_0 définie par $v_0^2 = 1/\gamma_0$ des ondes hydrodynamiques du même fluide supposé non conducteur de chaleur, est relativiste ($v_0 < 1$).

K_2 — Il vérifie les inégalités

$$(P) \quad \theta'_s > 0, \quad \theta'_p > 0, \quad (rf)'_s < 0.$$

K_3 — Il vérifie enfin l'inégalité :

$$a(\gamma_0 - 1) > b(\gamma_1 - 1).$$

Remarquons que l'hypothèse K_1 a été établie pour un fluide parfait quelconque par des considérations de statistique quantique dans [16].

Sous les hypothèses (K) nous avons les résultats suivants :

$$(13.3) \quad \gamma_0 > 1$$

$$(13.4) \quad \gamma_1 = fr'_p - \frac{\theta'_p}{\theta'_s}(rf)'_s \geq \gamma_0 > 1$$

si bien que la vitesse v_1 définie par $v_1^2 = 1/\gamma_1$ est telle que

$$(13.5) \quad v_1 \leq v_0 < 1.$$

Nous savons d'autre part que $a = \kappa r\theta$ est positif et que sous l'hypothèse K_2 , $b = \chi f\theta'_s$ est positif aussi.

Le trinôme $\Pi(y)$ défini par (13.2) prend pour les valeurs 0, $1/\gamma_1$, $1/\gamma_0$, 1 de y les valeurs respectives suivantes :

$$\begin{aligned} \Pi(0) &= b > 0, \\ \Pi(1/\gamma_1) &= -a(\gamma_1 - \gamma_0)/\gamma_1^2 \leq 0 && \text{d'après (13.4),} \\ \Pi(1/\gamma_0) &= -b(\gamma_1 - \gamma_0)/\gamma_0 \leq 0 && \text{d'après (13.4),} \\ \Pi(1) &= a(\gamma_0 - 1) - b(\gamma_1 - 1) > 0 && \text{d'après } K_3. \end{aligned}$$

Dans ces conditions le trinôme $\Pi(y)$ possède deux racines réelles distinctes comprises entre 0 et 1 ; soient y_{H_1} et y_{H_2} ces racines ; il leur correspond pour les ondes hydrodynamiques deux vitesses différentes v_{H_1} et v_{H_2} définies par

$$v_{H_1}^2 = y_{H_1} \quad \text{et} \quad v_{H_2}^2 = y_{H_2},$$

telles que l'on ait

$$0 < v_{H_1} \leq v_1 \leq v_0 \leq v_{H_2} < 1.$$

D'où :

THÉOREME 6. — *Sous les hypothèses (K), il existe pour le fluide relativiste conducteur de chaleur considéré, deux vitesses de propagation v_{H_1} et v_{H_2} des ondes hydrodynamiques telles que :*

$$0 < v_{H_1} \leq v_1 \leq v_0 \leq v_{H_2} < 1.$$

Remarque. — Nous constatons dans cette théorie, comme dans le cas de la magnétohydrodynamique, un dédoublement des ondes hydrodynamiques en deux types que nous pouvons appeler ondes lentes de vitesse v_{H_1} et ondes rapides de vitesse v_{H_2} .

d) Nous allons étudier maintenant le cône hydrodynamique Γ_H . Pour cela considérons au point x de Ω un repère orthonormé $\{V_{(p)}\}$ tel que $V_{(0)} = u$; dans ce repère nous avons $u^0 = 1$ et $u_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Posons :

$$l_0 = t, \quad l_1 = x, \quad l_2 = y, \quad l_3 = z.$$

Avec ces notations les cônes Γ et Γ_H ont pour équations :

$$\Gamma: \quad t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$

$$\Gamma_H: \quad a\gamma_0 t^4 - (a + b\gamma_1)t^2(x^2 + y^2 + z^2) + b(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0;$$

remarquons que ce sont deux cônes de révolution d'axe $V_{(0)}$. Nous appelons « indicatrices dans $\mathbb{R}^3$ » les sections de ces cônes par l'hyperplan $t = 1$. Nous obtenons ainsi les indicatrices suivantes :

$$S: \quad 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$

$$S_H: \quad a\gamma_0 - (a + b\gamma_1)(x^2 + y^2 + z^2) + b(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

