

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

D. GERBAL

B. LÉAUTÉ

## **Champ vectoriel et configurations d'équilibre de grosses masses en relativité générale**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 10, n° 3 (1969), p. 349-357

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1969\\_\\_10\\_3\\_349\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__10_3_349_0)

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section A* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

# Champ vectoriel et configurations d'équilibre de grosses masses en relativité générale

par

**D. GERBAL (\*) et B. LÉAUTÉ**

Laboratoire de Physique théorique associé au C. N. R. S.,  
Institut H. Poincaré.

---

**RÉSUMÉ.** — Nous étudions les configurations matérielles à symétrie sphérique en équilibre sous l'action, d'une part, du champ de gravitation et d'un champ vectoriel répulsif à courte portée d'autre part. Les équations étant résolues aux deux premiers ordres, on constate que des configurations de masses très supérieures à la masse solaire sont possibles.

L'équation de compressibilité au centre de la configuration est comparée avec celles obtenues en relativité restreinte par d'autres auteurs.

**SUMMARY.** — The object of this study will be, the spherically symmetric material configurations in equilibrium under the action of the gravitational field on one hand and a short range vectoriel repulsive field on the other. According to the solution given to the second order of approximation, it shown that configuration having masses quiet superior to the solar mass are possible. The equation of compressibility in the center of the configuration is improved with those obtained else where in special relativity.

---

## 1. INTRODUCTION

Cette étude se situe dans le prolongement de la précédente « Champ scalaire et configurations d'équilibre de grosses masses » <sup>(1)</sup>.

---

(\*) Adresse actuelle : Observatoire de Paris-Meudon, Département de Physique, 92-Meudon.

<sup>(1)</sup> Il y sera fait référence sous la notation (B. L.).

Substituant ici au champ scalaire, un champ vectoriel répulsif à courte portée, nous étudions les configurations de matière froide statiques à symétrie sphérique en équilibre sans l'action, d'une part, de ce champ et, d'autre part, du champ de gravitation.

Nous suivrons le même plan que dans la publication précitée et, en raison de la similitude des divers raisonnements et calculs, nous limiterons à énoncer : les équations générales, leurs solutions et les résultats quant à l'étude du rayon et de la masse.

Il apparaîtra finalement que les résultats ne diffèrent pas fondamentalement que le champ répulsif soit scalaire ou vectoriel; ainsi la résolution des équations aux deux premiers ordres montrera encore qu'il est possible d'obtenir des configurations dépassant nettement une  $M_{\odot}$ , l'existence d'une masse limite restant toujours incertaine.

L'équation de compressibilité à l'approximation newtonienne serait la même que celle obtenue dans la publication (B. L.). Nous établirons une relation relativiste pression-énergie, valable au voisinage du centre de la configuration, qu'il sera intéressant de comparer avec un résultat de Zel'dovich [1], obtenu dans le cadre de la relativité restreinte, mettant ainsi en évidence l'apport de la relativité générale.

## 2. ÉQUATIONS DU CHAMP

### 2.1. Cas général.

Nous avons deux groupes d'équations :

— Les équations d'Einstein

$$(2.1) \quad S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta \dots = 0, 1, 2, 3)$$

— Les équations du champ vectoriel

$$(2.2) \quad \nabla_{\mu} F^{\mu\nu} + \mu^2 A^{\nu} = J^{\nu}$$

$$(2.3) \quad F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha}$$

auxquelles nous ajoutons une condition de jauge, portant sur le potentiel  $A_{\alpha}$  qui assure la conservation du courant  $J^{\mu}$

$$(2.4) \quad \nabla_{\alpha} A^{\alpha} = 0.$$

Le tenseur d'impulsion énergie de la matière froide et du champ vectoriel s'écrit comme suit :

$$(2.5) \quad T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + \tau T_{\alpha\beta}^{(ch)}$$

où  $\rho$  est la densité de matière,  $u_\alpha$  la quadrivitesse,  $\tau$  une constante de dimensions et  $T_{\alpha\beta}^{(ch)}$  le tenseur d'impulsion-énergie du champ :

$$(2.6) \quad T_{\alpha\beta}^{(ch)} = -F_{\rho\alpha} F_\beta{}^\rho - \mu^2 A_\alpha A_\beta + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{2} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} + \mu^2 A^\mu A_\mu \right).$$

Nous supposons un couplage entre le courant-source du champ vectoriel et le courant de matière :

$$(2.7) \quad J^\alpha = -4\pi g k \rho u^\alpha$$

avec  $g$  constante de couplage relative au champ vectoriel et  $k$  constante de proportionnalité entre le courant de matière et le courant du champ vectoriel.

