

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

CLAUDE ROCHE

Les équations de Hamilton covariantes en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 10, n° 3 (1969), p. 271-315

[<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__10_3_271_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__10_3_271_0)

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Les équations de Hamilton covariantes en Relativité Générale (*)

par

Claude ROCHE

Laboratoire de Physique Mathématique
du Collège de France (**).

RÉSUMÉ. — On se donne, sur une variété riemannienne, des équations de champ issues d'un lagrangien, et on recherche moyennant quelles définitions et à quelles conditions celles-ci peuvent être mises sous une forme hamiltonienne explicitement covariante, ne faisant intervenir que des grandeurs tensorielles. Les conditions obtenues conduisent à une définition d'un repère inertiel en Relativité Générale. On applique ces méthodes à l'étude des équations aux variations du champ de gravitation et on les compare à celles de Trautman.

SUMMARY. — Given, on a riemannian manifold, field equations deriving out of a lagrangian, we seek according to which definitions and under what conditions the latter can be cast in an explicitly covariant hamiltonian form, involving only tensorial quantities. The resulting conditions lead to a definition of an inertial frame in General Relativity. These methods are applied to the study of the variational equations of the gravitational field and compared to Trautman's.

(*) Article recouvrant en partie la thèse enregistrée au C. N. R. S. sous le numéro A. O. 2524.

(**) Adresse actuelle : UER de mathématiques, Esplanade de la Paix, 14-Caen.

INTRODUCTION

La théorie d'Einstein décrit avant tout l'univers comme une variété différentiable, où la gravitation se manifeste par la structure riemannienne. Les équations de champ ne viennent qu'ensuite et restent à l'heure actuelle largement arbitraires, bien que les découvertes astronomiques récentes aient stimulé l'étude des schémas intérieurs. On sait d'ailleurs qu'il répugnait à Einstein de mettre autre chose que zéro dans le second membre des équations. Mais il est hors de doute que le phénomène physique de la gravitation se traduit le plus naïvement comme une connexion puisqu'il associe naturellement à un repère donné ceux qui s'en déduisent par une chute libre (cf. Cartan [1], ou déjà Einstein [2]).

Les dérivées partielles ordinaires sont définies au moyen d'un transport essentiellement non canonique, celui où les composantes d'un vecteur dans un repère naturel restent inchangées. On en dira d'ailleurs autant des dérivées pfaffiennes, subordonnées à une section locale arbitraire du fibré des repères. Dans la mesure où le champ de gravitation est donné, on doit pouvoir s'en passer entièrement. Bien entendu, le problème est tout autre quand il s'agit de déterminer le champ de gravitation; il faudra bien alors utiliser les dérivées ordinaires de g , les autres étant identiquement nulles (cf. Ray [3]). On voit que le champ de gravitation macroscopique joue un rôle extrêmement particulier; c'est ce qui justifie le point de vue (implicite chez Lichnerowicz [4]) que toute théorie physique présuppose un « background » métrique donné, et qu'une éventuelle quantification du champ gravifique (si elle était imposée par des arguments du type Bohr-Rosenfeld) ne devrait s'appliquer qu'aux fluctuations de ce champ macroscopique.

Il existe deux façons de quantifier un champ classique. L'une consiste à partir de la formulation hamiltonienne de la théorie et à substituer aux variables de champ φ_A et à leurs moments conjugués $\pi^A = \partial \mathcal{L} / \partial (\partial \varphi_A / \partial t)$ des opérateurs sur un espace de Hilbert solution des mêmes équations et soumis aux relations de commutation à temps constant :

$$[\pi^A(x), \varphi_B(x')] = \frac{\hbar}{i} \delta_B^A \delta(x, x')$$

L'autre qui peut s'envisager même en l'absence de tout principe variationnel consiste à déterminer directement le bitenseur

$$D_{AB}(x, x') = [\varphi_A(x), \varphi_B(x')],$$

commutateur des fonctions de champ en deux points quelconques de l'espace-

temps, en lui imposant d'être antisymétrique en x et x' , solution en x et x' des équations de champ et nul si l'intervalle entre x et x' est du genre espace. C'est cette méthode qui a été généralisée par A. Lichnerowicz à une variété courbe [5]; elle s'y prête certainement mieux que l'autre, qui traite de façon dissymétrique l'espace et le temps.

La généralisation de la première méthode, qui n'a guère été envisagée à notre connaissance de façon covariante (sinon dans un travail de Trautman [6] sur lequel nous aurons l'occasion de revenir au chapitre III), se justifie pour deux raisons. On sait tout d'abord que le formalisme hamiltonien n'est pas incompatible, malgré les apparences, avec la covariance de Lorentz des équations [7]. On admet le plus souvent que la généralisation à une variété courbe d'une théorie qui possède cette covariance de Lorentz est triviale : il n'y a qu'à substituer aux dérivées ordinaires des dérivées covariantes en invoquant le principe d'équivalence [8]. Comme l'écrit Fronsdal [9] : « Une théorie qui traite l'espace-temps comme minkowskien doit pouvoir s'obtenir comme la limite bien définie d'une théorie plus générale pour laquelle l'hypothèse d'un espace plat n'est pas essentielle ». En outre, une telle généralisation permet souvent de clarifier certains aspects de la théorie minkowskienne, de lever pour ainsi dire certaines dégénérescences.

Il nous faudra alors nous demander quelle signification il est possible d'attribuer à un temps global en Relativité Générale, s'il faut y voir un peu plus qu'une des quatre coordonnées servant à repérer un événement, ou si au contraire, comme l'exprimait Minkowski en 1908, « l'espace en lui-même et le temps en lui-même se réduisent à de simples ombres, et seule l'union des deux garde la réalité ». Car sans décomposition globale, on ne peut concevoir de formalisme hamiltonien. Mais, dans l'espace de Minkowski, un observateur peut utiliser deux définitions raisonnables de la simultanéité. La première, rendue familière par les exposés élémentaires de la Relativité Restreinte, est la plus immédiate : sont simultanés deux événements que je perçois optiquement comme tels, *i. e.* qui appartiennent au même demi-cône passé d'un point donné $A(\tau)$ de mon histoire. Mais ce n'est pas ce feuilletage par des demi-cônes qu'envisage l'astronome quand il déclare (confondant l'espace-temps avec l'espace euclidien tangent) que la lumière qu'il enregistre sur une plaque photographique a été émise, il y a un million d'années et non « à l'instant même ». Avec cette conception, deux points sont simultanés pour $A(\tau)$ s'ils appartiennent au même plan normal à u en ce point. Bien entendu, la simultanéité est dans chaque cas relative à l'observateur. Dans le second cas, les mesures optiques pourront être assez longues si les deux événements envisagés sont spatialement

éloignés, mais ces difficultés sont familières dans d'autres branches de la physique : la détermination d'une matrice S suppose bien des mesures à $t = -\infty$ et $t = +\infty$!

En Relativité Générale, si nous laissons de côté pour l'instant les solutions admettant une famille de surfaces privilégiées, nous ne voyons pas comment définir la seconde simultanéité. Le seul élément géométrique dont nous disposons est la ligne de temps de l'observateur. Il est raisonnable d'exiger que la surface soit perpendiculaire en $A(\tau)$ au vecteur $\frac{dA}{d\tau}$, mais même avec des conditions aux limites, cela ne suffit pas à la définir. Alors, dans un premier temps, nous nous la donnerons arbitrairement, en supposant seulement avec Cattaneo que l'univers a été rempli de particules d'épreuve (donc ne réagissant pas sur la métrique), interprétables comme un fluide de référence, ou si l'on veut un réseau d'observateurs; les lignes de temps des particules seront seulement astreintes à être normales à Σ . Nous verrons ultérieurement que cette surface ne saurait être quelconque.

Cette surface est naturellement douée par le plongement d'une structure riemannienne, à métrique elliptique. Cette métrique servira en particulier à définir l'opération $*$ sur les formes, qui permettra d'intégrer sur Σ des scalaires et non pas exclusivement des 3-formes. Elle est définie négative parce qu'on a supposé Σ orthogonale à une congruence temporelle; en repère adapté (e_0 porté par le vecteur u tangent à la congruence, e_i tangents à Σ), on a $g_{0i} = (e_0, e_i) = 0$ et la métrique induite se confond avec la métrique quotient.

Dans un premier chapitre, nous développerons donc un formalisme hamiltonien covariant en espace courbe. Nous l'appliquerons ensuite au champ électromagnétique et aux équations aux variations du champ gravitationnel, en généralisant notamment les résultats de Dirac concernant le formalisme singulier. Dans le troisième chapitre, nous étudions les formalismes à deux congruences, où le temps n'est plus supposé orthogonal à la surface porteuse des données de Cauchy (*).

I. MÉTHODE GÉNÉRALE

I.1. Le tenseur d'impulsion-énergie.

La densité hamiltonienne d'un champ est classiquement la composante T_0^0 du tenseur d'impulsion-énergie. En Relativité Générale, on a l'embarras

(*) Quelques-uns de ces résultats ont été annoncés dans [10] [11] [12].

du choix, comme on dispose d'au moins deux tenseurs inéquivalents, le tenseur canonique et le tenseur métrique. Ils s'introduisent le plus simplement quand on établit les identités qui expriment qu'on ne peut pas combiner n'importe comment des tenseurs si on veut fabriquer des scalaires. On se limite en effet toujours à ce cas après avoir rappelé pour mémoire qu'un lagrangien pourrait ne pas être scalaire, comme le lagrangien quadratique en Γ de la Relativité Générale, aussi longtemps que sa variation l'est. Plus précisément, si $\mathcal{L}$ (resp. $\bar{\mathcal{L}}$) est une fonction scalaire (resp. une densité de poids 1)

$$X\mathcal{L} \equiv \xi^\rho \nabla_\rho \mathcal{L} \quad (1)$$

$$X\bar{\mathcal{L}} \equiv \partial_\rho (\bar{\mathcal{L}} \xi^\rho) \quad (2)$$

Pour avoir l'effet de ces opérateurs sur la fonction nous la dérivons par rapport à tous ses arguments et leur appliquons l'opérateur considéré. Ces arguments seront : un champ tensoriel (*) φ_A et ses dérivées covariantes, ainsi que les potentiels de gravitation; si nous choisissons d'exprimer L comme fonction du champ et de ses dérivées ordinaires, il faudra aussi presque toujours faire intervenir les dérivées des g , par l'intermédiaire de la connexion. En revanche, une certaine interprétation du principe d'équivalence (« couplage minimal ») exclut les dérivées d'ordre supérieur des g , autrement dit le tenseur de courbure, en dehors du cas très particulier du champ de gravitation lui-même. Naturellement, les méthodes (1) et (2) doivent conduire aux mêmes identités physiquement significatives.

CALCULS PRÉLIMINAIRES

a) Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_A, \partial\varphi_A, g, \underline{\partial}g)$ une fonction scalaire; soit $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\sqrt{g}$. Posons

$$m^A = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A} \right)_{\nabla \varphi} \quad \text{et} \quad \tilde{m}^A = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A} \right)_{\partial \varphi};$$

les quantités en indice sont maintenues constantes lors de l'opération de dérivation, suivant une notation courante. Posons aussi :

$$m^{A\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{A,\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{A;\alpha}}$$

La seconde égalité suppose que $\mathcal{L}$ ne renferme pas de dérivées covariantes

(*) Certains calculs sont valides pour un champ spinoriel; voir la fin de ce chapitre.

d'ordre supérieur à un; elle résulte de ce qu'alors $\mathcal{L}$ ne dépend de $\partial_\alpha \varphi_A$ que par l'intermédiaire de la fonction linéaire $\partial_\alpha \varphi_A - \Gamma_{A\alpha}^B \varphi_B$.

Les équations d'Euler admettent les deux formes équivalentes

$$m^A = \nabla_\rho m^{A\rho} \quad \text{et} \quad \tilde{m}^A \sqrt{g} = \partial_\rho (\sqrt{g} m^{A\rho})$$

sous l'hypothèse essentielle que $\varphi_A \neq g_{\alpha\beta}$. Il en résulte que

$$m^A = \tilde{m}^A + \Gamma_{\rho B}^A m^{B\rho},$$

ce qui met en évidence le caractère non tensoriel de $\tilde{m}$.

b) Posons

$$X\varphi_A = \xi^\rho \partial_\rho \varphi_A + F_{A\mu}^{B\nu} \varphi_B \partial_\nu \xi^\mu \quad (3)$$

$X\varphi_A$ admet aussi la forme explicitement covariante

$$X\varphi_A = \xi^\rho \nabla_\rho \varphi_A + F_{A\mu}^{B\nu} \varphi_B \nabla_\nu \xi^\mu \quad (4)$$

On a en effet

$$\Gamma_{A\alpha}^B = F_{A\mu}^{B\nu} \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \quad (\text{cf. } [3], \text{ ou } [13], \text{ éq. } 8) \quad (5)$$

$\bar{F}$ est construit à partir de tenseurs de Kronecker (ou de matrices γ) et à ses dérivées ordinaires ou covariantes nulles, il résulte alors de (5) que

$$R_{A\alpha\beta}^B = F_{A\mu}^{B\nu} R_{\nu\alpha\beta}^\mu.$$

Enfin, pour une 1-densité

$$X\bar{\varphi}_A = \xi^\rho \partial_\rho \bar{\varphi}_A + F_{A\mu}^{B\nu} \bar{\varphi}_B \partial_\nu \xi^\mu;$$

nos $\bar{F}$ sont donc les mêmes que ceux de Trautman.

c) Dépendance du lagrangien par rapport aux $g_{\rho\sigma,\tau}$. Comme tout terme en $\partial_\alpha \varphi_A$ est accompagné de $-\Gamma_{\alpha A}^B \varphi_B$ et qu'il n'y a pas d'autre terme en ∂g d'après l'hypothèse de couplage minimal

$$\partial \mathcal{L} / \partial g_{\rho\sigma,\tau} = -m^{A\nu} \varphi_B \partial \Gamma_{A\nu}^B / \partial g_{\rho\sigma,\tau}$$

Si nous posons

$$S_\alpha^{\beta\nu} = m^{A\nu} \varphi_B F_{A\alpha}^{B\beta} \quad \text{et} \quad S^{\beta\nu\alpha} = g^{\alpha\rho} S_\rho^{\beta\nu}$$

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{L} / \partial g_{\rho\sigma,\tau} &= -S_\alpha^{\beta\nu} \partial \Gamma_{\beta\nu}^\alpha / \partial g_{\rho\sigma,\tau} = -S^{\beta\nu\alpha} \gamma[\beta\nu, \alpha] / \partial g_{\rho\sigma,\tau} \\ &= -\frac{1}{4} S^{\beta\nu\alpha} [\delta_\nu^\tau \delta_\beta^{(\rho} \delta_\alpha^{\sigma)} + \delta_\beta^\tau \delta_\nu^{(\rho} \delta_\alpha^{\sigma)} - \delta_\alpha^\tau \delta_\beta^{(\rho} \delta_\nu^{\sigma)}] \\ &= -\frac{1}{4} [S^{(\rho\tau\sigma)} + S^{\tau(\rho\sigma)} - S^{(\rho\sigma)\tau}] \end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture, nous nous écartons des conventions usuelles en posant

$$S^{(\rho\tau\sigma)} = S^{\rho\tau\sigma} + S^{\sigma\tau\rho}.$$

IDENTITÉS SOUS FORME EXPLICITEMENT COVARIANTE

Elles sont très simples car il n'y a pas de terme en dérivée seconde de ξ :

$$\begin{aligned} O \equiv & \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha\beta}} (\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha) + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_A} (\xi^\rho \nabla_\rho \varphi_A + F_{A\mu}^{B\nu} \varphi_B \nabla_\nu \xi^\mu) + m^{A\gamma} (\xi^\rho \nabla_\rho \varphi_A) \\ & + F_{A\mu}^{B\nu} \nabla_\gamma \varphi_B \nabla_\nu \xi^\mu + (\nabla_\rho \varphi_A \nabla_\gamma \xi^\rho) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_A} \xi^\rho \nabla_\rho \varphi_A - m^{A\gamma} \xi^\rho \nabla_{\delta\gamma} \varphi_A \end{aligned}$$

Posons

$$\left(\frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial g_{\alpha\beta}} \right)_{\bar{\nabla} \varphi} = - \frac{\sqrt{g}}{2} \hat{T}^{\alpha\beta}$$

et

$$t_\beta^\alpha = m^{A\alpha} \nabla_\beta \varphi_A - \delta_\beta^\alpha \mathfrak{L}$$

il vient :

$$- \hat{T}_\mu^\nu + L^A F_{A\mu}^{B\nu} \varphi_B + \nabla_\mu S_\mu^{v\gamma} + t_\mu^\nu \equiv 0$$

Il n'y a pas d'autre identité indépendante; en particulier l'identité de Bianchi contractée (suivant la terminologie de Bergmann [14]) s'obtient simplement en dérivant celle-ci.