Nous allons discuter la forme de ces indicatrices. Oz est un axe de rotation pour ces indicatrices; coupons-les par le plan $x = 0$. Nous obtenons ainsi respectivement pour S et S_H les courbes :

$$C: \quad y^2 + z^2 = 1,$$

$$C_H: \quad b(y^2 + z^2)^2 - (a + b\gamma_1)(y^2 + z^2) + a\gamma_0 = 0.$$

C est un cercle de centre l'origine et de rayon égal à 1; quant à C_H , nous allons voir qu'elle se compose de deux cercles. En effet en posant : $u = y^2 + z^2$, l'équation de C_H s'écrit

$$(13.6) \quad bu^2 - (a + b\gamma_1)u + a\gamma_0 = 0,$$

équation du second degré dont les racines sont les inverses de celles du

trinôme $\Pi(y)$ défini par (13.2) et pour lequel nous avons montré l'existence de deux racines comprises entre 0 et 1, y_{H_1} et y_{H_2} ; posons

$$R_1^2 = \frac{1}{y_{H_1}} = \frac{1}{v_{H_1}^2} > 1 \quad \text{et} \quad R_2^2 = \frac{1}{y_{H_2}} = \frac{1}{v_{H_2}^2} > 1.$$

L'équation (13.6) se décompose alors en

$$(13.7) \quad \begin{cases} C_{H_1}: & y^2 + z^2 = R_1^2 \\ C_{H_2}: & y^2 + z^2 = R_2^2, \end{cases}$$

qui sont les équations de deux cercles de centre l origine et de rayons respectifs R_1 et R_2 supérieurs à 1.

Ainsi, sous les hypothèses (K), le cône hydrodynamique du quatrième ordre Γ_H se décompose en deux cônes du second ordre dont l'un est intérieur à l'autre et qui contiennent dans leur intérieur le cône fondamental Γ . Nous en déduisons que l'opérateur différentiel associé aux ondes hydrodynamiques, définies par (12.3), est un opérateur hyperbolique strict; il en est de même de l'opérateur $u^\rho \partial_\rho$ associé aux ondes matérielles.

14. Caractère hyperbolique non strict du système (S).

a) Compte tenu des résultats du paragraphe 9, le système quasi-linéaire

$$(14.1) \quad h_1^i(x, D^{m_k - n_j - 1} v^k, \tilde{D}^{m_i - n_j} v^i) + b^i(x, D^{m_k - n_j - 1} v^k) = 0$$

est hyperbolique non strict au sens de Leray-Ohya pour des fonctions $w^k(C^\infty)$ si la condition suffisante suivante est vérifiée: en faisant

$$D^{m_k - n_j - 1} v^k = D^{m_k - n_j - 1} w^k, \quad j, k = 1, \dots, 10,$$

dans les coefficients de (14.1), les trois propriétés suivantes sont vérifiées:

1° Le polynôme caractéristique $H(l)$ est un produit de p polynômes hyperboliques stricts

$$(14.2) \quad H(l) = H_1(l) \dots H_p(l).$$

2° Les cônes définis par $H_i(l) = 0$ ($i = 1, \dots, p$) contiennent tous dans leur intérieur un même cône; celui-ci détermine alors le « domaine d'influence » de la solution.

