ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

D. GERBAL
B. LÉAUTÉ

Champ vectoriel et configurations d'équilibre de grosses masses en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 10, nº 3 (1969), p. 349-357
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__10_3_349_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. X, n° 3, 1969, p. 349-357. *Physique théorique.*

Champ vectoriel et configurations d'équilibre de grosses masses en relativité générale

par

D. GERBAL (*) et B. LÉAUTÉ
Laboratoire de Physique théorique associé au C. N. R. S.,
Institut H. Poincaré.

RÉSUMÉ. — Nous étudions les configurations matérielles à symétrie sphérique en équilibre sous l'action, d'une part, du champ de gravitation et d'un champ vectoriel répulsif à courte portée d'autre part. Les équations étant résolues aux deux premiers ordres, on constate que des configurations de masses très supérieures à la masse solaire sont possibles.

L'équation de compressibilité au centre de la configuration est comparée avec celles obtenues en relativité restreinte par d'autres auteurs.

SUMMARY. — The object of this study will be, the spherically symmetric material configurations in equilibrium under the action of the gravitational field on one hand and a short range vectoriel repulsive field on the other. According to the solution given to the second order of approximation, it shown that configuration having masses quiet superior to the solar mass are possible. The equation of compressibility in the center of the configuration is improved with those obtained else where in special relativity.

1. INTRODUCTION

Cette étude se situe dans le prolongement de la précédente « Champ scalaire et configurations d'équilibre de grosses masses » [1].

(*) Adresse actuelle : Observatoire de Paris-Meudon, Département de Physique, 92-Meudon.

[1] Il y sera fait référence sous la notation (B. L.).

Substituant ici au champ scalaire, un champ vectoriel répulsif à courte portée, nous étudions les configurations de matière froide statiques à symétrie sphérique en équilibre sans l'action, d'une part, de ce champ et, d'autre part, du champ de gravitation.

Nous suivrons le même plan que dans la publication précitée et, en raison de la similitude des divers raisonnements et calculs, nous limiterons à énoncer : les équations générales, leurs solutions et les résultats quant à l'étude du rayon et de la masse.

Il apparaîtra finalement que les résultats ne diffèrent pas fondamentalement que le champ répulsif soit scalaire ou vectoriel; ainsi la résolution des équations aux deux premiers ordres montrera encore qu'il est possible d'obtenir des configurations dépassant nettement une $M_{\odot}$, l'existence d'une masse limite restant toujours incertaine.

L'équation de compressibilité à l'approximation newtonienne serait la même que celle obtenue dans la publication (B. L.). Nous établirons une relation relativiste pression-énergie, valable au voisinage du centre de la configuration, qu'il sera intéressant de comparer avec un résultat de Zel'dovitch [*1*], obtenu dans le cadre de la relativité restreinte, mettant ainsi en évidence l'apport de la relativité générale.

2. ÉQUATIONS DU CHAMP

2.1. Cas général.

Nous avons deux groupes d'équations :

— Les équations d'Einstein

(2.1) $$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta \ldots = 0, 1, 2, 3)$$

— Les équations du champ vectoriel

(2.2) $$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} + \mu^2 A^{\nu} = J^{\nu}$$

(2.3) $$F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha}$$

auxquelles nous ajoutons une condition de jauge, portant sur le potentiel A_{α} qui assure la conservation du courant J^{μ}

(2.4) $$\nabla_{\alpha} A^{\alpha} = 0.$$

Le tenseur d'impulsion énergie de la matière froide et du champ vectoriel s'écrit comme suit :

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + \tau T^{(ch)}_{\alpha\beta} \tag{2.5}$$

où ρ est la densité de matière, u_α la quadrivitesse, τ une constante de dimensions et $T^{(ch)}_{\alpha\beta}$ le tenseur d'impulsion-énergie du champ :

$$T^{(ch)}_{\alpha\beta} = - F_{\rho\alpha}F_\beta{}^\rho - \mu^2 A_\alpha A_\beta + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2} F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu} + \mu^2 A^\mu A_\mu\right). \tag{2.6}$$

Nous supposons un couplage entre le courant-source du champ vectoriel et le courant de matière :

$$J^\alpha = - 4\pi g k \rho u^\alpha \tag{2.7}$$

avec g constante de couplage relative au champ vectoriel et k constante de proportionnalité entre le courant de matière et le courant du champ vectoriel.

Le tenseur $T^{(ch)}_{\alpha\beta}$ est relié au champ $F^{\mu\nu}$ par la loi de force :

$$\nabla_\beta T^{(ch)\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} J_\beta. \tag{2.8}$$

Cette relation se déduit de l'équation de conservation :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0.$$

Les équations (2.1), (2.2), (2.5), (2.7), (2.8) sont relatives au cas intérieur, celles concernant le cas extérieur sont obtenues en annulant ρ dans les précédentes.

