ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

P. BERNAT

Représentations unitaires des groupes de Lie résolubles

Annales de l'I. H. P., section A, tome 13, n° 3 (1970), p. 241-252

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__13_3_241_0>

© Gauthier-Villars, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XIII, n° 3, 1970, p. 241-252. *Physique théorique.*

Représentations unitaires des groupes de Lie résolubles

par

P. BERNAT

1. INTRODUCTION

Soit G un groupe localement compact séparable. Dans ce qui suit, on appelle représentation de G tout morphisme faiblement continu ρ de G dans le groupe unitaire $U(\mathscr{H})$ d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$; la dimension de ρ est, par définition celle de $\mathscr{H}$. Le dual de G, noté $\hat{G}$, est par définition, l'ensemble des classes de représentations irréductibles (pour l'équivalence unitaire). L'étude des représentations de dimension infinie doit sans doute son développement très rapide dès 1950, aux travaux de G. W. Mackey. En particulier, en étendant aux groupes localement compacts la théorie des représentations induites conçue par Frobénius pour l'étude des groupes finis, Mackey a créé un outil particulièrement efficace, notamment lorsque le groupe étudié contient « beaucoup » de sous-groupes fermés.

Tel est le cas si G est un groupe de Lie résoluble (et, disons pour fixer les idées, réel et simplement connexe). On sait qu'il existe alors une suite $G \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n \supset G_{n+1} = 0$ de sous-groupes fermés distingués à quotients commutatifs. L'opération d'induction permet dans une certaine mesure, de ramener l'étude des représentations de G_i à celle des représentations de G_{i+1} (techniquement, c'est en fait un peu moins simple) ; d'où, naturellement, une méthode d'approche par récurrence sur dim G.

Les premiers résultats dans ce sens furent obtenus par J. Dixmier en 1951, dans l'étude des groupes nilpotents. Ils furent complétés par Kirillov, de façon fort élégante, en 1960. Takenouchi, entre temps, avait abordé l'étude des groupes résolubles non nilpotents. Dès lors, deux groupes de problèmes étaient apparus.

A) Déterminer la classe des groupes résolubles de type I.
B) Classer les représentations irréductibles d'un groupe donné.

A la suite de Takenouchi, Dixmier, Auslander, Moore, Brezin donnèrent du problème A) des solutions partielles, mais relativement concrètes (en ce sens qu'il est assez facile de décider si tel groupe donné vérifie les critères correspondants). De même, Pukansky et moi-même précisèrent en partie les résultats de Kirillov relatifs au problème B). Enfin, Kostant vient de donner une solution globale, et en un sens définitive, aux deux problèmes; mais les caractérisations qu'elle donne sont très générales et, loin de clore le débat, elles vont au contraire, je crois, le relancer.

2. L'ITINÉRAIRE

Dans une première partie, on définit le « spectre de Jordan-Hölder » S(G) d'un groupe de Lie résoluble, et on esquisse, à partir de là, une classification des groupes de Lie résolubles. Dans une seconde, on examine dans quelle mesure les solutions du problème A dépendent de S(G). Dans une troisième, on étudie le problème B pour la classe des groupes exponentiels. En conclusion, on esquisse, très brièvement, les grandes lignes de la théorie de Kostant.

Désormais, G désigne un groupe de Lie résoluble réel simplement connexe; N le plus grand sous-groupe distingué fermé connexe nilpotent de G, appelé encore nil-radical de G; $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G, $\hat{G}$ le dual de G; $\mathcal{G}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathcal{G}$.

3. LE SPECTRE DE JORDAN-HOLDER DE G

Soit M un $\mathcal{G}$-module de dimension finie. Une J·H suite de M (= suite de Jordan-Hölder de M) est une suite S:

$$M = M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_n \supset M_{n+1} = \{0\}$$

de sous-$\mathcal{G}$-modules, maximale en ce sens que les quotients M_i/M_{i+1} sont des modules simples; $n = l(S)$ est la longueur de S. Deux J·H suites de M sont isomorphes (théorème de Jordan-Hölder): elles ont même longueur, et, à une permutation près des indices, leurs quotients sont des $\mathcal{G}$-modules isomorphes; $\mathcal{G}$ étant résoluble, tout $\mathcal{G}$-module M admet une J·H suite $S = (M_i)$ et $\dim (M_i/M_{i+1}) < 2$. Complexifions, et posons $\bar{\mathcal{G}}$: $\mathcal{G} \otimes \mathbb{C}$, $\bar{M} = M \otimes \mathbb{C}$, etc. Alors $(\bar{M}_i)$ est une suite de $\bar{\mathcal{G}}$-modules (qui n'est pas en général maximale) et il existe une J·H suite $S' = (M'_j)$ de $\bar{\mathcal{G}}$-modules, plus fine que $(\bar{M}_i)$, à quotients de dimension 1. Posons $m = l(S')$,

$n = l(S)$, et $I_p = \{1, \ldots, p\}$, pour $p \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une injection croissante $i \to \pi(i)$ de I_{n+1} dans I_{m+1} telle que

1) $M'_{\pi(i)} = \overline{M}_i$ pour $i \in I_{n+1}$, 2) $\pi(i)+1 \in I_{m+1} - \mathrm{Im}\ \pi \Rightarrow \pi(i)+2 = \pi(i+1)$.