FORME NON EXPLICITEMENT COVARIANTE

$$\begin{aligned} O &= X \bar{\mathfrak{L}} - \partial_\alpha (\bar{\mathfrak{L}} \xi^\alpha) \\ &= \frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial g_{\alpha\beta}} X g_{\alpha\beta} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial g_{\alpha\beta,\gamma}} \partial_\gamma X g_{\alpha\beta} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial \varphi_A} X \varphi_A + \frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial \varphi_{A,\rho}} \partial_\rho X \varphi_A - \partial_\alpha (\bar{\mathfrak{L}} \xi^\alpha) \\ &= \left\{ - \frac{1}{2} \sqrt{g} \hat{T}^{\alpha\beta} - \sqrt{g} S_\mu^{\beta\nu} [\beta\nu, \lambda] \frac{\partial g^{\lambda\mu}}{\partial g_{\alpha\beta}} \right\} X g_{\alpha\beta} \\ &\quad - \frac{\sqrt{g}}{4} [S^{(\alpha\beta)} + S^{\tau(\alpha\beta)} - S^{(\alpha\beta)\tau}] \partial_\tau [g_{(\alpha\rho} \partial_{\beta)} \xi^\rho + \xi^\rho \partial_\rho g_{\alpha\beta}] \\ &\quad + \sqrt{g} \tilde{m}^A (\xi^\rho \partial_\rho \varphi_A + F_{A\mu}^{B\nu} \varphi_B \xi_\nu^\mu) + \sqrt{g} m^{A\tau} \partial_\tau (\xi^\rho \partial_\rho \varphi_A + F_{A\mu}^{B\nu} \varphi_B \xi_\nu^\mu) \\ &\quad - \partial_\alpha (\bar{\mathfrak{L}} \xi^\alpha) \end{aligned}$$

Ici encore, pas de terme en ξ et ceux en dérivée seconde de ξ n'apportent rien, étant

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{g}}{2} [S^{(\rho\tau\sigma)} + S^{\tau(\rho\sigma)} - S^{(\rho\sigma)\tau}] g_{\rho\lambda} \xi_{,\sigma\tau}^{\lambda} + \sqrt{g} S_{\lambda}^{\sigma\tau} \xi_{,\sigma\tau}^{\lambda} \\ & = \sqrt{g} g_{\rho\lambda} \xi_{,\sigma\tau}^{\lambda} \left(S^{[\sigma\tau]\rho} + \frac{1}{2} S^{\rho[\sigma\tau]} + \frac{1}{2} S^{[\sigma\rho\tau]} \right) \end{aligned}$$

Intéressons-nous maintenant aux termes en dérivée première de ξ . Nous transformons d'abord les termes issus de $\partial_{\tau} X g_{\alpha\beta}$ qui apportent une contribution.

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{g}}{4} [S^{(\alpha\tau\beta)} + S^{\tau(\alpha\beta)} - S^{(\alpha\beta)\tau}] (2g_{\alpha\rho,\tau} \xi_{,\beta}^{\rho} + \xi_{,\tau}^{\rho} g_{\alpha\beta,\rho}) \\ & = \xi_{,\rho}^{\alpha} (\delta_{\beta}^{\rho} \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} + \delta_{\nu}^{\rho} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} + g^{\mu\rho} [\beta_{\nu}, \alpha]) \sqrt{g} S_{\mu}^{\beta\nu} \end{aligned}$$

d'où l'identité

$$\begin{aligned} 0 = & \xi_{,\rho}^{\alpha} \{ -\hat{T}_{\alpha}^{\rho} + S_{\alpha}^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + S^{\mu\nu\rho} [\mu\nu, \alpha] - S_{\mu}^{\beta\nu} [\delta_{\beta}^{\rho} \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} + g^{\mu\rho} [\beta_{\nu}, \alpha]] \\ & + \tilde{m}^A F_{A\alpha}^{B\rho} \varphi_B + m^A \rho \varphi_{A,\alpha} + m^A \tau F_{A\alpha}^{B\rho} \varphi_{B,\tau} - \mathfrak{L} \delta_{\alpha}^{\rho} \} \sqrt{g} \end{aligned}$$

Comme le fait Trautman, nous substituons au tenseur canonique qui apparaît ici (et n'est pas un tenseur en Relativité Générale) le tenseur canonique covariant

$$m^A \rho \varphi_{A,\alpha} = m^A \rho (\varphi_{A;\alpha} + \Gamma_{A\alpha}^B \varphi_B) = m^A \rho \varphi_{A;\alpha} + S_{\varepsilon}^{\beta\rho} \Gamma_{\alpha\delta}^{\varepsilon}$$

Les 5^e et 7^e termes se laissent transformer en

$$\begin{aligned} & \sqrt{g} \tilde{m}^A F_{A\alpha}^{B\rho} \varphi_B + \partial_{\tau} (\sqrt{g} m^A \tau F_{A\alpha}^{B\rho} \varphi_B) - F_{A\alpha}^{B\rho} \varphi_B \partial_{\tau} (\sqrt{g} m^A \tau) \\ & = \sqrt{g} L^A F_{A\alpha}^{B\rho} \varphi_B + \partial_{\tau} (\sqrt{g} S_{\alpha}^{\rho\tau}) \end{aligned}$$

Les termes en Γ se simplifient ou se combinent convenablement pour redonner l'identité qui a déjà été obtenue.

LOIS DE CONSERVATION. — On ne s'attend pas à obtenir des lois « fortes ». Nous savons que t n'est pas conservé et l'exemple du champ de Maxwell montre que T est seulement faiblement conservé. Nous allons montrer que sous nos hypothèses de dépendance du lagrangien seulement par rapport à φ , $\underline{g}$ et leurs dérivées premières, le tenseur $T^{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta \mathfrak{L} \sqrt{g}}{\delta g_{\alpha\beta}}$ est

faiblement conservé. Évaluons-le, car il ne figure pas jusqu'ici dans les identités :

$$\begin{aligned}\frac{\delta \bar{\mathcal{L}}}{\delta g_{\alpha\beta}} &= \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial g_{\alpha\beta}} \right)_{\bar{\nabla}\varphi} + \frac{1}{2} \sqrt{g} S^{\rho\nu}_{\sigma} [\rho\nu, \tau] (g^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta} + g^{\sigma\beta} g^{\tau\alpha}) - \partial_{\tau} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial g_{\alpha\beta, \tau}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{g} \hat{T}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sqrt{g} S^{\rho\nu(\alpha} \Gamma_{\rho\nu}^{\beta)} + \frac{1}{4} \partial_{\tau} [\sqrt{g} (S^{(\alpha\tau\beta)} + S^{\tau(\alpha\beta)} - S^{(\alpha\beta)\tau})] \\ T^{\alpha\beta} &= \hat{T}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \nabla_{\tau} [S^{(\alpha\tau\beta)} + S^{\tau(\alpha\beta)} - S^{(\alpha\beta)\tau}]\end{aligned}$$

Dérivant l'identité :

$$\begin{aligned}\nabla_{\beta} \hat{T}^{\beta}_{\alpha} &= \nabla_{\beta} (L^A F^B_{A\alpha} \varphi_B) + \nabla_{\beta} t^{\beta}_{\alpha} + \nabla_{\beta\gamma} S^{\beta\gamma}_{\alpha} \\ &= \{ \nabla_{\beta} (L^A F^B_{A\alpha} \varphi_B) - L^A \nabla_{\alpha} \varphi_A \} + m^{A\beta} \nabla_{[\beta\alpha]} \varphi_A + \nabla_{\beta\gamma} S^{\beta\gamma}_{\alpha} \\ &\cong m^{A\beta} R^B_{A\beta\alpha} \varphi_B + \nabla_{\beta\gamma} S^{\beta\gamma}_{\alpha} = -S^{\nu\beta}_{\mu} R^{\mu}_{\nu\beta\alpha} + \nabla_{\beta\gamma} S^{\beta\gamma}_{\alpha} \neq 0\end{aligned}$$

Mais pour T, il vient :

$$\begin{aligned}\nabla_{\beta} T^{\beta}_{\alpha} &= -R^{\mu}_{\nu\beta\alpha} S^{\nu\beta}_{\mu} + \nabla_{\beta\gamma} S^{\beta\gamma}_{\alpha} - \frac{1}{2} \nabla_{\beta\gamma} \{ S^{\alpha[\gamma\beta]} + S^{[\gamma\alpha\beta]} - S^{(\gamma\beta)\alpha} \} \\ &= -R^{\mu}_{\nu\beta\alpha} S^{\nu\beta}_{\mu} + \frac{1}{2} \nabla_{\beta\gamma} (S^{[\beta\gamma]\alpha} - S^{\alpha[\gamma\beta]} - S^{[\gamma\alpha\beta]}) \\ &= -R^{\mu}_{\nu\beta\alpha} S^{\nu\beta}_{\mu} + \frac{1}{2} \nabla_{[\beta\gamma]} (S^{\beta\gamma\alpha} + S^{\alpha\beta\gamma} + S^{\beta\alpha\gamma}) \\ &= -R^{\mu}_{\nu\beta\alpha} S^{\nu\beta}_{\mu} + \frac{1}{2} \nabla_{[\beta\gamma]} (S S^{\beta\gamma\alpha} + 2S^{\beta[\alpha\gamma]}) = 0\end{aligned}$$

On voit que T et t diffèrent par la divergence d'une quantité antisymétrique quand les équations de champ sont satisfaites :

$$T^{\alpha\beta} = t^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \nabla_{\tau} P^{[\alpha\tau]\beta} + L^A F^B_{A\rho} \varphi_B g^{\rho\alpha}$$

où

$$P^{\alpha\tau\beta} = S^{\alpha\tau\beta} + S^{\beta\alpha\tau} + S^{\alpha\beta\tau}$$

C'est pourquoi leurs divergences et les densités d'énergie qu'ils définissent sont les mêmes en espace plat.

Ces résultats sont en gros connus des nombreux auteurs qui se sont intéressés à cette question. L'avantage de cette présentation est de tout déduire d'une seule identité covariante, elle-même obtenue sans aucune considération relative à l'action. Nous obtenons d'autre part une expression du tenseur métrique en fonction de quantités toutes covariantes.

On peut vérifier la validité de ces calculs pour le champ électromagnétique avec le lagrangien $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} t_{\beta}^{\alpha} &= \nabla_{\mu}\varphi_{\nu}\nabla_{\rho}\varphi_{\sigma}\left(\delta_{\beta}^{\rho}g^{\alpha\nu}g^{\sigma\mu}-\delta_{\beta}^{\rho}g^{\mu\alpha}g^{\nu\sigma}+\frac{1}{2}\delta_{\beta}^{\alpha}g^{\rho\mu}g^{\nu\sigma}-\frac{1}{2}\delta_{\beta}^{\alpha}g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}\right) \\ \hat{T}_{\beta}^{\alpha} &= \nabla_{\mu}\varphi_{\nu}\nabla_{\rho}\varphi_{\sigma}(\delta_{\beta}^{\rho}g^{\alpha\nu}g^{\sigma\mu}+\delta_{\beta}^{\sigma}g^{\rho\mu}g^{\nu\alpha}-\delta_{\beta}^{\mu}g^{\rho\alpha}g^{\nu\sigma}-\delta_{\beta}^{\nu}g^{\rho\mu}g^{\sigma\alpha}) \\ T_{\beta}^{\alpha} &= \frac{1}{2}\nabla_{\mu}\varphi_{\nu}\nabla_{\rho}\varphi_{\sigma}\delta_{\beta}^{\alpha}(g^{\rho\mu}g^{\nu\sigma}-g^{\rho\nu}g^{\mu\sigma})+\hat{T}_{\beta}^{\alpha} \end{aligned}$$

Ce dernier tenseur n'est autre que le tenseur de Maxwell; sa trace nulle vient de ce qu'il est fonction homogène de degré 0 de $\underline{g}$ et que sa dépendance par rapport aux $g_{\rho\sigma,\tau}$ n'est qu'apparente. Ce dernier point s'exprime aussi par l'antisymétrie du tenseur $\underline{S}$: $S_{\gamma}^{\alpha\beta} = -\varphi^{[\alpha;\beta]}\varphi_{\gamma}$; or $\partial\mathfrak{L}/\partial g_{\rho\sigma,\tau}$ se laisse aussi exprimer comme $-\frac{1}{4}(S^{(\rho\tau)\sigma}+S^{(\sigma\tau)\rho}-S^{(\rho\sigma)\tau})$, donc en fonction de la seule partie symétrique de $\underline{S}$.

La non-conservation de t est liée à la courbure de l'espace; la relation entre t et $\underline{T}$ conduit à

$$\nabla_{\alpha}t_{\beta}^{\alpha} = R_{A\beta\rho}^B m^{A\rho}\varphi_B = -m^{A\rho}\nabla_{[\beta\rho]}\varphi_A$$

(On obtient aussi immédiatement cette identité en développant

$$0 = \int \eta \{ \nabla_{\rho}(\mathfrak{L}\xi^{\rho}) - \nabla_{\rho}(\mathfrak{L}\xi^{\rho}) \} !).$$

Il peut arriver que ce second membre soit nul; c'est le cas pour le champ de Dirac. Mais si un lagrangien particulier conduit à un $\underline{t}$ non conservatif, peut-on le rendre conservatif moyennant une modification admissible du lagrangien, à savoir $\mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}' = \mathfrak{L} + \nabla_{\rho}D^{\rho}$, où $\underline{D}$ dépend de φ mais pas de ses dérivées ? La contribution de ce terme additionnel à $\underline{t}$ est

$$t'_{\beta}^{\alpha} = \nabla_{\beta}\varphi_A \frac{\partial}{\partial(\nabla_{\alpha}\varphi_A)} \left(\frac{\partial D^{\rho}}{\partial\varphi_B} \nabla_{\rho}\varphi_B \right) - \delta_{\beta}^{\alpha} \nabla_{\rho}D^{\rho}$$

d'où

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha}t'_{\beta}^{\alpha} &= \nabla_{\alpha\beta}\varphi_A \frac{\partial D^{\alpha}}{\partial\varphi_A} + \nabla_{\beta}\varphi_A \frac{\partial^2 D^{\alpha}}{\partial\varphi_A\partial\varphi_B} - \nabla_{\beta} \left(\frac{\partial D^{\rho}}{\partial\varphi_A} \nabla_{\rho}\varphi_A \right) \\ &= \frac{\partial D^{\alpha}}{\partial\varphi_A} \nabla_{[\alpha\beta]}\varphi_A = -R_{A\alpha\beta}^B \varphi_B \frac{\partial D^{\alpha}}{\partial\varphi_A} \end{aligned}$$

et la condition $m^{A\rho} + \frac{\partial D^\rho}{\partial \varphi_A} = 0$, irréalisable chaque fois que les équations d'Euler sont, comme il est normal, du second ordre, puisque $m^{A\rho}$ dépend des dérivées premières, pas $\underline{D}$ et qu'aucune équation du premier ordre ne les relie.

Cette non-conservation de $\underline{t}$ nous paraît justifier, en même temps que des arguments de simplicité, le choix de ce tenseur comme tenseur d'impulsion-énergie du champ : elle pourrait traduire un transfert d'impulsion-énergie entre le champ φ et le champ de gravitation. Pour une discussion plus détaillée des mérites des différents tenseurs, nous renvoyons à l'article de S. Lederer et M.-A. Tonnelat [15].

REMARQUE SUR LES CHAMPS SPINORIELS

La formule (4) donnant la dérivée de Lie d'un tenseur est également valable pour un tenseur-spineur; $\underline{F}$ est alors un tenseur-spineur construit à partir des tenseurs fondamentaux δ_β^α et $\gamma_B^{A\alpha}$.

La première définition proposée par Y. Kosmann, à savoir

$$F_{A\mu}^{B\nu} = -\frac{1}{4} \gamma_{\mu C}^B \gamma_A^{\nu C}$$

(cf. [16] [17]), satisfait aussi à (5), donc (3). Elle n'autorisait cependant pas à faire usage des formules non explicitement covariantes établies en repère naturel.

Des considérations géométriques [18] ont d'ailleurs conduit à modifier la définition en

$$X\psi_A = \xi^\rho \nabla_\rho \psi_A + \frac{1}{8} (\gamma^\beta \gamma_\alpha - \gamma_\alpha \gamma^\beta)_A^B \nabla_B \xi^\alpha \psi_B$$

Mais comme le nouvel $\underline{F}$ est encore à dérivée covariante nulle, on peut utiliser telles quelles les formules covariantes.