2.2. Cas statique à symétrie sphérique.

La métrique peut être décrite sous la forme générale suivante :

$$ds^2 = - e^{2\alpha} dT^2 + e^{2\beta} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad , \quad T = ct \tag{2.9}$$

avec α, β, γ fonctions de r seulement. Le champ vectoriel est caractérisé par le fait que seule la composante A_0 est non identiquement nulle et n'est fonction que de r; nous posons :

$$A_0 = A(r).$$

En raison de ces propriétés de symétrie : l'énergie $T_0^{(ch)o}$, la pression radiale $T_1^{(ch)1}$, la pression transverse $T_2^{(ch)2}$ ($T_3^{(ch)3}$) du champ vectoriel s'écrivent :

$$T^{(ch)0}_{\ 0} = \frac{1}{2}e^{-2\alpha}(e^{-2\beta}A'^2 + \mu^2 A^2) \tag{2.10}$$

$$T^{(ch)1}_{\ 1} = \frac{1}{2}e^{-2\alpha}(e^{-2\beta}A'^2 - \mu^2 A^2) \tag{2.11}$$

$$T^{(ch)2}_{\ 2} \equiv T^{(ch)3}_{\ 3} = -\frac{1}{2}e^{-2\alpha}(e^{-2\beta}A'^2 + \mu^2 A^2) \tag{2.12}$$

$\left(\text{notation :} \qquad A'(r) = \dfrac{d}{dr}A(r)\right).$

3. SOLUTIONS DES ÉQUATIONS

Nous donnons ici les solutions relatives aux cas intérieur et extérieur, au premier et au second ordres. La procédure de raccordement et les conditions aux limites sont les mêmes que celles précisées dans (B. L.).

3.1. Premier ordre.

3.2.1. Cas intérieur

$$\underset{1}{A} = \underset{1}{a}\frac{\sin \lambda r}{r} \quad , \quad c^2\underset{1}{\alpha} = -\underset{1}{a}k\frac{\sin \lambda r}{r} + \underset{1}{v} \tag{3.1}$$

avec

$$\underset{1}{a} = \frac{c^2}{\lambda k(1 - \cos \lambda \underset{0}{R})} \quad , \quad \underset{1}{v} = \underset{1}{a}\lambda k \cos \lambda \underset{0}{R} \tag{3.2}$$

$$\lambda^2 = \mu^2 \frac{G}{k^2 g}\frac{1}{1 - G/k^2 g} \quad , \quad \operatorname{tg} \lambda \underset{0}{R} = -\frac{\lambda}{\mu}. \tag{3.3}$$

3.2.2. Cas extérieur

$$\underset{1}{\overset{e}{A}} = \underset{1}{\overset{e}{a}}\frac{e^{-\mu r}}{r} \quad , \quad c^2\underset{1}{\overset{e}{\alpha}} = -\underset{1}{P}\frac{1}{r} \tag{3.4}$$

avec

$$\underset{1}{\overset{e}{a}} = \underset{1}{a}e^{\mu \underset{0}{R}} \sin \lambda \underset{0}{R} \quad , \quad \underset{1}{P} = k\underset{1}{a}(\sin \lambda \underset{0}{R} - \lambda \underset{0}{R} \cos \lambda \underset{0}{R}). \tag{3.5}$$

Notons que ces solutions au premier ordre coïncident exactement avec celles obtenues à ce même ordre dans (B. L.).

3.2. Second ordre.

3.2.2. Cas intérieur

(3.6) $$\underset{2}{A} = \frac{\sin \lambda r}{\lambda r}\left(a + \int_0^\pi Fu \cos \lambda u du\right) - \frac{\cos \lambda \pi}{\lambda r}\int_0^\pi Fu \sin \lambda u du,$$

et

(3.7) $$c^2\underset{2}{\alpha} = c^2\underset{1}{\alpha}^2 - k\underset{2}{A} + \underset{2}{v}$$

avec

(3.8) $$F = 4\lambda^2\left(\underset{1}{\alpha}\underset{1}{A} - \frac{k}{c^2}\underset{1}{A}^2\right) - 2\frac{k}{c^2}A'^2,$$

(3.9) $$a = -2\lambda^2\underset{1}{a}^2\frac{k}{c^2}\left[1 + \frac{\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}} + \frac{2\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2}\right].$$

3.1.2. Cas extérieur

(3.10) $$\underset{1}{\overset{e}{A}} = -\frac{e^{-\mu r}}{2\mu r}\left(\overset{e}{a} + \int_{\underset{0}{R}}^r Hue^{\mu u}du\right) - \frac{e^{\mu r}}{2\mu r}\int_r^\infty Hue^{-\mu u}du$$

et

(3.11) $$\underset{2}{\overset{e}{\alpha}} = -\frac{\underset{2}{P}}{c^2 r} - \int_r^\infty Judu + \frac{1}{r}\int_r^\infty Ju^2 du$$

avec

(3.12) $$H = 4(\underset{1}{\overset{e}{\alpha}}'\underset{1}{\overset{e}{A}}' - \mu^2\underset{1}{\overset{e}{\alpha}}\underset{1}{\overset{e}{A}})$$