Soit $M'_j/M'_{j+1} = \mathbb{C}\alpha_j$. Il existe $\lambda_j \in \mathcal{G}^* = \mathcal{G}^* \otimes \mathbb{C}$ tel que $\overline{g} \cdot \alpha_j = \lambda_j(\overline{g})\alpha_j$ pour tout $\overline{g} \in \overline{\mathcal{G}}$ et $\lambda_j^1, \lambda_j^2 \in \mathcal{G}^*$ tels que $\lambda_j^1(g) + \sqrt{-1}\lambda_j^2(g) = \lambda_j(g)$ pour tout $g \in \mathcal{G}$. Les λ_j sont les *racines* de $\mathcal{G}$ dans M ; λ_j est dite *réelle* (resp. purement imaginaire) si λ_j^2 (resp. λ_j^1) est nul ; deux racines $\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}$ sont *imaginaires conjuguées* si $\lambda_{j_1}^1 = \lambda_{j_2}^1$ et $\lambda_{j_1}^2 + \lambda_{j_2}^2 = 0$. La collection des racines, chacune étant répétée selon sa multiplicité est le *spectre* de Jordan-Hölder de $\mathcal{G}$ dans M, noté S(M). Les racines sont réelles ou deux à deux imaginaires conjuguées et déterminent entièrement l'action de $\mathcal{G}$ sur les quotients M_i/M_{i+1}. De manière précise, il existe une base $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ de M telle que $M'_j = M'_{j+1} \oplus \mathbb{C}\beta_j$ pour $j \in I_m$, et que, étant donnés $g \in \mathcal{G}$, $i \in I_n$ et $j = \pi(i)$

— si $j + 1 = \pi(i + 2)$, λ_j est réelle, $M_i = M_{i+2} \oplus \mathbb{R}\beta_j$ et

$$g \cdot \beta_j = \lambda_j(g)\beta_j \bmod M_{i+1}$$

— si $j + 2 \notin \mathrm{Im}\ \pi$, alors $\lambda_j^2 \neq 0$, les racines λ_j et λ_{j+2} sont conjuguées, $M_i = M_{i+1} \oplus \mathbb{R}\beta_j \oplus \mathbb{R}\beta_{j+2}$ et

$$\begin{cases} g \cdot \beta_j = \lambda_j^1(g)\beta_j - \lambda_j^2(g)\beta_{j+2} \bmod M_{i+1} \\ g \cdot \beta_{j+2} = \lambda_j^2(g)\beta_j + \lambda_j^2(g)\beta_{j+2} \bmod M_{i+2} \end{cases}$$

(autrement dit, $M'_j/M'_{j+2} = \overline{M}_i/\overline{M}_{i+1}$ est un $\overline{\mathcal{G}}$-module de dimension 2, somme directe des $\mathcal{G}$-modules engendrés par les images canoniques de $\beta_j \pm \sqrt{-1}\beta_{j+1}$).

En particulier, prenant $M = \mathcal{G}$ muni de la structure de $\mathcal{G}$-module défini par la représentation adjointe, nous obtenons le spectre de Jordan-Hölder $S(G) = S(\mathcal{G})$; ses éléments sont les racines de $\mathcal{G}$ sur G. On notera que les J·H suites de $\mathcal{G}$ sont les suites décroissantes maximales d'idéaux de $\mathcal{G}$.