1.2. Les équations de Hamilton.

Nous cherchons maintenant dans quelles conditions le tenseur $\underline{t}$ peut engendrer des équations de Hamilton. Il faut d'abord définir de façon invariante en composante temporelle. C'est possible si, conformément aux idées de Cattaneo [8], on se donne une congruence de lignes de temps de vecteur unitaire $\underline{u}$. On munit donc la variété d'une structure supplémentaire, comme on le fait d'ailleurs habituellement dans le formalisme

des tétrades, mais au lieu d'introduire quatre champs de vecteurs, on se contente d'un seul, tangent aux lignes de temps d'une famille d'observateurs (cf. la discussion de Pirani [19]). En tout point de la variété V_4 , le vecteur u définit canoniquement une décomposition de l'espace tangent en deux sous-espaces supplémentaires que nous appelons avec Lichnerowicz le temps et l'espace associés à l'observateur. Les projecteurs correspondants sont

$$\theta_\beta^\alpha = u^\alpha u_\beta \quad \text{et} \quad \Sigma_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - u^\alpha u_\beta$$

Nous décomposerons en particulier un gradient en une dérivée covariante spatiale (que Cattaneo appelle transverse) et une dérivée covariante temporelle :

$$\nabla_\alpha \varphi_A = (\Sigma_\alpha^\beta + u^\beta u_\alpha) \nabla_\beta \varphi_A = \tilde{\nabla}_\alpha \varphi_A + u_\alpha \varphi_A$$

Remarquons tout de suite que $\tilde{\nabla}$ n'est pas une opération interne sur l'algèbre tensorielle spatiale dans la mesure où les Γ mélangent les composantes, mais elle est en général d'un emploi plus commode que $\tilde{\nabla}^*$ définie exclusivement pour un vecteur d'espace comme

$$\tilde{\nabla}_\alpha^* \varphi_\beta = \Sigma_\alpha^\rho \Sigma_\beta^\sigma \nabla_\rho \varphi_\sigma = \Sigma_\beta^\sigma \tilde{\nabla}_\alpha \varphi_\sigma$$

Nous supposons en outre que la congruence est orthogonale à une surface d'espace Σ .

Alors, le champ de 3-plans d'espace sur Σ est tangent à Σ , ce qui donne une bonne généralisation de l'espace tridimensionnel affine. Nous essaierons plus loin de nous affranchir de cette hypothèse; notons seulement ici que la plupart des modèles physiques envisagés jusqu'ici admettent des sections d'espace globales, souvent même décrites par une seule carte, et qu'il est également fait usage de cette hypothèse dans la formulation hamiltonienne d'Arnold, Deser et Misner.

Nous posons donc sur Σ :

$$\pi^A = u_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\rho \varphi_A}$$

$$\mathcal{H} = \pi^A u^\sigma \nabla_\sigma \varphi_A - \mathcal{L} = t_\beta^\alpha u_\alpha u^\beta$$

Ce sont bien les expressions usuelles si Σ est un plan $x^0 = C$ dans l'espace de Minkowski. Variions maintenant H (qui est l'intégrale sur Σ de $\mathcal{H}$) :

$$\delta H = \int_\Sigma \tilde{\eta} \left[\delta \pi^A u^\sigma \nabla_\sigma \varphi_A + \pi^A u^\sigma \delta(\nabla_\sigma \varphi_A) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A} \delta \varphi_A - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\sigma \varphi_A)} \delta(\nabla_\sigma \varphi_A) \right].$$

Nous projetons un indice dans le dernier terme en écrivant

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\sigma \varphi_A)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\rho \varphi_A)} (\Sigma_\rho^\sigma + \Theta_\rho^\sigma)$$

et tenons compte des équations d'Euler :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A} = \nabla_\sigma \left[(\Sigma_\rho^\sigma + \Theta_\rho^\sigma) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\rho \varphi_A)} \right]$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_\Sigma \tilde{\eta} \left\{ \delta \pi^\Lambda u^\sigma \nabla_\sigma \varphi_A + \pi^\Lambda u^\sigma \nabla_\sigma (\delta \varphi_A) - \delta \varphi_A \nabla_\sigma \left[(\Sigma_\rho^\sigma + \Theta_\rho^\sigma) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\rho \varphi_A)} \right] \right. \\ &\quad \left. - (\Sigma_\rho^\sigma + \Theta_\rho^\sigma) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\rho \varphi_A)} \nabla_\sigma (\delta \varphi_A) \right\} \\ &= \int_\Sigma \tilde{\eta} \left\{ \delta \pi^\Lambda u^\sigma \nabla_\sigma \varphi_A + \pi^\Lambda u^\sigma \nabla_\sigma (\delta \varphi_A) - \delta \varphi_A u^\sigma \nabla_\sigma \pi^\Lambda - \delta \varphi_A \pi^\Lambda \nabla_\sigma u^\sigma \right. \\ &\quad \left. - u^\sigma \nabla_\sigma (\delta \varphi_A) \pi^\Lambda - \nabla_\sigma \left[\delta \varphi_A \Sigma_\rho^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\rho \varphi_A)} \right] \right\} \\ &= \int_\Sigma \tilde{\eta} (\delta \pi^\Lambda \dot{\varphi}_A - \delta \varphi_A \dot{\pi}^\Lambda) - \delta H_1. \end{aligned}$$

Si $\delta H_1 = 0$, on a bien les équations de Hamilton :

$$\dot{\varphi}_A = \delta H / \delta \pi^\Lambda \quad \text{et} \quad \dot{\pi}^\Lambda = - \delta H / \delta \varphi_A.$$

Or, du dernier terme on peut extraire une divergence d'espace; si l'on pose

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\rho \varphi_A} \delta \varphi_A = A^\rho \quad (\text{donc } u^\rho A_\rho = \pi^\Lambda \delta \varphi_A)$$

$$\begin{aligned} \delta H_1 &= \int_\Sigma \tilde{\eta} [u_\rho A^\rho \nabla_\sigma u^\sigma + \nabla_\sigma (\Sigma_\rho^\sigma A^\rho)] \\ &= \int_\Sigma \tilde{\eta} [u_\rho A^\rho \nabla_\sigma u^\sigma + \nabla_\sigma (\Sigma_\gamma^\gamma \Sigma_\tau^\tau \Sigma_\rho^\tau A^\rho)] \end{aligned}$$

puisque Σ_ρ^τ est un projecteur,

$$\delta H_1 = \int_\Sigma \tilde{\eta} [\Sigma_\gamma^\gamma \Sigma_\tau^\tau \nabla_\sigma (\Sigma_\rho^\tau A^\rho) + A^\rho (\Sigma_\rho^\tau \nabla_\sigma \Sigma_\tau^\tau + u_\rho \nabla_\sigma u^\sigma)].$$

Maintenant — et maintenant seulement — le premier terme se ramène à un terme de bord, nul si $\delta \varphi = 0$ sur $\partial \Sigma$. δH_1 est donc nul si le coefficient de A^ρ est nul; compte tenu du caractère unitaire de u , cela implique

$$- u^\sigma \nabla_\sigma u_\rho + u_\rho \nabla_\sigma u^\sigma = 0,$$

soit encore $\nabla_{\sigma} u^{\sigma} = 0$ et $u^{\sigma} \nabla_{\sigma} u_{\rho} = 0$. On voit que l'on obtient les équations usuelles à condition que le temps et l'espace ne soient pas trop « couplés » : les projecteurs doivent commuter avec la dérivation temporelle, qui est alors une opération interne sur les tenseurs d'espace et avec l'opérateur de divergence spatiale, quand ils opèrent sur le même indice.

Géométriquement, les conditions obtenues expriment que la surface Σ est minimale et que la congruence est géodésique à son voisinage. La première condition est intéressante, car c'est une de celles que l'on est amené à poser quand on cherche la généralisation dans une variété courbe des plans de l'espace euclidien. La condition $\text{grad } u = 0$ est en effet beaucoup trop stricte : ou bien elle n'est satisfaite que sur des sous-variétés exceptionnelles, ou bien l'on en déduit que u est « vecteur propre » du tenseur de courbure avec la valeur propre zéro. Celle-ci, au contraire, est d'un emploi assez commode dans de nombreux calculs (*e. g.* [20]); nous serons amené à lui attribuer, avec Rayski [21] [22], une signification physique.

On peut conjecturer qu'en espace de Minkowski une telle surface globalement régulière est plane; ce résultat est classique dans E_3 (théorème de Bernstein [23]); il a été généralisé récemment à des dimensions supérieures (E. de Giorgi [24]; Almgren [25]), mais on ne possède pas de résultats analogues pour le cas hyperbolique normal.

Si l'on suppose maintenant réalisées non seulement les deux conditions précédentes (soit $C = 0$), mais aussi $u^{\rho} \nabla_{\rho} C = 0$, ce qui entraîne la permanence du formalisme hamiltonien, on a :

$$S u_{\alpha} (\nabla_{\beta} u_{\gamma} - \nabla_{\gamma} u_{\beta}) = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

Multipliant scalairement par u , il vient $du = 0$; puis de $\tilde{\nabla}(du) = 0$, on déduit $\nabla(du) = 0$; procédant de même avec δu , on trouve $\text{grad } (\delta u) = 0$; autrement dit u est harmonique dans un voisinage Ω de Σ :

$$-\nabla_{\rho}^{\rho} u_{\alpha} + R_{\alpha}^{\rho} u_{\rho} = 0$$

et comme $\underline{u}$ est unitaire :

$$\nabla_{\rho} u_{\alpha} \nabla^{\rho} u^{\alpha} + R_{\alpha\rho} u^{\alpha} u^{\rho} = 0$$

Dans le cas extérieur sans constante cosmologique :

$$\Sigma^{\alpha\beta} \Sigma^{\lambda\mu} \nabla_{\alpha} u_{\lambda} \nabla_{\beta} u_{\mu} = 0$$

ou, la métrique Σ étant définie négative, $\nabla u = 0$; le plan est un plan au sens de Cartan.

Dans le cas $\lambda \neq 0$, les équations d'Einstein s'écrivent en repère gaussien adapté :

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma_{0i}^i - \Gamma_{0i}^j \Gamma_{0j}^i$$

$$R_{ij} = R_{\alpha j}^\alpha = R_{ij}^* + \partial_0 \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{0k}^k \Gamma_{ij}^0 - \Gamma_{kj}^0 \Gamma_{i0}^k \Gamma_{0j}^m - \Gamma_{im}^0$$

Posons

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \partial_0 g_{ij}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2} \partial_0 g^{ij} = -C^{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = C_j^i$$

et $\Gamma_{ij}^0 = -C_{ij}$; compte tenu de $\text{tr}(C) = 0$

$$\frac{1}{2} \partial_{00} g_{ij} = R_{ij}^* + 2C_{kj} C_i^k + \lambda g_{ij}$$

Si la trace de C reste nulle :

$$\frac{1}{2} g^{ik} \partial_{00} g_{ik} = -\frac{1}{2} \partial_0 g^{ik} \partial_0 g_{ik} = 2 \text{tr}(C^2)$$

Or les équations en R_{ij} conduisent à

$$\frac{1}{2} g^{ik} \partial_{00} g_{ik} = R^* + 2 \text{tr}(C^2) + 3\lambda, \quad \text{d'où} \quad R^* = -3\lambda$$

Dans l'interprétation de Cattaneo, le fluide de repère a donc des propriétés bien définies : il est incompressible, à pression constante et animé d'un mouvement irrotationnel (cf. Lichnerowicz [26] [27]). Voilà qui généralise autant qu'il est possible en théorie d'Einstein les repères galiléens constitués de solides rigides non accélérés. C'est plus précis que de demander, comme le fait Rayski, que les surfaces Σ soient aussi peu courbes que possible : cette condition l'amène à postuler plutôt, dans un mémoire ultérieur [28],

$$\delta \int \tilde{\eta} R^* = 0.$$

Bien entendu, un schéma aussi particulier ne pourra pas trouver place dans n'importe quel espace-temps. Ainsi, si la métrique est celle de Schwarzschild, les « plans » $x^0 = C$ forment bien une famille à un paramètre de surfaces minimales, mais leurs trajectoires orthogonales, dont le théorème de Bianchi et Bompiani assure l'existence, ne sont pas des géodésiques. En revanche, un plan donné, disons $x^0 = 0$ et les géodésiques qui en sont issues normalement, satisfont aux conditions du premier ordre.

Enfin l'étude d'un formalisme voisin (cf. le chapitre III) pourrait suggérer d'affaiblir les conditions sur $\underline{u}$ en n'imposant pas $u^x u_x = 0$, mais en

permettant à l'échelle de temps de varier d'un point à un autre. Le nouveau vecteur $\underline{v}$ remplaçant $\underline{u}$ dans la définition des moments, le seul choix possible pour $\mathcal{H}$ est

$$\mathcal{H} = \pi^\Lambda v^\rho \nabla_\rho \varphi_\Lambda - \mathfrak{L} v^\rho v_\rho$$

si l'on veut que les termes en $\dot{\delta\varphi}$ s'annulent et que $\delta\pi$ ait le bon coefficient dans δH . Un calcul élémentaire conduit alors à

$$\begin{cases} v^\sigma \nabla_\sigma v_\tau + \nabla_\tau (v^\sigma v_\sigma) = 0 \\ \nabla_\sigma v^\sigma - v^\sigma \nabla_\sigma \text{Log}(V^\sigma v_\sigma) = 0, \end{cases}$$

conditions qui généralisent bien les précédentes. Le système équivaut à

$$\begin{cases} v^\tau \nabla_\tau (v^\sigma v_\sigma) = 0 \\ \Sigma_\tau^\lambda v^\sigma \nabla_\sigma v_\lambda + \tilde{\nabla}_\tau (v^\sigma v_\sigma) = 0 \\ \nabla_\sigma v^\sigma = 0 \end{cases}$$

Tenons compte maintenant de l'intégrabilité de la congruence en nous plaçant dans le repère où $g_{0i} = 0$ et $v^\alpha = \delta_0^\alpha$ (donc $v_0 = \lambda g_{00}$ et $v_i = 0$).

La première équation est $\partial_0(\lambda^2 g_{00}) = 0$; elle s'intègre en $\lambda = \frac{f(x^i)}{\sqrt{g_{00}}}$. La

seconde $\frac{\lambda^2}{2} \partial_i g_{00} + g_{00} \partial_i(\lambda^2) = 0$ s'intègre en $\lambda = (g_{00})^{1/4} h(x^0)$.

Comparant les deux expressions de λ , on en déduit que la métrique doit satisfaire à

$$g_{00} = \widehat{f}(x^i) \widehat{h}(x^0)$$

cependant que la dernière équation, compte tenu de ce qui précède, conduit à $\tilde{g} = \tilde{g}(x^i)$. Cela permet donc de traiter notamment les variétés à métrique orthogonale stationnaire (e. g. métrique de Schwarzschild ou de De Sitter). Nous nous bornerons néanmoins au premier cas, pour plus de simplicité, quand nous étudierons, au chapitre suivant, quelques applications.

I.3. Lagrangien renfermant des dérivées d'ordre ≥ 2 des fonctions de champ.

Ce cas paraît dépourvu d'intérêt physique. Ceci dit, la méthode classique d'Ostrogradsky [29] se laisse généraliser et on obtient des équations de Hamilton moyennant des conditions plus strictes sur u . On doit avoir non seulement les conditions $C = 0$ obtenues au § 2, mais encore les conditions $(u^\rho \nabla_\rho)^k C = 0$ pour $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

I.4. Les crochets de Poisson.

Le crochet de Poisson de deux fonctionnelles de Σ est défini naturellement comme

$$[f, g] = \int_{\Sigma} \left(\frac{\delta f}{\delta \varphi_{\alpha}} \frac{\delta g}{\delta \pi^{\alpha}} - \frac{\delta f}{\delta \pi^{\alpha}} \frac{\delta g}{\delta \varphi_{\alpha}} \right) \tilde{\eta}$$

En particulier

$$\begin{aligned} [\pi^{\alpha}, \varphi_{\beta'}] &= - \int \frac{\delta \pi^{\alpha}}{\delta \pi^{\gamma''}} \frac{\delta \varphi_{\beta'}}{\delta \varphi_{\gamma''}} \tilde{\eta}'' = - \int \delta_{\gamma''}^{\alpha} \delta_{\beta'}^{\gamma''} \delta(x, x'') \delta(x', x'') \tilde{\eta}'' \\ &= - \delta_{\beta'}^{\alpha} \delta(x, x'), \text{ distribution sur } \Sigma \times \Sigma \end{aligned}$$

Nous adoptons pour les distributions sur une variété métrique les définitions de Lichnerowicz [5], en utilisant le plus souvent la notation intégrale. Nous particulariserons en général le hamiltonien : ce sera celui du champ électromagnétique de Fock.