3° En désignant par d_i le degré du polynôme H_i nous avons

$$(14.3) \quad \sup_i d_i \geq \sup_k m_k - \inf_j n_j.$$

Les conditions 1°, 2°, 3°, sont réalisées pour le système (S) et des fonctions w^k telles que les hypothèses (K) du paragraphe précédent soient vérifiées : le polynôme $H(l)$ défini par (12.2) est évidemment produit de polynômes hyperboliques de degré 1 ou 4 ; les cônes définis par $H_i(l) = 0$ correspondants contiennent tous dans leur intérieur le cône fondamental Γ ; la condition (14.3) est vérifiée puisque

$$\sup_i d_i = 4 \quad \text{alors que} \quad \sup_k m_k - \inf_j n_j = 1.$$

b) Les données de Cauchy, sur une hypersurface initiale Σ , sont

$$(14.4) \quad D^{m_k-1} v^k = D^{m_k-1} w^k \quad \text{sur} \quad \Sigma,$$

où les w^k sont des fonctions données dans un voisinage de Σ . Si Σ a pour équation locale $x^0 = 0$, (14.4) est équivalent à se donner, en posant $D_0 = \partial/\partial x_0$

$$(14.5) \quad \{ D_0^{m_k-1} v^k \}_{x^0=0} \quad \text{soit ici} \quad \{ u^\beta, q^\beta, p, S \}_{x^0=0}.$$

Pour des données de Cauchy sur Σ telles qu'il existe des w^k correspondants vérifiant les conditions d'hyperbolicité non stricte énoncées précédemment et appartenant à la classe de Gevrey $\gamma_2^{(\alpha)}(\Sigma)$ où $\alpha = p/(p-1)$, le système (S) a une solution unique dans une classe de Gevrey de même indice. Cette solution admet un domaine d'influence déterminé par le cône fondamental Γ qui est à l'intérieur de tous les cônes définis par $H_i(l) = 0$.

c) Reprenons le polynôme défini par (12.2). Écrivons-le de manière à y faire apparaître le plus petit nombre p possible de polynômes hyperboliques pour que l'indice α et donc la classe de Gevrey correspondante soit aussi grand que possible. Nous pouvons ainsi écrire $H(l)$ sous la forme

$$(14.6) \quad H = H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6,$$

avec

$$\begin{aligned} H_1 &= \kappa^3 r^4 f^4(u^\alpha l_\alpha), \\ H_2 &= H_3 = H_4 = H_5 = (u^\alpha l_\alpha), \\ H_6 &= (u^\alpha l_\alpha) P(l), \end{aligned}$$

où les polynômes H_i sont hyperboliques stricts et les cônes Γ_i correspondants admettent dans leur intérieur le cône fondamental Γ . Nous obtenons ainsi l'existence et l'unicité de la solution du système (S) dans une classe de Gevrey d'indice $\alpha = 6/5$; plus exactement, d'après (9.10), nous avons une solution unique

$$v^i \in \gamma_2^{m+11, (6/5)}(X')$$

puisque d'après (9.11) et (11.2) nous avons

$$\mu_i = 11 \quad \forall i = 1, \dots, 10,$$

$$m > \frac{3}{2} + 6 - 1 \quad \text{soit} \quad m \geq 7.$$

15. Caractère hyperbolique strict du système (S).

a) L'étude précédente nous a donné une borne inférieure égale à $6/5$ pour l'indice α de Gevrey. Nous allons, dans ce qui va suivre, améliorer cette valeur et nous ramener au cas $\alpha = \infty$, ce qui voudra dire que le système (S) est équivalent à un système hyperbolique strict.

D'après les résultats du paragraphe 9 d), nous savons que lorsque tous les mineurs H_j^i du déterminant d'éléments h_i^j contiennent en facteur un même polynôme $f(l)$ (qui est nécessairement produit de facteurs irréductibles de $H(l)$) nous pouvons obtenir une forme diagonale simplifiée pour le système. Si le polynôme

$$(15.1) \quad \hat{H}(l) = \frac{H(l)}{f(l)}$$

est produit de p' facteurs hyperboliques stricts, le système d'équations aux dérivées partielles a une solution et une seule dans une classe de Gevrey d'indice

$$(15.2) \quad \alpha' = p'/(p' - 1).$$

b) Un calcul élémentaire nous permet d'établir le

LEMME. — Tous les mineurs H_j^i des éléments h_i^j du déterminant H contiennent en facteur $(u^\alpha l_\alpha)^5$.