Nous dirons que G est

— de type (N) (ou nilpotent) si toutes les racines de G sont nulles ;

— de type (CR) (ou complètement résoluble) si toutes les racines de G sont réelles ;

— de type (R) si toutes les racines de G sont purement imaginaires ;

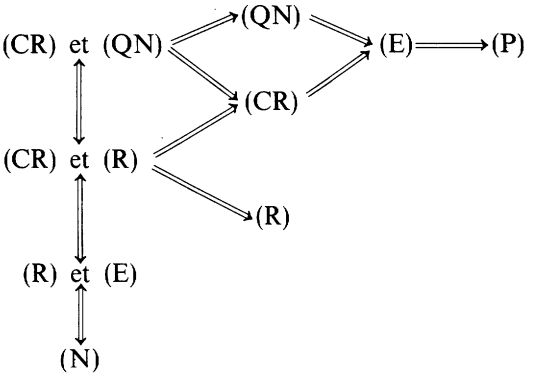
— de type (E) (ou exponentiel) si, pour toute racine λ, $\lambda^2 \in \mathbb{R}\lambda^1$ $(\lambda = \lambda^1(1 + \alpha\sqrt{-1}), \alpha \in \mathbb{R})$;

— de type (QN) (ou quasi-nilpotent), si G est exponentiel et n'a pas de racine réelle $\neq 0$;

— de type (P) si, pour tout couple (λ, μ) de racines de G, λ^2 et μ^2 sont linéairement dépendants sur Q modulo $(\mathbb{R}\lambda^1 + \mathbb{R}\mu^1)$ i. e. s'il existe $a, b \in \mathbb{Q}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, et $c, d \in \mathbb{R}$, tels que

$$a\lambda^2 + b\mu^2 + c\lambda^1 + d\mu^1 = 0.$$

On a évidemment les implications :



Exemple 1. — Le revêtement universel du groupe des rotations du plan est de type (R) et de type (P) mais n'est pas exponentiel :

$$S(G) = \{ \lambda_1, \lambda_2 \}\ \lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{-1}\lambda_1^2.$$

2. Le groupe des bijections affines de la droite (groupe « $ax + b$ ») est de type (CR) (mais n'est pas nilpotent).

3. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = GL(n, \mathbb{R})$. L'action de A définit une algèbre de Lie résoluble $\mathcal{G}_A$, extension inessentielle de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^n$. Soit $Sp(A) = \{ \alpha_j \}$ le spectre de A. Alors $S(\mathcal{G}) = \{ \alpha_j \mathbb{C} \}$.

Remarque. — L'application exponentielle $\mathcal{G} \to G$ est un isomorphisme (global) de variété si et seulement si G est de type (E), ce qui justifie la terminologie utilisée [6].

4. GROUPES DE TYPE I ET SPECTRE DE JORDAN-HOLDER

4.1. Rappelons quelques définitions, valables pour tout groupe localement compact et séparable. Une algèbre de Von Neumann est de type I si elle est isomorphe à une algèbre de Von Neumann à commutant abélien ;

c'est un facteur si son centre est réduit aux scalaires. Toute représentation π de G dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ définit

1) Une algèbre de Von Neumann $A_\pi \subset \mathscr{L}(\mathscr{H})$: celle qu'engendre $\pi(G)$

2) Une représentation $\tilde{\pi}$ de $L^1(G)(= L_1(G, dx)$, dx étant la mesure de Haar) par la formule

$$\tilde{\pi}(f)\xi = \int_G f(x)\pi(x)\xi dx,$$

où $(f, \xi) \in L^1(G) \times \mathscr{H}$.

L'application $f \to \sup_\pi \| \tilde{\pi}(f) \| \leqslant \| f \|$ est une norme N sur $L^1(G)$ et la complétée de $L^1(G)$ pour N est une C*-algèbre, notée C*(G). Une C*-algèbre C est liminaire (ou CCR) si l'image de C par une représentation irréductible quelconque est formée d'opérateurs compacts ; elle est post-liminaire (ou GCR) si elle admet une J·H-suite (éventuellement transfinie) à quotients liminaires. Le groupe G est liminaire (resp. postliminaire) si C*(G) est liminaire (resp. postliminaire) ; une représentation π de G est de type I (resp. factorielle) si A_π est de type I (resp. un facteur), et G est dit de type I si toute représentation de G est de type I.

Soient les assertions : (*a*)G est postliminaire ; (*b*) G est de type I ; (*c*) toute représentation factorielle de G est de type I ; (*d*) G est liminaire ; (*e*) pour toute représentation irréductible π de G, et pour tout $f \in L^1(G)$, $\tilde{\pi}(f)$ est un opérateur compact. On a les implications :

$$\begin{array}{ccccc} a & \Leftrightarrow & b & \Leftrightarrow & c \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ d & \Leftrightarrow & e. & & \end{array}$$