Le tenseur  $T_{\alpha\beta}^{(ch)}$  est relié au champ  $F^{\mu\nu}$  par la loi de force :

$$(2.8) \quad \nabla_\beta T^{(ch)\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} J_\beta.$$

Cette relation se déduit de l'équation de conservation :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0.$$

Les équations (2.1), (2.2), (2.5), (2.7), (2.8) sont relatives au cas intérieur, celles concernant le cas extérieur sont obtenues en annulant  $\rho$  dans les précédentes.

### 2.2. Cas statique à symétrie sphérique.

La métrique peut être décrite sous la forme générale suivante :

$$(2.9) \quad ds^2 = -e^{2\alpha} dT^2 + e^{2\beta} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad , \quad T = ct$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma$  fonctions de  $r$  seulement. Le champ vectoriel est caractérisé par le fait que seule la composante  $A_0$  est non identiquement nulle et n'est fonction que de  $r$ ; nous posons :

$$A_0 = A(r).$$

En raison de ces propriétés de symétrie : l'énergie  $T_0^{(ch)0}$ , la pression

radiale  $T_1^{(ch)1}$ , la pression transverse  $T_2^{(ch)2}$  ( $T_3^{(ch)3}$ ) du champ vectoriel s'écrivent :

$$(2.10) \quad T_0^{(ch)0} = \frac{1}{2} e^{-2\alpha} (e^{-2\beta} A'^2 + \mu^2 A^2)$$

$$(2.11) \quad T_1^{(ch)1} = \frac{1}{2} e^{-2\alpha} (e^{-2\beta} A'^2 - \mu^2 A^2)$$

$$(2.12) \quad T_2^{(ch)2} \equiv T_3^{(ch)3} = -\frac{1}{2} e^{-2\alpha} (e^{-2\beta} A'^2 + \mu^2 A^2)$$

$$\left( \text{notation :} \quad A'(r) = \frac{d}{dr} A(r) \right).$$

### 3. SOLUTIONS DES ÉQUATIONS

Nous donnons ici les solutions relatives aux cas intérieur et extérieur, au premier et au second ordres. La procédure de raccordement et les conditions aux limites sont les mêmes que celles précisées dans (B. L.).

#### 3.1. Premier ordre.

##### 3.2.1. CAS INTÉRIEUR

$$(3.1) \quad A_1 = a \frac{\sin \lambda r}{r} \quad , \quad c_1^2 \alpha_1 = -a k \frac{\sin \lambda r}{r} + v_1$$

avec

$$(3.2) \quad a_1 = \frac{c^2}{\lambda k (1 - \cos \lambda R)_0} \quad , \quad v_1 = a \lambda k \cos \lambda R_0$$

$$(3.3) \quad \lambda^2 = \mu^2 \frac{G}{k^2 g} \frac{1}{1 - G/k^2 g} \quad , \quad \text{tg } \lambda R_0 = -\frac{\lambda}{\mu}.$$

##### 3.2.2. CAS EXTÉRIEUR

$$(3.4) \quad \overset{e}{A}_1 = a \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad , \quad c_1^2 \overset{e}{\alpha}_1 = -P \frac{1}{r}$$

avec

$$(3.5) \quad \overset{e}{a}_1 = a e^{\frac{\mu R}{0}} \sin \lambda R_0 \quad , \quad P_1 = k a (\sin \lambda R_0 - \lambda R_0 \cos \lambda R_0).$$

Notons que ces solutions au premier ordre coïncident exactement avec celles obtenues à ce même ordre dans (B. L.).

### 3.2. Second ordre.

#### 3.2.2. CAS INTÉRIEUR

$$(3.6) \quad A_2 = \frac{\sin \lambda r}{\lambda r} \left( a + \int_0^\pi F u \cos \lambda u du \right) - \frac{\cos \lambda \pi}{\lambda r} \int_0^\pi F u \sin \lambda u du,$$

et

$$(3.7) \quad c_2^2 \alpha = c_1^2 \alpha^2 - k A_2 + v_2$$

avec

$$(3.8) \quad F = 4\lambda^2 \left( \alpha A_1 - \frac{k}{c_1^2} A_1^2 \right) - 2 \frac{k}{c_1^2} A_1'^2,$$

$$(3.9) \quad a = -2\lambda^2 a_1^2 \frac{k}{c_1^2} \left[ 1 + \frac{\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} + \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} \right].$$