(3.13) $$J = 2\frac{k^2}{c^2}\frac{\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2}(\underset{1}{\overset{e}{A}}'^2 + 2\mu^2\underset{1}{\overset{e}{A}}^2).$$

4. ÉTUDE DU RAYON ET DE LA MASSE DE LA CONFIGURATION

4.1. Le rayon de la sphère en équilibre s'écrit, au second ordre près :

(4.1) $$R(\zeta) \simeq \underset{0}{R} + \zeta\underset{1}{R}$$

La masse grave, au troisième ordre près :

$$\mathrm{M}(\zeta) \simeq \frac{1}{\mathrm{G}}\left(\zeta \mathrm{P}_1 + \frac{1}{2}\zeta^2 \mathrm{P}_2\right) \equiv \zeta \mathrm{M}_1 + \frac{1}{2}\zeta^2 \mathrm{M}_2. \tag{4.2}$$

Dans ces expressions :

— R_0 est le rayon de la sphère à l'approximation newtonienne, $\zeta \mathrm{R}_1$ la première correction sur ce rayon;

— $\zeta \mathrm{M}_1$ est la masse de la distribution sphérique, également à l'approximation newtonienne et $\frac{1}{2}\zeta^2 \mathrm{M}_2$ la correction de masse sur cette première approximation;

— ζ est le paramètre sans dimension suivant lequel nous avons linéarisé les équations régissant notre problème; il vaut (B. L.) :

$$\zeta \equiv - \frac{\mathrm{V}_{\text{Newton}}(0)}{c^2} = \frac{4\pi \mathrm{G}}{\lambda^2 c^2}\rho(0)(1 - \cos \lambda \mathrm{R}_0). \tag{4.3}$$

Les quantités R_1, M_1 sont déterminées par raccordement des solutions de second ordre, intérieure et extérieure (3.6), (3.7) et (3.10), (3.11); on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_1 = - a_1 \frac{k}{2c^2}\Bigg\{ & \frac{\lambda(1 + \mu \mathrm{R}_0)}{\mathrm{R}_0^2(\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}}\left(\mathrm{R}_0 + \frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2}\right) \\ & + 9\int_0^{\lambda \mathrm{R}_0} \frac{\sin^3 u}{u}\,du - \frac{4\lambda\mu^2(1 + \mu \mathrm{R}_0)e^{2\mu \mathrm{R}_0}}{(\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}}\int_{\mathrm{R}_0}^{\infty} \frac{e^{-2\mu u}}{u}\,du \Bigg\}\end{aligned} \tag{4.4}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_2 = - a_1^2 \frac{k^2}{c^2}\Bigg\{ & (1 + \mu \mathrm{R}_0)\Bigg[\frac{2\lambda^2(1 + \mu \mathrm{R}_0)}{\mathrm{R}_0(\lambda^2 + \mu^2)} \\ & + \left(1 + \frac{2\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} + \frac{4\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2}\right)\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \\ & + \left[2\lambda^2\mu + \frac{1}{\mathrm{R}_0}(2\mu^2 + \lambda^2)\right]\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} + \frac{9\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}}\int_0^{\lambda \mathrm{R}_0} \frac{\sin^2 u \cos u}{u}\,du\Bigg] \\ & + \frac{\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}}\left[\frac{2\lambda^2\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}}\left(\mathrm{R}_0 + \frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2}\right) + 9\lambda\int_0^{\lambda \mathrm{R}_0} \frac{\sin^3 u}{u}\,du\right] \\ & - \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}\left[\mu + 4\mu^2(1 + \mu \mathrm{R}_0)\mathrm{R}_0 e^{2\mu \mathrm{R}_0}\int_{\mathrm{R}_0}^{\infty} \frac{e^{-2\mu u}}{u}\,du\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

On verrait facilement que $\underset{1}{R}$ et $\underset{2}{M}$ sont négatifs; il en résulte donc que le rayon post-newtonien est plus petit que le rayon newtonien et que la masse grave présente un maximum :

$$M_{\text{Max}} = -\frac{1}{2G}\frac{\underset{1}{P}^2}{\underset{2}{P}} \qquad \text{lorsque } \zeta \text{ vaut} \qquad \zeta_{\text{Max}} = -\frac{\underset{1}{P}}{\underset{2}{P}}.$$