4.2. Dès 1957, J. Dixmier montrait que tout groupe nilpotent est de type I [*4*] ; Takenouchi vérifiait peu après que tout groupe exponentiel est de type I [*12*]. La technique de démonstration est à peu près la suivante : soient $\mathscr{G}_0$ un idéal de $\mathscr{G}$, minimal parmi les idéaux non centraux, et $G_0 = \exp \mathscr{G}_0$; G_0 et $\mathscr{G}_0$ sont commutatifs, et G opère sur $\hat{G}_0$ par conjugaison. Soit $\hat{G}_0/G$ l'espace des orbites. Le choix d'une base de $\mathscr{G}_0$ permet d'identifier $\hat{G}_0$ à $\mathbb{R}^p$, $1 \leqslant p \leqslant 3$, et les équations des G-orbites s'expriment aisément à l'aide d'une racine λ de $\mathscr{G}$: celle qui exprime l'action de $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{G}_0 \mathrm{Z}(\mathscr{G}) \cap \mathscr{G}_0$, $Z(\mathscr{G})$ étant le centre de $\mathscr{G}$. Il apparaît que ces orbites ne sont pas trop « entrelacées », i. e. G_0 est régulièrement plongé dans G, au sens de Mackey [*9*].

La théorie de Mackey dit alors que les représentations factorielles ρ de G dont les restrictions, à G_0 si $\mathscr{G}_0 \cap Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$, à $\exp(\mathscr{G}_0 \cap Z(\mathfrak{g}))$ sinon, ne sont pas triviales, sont induites par des représentations facto-

rielles ρ' de sous-groupes fermés connexes de G, de dimension $<$ dim G, et sont de type I, si les représentations ρ' le sont aussi. Quant aux autres représentations factorielles de G, elles s'identifient à des représentations de quotients de G, de dimension $<$ dim G : on a gagné une dimension et on conclut par récurrence.

4.3. Le point crucial de la démonstration était une propriété de séparation des orbites. S'inspirant de l'exemple classique des géodésiques du tore à pas irrationnel, Mautner avait déjà construit, en 1950, un groupe résoluble G, de dimension 5, de type (R), qui n'était pas de type I, et tel que $S(G) = S(G) = \{ i\lambda, -i\lambda, i\theta\lambda, -i\theta\lambda \}$, $\lambda \in \mathcal{G}^*$, $\theta \in \mathbb{R} - Q$ [*10*]. On pouvait dès lors espérer que la propriété, pour un groupe, d'être de type I, était liée à des relations de rationalité entre racines. Dixmier s'attaquait au problème, en 1960, et y mettait, en quelque sorte, un point final. D'une part, il montrait que les groupes de type (P) sont de type I, d'autre part il donnait l'exemple de deux groupes ayant même spectre de Jordan-Hölder, l'un de type I et l'autre pas : dans l'ensemble des groupes résolubles, la partie formée des groupes de types I n'est pas saturée pour l'équivalence définie par l'application $G \to S(G)$.

4.4. En 1966, Auslander et Moore, reprenant et affinant les techniques de Mackey, montraient que : 1) un groupe résoluble G est liminaire si et seulement si il est postliminaire et de type (R) ; 2) si le nil-radical N d'un groupe G de type (R) n'est pas régulièrement plongé dans G, alors G n'est pas de type I. Cette dernière conclusion est fausse si G n'est pas de type (R). Ils obtenaient en outre des algorithmes assez précis pour déterminer si un groupe de type (R) à nil-radical régulièrement plongé est de type (I) [*1*].

Voici, très grossièrement les outils de leurs démonstrations

a) Une α-représentation π d'un groupe localement compact H dans $\mathcal{H}$ est un couple d'applications boréliennes

$$\pi : H \to U(\mathcal{H}), \quad \alpha : H \times H \to \mathbf{T} = \{ z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \}$$

telles que $\pi(st) = \alpha(s, t)\pi(s)\pi(t)$; écrivant que $(st)r = s(tr)$, on obtient que $\alpha \in Z^2(H, \mathbf{T})$ (α est un cocycle) ; par ailleurs π définit un morphisme

$$p(\pi) : H \to U(\mathcal{H})/\mathbf{T}$$

dit représentation projective (r. p.) de H. Si π' est une α'-représentation telle que $p(\pi) = p(\pi')$ alors α et α' ont même classe de cohomologie a ; si en outre $\alpha = \alpha'$, il existe $\lambda \in X(H) = \mathrm{Hom}(H, \mathbf{T})$ tel que $\pi' = \lambda\pi$. On associe ainsi à toute r. p. $\tilde{\pi}$ un élément $a \in H^2(H, \mathbf{T})$: $\tilde{\pi}$ est dite une a-repré-