Les fonctions définies sur Σ se laissent identifier canoniquement à des fonctionnelles de cette même surface à l'aide de la distribution de Dirac :

$$f(X) \rightarrow \hat{f}(\Sigma) = \int \tilde{\eta}(x') f(x') \delta(x, x')$$

On verra parfois des indices tensoriels libres sous le signe $\int$; c'est justifié dans la mesure où l'intégrande est à support ponctuel et qu'ainsi on n'ajoute pas, malgré les apparences, des composantes de vecteurs pris en des points différents.

L'opération $[\dots, H]$ est une dérivation sur les fonctionnelles ; à la fonction f , elle associe $f' = \frac{\delta f}{\delta \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\delta f}{\delta \pi} \dot{\pi}$. En particulier, si f est une fonction entière des variables canoniques, $f' = u^{\rho} \nabla_{\rho} f$. Les équations de Hamilton peuvent alors s'écrire

$$\dot{\varphi} = [\varphi, H] \quad \text{et} \quad \dot{\pi} = [\pi, H]$$

Vérifions-le pour le hamiltonien de Fock (calculé au chapitre II.1)

$$\begin{aligned} [\varphi_{\alpha'}, H] &= \int \tilde{\eta} [\varphi_{\alpha'}, \pi^{\nu}] \{ -\pi_{\nu} + (u_{\rho} \tilde{\nabla}_{\nu} - u_{\nu} \tilde{\nabla}_{\rho}) \varphi^{\rho} \} \\ &= -\pi_{\alpha'} + (u_{\rho} \tilde{\nabla}_{\alpha'} - u_{\alpha'} \tilde{\nabla}_{\rho}) \varphi^{\rho} = \dot{\varphi}_{\alpha'} \\ [\pi^{\alpha'}, H] &= \int \tilde{\eta} \{ \pi_{\nu} (u^{\rho} \tilde{\nabla}^{\nu} - u^{\nu} \tilde{\nabla}^{\rho}) [\pi^{\alpha'}, \varphi_{\rho}] + \Sigma_{\delta}^{\rho} (\tilde{\nabla}^{\mu} \varphi^{\delta} - \tilde{\nabla}^{\delta} \varphi^{\mu}) \tilde{\nabla}_{\mu} [\pi^{\alpha'}, \varphi_{\rho}] \} \\ &= - \int \tilde{\eta} \{ \pi_{\nu} (u^{\rho} \tilde{\nabla}^{\nu} - u^{\nu} \tilde{\nabla}^{\rho}) + \Sigma_{\delta}^{\rho} (\tilde{\nabla}^{\mu} \varphi^{\delta} - \tilde{\nabla}^{\delta} \varphi^{\mu}) \tilde{\nabla}_{\mu} \} (\delta_{\rho}^{\alpha'} \delta) \end{aligned}$$

Intégrons par parties :

$$\begin{aligned} [\pi^{\alpha'}, H] &= \int \tilde{\eta} \delta_{\rho}^{\alpha'} \{ \tilde{\nabla}^{\nu}(u^{\rho} \pi_{\nu}) - \tilde{\nabla}^{\rho}(u^{\nu} \pi_{\nu}) + \tilde{\nabla}_{\mu} [\Sigma_{\delta}^{\rho} (\tilde{\nabla}^{\mu} \varphi^{\delta} - \tilde{\nabla}^{\delta} \varphi^{\mu})] \} \delta \\ [\pi^{\alpha}, H] &= \tilde{\nabla}^{\nu}(u^{\alpha} \pi_{\nu}) - \tilde{\nabla}^{\alpha}(u^{\nu} \pi_{\nu}) + \tilde{\nabla}_{\mu} [\Sigma_{\delta}^{\alpha} (\tilde{\nabla}^{\mu} \varphi^{\delta} - \tilde{\nabla}^{\delta} \varphi^{\mu})] \\ &= \dot{\pi}^{\alpha} \end{aligned}$$

L'opérateur de translation spatiale est l'analogue de T_i^0 en formalisme covariant, à savoir

$$P_{\alpha} = \int u_{\rho} T^{\rho}_{\alpha|\Sigma} \tilde{\eta} = \int \pi^{\rho} \tilde{\nabla}_{\alpha} \varphi_{\rho} \tilde{\eta}$$

Comme H , c'est un opérateur local (sur les germes de tenseurs), satisfaisant à :

$$\begin{aligned} [P_{\alpha}, \varphi_{\beta}] &= \int \tilde{\eta}' [\pi^{\tau'} \tilde{\nabla}_{\alpha'} \varphi_{\tau'}, \varphi_{\beta}] = - \int \tilde{\eta}' \tilde{\nabla}_{\alpha'} \varphi_{\tau'} \delta_{\beta}^{\tau'}(x, x') = - \tilde{\nabla}_{\alpha} \varphi_{\beta} \\ [P_{\alpha}, \pi^{\lambda}] &= \int \tilde{\eta}' \pi^{\tau'} \tilde{\nabla}_{\alpha'} (\delta_{\tau'}^{\lambda} \delta(x, x')) = - \tilde{\nabla}_{\alpha} \pi^{\lambda} \end{aligned}$$

RELATIONS DE COMMUTATION ENTRE H ET P ; IDENTITÉ DE JACOBI

C'est ici que vont apparaître un certain nombre de particularités dues à la structure riemannienne. Nous calculons d'abord les crochets de H avec des dérivées transverses ; celles-ci passent à la gauche des intégrales du fait de la commutation des dérivations en deux points distincts :

$$[\tilde{\nabla}_{\alpha} \varphi_{\beta}, H] = \tilde{\nabla}_{\alpha} [\varphi_{\beta}, H] = \tilde{\nabla}_{\alpha} \dot{\varphi}_{\beta}$$

et de même pour π , alors qu'on aurait pu s'attendre à trouver des expressions comme $u^{\rho} \nabla_{\rho} (\tilde{\nabla}_{\alpha} \varphi_{\beta})$. Mais on peut contrôler la formule obtenue en remontant à la définition du crochet :

$$\begin{aligned} [\tilde{\nabla}_{\alpha} \varphi_{\beta}, H] &= \int \tilde{\eta}' \frac{\delta(\tilde{\nabla}_{\alpha} \varphi_{\beta} \delta)}{\delta \varphi_{\gamma'}} \frac{\delta H}{\delta \pi^{\gamma'}} \\ &= \int \tilde{\nabla}_{\alpha} \delta(x, x') \delta_{\beta}^{\gamma'} \dot{\varphi}_{\gamma'}(x') \eta' = \tilde{\nabla}_{\alpha} \dot{\varphi}_{\beta} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} [P_{\alpha}, H] &= \int \tilde{\eta} [\pi^{\rho} \tilde{\nabla}_{\alpha} \varphi_{\rho}, H] \\ &= \int \tilde{\eta} (\pi^{\rho} \tilde{\nabla}_{\alpha} \dot{\varphi}_{\rho} + \dot{\pi}^{\rho} \tilde{\nabla}_{\alpha} \varphi_{\rho}) \end{aligned}$$

Nous aurons également besoin des crochets suivants :

$$\begin{aligned}
 [\dot{\varphi}_\alpha, \varphi_\beta] &= -[\pi_\alpha, \varphi_\beta] = g_{\alpha\beta} \delta \\
 [\pi^\alpha, \pi^\beta] &= [\tilde{\nabla}_\lambda \{ \Sigma_\rho^\alpha (\tilde{\nabla}^\rho \varphi^\rho - \tilde{\nabla}^\rho \varphi^\lambda) \}, \pi^\beta] \\
 &= \tilde{\nabla}_\lambda \{ \Sigma_\rho^\alpha \tilde{\nabla}^\lambda (g^{\rho\beta'} \delta) - \Sigma_\rho^\alpha \tilde{\nabla}^\rho (g^{\lambda\beta'} \delta) \} \\
 [\dot{\pi}^\alpha, \varphi_\beta] &= [\tilde{\nabla}_\lambda (\pi^\lambda u^\alpha - g^{\lambda\alpha} u_\nu \pi^\nu), \varphi_\beta] = -\tilde{\nabla}_\lambda \{ (u^\alpha \delta_\beta^\lambda - g^{\lambda\alpha} u_\beta) \delta \} \\
 [\dot{\varphi}_\alpha, \pi^\beta] &= (u_\rho \tilde{\nabla}_\alpha - u_\alpha \tilde{\nabla}_\rho) [\varphi^\rho, \pi^\beta] = (u_\rho \tilde{\nabla}_\alpha - u_\alpha \tilde{\nabla}_\rho) (g^{\rho\beta'} \delta)
 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer $[P_\alpha, \dot{\varphi}_\beta]$

$$\begin{aligned}
 [P_\alpha, \dot{\varphi}_\beta] &= [P_\alpha, -\pi_\beta + u^\rho \tilde{\nabla}_\rho \varphi_\rho - u_\beta \tilde{\nabla}_\rho \varphi^\rho] \\
 &= \tilde{\nabla}_\alpha \pi_\beta - u^\rho \tilde{\nabla}_\beta \varphi_\rho + u_\beta \tilde{\nabla}_\rho \varphi^\rho \\
 &= \tilde{\nabla}_\alpha (\pi_\beta - u^\rho \tilde{\nabla}_\rho \varphi_\rho + u_\beta \tilde{\nabla}_\rho \varphi^\rho) - u^\rho \tilde{\nabla}_{[\beta\alpha]} \varphi_\rho + u_\beta \tilde{\nabla}_{[\rho\alpha]} \varphi^\rho \\
 &\quad + \tilde{\nabla}_\alpha u^\rho \cdot \tilde{\nabla}_\beta \varphi_\rho - \tilde{\nabla}_\alpha u_\beta \cdot \tilde{\nabla}_\rho \varphi^\rho \quad (1)
 \end{aligned}$$

Vérifions l'identité de Jacobi :

$$[[H, P_\alpha], \varphi_\beta] = [H, [P_\alpha, \varphi_\beta]] + [P_\alpha, [\varphi_\beta, H]]$$

Le membre de gauche, changé de signe, est

$$\begin{aligned}
 -[[H, P_\alpha], \varphi_\beta] &= \int \tilde{\eta} \{ [\dot{\pi}^\rho, \varphi_\beta] \tilde{\nabla}_\alpha \varphi_\rho + [\pi^\rho, \varphi_\beta] \tilde{\nabla}_\alpha \dot{\varphi}_\rho + \pi^\rho \tilde{\nabla}_\alpha [\dot{\varphi}_\rho, \varphi_\beta] \} \\
 &= \int \tilde{\eta} \{ [-\tilde{\nabla}_\lambda (u^\rho \delta_\beta^\lambda \delta) + \tilde{\nabla}^\rho (u_\nu \delta_\beta^\nu \delta)] \tilde{\nabla}_\alpha \varphi_\rho - \delta_\beta^\rho \tilde{\nabla}_\alpha \dot{\varphi}_\rho \delta \\
 &\quad + \pi^\rho \tilde{\nabla}_\alpha (g_{\rho\beta'} \delta) \} \\
 -[[H, P_\alpha], \varphi_\beta] &= u^\rho \tilde{\nabla}_\beta \varphi_\rho - u_\beta \tilde{\nabla}_\rho \varphi^\rho - \tilde{\nabla}_\alpha (\varphi_\beta + \pi_\beta)
 \end{aligned}$$

Si l'on remplace $\dot{\varphi}$ et π par leur expression en φ , on retrouve bien le membre de droite, compte tenu de la formule (1). De même

$$\begin{aligned}
 -[[H, P_\alpha], \pi^\beta] &= \int \tilde{\eta} \{ \pi^\rho \tilde{\nabla}_\alpha [\dot{\varphi}_\rho, \pi^\beta] + [\pi^\rho, \pi^\beta] \tilde{\nabla}_\alpha \varphi_\rho + \dot{\pi}^\rho \tilde{\nabla}_\alpha [\varphi_\rho, \pi^\beta] \} \\
 &= \int \tilde{\eta} \{ \pi^\rho \tilde{\nabla}_\alpha (u_\sigma \tilde{\nabla}_\sigma - u_\rho \tilde{\nabla}_\sigma) (g^{\sigma\beta'} \delta) \\
 &\quad + \tilde{\nabla}_\lambda [\Sigma_\sigma^\rho \tilde{\nabla}^\lambda (g^{\sigma\beta'} \delta) - \tilde{\nabla}^\rho (g^{\lambda\beta'} \delta)] \tilde{\nabla}_\alpha \varphi_\rho + \dot{\pi}^\rho \tilde{\nabla}_\alpha (\delta_\rho^\beta \delta) \} \\
 -[[H, P_\alpha], \pi^\beta] &= \tilde{\nabla}_\rho (u^\beta \tilde{\nabla}_\alpha \pi^\rho) - \tilde{\nabla}_\beta (u_\rho \tilde{\nabla}_\alpha \pi^\rho) + \tilde{\nabla}^\lambda (\Sigma^{\rho\beta} \tilde{\nabla}_{\lambda\alpha} \varphi_\rho) - \tilde{\nabla}^{\rho\beta} \varphi_\rho - \tilde{\nabla}_\alpha \dot{\pi}^\beta \\
 &= u^\beta \tilde{\nabla}_{\rho\alpha} \pi^\rho - u^\rho \tilde{\nabla}_\alpha \pi_\rho + \tilde{\nabla}^\rho (\Sigma^{\beta\sigma} \tilde{\nabla}_{\rho\alpha} \varphi_\sigma) - \tilde{\nabla}_\alpha \varphi_\rho - \tilde{\nabla}_\alpha \dot{\pi}^\beta
 \end{aligned}$$

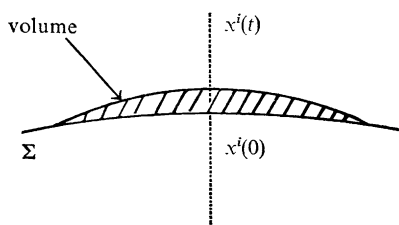
à cause de la nullité de $\underline{du}$; ceci doit être, du fait de l'identité de Jacobi, $-\tilde{\nabla}_\alpha \dot{\pi}^\beta - [P_\alpha, \dot{\pi}^\beta]$; or, une évaluation directe du premier terme conduit à

$$-[P_\alpha, \dot{\pi}^\beta] = [\tilde{\nabla}_\rho \{ \pi^\rho u^\beta - g^{\rho\beta} u_\nu \pi^\nu + \Sigma_\sigma^\beta (\tilde{\nabla}^\rho \varphi^\sigma - \tilde{\nabla}^\sigma \varphi^\rho) \}, P_\alpha]$$

ce qui est cohérent.

DÉRIVATIONS TEMPORELLES SUCCESSIVES

L'existence d'une congruence privilégiée de courbes permet de transporter le bitenseur de Dirac de la surface initiale $\Sigma(0)$, sur toute autre surface d'espace et en particulier sur les surfaces du feuilletage $\Sigma(t)$, du moins dans le domaine Ω où deux géodésiques issues de points différents de la surface ne se recoupent pas. Une carte de $\Sigma(0)$ induit une carte gaussienne dans ce domaine.