#### 3.1.2. CAS EXTÉRIEUR

$$(3.10) \quad \overset{e}{A}_1 = -\frac{e^{-\mu r}}{2\mu r} \left( \overset{e}{a} + \int_R^r H u e^{\mu u} du \right) - \frac{e^{\mu r}}{2\mu r} \int_r^\infty H u e^{-\mu u} du$$

et

$$(3.11) \quad \overset{e}{\alpha} = -\frac{P}{c_2^2 r} - \int_r^\infty J u du + \frac{1}{r} \int_r^\infty J u^2 du$$

avec

$$(3.12) \quad H = 4 \left( \overset{e}{\alpha}' \overset{e}{A}_1 - \mu^2 \overset{e}{\alpha} \overset{e}{A}_1 \right)$$

$$(3.13) \quad J = 2 \frac{k^2}{c_1^2} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} \left( \overset{e}{A}_1'^2 + 2\mu^2 \overset{e}{A}_1^2 \right).$$

## 4. ÉTUDE DU RAYON ET DE LA MASSE DE LA CONFIGURATION

4.1. Le rayon de la sphère en équilibre s'écrit, au second ordre près :

$$(4.1) \quad R(\zeta) \simeq R_0 + \zeta R_1$$

La masse grave, au troisième ordre près :

$$(4.2) \quad \mathbf{M}(\zeta) \simeq \frac{1}{\mathbf{G}} \left( \zeta \mathbf{P}_1 + \frac{1}{2} \zeta^2 \mathbf{P}_2 \right) \equiv \zeta \mathbf{M}_1 + \frac{1}{2} \zeta^2 \mathbf{M}_2.$$

Dans ces expressions :

—  $\mathbf{R}$  est le rayon de la sphère à l'approximation newtonienne,  $\zeta \mathbf{R}_1$  la première correction sur ce rayon;

—  $\zeta \mathbf{M}_1$  est la masse de la distribution sphérique, également à l'approximation newtonienne et  $\frac{1}{2} \zeta^2 \mathbf{M}_2$  la correction de masse sur cette première approximation;

—  $\zeta$  est le paramètre sans dimension suivant lequel nous avons linéarisé les équations régissant notre problème; il vaut (B. L.) :

$$(4.3) \quad \zeta \equiv - \frac{\mathbf{V}(0)}{c^2} = \frac{4\pi \mathbf{G}}{\lambda^2 c^2} \rho(0) (1 - \cos \lambda \mathbf{R}).$$

Les quantités  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{M}$  sont déterminées par raccordement des solutions de second ordre, intérieure et extérieure (3.6), (3.7) et (3.10), (3.11); on obtient :

$$(4.4) \quad \mathbf{R}_1 = - \frac{a}{1} \frac{k}{2c^2} \left\{ \frac{\lambda(1 + \mu \mathbf{R}_0)}{\mathbf{R}_0^2 (\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \left( \mathbf{R}_0 + \frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2} \right) + 9 \int_0^{\lambda \mathbf{R}_0} \frac{\sin^3 u}{u} du - \frac{4\lambda\mu^2(1 + \mu \mathbf{R}_0) e^{2\mu \mathbf{R}_0}}{(\lambda^2 + \mu^2)^{3/2}} \int_{\mathbf{R}_0}^{\infty} \frac{e^{-2\mu u}}{u} du \right\}$$

et

$$(4.5) \quad \mathbf{P}_2 = - \frac{a^2}{1} \frac{k^2}{c^2} \left\{ (1 + \mu \mathbf{R}_0) \left[ \frac{2\lambda^2(1 + \mu \mathbf{R}_0)}{\mathbf{R}_0(\lambda^2 + \mu^2)} + \left( 1 + \frac{2\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} + \frac{4\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} \right) \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} + \left[ 2\lambda^2\mu + \frac{1}{\mathbf{R}_0} (2\mu^2 + \lambda^2) \right] \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} + \frac{9\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \int_0^{\lambda \mathbf{R}_0} \frac{\sin^2 u \cos u}{u} du \right] + \frac{\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \left[ \frac{2\lambda^2\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \left( \mathbf{R}_0 + \frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2} \right) + 9\lambda \int_0^{\lambda \mathbf{R}_0} \frac{\sin^3 u}{u} du \right] - \frac{\lambda^4}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \left[ \mu + 4\mu^2(1 + \mu \mathbf{R}_0) \mathbf{R}_0 e^{2\mu \mathbf{R}_0} \int_{\mathbf{R}_0}^{\infty} \frac{e^{-2\mu u}}{u} du \right] \right\}.$$

On verrait facilement que  $R$  et  $M$  sont négatifs; il en résulte donc que le rayon post-newtonien est plus petit que le rayon newtonien et que la masse grave présente un maximum :

$$M_{\text{Max}} = -\frac{1}{2G} \frac{P^2}{P} \quad \text{lorsque } \zeta \text{ vaut} \quad \zeta_{\text{Max}} = -\frac{1}{P}.$$