sentation projective. Les r. p. (resp. les α-représentations) irréductibles, factorielles, de type I, se définissent comme d'habitude. Deux r. p. $\tilde{\pi}$, $\tilde{\pi}'$ dans $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$ sont équivalentes si elles ont un opérateur de commutation de $P(\mathscr{H})$ sur $P(\mathscr{H}')$ « projectivement unitaire ». Soit π (resp. π') une α-représentation ; π est irréductible (resp. factorielle, de type I) si et seulement si $p(\pi)$ l'est ; $\pi \simeq \pi'$ implique $p(\pi) \simeq p(\pi')$, mais la réciproque est fausse. H est dit de type I pour α (resp. a) si les α-représentations (resp. les a-r. p.) de H sont de type I. $\hat{H}_a$ (resp. $(\widehat{H, \alpha})$) est l'ensemble des classes de a-r. p. (resp. α-représentations) irréductibles. Soit $\alpha \in a \in H^2(H, \mathbf{T})$; on a $p(\widehat{H, \alpha}) = \hat{H}_a$; soit $p(\alpha) = p \mid (\widehat{H, \alpha})$. Il résulte de ce qui précède que X(H) opère sur les fibres $p(\alpha)^{-1}(\tilde{\pi})$, si $\tilde{\pi} \in \hat{H}_a$.

b) La donnée d'un cocycle $\alpha \in Z^2(H, \mathbf{T})$ définit une extension

$$0 \to \mathbf{T} \to H_\alpha \to H \to 0.$$

Si $\alpha, \alpha' \in a \in H^2(H, \mathbf{T})$, H_α et $H_{\alpha'}$ sont isomorphes et inversement ; on peut donc définir H_a. Les α-représentations de H s'identifient à des représentations de H_a. Auslander et Moore donnent des critères pour que H_a soit de type I (et donc pour que H soit de type I pour a).

c) Soient K un sous-groupe distingué fermé de H, et $x \in \hat{K}$. Notons i les applications canoniques

$$Z^2(K/N', \mathbf{T}) \to Z^2(K, N), \quad H^2(K/N', \mathbf{T}) \to H^2(K, \mathbf{T}).$$

H agit sur $\hat{K}$ par conjugaison. Supposons x fixé par H. En général x ne se prolonge pas en une représentation de H, mais il existe des cocycles $\beta' \in Z^2(K/N', \mathbf{T})$ et des $i(\beta)$-représentations de H prolongeant x. Tous ces cocycles β' sont de même classe $b \in H^2(H/K', \mathbf{T})$; $b = b^{-1}$ est l'obstruction de Mackey de x ; pour que x se prolonge en une représentation (ordinaire) de H, il faut et il suffit que $b = 1$. Pour tout $\beta \in G$, il existe une bijection des classes de β-représentations factorielles de H/K sur les classes de représentations factorielles de H dont la restriction à K est un multiple de x. Si K est de type I et si H/K est de type I pouf G, alors ces dernières sont de type I (Mackey).

d) Soient G, N comme plus haut, π une représentation factorielle de G, $p = \pi/N$. Alors il existe une mesure μ sur $\hat{N}$, ergodique et quasi-invariante sous l'action de G, telle que

$$\rho = \int_{\hat{N}} x d\mu(x),$$

et ρ définit une classe (unique) de telles mesures ; on dit alors que π est « au-dessus de $C(\mu)$ ». Si C (μ) est portée par une G-orbite Gx, $x \in \hat{N}$, $C(\mu)$

est dite transitive : c'est le cas, en particulier, si N est régulièrement plongé dans G. Supposons $C(\mu)$ transitive. Soit H_x le stabilisateur de x. Il existe alors une représentation factorielle ρ_1 de H_x qui induit π, et dont la restriction à N est un multiple de x : il résulte alors de c que ρ_1 (et donc π) est de type I si $H_{x/N}$ est de type I pour l'obstruction de Mackey de x relativement à H_x, ce qu'on sait théoriquement déterminer (cf. *b*).

e) Si N n'est pas régulièrement plongé dans G, il existe des classes $C(\mu)$ quasi-invariantes ergodiques non transitives. Auslander et Moore en construisent du type suivant :

— $C(\mu)$ est portée par un borélien $E \subset \hat{N}$, G-invariant, et tel que les applications suivantes de source E

$$x \to H_x = \text{stabilisateur de } x.$$
$$x \to b_x = \text{obstruction de Mackey de } x \text{ par rapport à } H_x$$

soient constantes de valeur H, b ; et $\widehat{(H/N)}b$ est de type I.

— L'ensemble F des représentations irréductibles de H telles que $\rho \mid N$ soit un multiple d'un $x \in E$ est un espace borélien standard, boréliennement isomorphe à $E \times p^{-1}\widehat{(H/N)}b$: soient $x \in E$, $y \in \widehat{(H/N)}b$, $\beta' \in b^{-1}$, $\tilde{x}$ une β'-représentation de H prolongement $x \in E$, $\beta = \beta'^{-1}$, $y_1 \in p(\beta)^{-1}(y_1)$, $\tilde{y}_1$ le prolongement naturel à H de y_1 ; alors $(x, y) \to \tilde{x} \otimes \tilde{y}_1$ est l'isomorphisme borélien cherché.