On peut alors évaluer (par exemple dans ce repère) la dérivée fonctionnelle de $f(x^i)$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \Sigma(x')} f(x) &= \lim \frac{\varphi(x^i, t) - \varphi(x^i, 0)}{\text{volume}} \\ &= \dot{\varphi}(x^i, 0) \delta(x^i, x'^i) \end{aligned}$$

L'opération $u^\rho \nabla_\rho$ sur une fonction dérivable dans un voisinage de Σ correspond donc à l'opération $\delta/\delta \Sigma(x)$ sur la fonctionnelle associée; aussi ne s'attendra-t-on pas à obtenir les dérivées temporelles successives même d'une fonction entière de φ et π en itérant l'opération $[\dots, H]$ dès l'instant que H s'exprime comme le flux à travers Σ du vecteur non conservatif $t_\beta^2 u^\beta$ (cf. Umezawa [30], chapitre VI, § 2). On a plus précisément :

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= u^\rho \nabla_\rho \dot{\varphi} = u^\rho \nabla_\rho [\varphi, H] = \int_\Sigma \frac{\delta}{\delta \Sigma} [\varphi, H] \tilde{\eta} \\ \ddot{\varphi} &= [\dot{\varphi}, H] + \int \tilde{\eta}' [\varphi, u^{\rho'} \nabla_{\rho'} \mathcal{H}] \end{aligned} \quad (2)$$

Évaluons donc $u^\rho \partial_\rho \mathcal{H}$:

$$u^\rho \partial_\rho \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_A} u^\rho \nabla_\rho \varphi_A + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\tilde{\nabla}_\beta \varphi_A)} u^\rho \nabla_\rho \tilde{\nabla}_\beta \varphi_A + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^A} u^\rho \nabla_\rho \pi^A$$

La covariance générale entraîne que les π interviennent dans $\mathcal{H}$ avec un ordre de dérivation inférieur d'une unité à l'ordre des φ , donc il n'y a pas de dérivées « transverses » des π pour les lagrangiens que nous avons envisagés. Le second terme se laisse transformer :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{\nabla}_\beta \varphi_A} u^\rho \nabla_\rho \tilde{\nabla}_\beta \varphi_A \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\tilde{\nabla}_\beta \varphi_A)} \{ u^\rho \nabla_{[\rho \beta]} \varphi_A + u^\rho \tilde{\nabla}_\beta (\nabla_\rho \varphi_A) \} \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\tilde{\nabla}_\beta \varphi_A)} u^\rho \nabla_{[\rho \beta]} \varphi_A - \nabla_\rho \varphi_A \tilde{\nabla}_\beta \left[u^\rho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\tilde{\nabla}_\beta \varphi_A)} \right] + \tilde{\nabla}_\beta \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{\nabla}_\beta \varphi_A} u^\rho \nabla_\rho \varphi_A \right] \end{aligned}$$

Les intégrales de divergences d'espace n'apportent pas de contribution moyennant des conditions aux limites raisonnables et nous les négligerons systématiquement; les termes en $\frac{\delta H}{\delta \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\delta H}{\delta \pi} \dot{\pi}$ se simplifient en vertu des équations de Hamilton et il reste :

$$\int \tilde{\eta} u^\rho \nabla_\rho \mathcal{H} = \int \tilde{\eta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\tilde{\nabla}_\beta \varphi_A)} \{ u^\rho \nabla_{[\rho \beta]} \varphi_A - \nabla_\rho \varphi_A \tilde{\nabla}_\beta u^\rho \}$$

Le premier terme fait intervenir la courbure riemannienne :

$$\begin{aligned} u^\rho (\nabla_\rho \tilde{\nabla}_\beta - \tilde{\nabla}_\beta \nabla_\rho) \varphi_A &= u^\rho [\nabla_\rho (\nabla_\beta - u_\beta u^\sigma \nabla_\sigma) - (\nabla_\beta - u_\beta u^\sigma \nabla_\sigma) \nabla_\rho] \varphi_A \\ &= u^\rho \nabla_{[\rho \beta]} \varphi_A - u_\beta u^\rho u^\sigma \nabla_{[\rho \sigma]} \varphi_A \\ &= -R_{A\rho\beta}^B \varphi_B u^\rho \end{aligned}$$

Le second fait intervenir la courbure de l'espace Σ ; il serait nul pour un plan au sens de Cartan.

I.5. Le formalisme hamiltonien singulier.

Il nous reste à montrer que les méthodes exposées s'appliquent au cas hamiltonien singulier tel que l'a envisagé Dirac [31]. C'est assez vraisemblable, comme les projecteurs sont suffisamment transparents aux opérations

de dérivation. Les notations et les démonstrations suivent au plus près Kundt [32]. Nous supposons ici pour plus de simplicité que le lagrangien est du premier ordre. Nous appelons superspace de phase le produit de la variété Σ par l'espace X des φ_A, π^A et $r_A = u^\rho \nabla_\rho \varphi_A$, Y est l'espace à $2N$ dimensions d'équations $\pi^A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_A} = u^\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\rho \varphi_A)}$. Nous supposons qu'il est possible d'extraire de ces N équations un système maximal de rang M ($0 < M \leq N$) ne faisant pas intervenir les r_A , à savoir

$$z^p \left(\varphi_A, \tilde{\nabla}_\alpha \varphi_A, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_A} \right) = 0 ;$$

nous appelons π la surface ainsi définie ($Y \subset \pi \subset X$). Comme sur cette surface $\partial z^p / \partial r_A = 0$, le hessien est de rang $N - M$ sur Y :

$$\frac{\partial z}{\partial r_A} \stackrel{Y}{=} \frac{\partial z^p}{\partial \pi^B} \frac{\partial \pi^B}{\partial r_A} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial r_B \partial r_A} \frac{\partial z^p}{\partial \pi^B}$$

Posons $\widehat{\mathcal{H}}(\pi, \varphi, r) = \pi^A r_A - \mathcal{L}$; il existe une fonction des π et φ , $\mathcal{H}$, telle que sur Y $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$.

Il existe alors des fonctions f_A sur X telles que

$$\begin{aligned} d(\widehat{H} - H) &\stackrel{Y}{=} \int f_A d \left(\pi^A - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_A} \right) \tilde{\eta} \\ &= \int f_A \left(d\pi^A - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial r_A \partial \varphi_B} d\varphi_B - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial r_A \partial \nabla_\rho \varphi_B} d\nabla_\rho \varphi_B \right) \tilde{\eta} \end{aligned}$$

Transformons cette dernière expression au moyen des projections canoniques :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial r_A \partial (\nabla_\rho \varphi_B)} (\Sigma_\rho^\sigma + u^\sigma u_\rho) \nabla_\sigma d\varphi_B = \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial r_A \partial (\nabla_\rho \varphi_B)} \Sigma_\rho^\sigma \right] \tilde{\nabla}_\sigma d\varphi_B + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial r_A \partial r_B} dr_B$$

La première parenthèse est aussi $\partial^2 \mathcal{L} / \partial r_A \partial (\tilde{\nabla}_\sigma \varphi_B)$, les projecteurs se comportant comme des constantes dans les dérivations par rapport à φ . On a d'autre part

$$d\widehat{H} = \int \left[r_A d\pi^A + \left(\pi^A - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_A} \right) dr_A - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_A} d\varphi_A \right] \tilde{\eta}$$

et bien entendu

$$dH = \int_{\text{def}} \left(\frac{\delta H}{\delta \varphi} d\varphi + \frac{\delta H}{\delta \pi} \delta \pi \right) \tilde{\eta}$$

Sur X, les trois jeux de différentielles sont indépendants; on en déduit trois groupes d'équations qui sur Y se réduisent à

$$\begin{aligned} r_A &= \frac{\delta H}{\delta \pi^A} + f_A \\ -\frac{\delta L}{\delta \varphi_A} &= \frac{\delta H}{\delta \varphi_A} - f_B \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \varphi_A \partial r_B} + \tilde{\nabla}_\alpha \left[f_B \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial r_B \partial (\tilde{\nabla}_\alpha \varphi_A)} \right] \\ 0 &= f_B \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial r_A \partial r_B} \end{aligned}$$

La dernière équation exprime que les f sont aussi « vecteurs propres » avec la valeur propre zéro du hessien; mais les $\frac{\partial z^p}{\partial \pi^B}$ forment une base de tels vecteurs d'après l'hypothèse sur le rang maximal du système des z^p , de sorte qu'il existe des fonctions v_p bien déterminées sur X telles que

$$f_A = v_p \frac{\partial z^p}{\partial \pi^A}$$

On déduit de là sans peine la forme suivante des équations de champ :

$$\begin{aligned} u^\rho \nabla_\rho \varphi_A &\stackrel{Y}{=} \frac{\delta}{\delta \pi^A} \int \tilde{\eta} (\mathcal{H} + v_p z^p) \\ u^\rho \nabla_\rho \pi^A &\stackrel{Y}{=} -\frac{\delta}{\delta \varphi_A} \int \tilde{\eta} (\mathcal{H} + v_p z^p) \end{aligned}$$

La seconde équation vient de ce que sur Y sont nuls non seulement les z , mais encore leurs dérivées parallèlement à Y :

$$0 = \frac{\delta z}{\delta \varphi_A} \Big|_Y = \frac{\delta z}{\delta \varphi_A} + \frac{\partial z}{\partial \pi_B} \frac{\partial \pi^B}{\partial \varphi_A} - \tilde{\nabla}_\alpha \left[\frac{\partial z}{\partial \pi^B} \frac{\partial \pi^B}{\partial (\tilde{\nabla}_\alpha \varphi_A)} \right]$$

La condition de cohérence

$$u^\rho \nabla_\rho z^Q = [z^Q, H + v_p z^p] = [z^Q, H] + v_p [z^Q, z^p] = 0$$

entraîne la nullité de tous les crochets séparément ; dans la terminologie de Dirac, les contraintes primaires sont de première classe.

Cette transposition dans Σ de la démonstration de Kundt est presque triviale mathématiquement à partir du moment où les conditions sur u ont été établies; physiquement, elle ne l'est pas en ce qu'elle exprime que le couplage d'un champ avec le champ de gravitation (couplage à sens

unique si nous nous donnons *a priori* la métrique, mais couplage cependant ne doit pas modifier le nombre de degrés de liberté.

Si nous nous en tenons aux hypothèses minimales sur u établies au chapitre premier, § 2, nous verrons apparaître des contraintes de nature géométrique, puisque aussi bien ces hypothèses n'assurent que localement l'existence d'un formalisme hamiltonien. Si, en revanche, nous nous plaçons sur une variété satisfaisant aux hypothèses très fortes de I, § 3, les contraintes ultérieures ne doivent pas être plus nombreuses qu'en espace plat ou de classe différente : c'est ce que nous démontrerons au chapitre suivant pour deux champs physiques particuliers.

II. APPLICATION : LE CHAMP GRAVITATIONNEL VARIE

LAGRANGIEN

Le lagrangien s'obtient en prenant la partie quadratique du lagrangien du champ non varié. Nous supposons ici, essentiellement pour la commodité des calculs, que l'espace non varié est un espace d'Einstein.

Soit donc $\mathfrak{L}_0 = (R + 2\lambda)\sqrt{-g}$, d'où :

$$S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(R + 2\lambda)g_{\alpha\beta} = 0; \quad R = -4\lambda, \quad R_{\alpha\beta} = -\lambda g_{\alpha\beta}$$

Le lagrangien quadratique a été évalué dans le cas général par E. Blancheton [33]

$$\mathfrak{L}'' = -\frac{\lambda}{2} h^{\alpha\beta} h'_{\alpha\beta} - h'^{\alpha\beta} (\nabla_{[\lambda} A_{\beta]\alpha}^{\lambda} + \lambda h_{\alpha\beta}) + g^{\alpha\beta} A_{\mu[\lambda}^{\lambda} A_{\beta]\alpha}^{\mu}$$

$\underline{A}$ désigne le tenseur « variation de la connexion » $\frac{1}{2} [\nabla_{(\alpha} h_{\beta)}^{\gamma} - \nabla^{\gamma} h_{\alpha\beta}]$.

Moyennant l'addition d'une divergence et après simplification, il vient :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = 2\mathfrak{L}'' &= -\lambda h^{\alpha\beta} h'_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \nabla^{\lambda} h^{\alpha\beta} [\nabla_{(\beta} h_{\alpha)\lambda} - \nabla_{\lambda} h_{\alpha\beta}] - \nabla^{\lambda} h \nabla_{\beta} h_{\lambda}^{\beta} \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial h^{\alpha\beta;\lambda}} &= \nabla_{(\beta} h_{\alpha)\lambda} - \nabla_{\lambda} h_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} k_{\lambda} - \frac{1}{2} [g_{\lambda(\alpha} \nabla_{\beta)} h - g_{\alpha\beta} \nabla_{\lambda} h] \end{aligned}$$

où nous avons posé $k_{\lambda} = \nabla_{\rho} h_{\lambda}^{\rho}$.

On en déduit les équations d'Euler :

$$-2\lambda h'_{\alpha\beta} - \nabla_{\lambda(\beta} h_{\alpha)}^{\lambda} + \nabla_{\lambda}^{\lambda} h_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \nabla_{\lambda} k^{\lambda} + \frac{1}{2} \nabla_{(\alpha\beta)} h + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \Delta h = 0$$

ou

$$-(\Delta + 2\lambda)h'_{\alpha\beta} - \nabla_{(\alpha}k_{\beta)} + g_{\alpha\beta}\nabla_{\lambda}k^{\lambda} = 0$$

Ces équations sont bien celles que l'on obtient directement par variation de $\underline{S}$. A. Lichnerowicz a étudié les équations avec second membre $\delta\underline{S} = \mu g$ qui gardent à l'espace son caractère d'espace d'Einstein en modifiant ou non la courbure totale; un principe variationnel ne nous fournit que les équations où $\mu = -\lambda$.

ÉQUATIONS DE CONSERVATION

De $\underline{S} = 0$ et $\nabla_{\alpha}S^{\alpha}_{\beta} = 0$, on déduit $\nabla_{\alpha}(\delta S^{\alpha}_{\beta}) = 0$ identiquement en h .
Vérification :

$$\nabla_{\alpha}(\delta S^{\alpha}_{\beta}) = \nabla_{\alpha}\Delta h'^{\alpha}_{\beta} + 2\lambda k_{\beta}$$

Comme le tenseur de Ricci est à dérivée covariante nulle, c'est aussi, d'après un lemme de Lichnerowicz [5]

$$\Delta k_{\beta} + 2\lambda k_{\beta} + \nabla^{\alpha}k_{\beta} + R^{\rho}_{\beta}k_{\rho} \equiv 0$$

Les équations obtenues sont en effet invariantes par le groupe des transformations de jauge :

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + \nabla_{\beta}\xi_{\alpha}$$

Il est plus simple de le vérifier sur les équations $L'_{\alpha\beta} = 0$:

$$\begin{aligned} L'_{\alpha\beta} &= (\Delta + 2\lambda)h_{\alpha\beta} + \nabla_{(\alpha}h'^{\rho}_{\beta)} \\ \delta L'_{\alpha\beta} &= (\Delta + 2\lambda)\nabla_{(\alpha}\xi_{\beta)} + \nabla_{(\alpha\rho}\xi^{\rho}_{\beta)} + \nabla_{(\alpha\rho\beta)}\xi^{\rho} - \nabla_{(\alpha\beta)\rho}\xi^{\rho} \\ &= \nabla_{\alpha}\Delta\xi_{\beta} + 2\lambda\nabla_{\alpha}\xi_{\beta} - \nabla_{\alpha}(-\nabla^{\rho}_{\rho}\xi_{\beta}) + \nabla_{\alpha}\nabla_{[\rho\beta]}\xi^{\rho} + \text{symétrique en } \alpha\beta \\ &= \nabla_{\alpha}(\Delta + 2\lambda)\xi_{\beta} - \nabla_{\alpha}(\Delta\xi_{\beta} - R_{\rho\sigma}\xi^{\sigma}) + \nabla_{\alpha}(R^{\rho}_{\sigma\rho\beta}\xi^{\sigma}) \equiv 0 \end{aligned}$$

La densité lagrangienne se trouve augmentée d'une divergence d'univers, conformément au théorème de Nøther :

$$\delta\mathfrak{L} = L^{(\alpha\beta)}\nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + \text{div} = -\xi_{\beta}\nabla_{\alpha}L^{(\alpha\beta)} + \text{div} \equiv \text{div}$$

de sorte que δI , de toute façon faiblement nul, l'est identiquement si ξ est à support compact, ou décroît assez vite à l'infini. On conviendra de dire que $\mathfrak{L}$ est invariant de jauge dans ces conditions; on ne peut d'ailleurs pas, en général, imposer à $\delta\mathfrak{L}$ d'être identiquement nul, bien que cette circonstance se rencontre dans l'étude du champ électromagnétique, où $\delta\mathfrak{L} = m^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha\beta}f \equiv 0$ du fait de l'antisymétrie de $\underline{m}$. Pour le champ gravita-

tionnel varié, on peut au moins affirmer que toute densité lagrangienne qui diffère par une divergence de celle que nous avons obtenue n'est pas identiquement invariante, car un terme issu d'une divergence sera d'un ordre de dérivation trop élevé pour compenser les termes en $\nabla \xi$ issus de $h'^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$. Il pourrait toutefois exister (cf. Kundt [32]) des lagrangiennes ne différant pas de la précédente par une divergence et conduisant cependant aux équations de champ correctes.

Le formalisme hamiltonien est en tout cas singulier pour ces dernières et il faut recourir à la méthode de Fermi ou à celle de Dirac.