4.2. Pour préciser numériquement ces résultats nous prendrons, à titre d'exemple, les valeurs de g, μ et k suivantes :

$$\frac{G}{k^2 g} = 10^{-42}, \qquad \mu = 10^{13}\ \text{cm}^{-1}$$

où

$$G = 6{,}67.10^8\ \text{cm}^3\ \text{g}^{-1}\ \text{s}^{-2}, \qquad c = 3.10^{10}\ \text{cm s}^{-1}.$$

Avec ces valeurs numériques, nous obtenons :

$$\zeta_{\text{Max}} = 1/6{,}14 \qquad \text{soit} \qquad \underset{\text{Max}}{\rho(0)} : 0{,}9.10^{10}\ \text{g cm}^{-3}$$

pour la densité centrale correspondante et, finalement, un maximum de masse valant

$$M_{\text{Max}} : 1{,}8.10^{35}\ \text{g}.$$

On pourra constater que le maximum de masse est de l'ordre de *cent masses solaires* et ce pour une valeur du paramètre ζ qui rend assez satisfaisante la validité des solutions approchées (à comparer avec ζ_{Max} : 1/2,76 chez B. L.). On remarquera cependant que la densité maximum obtenue reste très inférieure aux densités nucléaires.

5. ÉQUATION DE COMPRESSIBILITÉ ET TRACE DU TENSEUR

Nous allons étudier la relation liant l'énergie, la pression et la densité au centre et au voisinage du centre, de la configuration. Les approximations que nous nous permettons, tiennent aux valeurs numériques des constantes impliquées dans notre problème qui satisfont :

$$\lambda \ll \mu \tag{5.1}$$

mais nous ne toucherons pas au caractère *relativiste général* des équations utilisées. Ces approximations sont les mêmes que celles faites par Zel'dovitch dans le cadre de la relativité restreinte.

5.1. Les équations d'Einstein explicitées donnent la relation suivante :

$$(5.2) \qquad \rho = \frac{1}{4\pi g}\left[-\,e^{-2(\alpha+\beta)}\frac{A'^2}{c^2} + \frac{1}{k}(\lambda^2 + \mu^2)e^{-\alpha}A + \lambda^2\frac{A^2}{c^2}e^{-2\alpha}\right]$$

entre la densité ρ, le champ vectoriel A et les potentiels de gravitation α, β. (Voir relation (2.41) dans B. L.).

Par symétrie et continuité, il vient :

$$(5.3) \qquad A'(0) \equiv 0.$$

L'équation (5.2), compte tenu de (5.1) et (5.3), s'écrit alors, au centre de la configuration :

$$(5.4) \qquad \rho(0) \equiv \rho_0 \simeq \frac{\mu^2}{4\pi g k}e^{-\alpha}A.$$

Portée dans la relation (2.5) en tenant compte de (2.10), (2.11) et (2.12), il vient :

$$(5.5) \qquad T_0^0 = \rho_0 e^{2\alpha} - \frac{2\pi g k^2}{\mu^2 c^2}\rho_0^2$$

$$(5.6) \qquad T_1^1 \simeq T_2^2 \equiv T_3^3 = \frac{2\pi g k^2}{\mu^2 c^2}\rho_0^2$$

et la trace

$$(5.7) \qquad T^\alpha{}_\alpha = -\,\rho_0 e^{2\alpha} + \frac{4\pi g k^2}{\mu^2 c^2}\rho_0^2.$$

5.2. Dans le cadre de la relativité restreinte, on aurait :

$$(5.8) \qquad e^{2\alpha} = 1$$

et les équations (5.5) et (5.6) permettraient de définir l'énergie :

$$(5.9) \qquad \varepsilon = \rho + \frac{2\pi g k^2}{\mu^2 c^2}\rho^2$$

et la pression

$$(5.10) \qquad P = \frac{2\pi k g^2}{\mu^2 c^2}\rho^2$$

On retrouverait donc le résultat bien connu de Zel'dovitch qui conduit à la relation limite :

$$\lim_{\rho \to \infty} P = \lim_{\rho \to \infty} \varepsilon \tag{5.11}$$

On voit que cette relation n'est plus nécessairement valable dans le cadre de la relativité générale (1) puisque $e^{2\alpha}$ est une fonctionnelle compliquée de ρ par l'intermédiaire des équations d'Einstein et des conditions de raccordement.

Les raisonnements précédents semblent donc indiquer qu'il est peu satisfaisant d'utiliser des résultats acquis dans un cadre relativiste restreint pour le traitement cohérent d'un problème d'astrophysique dans le cadre de la relativité générale.

RÉFÉRENCES

[*1*] ZEL'DOVITCH, J. *E. T. P.*, t. **41**, novembre 1961, p. 1609-1615.
[*2*] PACINI, *Ann. Astrophysique*, t. **29**, 1966, p. 195.

(1) On pourrait faire la même remarque à propos d'un résultat de Pacini [*2*].

Manuscrit reçu le 18 janvier 1969.