Comme on l'a vu (§ *c*) X(H/N) opère sur $p(\beta)^{-1}(y)$. Le stabilisateur de y_1 ne dépend que de y ; notons-le X(H/N, y) et posons

$$A(y) = X(H/N)/X(H/N, y).$$

Le nœud du raisonnement consiste alors à montrer que, s'il existe $y \in \widehat{(H/N)}b$ tel que $A(y)$ soit compact, alors les représentations de G au-dessus de $C(\mu)$ ne sont pas toutes de type I ; tel est le cas si N n'est pas régulièrement plongé dans G.

4.5. Reprenant d'un point de vue plus algébrique les techniques d'Auslander et Moore, Brezin se débarrassait bientôt de l'hypothèse « de type (R) ». Disons que G est « quasi de type I » si toute représentation factorielle de G au-dessus d'une classe $C(\mu)$ quasi-invariante, ergodique et transitive de $\hat{N}$ est de type I. Soit E l'espace des orbites de $\mathcal{G}^*$ sous l'action de G, opérant par la représentation adjointe. Brezin montre que pour un groupe résoluble G quasi de type I, les conditions suivantes sont équivalentes : *a*) G est de type I ; *b*) toutes les mesures sur $\mathcal{G}^*$ quasi invariantes et ergodiques pour G sont transitives ; *c*) E est un espace de Kolmogorov ; *d*) E est espace borélien standard ; *f*) les orbites de $\mathcal{G}^*$ sont des G_δ. Il s'ensuit en particu-

lier que G n'est pas de type I dès que $\mathcal{G}^*$ admet des mesures ergotiques non transitives [2]. Pukansky vient de montrer que G est de type I dès que ad $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie algébrique.

5. CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES

5.1. Supposons G exponentiel. L'idée de classifier $\hat{G}$ à l'aide de $\mathcal{G}^*$ vient du fait suivant. Soient $f \in \mathcal{G}^*$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathcal{G}$, $H = \exp \mathfrak{h}$ le sous-groupe correspondant. Disons que h est subordonnée à f si f s'annule sur $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Alors f définit un caractère de H, $\chi(f, \mathfrak{h})$: $\exp h \to e^{if(h)}$, i. e. une représentation de dimension 1, laquelle induit une représentation $\rho(f, \mathfrak{h})$ de G. Se posent alors naturellement les questions suivantes :

A) Obtient-on de la sorte toutes les représentations irréductibles de G ?

B) f étant donné, comment choisir $\mathfrak{h}$ pour que $\rho(f, \mathfrak{h})$ soit irréductible ?

C) A quelle condition $\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f', \mathfrak{h}')$ (où $f' \in \mathcal{G}^*$, et $\mathfrak{h}'$ est subordonnée à f') ?

Dans le cas nilpotent, Kirillov avait apporté des réponses très simples à ces 3 questions : les représentations irréductibles sont (à une équivalence près) les représentations $\rho(f, \mathfrak{h})$, où $\mathfrak{h}$ est de dimension maximum parmi les sous-algèbres subordonnées, et $\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq (f', \mathfrak{h}')$ si et seulement si f et f' sont sur une même G-orbite de $\mathcal{G}^*$ (G opérant sur $\mathcal{G}^*$ par la représentation adjointe) ; bref $\hat{G}$ s'identifie canoniquement à l'ensemble Ω des G-orbites de $\mathcal{G}^*$.

5.2. On peut encore donner une réponse satisfaisante à A, B, C si G est exponentiel ; Takenouchi, en établissant que G est de type I, avait déjà montré que toutes les représentations irréductibles sont de la forme $\rho(f, \mathfrak{h})$. Pour expliciter les autres résultats, notons, pour $f \in \mathcal{G}^*$: *a*) $0(f)$ la G-orbite de f, *b*) $S(f)$ l'ensemble des sous-algèbres de $\mathcal{G}$ subordonnées à f, *c*) $\mathcal{I}(f)$ l'ensemble des $\mathfrak{h} \in S(f)$ telles que $\rho(f, \mathfrak{h})$ soit irréductible, *d*) $\mathcal{M}(f)$ l'ensemble des $\mathfrak{h} \in S(f)$ de dimension maximum. Il est apparu très vite que, si G n'est pas nilpotent, on n'a plus en général $\mathcal{M}(f) = \mathcal{I}(f)$ (le groupe « $ax+b$ » fournit déjà un contre-exemple). J'ai montré cependant que l'égalité subsistait si G est quasi nilpotent, et qu'on avait en tout cas $\mathcal{I}(f) \subset \mathcal{M}(f)$ [3]. Y regardant de plus près, Pukansky a caractérisé $\mathcal{I}(f)$ comme l'ensemble des $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(f)$ telles que $\mathfrak{h}^\perp + f \subset 0(f)$. Il est facile de voir, par ailleurs, que les $\mathfrak{h} \in \mathcal{I}(f)$ contiennent le socle de $\mathcal{G}$ (i. e. la somme des idéaux minimaux de $\mathcal{G}$).