FORMALISME HAMILTONIEN DE FERMI

Moyennant la condition supplémentaire $\bar{k} = 0$, qui est toujours admissible au moins localement, les équations se réduisent à

$$(\Delta + 2\lambda)h'_{\alpha\beta} = 0$$

Un lagrangien pour ces équations est simplement

$$-\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}(\Delta + 2\lambda)'_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}(-\nabla_{\rho}^{\rho}h'_{\alpha\beta} + \nabla_{[\rho\alpha]}h'_{\beta}{}^{\rho} + \nabla_{[\rho\beta]}h'_{\alpha}{}^{\rho} + 2\lambda h'_{\alpha\beta})$$

ou, après addition d'une divergence

$$\mathfrak{L} = -\lambda h^{\alpha\beta}h'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\nabla^{\rho}h^{\alpha\beta}[\nabla_{\rho}h'_{\alpha\beta} - \nabla_{(\alpha}h'_{\rho\beta)} + g_{\rho(\alpha}\nabla_{\sigma}h'_{\beta)}{}^{\sigma}]$$

Évaluons les moments :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \nabla^{\rho}h^{\alpha\beta}} &= -\nabla_{\rho}h'_{\alpha\beta} + \nabla_{(\alpha}h'_{\rho\beta)} - g_{\rho(\alpha}\nabla_{\sigma}h'_{\beta)}{}^{\sigma} \\ p_{\alpha\beta} &= -x'_{\alpha\beta} + u^{\rho}[u_{(\alpha}x'_{\rho\beta)} + \tilde{\nabla}_{(\alpha}h'_{\rho\beta)}] - u_{(\alpha}[u_{\sigma}x'_{\beta)}{}^{\sigma} + \tilde{\nabla}_{\sigma}h'_{\beta)}{}^{\sigma}] \\ &= -x'_{\alpha\beta} + u_{\rho}\tilde{\nabla}_{(\alpha}h'_{\beta)}{}^{\rho} - u_{(\alpha}\tilde{\nabla}_{\rho}h'_{\beta)}{}^{\rho} \\ &= -x'_{\alpha\beta} + u_{\rho}\tilde{\nabla}_{(\alpha}h'_{\beta)}{}^{\rho} - u_{(\alpha}\tilde{\nabla}_{\rho}h'_{\beta)}{}^{\rho}\end{aligned}$$

d'où l'on déduit $p = -x' = x$ et l'expression de $\mathfrak{L}$ en $\underline{h}$ et $\underline{p}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= -\lambda h^{\alpha\beta}h'_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}x^{\alpha\beta}p_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}^{\rho}h^{\alpha\beta}[\nabla_{\rho}h'_{\alpha\beta} - \nabla_{(\alpha}h'_{\rho\beta)} + \Sigma_{\rho(\alpha}\nabla_{\sigma}h'_{\beta)}{}^{\sigma}] \\ \mathfrak{H} &= \lambda h^{\alpha\beta}h'_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}x^{\alpha\beta}p_{\alpha\beta} + \tilde{\nabla}^{\rho}h^{\alpha\beta}\left[\left(\frac{1}{2}\nabla_{\rho}h'_{\alpha\beta} - \tilde{\nabla}_{\alpha}h'_{\rho\beta} + \Sigma_{\rho\alpha}\tilde{\nabla}_{\sigma}h'_{\beta)}{}^{\sigma}\right)\right] \\ &\quad + \tilde{\nabla}^{\rho}h^{\alpha\beta}(-u_{\alpha}x'_{\rho\beta} + \Sigma_{\rho\alpha}u_{\sigma}x'_{\beta)}{}^{\sigma})\end{aligned}$$

Remplaçant partout les $\underline{x}$ par leur expression en $\underline{h}$ et $\underline{p}$:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} p^{\alpha\beta} p'_{\alpha\beta} + 2p_{\alpha\beta} u^{[\rho} \tilde{\nabla}^{\alpha]} h_{\rho}^{\beta} + \tilde{\nabla}^{\rho} h^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_{\rho} h'_{\alpha\beta} - \tilde{\nabla}_{\alpha} h'_{\rho\beta} \right. \\ \left. + u_{\alpha} u_{[\rho} \tilde{\nabla}_{\sigma]} h_{\beta}^{\sigma} + u_{\alpha} u_{[\beta} \tilde{\nabla}_{\sigma]} h_{\rho}^{\sigma} + \Sigma_{\alpha\rho} u^{\sigma} u_{[\tau} \tilde{\nabla}_{\beta]} h_{\sigma}^{\tau} \right) + \lambda h^{\alpha\beta} h'_{\alpha\beta}$$

Les équations de Hamilton correspondantes ne sont autres que les équations $S_{\alpha\beta} = 0$. On vérifie d'abord que le premier groupe ($\underline{x} = \delta H / \delta \underline{p}$) n'est autre que la définition des moments en termes de $\underline{h}$ et $\underline{x}$. Substituant ces équations dans le second groupe, on obtient les équations d'apparence compliquée :

$$\begin{aligned} & -u^{\rho} \nabla_{\rho} [-x'_{\alpha\beta} + u^{\sigma} \tilde{\nabla}_{\sigma} h'_{\alpha\beta} - u_{(\alpha} \tilde{\nabla}_{\sigma} h'_{\beta)}^{\sigma}] - 2\lambda h'_{\alpha\beta} + \tilde{\nabla}^{\rho} \{ -x'_{\rho(\beta} u_{\alpha)} \\ & + g_{\rho(x} x'_{\beta)} u^{\lambda} + u_{\alpha} u_{\sigma} \tilde{\nabla}_{(\rho} h'_{\beta)}^{\sigma} + u_{\beta} u_{\sigma} \tilde{\nabla}_{(\rho} h'_{\alpha)}^{\sigma} - u_{\alpha} u_{(\rho} \tilde{\nabla}_{\sigma} h'_{\beta)}^{\sigma} \\ & - u_{\beta} u_{(\rho} \tilde{\nabla}_{\sigma} h'_{\alpha)}^{\sigma} - g_{\rho\alpha} u^{\lambda} u_{\sigma} \tilde{\nabla}_{(\beta} h'_{\lambda)}^{\sigma} - g_{\rho\beta} u^{\lambda} u_{\sigma} \tilde{\nabla}_{(\alpha} h'_{\lambda)}^{\sigma} + g_{\rho\alpha} u^{\lambda} u_{(\beta} \tilde{\nabla}_{\sigma} h'_{\lambda)}^{\sigma} \\ & + g_{\rho\beta} u^{\lambda} u_{(\alpha} \tilde{\nabla}_{\sigma} h'_{\lambda)}^{\sigma} + \tilde{\nabla}_{\rho} h'_{\alpha\beta} - \tilde{\nabla}_{(\alpha} h'_{\beta)\rho} - u_{(\alpha} u_{\sigma} \tilde{\nabla}_{\rho} h'_{\beta)}^{\sigma} + 2u_{\alpha} u_{\beta} \tilde{\nabla}_{\sigma} h'_{\alpha\beta} \\ & - u_{(\alpha} u_{\sigma} \tilde{\nabla}_{\beta)} h'_{\rho}^{\sigma} + \Sigma_{\alpha\rho} u^{\sigma} u_{[\tau} \tilde{\nabla}_{\beta]} h'_{\sigma}^{\tau} + \Sigma_{\beta\rho} u^{\sigma} u_{[\tau} \tilde{\nabla}_{\alpha]} h'_{\sigma}^{\tau} \} = 0 \end{aligned}$$

On distinguera les termes d'indice différent (au sens de Hadamard), c'est-à-dire les termes en $\underline{\dot{x}}$, ceux en $\underline{x}$ (et $\tilde{\nabla} \underline{x}$), ceux enfin ne renfermant que $\underline{h}$ avec ses dérivées transverses.

Un terme comme $\nabla_{\lambda\mu} h_{\nu\rho}$ se décompose en :

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda\mu} h_{\nu\rho} &= (\Sigma_{\lambda}^{\sigma} + u^{\sigma} u_{\lambda}) \nabla_{\sigma} (\Sigma_{\mu}^{\tau} + u^{\tau} u_{\mu}) \nabla_{\tau} h_{\nu\rho} \\ &= u_{\lambda} u_{\mu} x_{\nu\rho} + \tilde{\nabla}_{\lambda\mu} h_{\nu\rho} + \tilde{\nabla}_{\lambda} (u_{\mu} x_{\nu\rho}) + u_{\lambda} m^{\sigma} \nabla_{\sigma} (\Sigma_{\mu}^{\tau} \nabla_{\tau} h_{\nu\rho}) \end{aligned}$$

Le dernier terme se transforme à l'aide de l'identité de Ricci :

$$\begin{aligned} u_{\lambda} u^{\sigma} \nabla_{\sigma} (\Sigma_{\mu}^{\tau} \nabla_{\tau} h_{\nu\rho}) &= u_{\lambda} u^{\sigma} \Sigma_{\mu}^{\tau} \nabla_{\sigma\tau} h_{\nu\rho} = u_{\lambda} u^{\sigma} \Sigma_{\mu}^{\tau} (\nabla_{[\sigma\tau]} h_{\nu\rho} + \nabla_{\tau\sigma} h_{\nu\rho}) \\ &= u_{\lambda} u^{\sigma} \Sigma_{\mu}^{\lambda} \nabla_{[\sigma\tau]} h_{\nu\rho} + u_{\lambda} \Sigma_{\mu}^{\tau} (\nabla_{\tau} x_{\nu\rho} - \nabla_{\tau} u^{\sigma} \nabla_{\sigma} h_{\nu\rho}) \end{aligned}$$

d'où la décomposition :

$$\begin{aligned} (\nabla_{\lambda\mu} h_{\nu\rho})^{\text{II}} &= u_{\lambda} u_{\mu} \dot{x}_{\nu\rho} \\ (\nabla_{\lambda\mu} h_{\nu\rho})^{\text{I}} &= \tilde{\nabla}_{\lambda} (u_{\mu} x_{\nu\rho}) + u_{\lambda} \tilde{\nabla}_{\mu} x_{\nu\rho} \\ (\nabla_{\lambda\mu} h_{\nu\rho})^0 &= \tilde{\nabla}_{\lambda\mu} h_{\nu\rho} + u_{\lambda} u^{\sigma} \nabla_{[\sigma\mu]} h_{\nu\rho} - u_{\lambda} \nabla_{\mu} u^{\sigma} \cdot \tilde{\nabla}_{\sigma} h_{\nu\rho}. \end{aligned}$$

Les équations de champ sont alors :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\alpha\beta} + \tilde{\nabla}^{\rho} h'_{\alpha\beta} - 2\lambda h'_{\alpha\beta} - \{ \tilde{\nabla}_{\rho} (u_{\alpha} x'_{\beta}^{\rho}) - \tilde{\nabla}_{\beta} (u_{\alpha} x'_{\rho}^{\rho}) + u_{\rho} \tilde{\nabla}_{\alpha} x'_{\beta}^{\rho} \\ - u_{\alpha} \tilde{\nabla}_{\rho} x'_{\beta}^{\rho} + \tilde{\nabla}_{[\rho\alpha]} h'_{\beta}^{\rho} + u_{\rho} u^{\sigma} \nabla_{[\sigma\alpha]} h'_{\beta}^{\rho} - u_{\alpha} u^{\sigma} \nabla_{[\sigma\rho]} h'_{\beta}^{\rho} - u_{[\rho} \nabla_{\alpha]} u^{\sigma} \tilde{\nabla}_{\sigma} h'_{\beta}^{\rho} \} \\ + \{ \text{symétrique en } \alpha\beta \} = 0 \end{aligned}$$

Le seul terme d'indice 2 des équations de Hamilton est bien $\dot{\underline{x}}$. Tous ceux d'indice 1 se simplifient; il en apparaît dans le premier crochet du fait de l'identité de Ricci :

$$\begin{aligned} & -u_\sigma u^\rho \nabla_{\rho\alpha} \tilde{\nabla}_\alpha h'_\beta + u_\alpha u^\rho \nabla_{\rho\sigma} \tilde{\nabla}_\sigma h'_\beta = -u_\sigma u^\rho \nabla_{[\rho\alpha]} h'_\beta + u_\alpha u^\rho \nabla_{[\rho\sigma]} h'_\beta \\ & -u_\sigma \tilde{\nabla}_\alpha x'^\sigma_\beta + u_\alpha \tilde{\nabla}_\sigma x'^\sigma_\beta + \dots + u_{[\sigma} \nabla_{\alpha]} u^\rho \cdot \tilde{\nabla}_\rho h'_\beta \end{aligned}$$

On ne donnera pas le détail de la vérification pour les termes d'indice zéro, qui est longue mais ne présente pas de difficulté.

On aurait pu prendre pour variables de champ les $\underline{h'}$, écarts des densités métriques, dont l'emploi est classique dans la théorie quasi euclidienne [34] [35]. Cela n'aurait pas simplifié grand-chose, car il intervient partout naturellement et en particulier dans le lagrangien, un mélange de ces deux expressions.

FORMALISME DE DIRAC

Nous posons

$$\begin{aligned} y'_{\alpha\beta} &= u^\rho \tilde{\nabla}_\alpha h'_{\rho\beta} \quad \text{et} \quad k_\alpha = \tilde{\nabla}_\rho h'^\rho_\alpha \\ p_{\alpha\beta} &= -x_{\alpha\beta} + u^\lambda u_{(\beta} x_{\alpha)\lambda} - g_{\alpha\beta} x_{\lambda\rho} u^\lambda u^\rho + \Sigma_{\alpha\beta} x + y'_{(\alpha\beta)} - \Sigma_{\alpha\beta} y' \end{aligned}$$

Il y aura quatre contraintes primaires du fait des identités de conservation. Nous les recherchons en évaluant les projections de $\underline{p}$:

$$\begin{cases} p_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -y' \\ u^\beta p_{\alpha\beta} = y'_{\alpha\beta} u^\beta \end{cases}$$

On peut aussi bien les regrouper en l'expression unique :

$$z_\lambda \equiv u^\beta (p_{\lambda\beta} + u_{[\lambda} \tilde{\nabla}_{\alpha]} h'^\alpha_{\beta}) = 0$$

Cependant que les équations en $\underline{\tilde{p}}$ sont solubles en $\underline{\tilde{x}}$:

$$\tilde{p}_{\alpha\beta} = -\tilde{x}_{\alpha\beta} + \Sigma_{\alpha\beta} \tilde{x} + \tilde{y}'_{(\alpha\beta)} - \Sigma_{\alpha\beta} y'$$

Prenant la trace spatiale, il vient $\tilde{p} = 2\tilde{x} - y'$, d'où

$$\tilde{x}_{\alpha\beta} = -\tilde{p}_{\alpha\beta} + \tilde{y}'_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} (\tilde{p} - y')$$

Nous pouvons alors évaluer le hamiltonien :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= p^{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} - \mathcal{L} \\ &= \left[-x^{\alpha\beta} + u_\lambda u^{(\beta} x^{\alpha)\lambda} - g^{\alpha\beta} u_\lambda u_\rho x^{\lambda\rho} + g^{\alpha\beta} x - u^\alpha u^\beta x + y'^{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} y' \right] x_{\alpha\beta} \\ &\quad + \lambda h'^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \nabla^\lambda h^{\alpha\beta} \nabla_{(\beta} h_{\alpha)\lambda} + \frac{1}{2} \nabla^\lambda h^{\alpha\beta} \nabla_\lambda h_{\alpha\beta} \\ &\quad + (u^\lambda x + \tilde{\nabla}^\lambda h) \left(u_\beta x^\beta_\lambda - \frac{1}{2} u_\lambda x + \tilde{\nabla}_\beta h'^\beta_\lambda \right)\end{aligned}$$

Les termes carrés sont

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\text{II}} &= -\frac{1}{2} x^{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} u_\lambda u^{(\beta} x^{\alpha)\lambda} x_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} x^2 - x x_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \\ &= -\frac{1}{2} x^{\alpha\beta} [x_{\alpha\beta} - u_\lambda u_{(\beta} x^\lambda_{\alpha)} + u_\alpha u_\beta x^{\rho\sigma} u_\rho u_\sigma] + \frac{1}{2} (x^{\rho\sigma} u_\rho u_\sigma)^2 + \frac{1}{2} x x_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \\ &= -\frac{1}{2} x^{\alpha\beta} \tilde{x}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (x - x_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^2 = -\frac{1}{2} \tilde{x}^{\alpha\beta} \tilde{x}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \tilde{x}^2\end{aligned}$$

Les termes linéaires en x doivent se simplifier, ce que l'on vérifie sans peine. Enfin, les termes sans x sont :

$$\mathcal{H}^0 = -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^\lambda h^{\alpha\beta} [\tilde{\nabla}_{(\beta} h_{\alpha)\lambda} - \tilde{\nabla}_\lambda h_{\alpha\beta}] + \tilde{\nabla}_\lambda h \tilde{\nabla}_\beta h'^{\beta\lambda} + \lambda h'^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$$

Exprimons maintenant $\mathcal{H}$ en fonction des $\underline{p}$ et des $\underline{h}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\text{II}} &= -\frac{1}{2} \left[\tilde{p}_{\alpha\beta} - \tilde{y}'_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} (\tilde{p} - y') \right] \left[\tilde{p}^{\alpha\beta} - y'^{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} (\tilde{p} - y') \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} (\tilde{p} - y')^2 \\ \mathcal{H} &= -\frac{1}{2} \tilde{p}^{\alpha\beta} \tilde{p}_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \tilde{p}^2 + p^{\alpha\beta} \left[\tilde{y}'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} y' \right] - \tilde{y}'^{(\alpha\beta)} \left[y'_{(\alpha\beta)} - \frac{3}{8} \Sigma_{\alpha\beta} y' \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^\rho h^{\alpha\beta} [\tilde{\nabla}_\rho h_{\alpha\beta} - \nabla_{(\alpha} h_{\beta)\rho}] + \tilde{\nabla}_\rho h \tilde{\nabla}_\sigma h'^{\rho\sigma} + \lambda h^{\alpha\beta} h'_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