Ainsi le polynôme caractéristique simplifié donné par (15.1) où

$$f(l) = (u^\alpha l_\alpha)^5$$

est égal à

$$\hat{H}(l) = \kappa^3 r^4 f^4 (u^\alpha l_\alpha) P(l)$$

qui est un polynôme hyperbolique strict. La condition suffisante d'hyperbolicité non stricte du paragraphe 14 a) étant vérifiée et plus particulièrement l'inégalité (14.3), nous avons alors $p' = 1$ et d'après (15.2), $\alpha' = \infty$. Le système (S) est alors équivalent à un système hyperbolique strict pour lequel les théorèmes d'existence et d'unicité précédents sont valables dans

un espace de Sobolev convenable, plus exactement d'après (9.10) nous avons une solution unique

$$v^i \in L_{\infty,2}^{m+6}(X') \quad (\equiv H^{m+6}(X'))$$

puisque d'après (9.16)

$$\begin{aligned} \mu_i &= 6 & \forall i &= 1, \dots, 10 \\ m &> \frac{3}{2} + 1 - 1 & \text{soit} & \quad m \geq 2. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 7. — *Si un fluide relativiste conducteur de chaleur vérifie :*

$$\tau'_p < 0, \quad \theta'_p > 0, \quad \theta'_s > 0, \quad (rf)'_s < 0, \quad a(\gamma_0 - 1) > b(\gamma_1 - 1),$$

alors le système (S) qui régit son évolution est physiquement équivalent à un système hyperbolique strict admettant relativement au problème de Cauchy une solution unique dans un espace de Sobolev.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. CATTANEO, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, t. **247**, 1958, p. 431-433.
- [2] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT, *Astronautica Acta*, t. **6**, 1960, p. 354-365.
- [3] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT et PHAM MAU QUAN, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, t. **265**, 1965, p. 3987.
- [4] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT, *Communications Math. Phys.*, t. **3**, 1966, p. 334-357.
- [5] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT, *J. Math. pures et appliquées*, t. **45**, 1966, p. 371-386.
- [6] M. KRANYS, *Il Nuovo Cimento*, t. **42 B**, 1966, p. 51-70.
- [7] M. KRANYS, *Physics Letters*, t. **22**, 1966, p. 285-286.
- [8] M. KRANYS, *Il Nuovo Cimento*, t. **50 B**, 1967, p. 48-63.
- [9] A. D. LANDAU et E. M. LIFCHITZ, *Fluid mechanics*, Pergamon, London, 1958.
- [10] A. D. LANDAU et E. M. LIFCHITZ, *Course of theoretical physics*, Pergamon, New York, 1960.
- [11] J. LERAY, *Hyperbolic differential equations*, Institute for advanced study, Princeton, 1953, Notes miméographiées.
- [12] J. LERAY et Y. OHYA, *Mathematische Annalen*, t. **170**, 1967, p. 167-205.
- [13] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électro-magnétisme*, Masson et Cie, Paris, 1955.
- [14] A. LICHNEROWICZ, *Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics*, W. A. Benjamin, New York, Amsterdam, 1967.
- [15] A. LICHNEROWICZ, *Communications Math. Phys.*, t. **1**, 1966, p. 328-373.
- [16] J. C. LUCQUIAUD, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, t. **270 A**, 1970, p. 85-88.
- [17] B. MAHJOUR, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, t. **268 A**, 1969, p. 1440-1442.
- [18] PHAM MAU QUAN, *Annali di Matematica pura ed applicata*, t. **38**, 1955, p. 181.
- [19] PHAM MAU QUAN, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, t. **261**, 1965, p. 3049-3052.
- [20] A. H. TAUB, *Phys. Rev.*, t. **74**, 1948, p. 328-334.
- [21] P. VERNOTTE, *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, t. **246**, 1958, p. 3154-3155.

Manuscrit reçu le 5 octobre 1970.