5.3. Les méthodes de Kirillov pour classifier $\hat{G}$ se généralisent assez naturellement aux groupes exponentiels. Esquissons-en la technique dans ce cas. On procède par récurrence sur la dimension de G. Soient $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathcal{G}$, $C = \exp \mathfrak{c}$ celui de G, $f \in \mathcal{G}^*$. On classifie G suivant la nature des « petits idéaux de $\mathcal{G}$ », plus précisément, des idéaux $\neq \{0\}$ de $\mathcal{G}$ qui sont, minimaux et $\neq \mathfrak{c}$, soit, si $\mathfrak{c} \neq 0$ est le seul idéal minimal de $\mathcal{G}$ (donc $\dim \mathfrak{c} = 1$), minimaux parmi les idéaux contenant strictement $\mathfrak{c}$. Ces idéaux sont commutatifs ; soit D leur ensemble. Le cas $\dim \mathfrak{c} > 1$ est trivial : pour tout $\mathfrak{h} \in \mathcal{I}(f)$, $\rho(f, \mathfrak{h})$ s'identifie à une représentation irréductible de

$$G/\exp(\mathfrak{c} \cap \operatorname{Ker} f),$$

et la récurrence marche aussitôt. Supposons $\dim \mathfrak{c} \leqslant 1$ et soient $\mathfrak{a} \in D$, $\exp \mathfrak{a} = A$.

Supposons $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c} = \{0\}$. Si $f \mid \mathfrak{a} = 0$, alors $\rho(f, \mathfrak{h}) \mid A = 1$, et la récurrence marche encore. Supposons $f \mid \mathfrak{a} \neq 0$, et notons $z(\mathfrak{a})$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{G}$, i. e. l'ensemble des $x \in \mathcal{G}$ tels que $[x, \mathfrak{a}] = 0$. Alors $\mathfrak{h} \subset z(\mathfrak{a})$, i. e. $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] = 0$. En effet, il est facile de voir que, si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] \neq 0$ et $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 0$, alors $\chi(\rho, f)$ induit une représentation réductible de $\exp(\mathfrak{h} + \mathfrak{a})$ ($\rho(f, \mathfrak{h})$ serait donc réductible), et on remarque par ailleurs que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] \neq 0$ et $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \neq 0$ impliquent $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \supset \mathfrak{a}$, donc $f \mid \mathfrak{a} = 0$, ce qu'on a exclu. Un petit calcul montre alors que $0(f)$ contient dans les $f' \in \mathcal{G}^*$ tels que $f' \mid z(\mathfrak{a}) = f \mid z(\mathfrak{a})$, et un autre argument de réductibilité, que $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$. Soient alors $f' \in \mathcal{G}^*$ et $\mathfrak{h}' \in \mathcal{I}(f')$ tels que $\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f', \mathfrak{h}')$. Alors $f' \mid \mathfrak{a} \neq 0$, et, comme A est régulièrement plongé danx G [9], les représentations équivalentes $\rho(f, \mathfrak{h}) \mid A$ et $\rho(f', \mathfrak{h}') \mid A$ sont de la forme

$$\int_{\hat{A}} x d\mu(x), \qquad \int_{\hat{A}} x d\mu'(x),$$

où μ (resp. μ') est une mesure portée par l'orbite ω (resp. ω') de $\chi(f, \mathfrak{a})$ (resp. $\chi(f', \mathfrak{a})$ sous l'action de G. Donc $\omega = \omega'$ et il existe $g_1 \in G$ tel que $g_1 \cdot f' \mid \mathfrak{a} = f \mid \mathfrak{a}$. On peut donc supposer $f \mid \mathfrak{a} = f' \mid \mathfrak{a}$. On sait alors que $\mathfrak{h}' \subset z(\mathfrak{a})$ et que les stabilisateurs de $\chi(f, \mathfrak{a})$ et $\chi(f', \mathfrak{a})$ sont égaux à $\exp z(\mathfrak{a})$. La théorie de Mackey montre alors que ces caractères induisent des représentations équivalentes de $\exp z(\mathfrak{a})$: donc, par l'hypothèse de récurrence, il existe $g_2 \in \exp z(\mathfrak{a})$ tel que $g_2 \cdot f' \mid z(\mathfrak{a}) = f \mid z(\mathfrak{a})$, donc, d'après ce qui précède $g_2 \cdot f' \in 0(f)$, $f' \in 0(f)$.