4.2. Pour préciser numériquement ces résultats nous prendrons, à titre d'exemple, les valeurs de  $g$ ,  $\mu$  et  $k$  suivantes :

$$\frac{G}{k^2 g} = 10^{-42}, \quad \mu = 10^{13} \text{ cm}^{-1}$$

où

$$G = 6,67 \cdot 10^8 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}.$$

Avec ces valeurs numériques, nous obtenons :

$$\zeta_{\text{Max}} = 1/6,14 \quad \text{soit} \quad \rho_{\text{Max}}(0) : 0,9 \cdot 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$$

pour la densité centrale correspondante et, finalement, un maximum de masse valant

$$M_{\text{Max}} : 1,8 \cdot 10^{35} \text{ g}.$$

On pourra constater que le maximum de masse est de l'ordre de *cent masses solaires* et ce pour une valeur du paramètre  $\zeta$  qui rend assez satisfaisante la validité des solutions approchées (à comparer avec  $\zeta_{\text{Max}} : 1/2,76$  chez B. L.). On remarquera cependant que la densité maximum obtenue reste très inférieure aux densités nucléaires.

## 5. ÉQUATION DE COMPRESSIBILITÉ ET TRACE DU TENSEUR

Nous allons étudier la relation liant l'énergie, la pression et la densité au centre et au voisinage du centre, de la configuration. Les approximations que nous nous permettons, tiennent aux valeurs numériques des constantes impliquées dans notre problème qui satisfont :

$$(5.1) \quad \lambda \ll \mu$$



mais nous ne toucherons pas au caractère *relativiste général* des équations utilisées. Ces approximations sont les mêmes que celles faites par Zel'dovich dans le cadre de la relativité restreinte.

5.1. Les équations d'Einstein explicitées donnent la relation suivante :

$$(5.2) \quad \rho = \frac{1}{4\pi g} \left[ -e^{-2(\alpha+\beta)} \frac{A'^2}{c^2} + \frac{1}{k} (\lambda^2 + \mu^2) e^{-\alpha} A + \lambda^2 \frac{A^2}{c^2} e^{-2\alpha} \right]$$

entre la densité  $\rho$ , le champ vectoriel  $A$  et les potentiels de gravitation  $\alpha, \beta$ .  
(Voir relation (2.41) dans B. L.).

Par symétrie et continuité, il vient :

$$(5.3) \quad A'(0) \equiv 0.$$

L'équation (5.2), compte tenu de (5.1) et (5.3), s'écrit alors, au centre de la configuration :

$$(5.4) \quad \rho(0) \equiv \rho_0 \simeq \frac{\mu^2}{4\pi g k} e^{-\alpha} A.$$

Portée dans la relation (2.5) en tenant compte de (2.10), (2.11) et (2.12), il vient :

$$(5.5) \quad T_0^0 = \rho_0 e^{2\alpha} - \frac{2\pi g k^2}{\mu^2 c^2} \rho_0^2$$

$$(5.6) \quad T_1^1 \simeq T_2^2 \equiv T_3^3 = \frac{2\pi g k^2}{\mu^2 c^2} \rho_0^2$$

et la trace

$$(5.7) \quad T^\alpha_\alpha = -\rho_0 e^{2\alpha} + \frac{4\pi g k^2}{\mu^2 c^2} \rho_0^2.$$

5.2. Dans le cadre de la relativité restreinte, on aurait :

$$(5.8) \quad e^{2\alpha} = 1$$

et les équations (5.5) et (5.6) permettraient de définir l'énergie :

$$(5.9) \quad \varepsilon = \rho + \frac{2\pi g k^2}{\mu^2 c^2} \rho^2$$

et la pression

$$(5.10) \quad P = \frac{2\pi g k^2}{\mu^2 c^2} \rho^2$$

On retrouverait donc le résultat bien connu de Zel'dovitch qui conduit à la relation limite :

$$(5.11) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} P = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \varepsilon$$

On voit que cette relation n'est plus nécessairement valable dans le cadre de la relativité générale <sup>(1)</sup> puisque  $e^{2\alpha}$  est une fonctionnelle compliquée de  $\rho$  par l'intermédiaire des équations d'Einstein et des conditions de raccordement.

Les raisonnements précédents semblent donc indiquer qu'il est peu satisfaisant d'utiliser des résultats acquis dans un cadre relativiste restreint pour le traitement cohérent d'un problème d'astrophysique dans le cadre de la relativité générale.

## RÉFÉRENCES

- [1] ZEL'DOVITCH, *J. E. T. P.*, t. **41**, novembre 1961, p. 1609-1615.  
 [2] PACINI, *Ann. Astrophysique*, t. **29**, 1966, p. 195.

---

<sup>(1)</sup> On pourrait faire la même remarque à propos d'un résultat de Pacini [2].

*Manuscrit reçu le 18 janvier 1969.*

---