ÉQUATIONS DE HAMILTON

Il nous faut d'abord évaluer les crochets de Poisson des contraintes primaires avec les $\underline{h}$ et les $\underline{p}$:

$$\begin{aligned}[h^{\mu\nu}, z_{\lambda'}] &= u^{\beta'} [h^{\mu\nu}, p_{\beta'\lambda'}] = \frac{1}{2} u^{\beta'} \delta^{(\mu}_{\beta'} \delta^{\nu)}_{\lambda'} \delta(x, x') \\ [p_{\mu\nu}, z_{\lambda'}] &= u^{\beta'} u_{[\lambda'} [p_{\mu\nu}, \tilde{\nabla}_{\alpha'}] h'^{\alpha'}_{\beta']} \\ &= -\frac{1}{2} u^{\beta'} u_{[\lambda'} \nabla_{\alpha'}] ((\delta^{\alpha'}_{\mu} g_{\nu\beta'} + \delta^{\alpha'}_{\nu} g_{\mu\beta'} - g_{\mu\nu} \delta^{\alpha'}_{\beta'}) \delta(x, x'))\end{aligned}$$

Les valeurs de ces distributions sur $v^{\lambda'}$, définies dès que $v^{\lambda'}$ est une fonction C^1 sur Σ sont :

$$\int v^{\lambda'} [h^{\mu\nu}, z_{\lambda'}] \tilde{\eta}' = \frac{1}{2} v^{(\mu} u^{\nu)} \\ \int \tilde{v}^{\lambda'} [p_{\mu\nu}, z_{\lambda'}] \tilde{\eta}' = \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^{\alpha} g_{\nu\beta} + \delta_{\nu}^{\alpha} g_{\mu\beta} - g_{\mu\nu} \delta_{\beta}^{\alpha}) \tilde{\nabla}_{[\alpha} (u^{\beta} u_{\lambda]} v^{\lambda})$$

On en déduit les équations de Hamilton :

$$x_{\alpha\beta} = \delta H / \delta p^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} u_{(\alpha} v_{\beta)} \quad (3) \\ \dot{p}_{\alpha\beta} = -\delta H / \delta h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \{ \tilde{\nabla}_{[\alpha} (u_{\beta} u_{\lambda]} v^{\lambda}) + \tilde{\nabla}_{[\beta} (u_{\alpha} u_{\lambda]} v^{\lambda}) - \tilde{\nabla}_{[\rho} (u^{\rho} u_{\lambda]} v^{\lambda}) g_{\alpha\beta} \}$$

On vérifie immédiatement que $\delta H / \delta p^{\alpha\beta}$ est en effet la partie purement spatiale de $\underline{x}$:

$$\delta H / \delta p^{\alpha\beta} = - \left(\tilde{p}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} \tilde{p} \right) + \tilde{y}'_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta} y' = \tilde{x}_{\alpha\beta}$$

Les équations (3) déterminent $\underline{v}$ dans le super-espace de phase comme fonction linéaire de $\underline{x}$:

$$\tilde{v}_{\alpha} = 2x_{\alpha\beta} u^{\beta} \quad \text{et} \quad v_{\alpha} u^{\alpha} = x_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}$$

ou encore

$$v_{\alpha} = (2\delta_{\alpha}^{\rho} - u_{\alpha} u^{\rho}) u^{\sigma} x_{\rho\sigma}$$

CROCHETS DE POISSON DES CONTRAINTES

L'étude du cas général a montré que les crochets de Poisson des contraintes primaires devaient être nuls. Ils le sont ici identiquement (seule possibilité puisque les contraintes sont linéaires)

$$[z_{\alpha}, z_{\beta'}] = u^{\rho} u^{\tau'} [p_{\alpha\rho}, u_{[\beta'} \tilde{\nabla}_{\lambda']} h^{\lambda'\tau'}] + u^{\rho} u^{\tau'} [u_{[\alpha} \tilde{\nabla}_{\sigma]} h^{\sigma}_{\rho}, p_{\beta'\tau'}] \\ = -\frac{1}{2} u^{\rho} u^{\tau'} \{ u_{[\beta'} \tilde{\nabla}_{\lambda']} (g_{\alpha\tau'} \delta_{\rho}^{\lambda'} + g_{\rho\tau'} \delta_{\alpha}^{\lambda'} - g_{\alpha\rho} \delta_{\tau'}^{\lambda'}) \delta \\ - u_{[\alpha} \tilde{\nabla}_{\sigma]} (\delta_{\beta'}^{\sigma} g_{\rho\tau'} + \delta_{\tau'}^{\sigma} g_{\rho\beta'} - \delta_{\sigma\beta'}^{\rho} g_{\tau'\rho}) \delta \}$$

Les tenseurs ne renfermant que le bitenseur de transport apportent une

contribution $-\frac{1}{2}u_{[\alpha}\tilde{\nabla}_{\beta]}\delta$; ceux en $g_{\rho\tau}$ se détruisent, il reste enfin

$$-\frac{1}{2}u^\rho u^{\tau'}\{(-u_\rho\tilde{\nabla}_\beta g_{\alpha\tau} + u_\beta\tilde{\nabla}_\alpha g_{\rho\tau'})\delta\}$$

d'où résulte la nullité du crochet.

LES CONTRAINTES SECONDAIRES

Bien que les crochets de Poisson des z_λ soient nuls, on n'obtient pas les contraintes secondaires simplement en prenant le crochet de Poisson de z_λ avec H, à cause de la présence de dérivées transverses. Plus précisément :

$$\begin{aligned}w_\lambda &= u^\rho \nabla_\rho z_\lambda = u_\mu (\dot{p}_\lambda^\mu + u_{[\lambda} u^\sigma \nabla_{\sigma]} \tilde{\nabla}_{\alpha]} h'^{\lambda\mu}) \\[z_\lambda, H] &= u^\mu (\dot{p}_{\lambda\mu} + u_{[\lambda} \tilde{\nabla}_{\alpha]} \tilde{\chi}'_{\mu}{}^{\alpha})\end{aligned}$$

Aussi évaluerons-nous séparément $\widehat{w}_\lambda = [z_\lambda, H]$ et $w_\lambda - \widehat{w}_\lambda$.

a) Calcul de $\widehat{w}$

Nous commençons par $u^\beta [p_{\lambda\beta}, H] = u^\beta [p_{\lambda\beta}, H_A + H_B]$, en séparant les termes en H où y' figure explicitement

$$\begin{aligned}[p_{\lambda'\mu'}, \mathcal{H}_A] &= \left[2\tilde{p}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha\beta}\tilde{p} - 2\tilde{y}'_{(\alpha\beta)} + \frac{3}{2}\Sigma_{\alpha\beta}y' \right] [p_{\lambda'\mu'}, u_\rho \tilde{\nabla}^\alpha h'^{\beta\rho}] \\ &= \frac{1}{2}A_{\alpha\beta}u_\rho \tilde{\nabla}^\alpha \{ (\delta_{\lambda'}^\beta \delta_{\mu'}^\rho + \delta_{\lambda'}^\rho \delta_{\mu'}^\beta - g_{\lambda'\mu'} g^{\rho\beta}) \delta(x, x') \}\end{aligned}$$

ou $\underline{A}$ désigne le tenseur d'espace

$$\begin{aligned}A_{\alpha\beta} &= 2 \left[\tilde{p}_{\alpha\beta} - y'_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{4}\Sigma_{\alpha\beta}(\tilde{p} - 3y') \right] \\ [p_{\lambda\mu}, H_A] &= \frac{1}{2}(\delta_{\lambda'}^\beta \delta_{\mu'}^\rho + \delta_{\lambda'}^\rho \delta_{\mu'}^\beta - g_{\lambda\mu} g^{\rho\beta}) \tilde{\nabla}^\alpha (A_{\alpha\beta} u_\rho) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^\alpha (A_{\alpha\mu} u_\lambda + A_{\alpha\lambda} u_\mu)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[p_{\lambda'\mu'}, \mathcal{H}_B] &= \tilde{\nabla}_\rho h_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}^\rho [p_{\lambda'\mu'}, h^{\alpha\beta}] - 2\tilde{\nabla}^\beta [p_{\lambda'\mu'}, h^{\alpha\rho}] \\ &\quad + \tilde{\nabla}_\sigma h'^{\rho\sigma} \tilde{\nabla}_\rho [p_{\lambda'\mu'}, h] + \tilde{\nabla}_\rho h \tilde{\nabla}_\sigma [p_{\lambda'\mu'}, h^{\rho\sigma}] + 2\lambda h'^{\alpha\beta} [p_{\lambda'\mu'}, h_{\alpha\beta}] \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\rho h_{\alpha\beta} [\tilde{\nabla}^\rho (\delta_{\lambda'}^\alpha \delta_{\mu'}^\beta) \delta] - 2\tilde{\nabla}^\beta (\delta_{\lambda'}^\alpha \delta_{\mu'}^\rho) \delta] - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\sigma h'^{\rho\sigma} \tilde{\nabla}_\rho [\delta_{\lambda'}^\alpha \delta_{\mu'}^\beta g_{\alpha\beta} \delta] \\ &\quad - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\rho h \tilde{\nabla}_\sigma [(\delta_{\lambda'}^\rho \delta_{\mu'}^\sigma) - g^{\rho\sigma} g_{\lambda'\mu'}] \delta - 2\lambda h'_{\lambda'\mu'} \delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[p_{\lambda\mu}, H_B] &= \tilde{\nabla}_\rho^\rho h_{\lambda\mu} - \tilde{\nabla}^\beta_{(\mu} h_{\lambda)\beta} - g_{\lambda\mu} \tilde{\nabla}_{\rho\sigma} h'^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_{(\lambda\mu)} h - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} \tilde{\nabla}_\rho^\rho h - 2\lambda h'_{\lambda\mu} \\
&= \tilde{\nabla}_\rho^\rho h'_{\lambda\mu} - \tilde{\nabla}_{\rho(\lambda} h'^{\rho}_{\mu)} + g_{\lambda\mu} \tilde{\nabla}_{\rho\sigma} h'^{\rho\sigma} - 2\lambda h'_{\lambda\mu}
\end{aligned}$$

cependant que les termes en $\underline{h'}$ apportent une contribution :

$$u^\mu u_{[\lambda} \tilde{\nabla}_{\alpha]} [h'^\alpha_\mu, H] = u^\mu u_{[\lambda} \tilde{\nabla}_{\alpha]} \left(\tilde{x}_\mu^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\mu^\alpha \tilde{x} \right)$$

Substituant à $\underline{x}$ sa valeur en $\underline{p}$ et $\underline{y'}$, ce terme vaut :

$$\begin{aligned}
u_\mu u_{[\lambda} \tilde{\nabla}_{\alpha]} \left\{ -\tilde{p}^{\alpha\mu} + \tilde{y}'^{(\alpha\mu)} + \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\mu} (\tilde{p} - y') - \frac{1}{4} g^{\alpha\mu} (\tilde{p} + y') \right\} \\
= -\frac{1}{2} u_\mu u_{[\lambda} \tilde{\nabla}_{\alpha]} \left\{ A^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} u^\alpha u^\mu (\tilde{p} + y') \right\}
\end{aligned}$$

aussi obtient-on après quelques simplifications

$$\tilde{w}_\lambda = \tilde{\nabla}^\alpha [\tilde{p}_{\alpha\lambda} - \tilde{y}'_{(\alpha\lambda)} + \Sigma_{\alpha\lambda} y'] + u^\mu [\tilde{\nabla}_\rho^\rho h'_{\lambda\mu} - \tilde{\nabla}_{\rho(\lambda} h'^{\rho}_{\mu)} + g_{\lambda\mu} \tilde{\nabla}_{\rho\sigma} h'^{\rho\sigma} - 2\lambda h'_{\lambda\mu}]$$

b) Calcul de $\underline{w} - \underline{\hat{w}} = \underline{s}$

On a, modulo des termes en x_{0i} qui sont arbitraires :

$$\begin{aligned}
s_\lambda &= (u_{[\lambda} u^\sigma \nabla_\sigma \tilde{\nabla}_{\alpha]} - u_{[\lambda} \tilde{\nabla}_{\alpha]} u^\sigma \nabla_\sigma) h'^\alpha_\mu \cdot u^\mu \\
&= u^\mu u_{[\lambda} u^\sigma \Sigma_{\alpha]}^\rho \nabla_{[\sigma\rho]} h'^\alpha_\mu - u^\mu u_{[\lambda} \tilde{\nabla}_{\alpha]} u^\sigma \cdot \nabla_\sigma h'^\alpha_\mu \\
&= u^\mu u_{[\lambda} u^\sigma \Sigma_{\alpha]}^\rho (R_{\tau\rho\sigma}^\alpha h'^\tau_\mu - R_{\mu\sigma\rho}^\tau h'^\alpha_\tau) - u^\mu u_{[\lambda} \nabla_{\alpha]} u^\sigma \cdot \tilde{\nabla}_\sigma h'^\alpha_\mu \\
&= u^\mu u^\sigma [(\lambda h_{\sigma\mu} - R_{\mu\sigma\alpha}^\tau h'^\alpha_\tau) u_\lambda + 2u^\alpha R_{\tau\alpha\sigma\lambda} h'^\tau_\mu] + u_{[\alpha} \nabla_{\lambda]} u^\sigma \cdot u^\mu \tilde{\nabla}_\sigma h'^\alpha_\mu
\end{aligned}$$

c) Vérification de ce résultat

On doit pouvoir obtenir $\underline{w}$ en considérant directement les équations de champ : quatre d'entre elles ne renfermeront pas de dérivées d'indice 2. Rappelons ces équations :

$$S_{\alpha\beta} = -2\lambda h'_{\alpha\beta} - \nabla_{\lambda(\beta} h_{\alpha)}^\lambda + \nabla_\lambda^\lambda h_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \nabla_{\rho\lambda} h'^{\rho\lambda} + \frac{1}{2} \nabla_{(\alpha\beta)} h + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \Delta h = 0$$

ou encore

$$-2\lambda h'_{\alpha\beta} - \nabla_{\lambda(\beta} h_{\alpha)}^\lambda + \nabla_\lambda^\lambda h_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \nabla_{\rho\lambda} h'^{\rho\lambda} = 0$$

La forme des contraintes primaires suggère d'évaluer $u^\beta S_{\alpha\beta}$:

$$(u^\beta S_{\alpha\beta})^\Pi = \{ -u_\lambda u_{(\beta} \dot{x}^{\lambda'}_{\alpha)} + \dot{x}'_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} u_\lambda u_{\rho} \dot{x}^{\rho\lambda'} \} u^\beta = 0$$

Les termes en $\underline{x}$ s'évaluent plus aisément à partir de la 1^{re} forme des équations de champ :

$$\begin{aligned}(u^\beta S_{\alpha\beta})^1 &= -u^\beta [\tilde{\nabla}_\lambda (x_\alpha^\lambda u_\beta) + \tilde{\nabla}_\lambda (u_\alpha x_\beta^\lambda) + u_\lambda \tilde{\nabla}_\alpha x_\beta^\lambda] + u_\alpha [\tilde{\nabla}_\lambda (u_\rho x'^\rho_\lambda) + u_\lambda \tilde{\nabla}_\rho x'^\rho_\lambda] \\ &\quad + \frac{1}{2} u^\beta [2u_{(\alpha} \tilde{\nabla}_{\beta)} x] \\ &= -\tilde{\nabla}_\lambda \tilde{x}^\lambda_\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{x}\end{aligned}$$

Ces termes joints au terme d'indice zéro venant du terme $\tilde{\nabla}_{\lambda\mu} h_{\nu\rho}$, redonnent exactement $\widehat{w}$. Les termes en courbure et en ∇u conduisent bien de leur côté au terme s précédemment calculé.

CROCHET DE POISSON DE $\underline{z}$ ET $\underline{w}$

Supposons l'espace-temps minkowskien; $\underline{h}$ y est un champ de spin maximum 2 dont l'interprétation importe peu pour le moment. Supposons maintenant l'espace-temps courbe : en vertu du principe d'équivalence, nous couplons ce champ au champ de gravitation macroscopique. Il est physiquement plausible que cela ne change pas le nombre de degrés de liberté du champ, *i. e.* le nombre et la classe (au sens de Dirac) des contraintes.

Nous établissons d'abord que $[z, w] = 0$. Les calculs sont assez longs, mais ne présentent pas de difficulté si on fait un usage systématique des relations établies au chapitre premier, § 2. On vérifie en passant que $\widehat{w}$ seul n'aurait pas un crochet de Poisson avec z nul.