Supposons $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{c}$. On règle comme plus haut le cas : $f \mid \mathfrak{c} = 0$. Supposons $f \mid \mathfrak{c} \neq 0$. Notons $\mathfrak{g}(f \cdot \mathfrak{a})$ l'ensemble $\{x, [x, \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f] \subset \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f\}$.

C'est une sous-algèbre de $\mathcal{G}$ et exp $\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$ est le stabilisateur de $\chi(f, \mathfrak{a})$. Soit $\mathfrak{h} \in \mathcal{I}(f)$. Alors $\mathfrak{h} \cap \mathcal{G}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a} \subset \mathcal{G}(f, \mathfrak{a})$ est un élément de $\mathcal{I}(f)$, et $\rho(f, \mathfrak{h})$, $\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f, \mathfrak{h} \cap \mathcal{G}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a})$ [on est ramené à vérifier l'équivalence de groupes résolubles de dimension 4 ou 6], ce qui permet de supposer $\mathfrak{h} \subset \mathcal{G}(f, \mathfrak{a})$. Il est facile de s'assurer que $0(f)$ contient tous les $f' \in \mathcal{G}^*$ tels que $f' \mid \mathcal{G}(f, \mathfrak{a}) = f \mid \mathcal{G}(f, \mathfrak{a})$, et le même raisonnement que plus haut, où l'on remplace $z(\mathfrak{a})$ par $\mathcal{G}(f, \mathfrak{a})$, permet encore de conclure que $\rho(f', \mathfrak{h}') \simeq \rho(f, \mathfrak{h})$ implique $f' \in 0(f)$.

5.4. Brezin [2] a, dans une certaine mesure, généralisé les résultats précédents à une classe de groupes, qu'il appelle inductifs, lesquels ne sont pas nécessairement de type I. G est inductif si l'action de G sur $\mathcal{G}^*$ est régulière, si toute représentation irréductible de G est « au-dessus » d'une G-orbite de $\hat{\mathrm{N}}$, et si les formes linéaires sur $\mathcal{G}$ vérifient une certaine condition de régularité qu'on peut traduire à peu près en disant qu'elles admettent toutes des sous-algèbres subordonnées de dimension « assez grande ». Soit R la relation d'équivalence suivante sur $\hat{\mathrm{G}}$: ρ_1, ρ_2 sont équivalents pour R s'ils sont au-dessus d'une même G-orbite de $\hat{\mathrm{N}}$, soit 0, et si, pour $\pi \in 0$, ρ_1 et ρ_2 sont au-dessus et une même G-orbite de $\hat{\mathrm{K}}$, K étant la composante de l'élément neutre de stabilisateur de π. Alors, si G est inductif, il existe une bijection canonique de l'ensemble des G-orbites de $\mathcal{G}^*$ sur $\hat{\mathrm{G}}/\mathrm{R}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AUSLANDER et C. MOORE, Unitary representations of solvable Lie groups. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, n° 62, 1966.

[2] J. BREZIN, Unitary representations theory for solvable Lie groups. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, n° 79, 1968.

[3] P. BERNAT, Sur le dual d'un groupe exponentiel résoluble. *Ann. Ec. Norm. Sup.*, Paris, 1965.

[4] J. DIXMIER, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, II. *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. **85**, 1957, p. 325-388.

[5] J. DIXMIER, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles. *Math. J. okayama Univ.*, vol. **11**, 1962, p. 1-18.

[6] J. DIXMIER, L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles. *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. **85**, p. 113-121.

[7] A. KIRILLOV, Unitarnye predstavlenija nil'potentnykh grupp Lie. *Uspekhi matematičes-kikh Nauk.*, t. **17**, n° 4, 1962, p. 57-110.

[8] L. AUSLANDER et B. KOSTANT, Quantization and representation of solvable Lie groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1967.

[9] G. W. MACKEY, Imprimitivity for representations of locally compact groups. *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. **35**, 1949, p. 537-545.

[*10*] F. I. MAUTWER, Unitary representations of locally compact groups, II. *Ann. Math.*, t. **32**, 1950, p. 528-556.

[*11*] L. PUKANSKY, On the theory of exponential group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **126**, 1967, p. 487-507.

[*12*] O. TAKENOUCHI, Sur le facteur représentation des groupes de Lie de type (E). *Math. J. Pkayama Univ.*, t. **7**, 1957, p. 151-161.

Manuscrit reçu le 19 février 1970.