Il reste ensuite à montrer qu'il n'y a pas d'autre contrainte et que celles qui ont été obtenues ont leurs crochets de Poisson nuls. Les calculs sont encore plus longs que ceux du paragraphe précédent, aussi nous ne les détaillerons que dans le cas du « background » plat, où les conditions sur u permettent d'user commodément d'un repère gaussien adapté. Cela vaut tout de même la peine de voir que les méthodes tout à fait directes développées ici (l'analogue covariant de [36]) suffisent pour traiter le problème du champ de gravitation faible, physiquement intéressant et moins trivial que le champ de Maxwell.

Comme $\underline{w}$ a un crochet nul avec $\underline{z}$, $\dot{\underline{w}}$ ne dépendra pas des fonctions arbitraires $\underline{v}$: on l'évaluera donc en dérivant temporellement et en substituant aux $\underline{p}$ et $\underline{x}$ leur valeur tirée des équations de Hamilton, les $\underline{v}$ étant négligés. Il vient :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{w}}_m &= \nabla^i p_{im} - \nabla_{im} x'^i_0 \\ &= \nabla^i [\nabla^k_k h'^i_m - \nabla_{k(i} h^k_{m)} + g_{im} \nabla_{kl} h'^{kl} + \nabla_{im} h] - \nabla^k_m h h'_{00} + \nabla^i_{im} h_{00} \\ &= 0.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_0 &= \nabla_i^i x'_{00} + \nabla_{ij} x'^{ij} = \nabla_{ij} x^{ij} - \nabla_i^i \tilde{x} \\
 &= \nabla_{ij} \left(-p^{ij} + 2y'^{ij} + \frac{1}{2} g^{ij} \tilde{p} - \frac{1}{2} g^{ij} y' \right) - \frac{1}{2} \nabla_i^i \tilde{p} - \frac{1}{2} \nabla_i^i y' \\
 &= -\nabla_{ij} p^{ij} + 2\nabla_{ij} y'^{ij} - \nabla_i^i y' \\
 &= \nabla_m w^m = 0
 \end{aligned}$$

Enfin

$$[w_\lambda, w_{\mu'}] = -[\tilde{\nabla}^\alpha \tilde{p}_{\alpha\lambda}, w_{\mu'}] - [w_\lambda, \tilde{\nabla}^{\beta'} \tilde{p}_{\beta'\mu'}]$$

Les termes qui subsistent dans le cas minkowskien sont ceux qui renferment des dérivées troisièmes du bitenseur de Dirac; soit, pour le premier crochet :

$$\begin{aligned}
 f_{\lambda\mu'} &= -\tilde{\nabla}^{\beta\alpha'} [\tilde{p}_{\beta\lambda}, u^{\rho'} (\Sigma_\mu^{\tau'} \tilde{\nabla}_{\alpha'} h'_{\rho'\tau'} + \tilde{\nabla}_\mu h'_{\rho'\alpha'})] + \tilde{\nabla}_\mu^{\beta'} [\tilde{p}_{\beta\lambda}, u^{\rho'} \tilde{\nabla}_{\tau'} h'_{\rho'\tau'}] \\
 &\quad + \tilde{\nabla}^{\beta'} [\tilde{p}_{\beta\lambda}, u^{\sigma'} (\tilde{\nabla}_{\rho'} h'_{\sigma'\mu'} - \tilde{\nabla}_{\rho'\mu'} h'_{\sigma'} - \tilde{\nabla}_{\rho'\sigma'} h'_{\mu'}) + u_\mu \tilde{\nabla}_{\rho'\sigma'} h'^{\rho'\sigma'}] \\
 &= \frac{1}{2} u_\mu \tilde{\nabla}_{\lambda\rho'}^{\rho'} \delta - \frac{1}{2} u_\mu \tilde{\nabla}_{(\rho'\sigma')}^{\beta'} (\Sigma_\rho^{\rho'} \Sigma_\lambda^{\sigma'} \delta) + \frac{1}{2} u_\mu \tilde{\nabla}_{\lambda\rho'}^{\rho'} \delta \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

comme on le voit en prenant la valeur sur un vecteur d'essai; de même pour le second crochet.

Pour finir, explicitons les équations de Hamilton du cas minkowskien :

$$\begin{aligned}
 \delta H / \delta h_{\lambda\mu} &= -\tilde{\nabla}_\rho [p^{\rho(\lambda} u^{\mu)}] + \frac{1}{4} \tilde{\nabla}^{(\lambda} [p u^{\mu)}] + \tilde{\nabla}_\rho [u^\lambda u^\sigma \tilde{\nabla}^{(\rho} h'^{\mu)}_\sigma + u^\mu u^\sigma \tilde{\nabla}^{(\rho} h'^{\lambda)}_\sigma] \\
 &\quad - \frac{3}{4} \tilde{\nabla}^{(\mu} [u^\lambda] u^\sigma \tilde{\nabla}_\rho h'^{\rho)}_\sigma - \tilde{\nabla}_{\lambda\mu} h - \tilde{\nabla}_\rho^{\rho} h'^{\lambda\mu} + \tilde{\nabla}_\rho^{(\lambda} h'^{\mu)\rho} + 2\lambda h'^{\lambda\mu} \\
 &\quad + g^{\lambda\mu} [\tilde{\nabla}_\rho (p^{\rho\sigma} u_\sigma) - \tilde{\nabla}_\rho (u^\sigma u^\tau \tilde{\nabla}^\rho h'_{\sigma\tau}) - \tilde{\nabla}_{\rho\sigma} h'^{\rho\sigma}]
 \end{aligned}$$

dans le cas général, donc ici :

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_{ij} &= -\delta H / \delta h^{ij} + g_{ij} \nabla_k x^{k0} \\
 0 &= -\nabla_{00} h'_{ij} - g_{ij} \nabla_{00} h'_{00} + \nabla_{0(i} h'_{j)0} - g_{ij} \nabla_{0k} h'^{0k} - \nabla_k^k h'_{ij} \\
 &\quad + \nabla_{k(i} h'_{j)} - g_{ij} \nabla_{lm} h'^{lm} - \frac{1}{2} \nabla_{(ij)} h - g_{ij} \nabla_{k0} h'^{k0} \\
 &= \Delta h'_{ij} - g_{ij} \nabla_{\rho\sigma} h'^{\rho\sigma} + \nabla_{(i\rho} h'^{\rho)}_{j)} \\
 \dot{p}_{0i} &= -\delta H / \delta h^{0i} + \frac{1}{2} \nabla_{i0} h_{00}
 \end{aligned}$$

Compte tenu des contraintes primaires, on retombe évidemment sur $w_i = 0$.

SIMPLIFICATION DES CONTRAINTES PRIMAIRES

Dirac simplifie les contraintes primaires du champ de gravitation en ajoutant à la densité lagrangienne des termes ne modifiant pas les équations de champ : divergences d'espace ou dérivées temporelles.

C'est également possible ici puisque ces expressions sont toutes des divergences d'univers :

$$\tilde{\nabla}_\rho \mathbf{A}^\rho = \nabla_\rho \tilde{\mathbf{A}}^\rho \quad \text{et} \quad u^\rho \nabla_\rho f = \nabla_\rho (u^\rho f)$$

Le calcul de Dirac se laisse alors transposer, la condition de possibilité étant que les contraintes initiales soient des combinaisons linéaires des φ et π , les coefficients ayant leur dérivée covariante nulle. Dans le cas du champ gravitationnel varié, on pourra ajouter à L un terme

$$\begin{aligned} \bar{L} &= 2u^\rho \nabla_\rho (h'^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta u^\lambda \tilde{\nabla}_\mu h'^\mu_\lambda) - 2\tilde{\nabla}_\mu (h'^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta u^\lambda x'^\mu_\lambda) \\ &= 2x'^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta u^\lambda \tilde{\nabla}_\mu h'^\mu_\lambda - 2x'^\mu_\lambda \tilde{\nabla}_\mu (h'^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta u^\lambda) + \text{deux termes} \end{aligned}$$

ne renfermant pas x , l'un en $\underline{\nabla}u$ et l'autre en $\underline{R}$. Appelons p la modification résultante des moments :

$$\begin{aligned} \bar{p}_{\rho\sigma} &= y'(2u_\rho u_\sigma - g_{\rho\sigma}) - \tilde{\nabla}_\rho (h'_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta u_\sigma) - \tilde{\nabla}_\sigma (h'_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta u_\rho) \\ \bar{p}_{\rho\sigma} u^\rho u^\sigma &= y' \\ \bar{p}^\alpha_\alpha u^\beta &= -\tilde{\nabla}_\alpha (h'^{\rho\sigma} u_\rho u_\sigma), \end{aligned}$$

d'où les nouvelles contraintes :

$$\begin{aligned} (p_{\alpha\beta} + \bar{p}_{\alpha\beta}) u^\alpha u^\beta &= \\ (p^\alpha_\alpha + \bar{p}^\alpha_\alpha) u^\beta &= -h'^{\rho\sigma} \tilde{\nabla}_\alpha (u_\rho u_\sigma) \\ &= 0 \quad \text{si} \quad \nabla u = 0 \end{aligned}$$

(on a vu que cette condition caractérisait l'espace-temps de Minkowski).

Le prix à payer pour cette simplification est l'introduction dans le lagrangien même du champ $\underline{u}$, ce qui se traduisait chez Dirac par la présence d'indices 0 isolés.

III. FORMALISME A DEUX CONGRUENCES

III.1. Exposé de la méthode.

On peut regretter que la surface Σ , à qui on demandait seulement de porter des données de Cauchy, se trouve distinguée par une condition supplémentaire, même naturelle, même souvent rencontrée dans la litté-

rature. On introduit dans la théorie un élément géométrique supplémentaire dont la justification physique est possible mais non indiscutable. Nous allons essayer de nous en affranchir en introduisant, d'après Trautman [6], une surface Σ de vecteur unitaire $\underline{\sigma}$ et une congruence transversale à Σ , de vecteur unitaire $\underline{\xi}$. Ce dernier vecteur définira la dérivée temporelle $\xi^\rho \nabla_\rho$, cependant que le moment, décrivant l'évolution hors de Σ , sera

$$\pi^A = \sigma_\rho \partial \mathcal{L} / \partial (\nabla_\rho \varphi_A).$$

La densité hamiltonienne, formée à partir de t_β^α , ne peut être que

$$\mathcal{H} = t_\beta^\alpha \sigma_\alpha \xi^\beta = \pi^A \xi^\rho \nabla_\rho \varphi_A - \mathcal{L}(\xi \cdot \sigma)$$

Le calcul de δY se calque à peu près sur le précédent, en employant d'autres projecteurs $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{C}$ supplémentaires. On pose

$$\mathcal{C}_\beta^\alpha = \xi^\alpha \sigma_\beta / (\xi \cdot \sigma)$$

$\mathcal{Y}$ projette un vecteur contravariant sur $T_x(\Sigma)$.

$$\begin{aligned} \delta H &= \int \tilde{\eta} \left\{ \delta \pi^A \xi^\rho \nabla_\rho \varphi_A + \pi^A \xi^\rho \nabla_\rho \delta \varphi_A - (\sigma \cdot \xi) \delta \varphi_A \nabla_\sigma \left[(\mathcal{Y}_\rho^\sigma + \mathcal{C}_\rho^\sigma) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\rho \varphi_A} \right] \right. \\ &\quad \left. - (\sigma \cdot \xi) (\mathcal{Y}_\rho^\sigma + \mathcal{C}_\rho^\sigma) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_\rho \varphi_A} \nabla_\sigma \delta \varphi_A \right\} \\ &= \int \tilde{\eta} \left[\delta \pi^A \xi^\rho \nabla_\rho \varphi_A + \pi^A \xi^\rho \nabla_\rho \delta \varphi_A - \delta \varphi_A \xi^\sigma \nabla_\sigma \pi^A - (\xi \cdot \sigma) \delta \varphi_A \pi^A \nabla_\sigma \left(\frac{\xi^\sigma}{(\xi \cdot \sigma)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \pi^A \xi^\sigma \nabla_\sigma \delta \varphi_A - (\sigma \cdot \xi) \nabla_\sigma (\mathcal{Y}_\rho^\sigma A^\rho) \right] \\ &= \int \tilde{\eta} (\delta \pi^A \dot{\varphi}_A - \delta \varphi_A \dot{\pi}^A) - \delta H_1 \end{aligned}$$

On a gardé la même définition pour $\underline{A}$, de sorte que $\sigma_\rho A^\rho = \pi^A \delta \varphi_A$

$$\delta H_1 = \int \tilde{\eta} (\xi \cdot \sigma) \left[\sigma_\rho A^\rho \nabla_\sigma \left(\frac{\xi^\sigma}{(\xi \cdot \sigma)} \right) + \nabla_\sigma (\mathcal{Y}_\rho^\sigma A^\rho) \right]$$

Posons $\mathcal{Y}_\sigma^\rho A^\sigma = B^\rho$ et $\mathcal{C}_\sigma^\rho A^\sigma = C^\xi{}^\rho$. Comme $(\xi \cdot \sigma) \underline{B}$ est un vecteur spatial, nous projetons l'opérateur ∇ qui lui est appliqué au moyen de Σ et Θ , pour éliminer une divergence d'espace grâce à la formule de Stokes. Il reste :

$$\begin{aligned} \delta H_1 &= \int \tilde{\eta} \left\{ (\xi \cdot \sigma) \sigma_\rho A^\rho \nabla_\tau \left(\frac{\xi^\tau}{(\xi \cdot \sigma)} \right) + \nabla_\sigma [(\xi \cdot \sigma) B^\sigma - B^\sigma \nabla_\sigma (\xi \cdot \sigma)] \right\} \\ &= \int \tilde{\eta} \left\{ C(\xi \cdot \sigma)^2 \nabla_\tau \left(\frac{\xi^\tau}{(\xi \cdot \sigma)} \right) + \sigma_\tau \sigma^\alpha \nabla_\alpha [(\xi \cdot \sigma) B^\tau] - B^\sigma \nabla_\sigma (\xi \cdot \sigma) \right\} \\ &= \int \tilde{\eta} \left\{ C(\xi \cdot \sigma)^2 \nabla_\tau \left(\frac{\xi^\tau}{(\xi \cdot \sigma)} \right) + \sigma^\alpha \nabla_\alpha [(\xi \cdot \sigma) \sigma_\tau B^\tau] - \sigma^\alpha (\xi \cdot \sigma) B^\tau \nabla_\alpha \sigma_\tau - B^\sigma \nabla_\sigma (\xi \cdot \sigma) \right\} \end{aligned}$$

L'annulation des coefficients de $\underline{B}$ et $\underline{C}$ conduit à

$$(\xi \cdot \sigma) \sigma^\alpha \nabla_\alpha \cdot \sigma_\rho + \nabla_\rho (\xi \cdot \sigma) = (\xi \cdot \sigma) [\sigma^\alpha \nabla_\alpha \sigma_\rho + \nabla_\rho \text{Log} (\sigma \cdot \xi)] = 0$$

et

$$(\xi \cdot \sigma)^2 \nabla_\tau \frac{\xi^\tau}{\xi \cdot \sigma} = (\xi \cdot \sigma) [\nabla_\tau \xi^\tau - \xi^\tau \nabla_\tau \text{Log} (\sigma \cdot \xi)] = 0$$

soit encore

$$\begin{cases} \sigma^\alpha \nabla_\alpha \sigma_\rho = - \nabla_\rho \text{Log} (\sigma \cdot \xi) \\ \nabla_\tau \xi^\tau = \xi^\tau \nabla_\tau \text{Log} (\sigma \cdot \xi) \end{cases}$$

Remarquons que nous n'avons en nulle part besoin de l'hypothèse que $\underline{\xi}$ est unitaire; il sera possible de l'abandonner ultérieurement.

Une variante plus proche encore de l'exposé de Trautman consiste à remplacer partout les dérivations temporelles $\xi^\rho \nabla_\rho$ par les dérivations de Lie suivant $\underline{\xi}$. On prend alors pour hamiltonien

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \pi^A X(\xi) \varphi_A - (\xi \cdot \sigma) \mathcal{L} \\ &= \mathcal{H} + \pi^A \varphi_B F_{A\alpha}^{B\beta} \nabla_\beta \xi^\alpha \end{aligned}$$

Ce terme supplémentaire bilinéaire en π et φ modifie $\delta\varphi$ et $\delta\pi$ de telle sorte que la même condition $\delta H_1 = 0$ assure l'équivalence de $\delta H = 0$ et des équations :

$$X(\xi)\varphi \text{ (resp } \pi) = \delta H / \delta \pi \text{ (resp } - \delta \varphi)$$

Il n'est pas possible, en revanche, de définir les moments comme $\xi_\rho \partial \mathcal{L} / \partial (\nabla_\rho \varphi_A)$. Il faudrait alors substituer à $\mathcal{H}$ la quantité $\pi^A \xi^\rho \nabla_\rho \varphi_A - \mathcal{L}$ et à $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{G}$ les projecteurs symétriques associés à ξ (disons $\bar{\Sigma}$ et $\bar{\Theta}$). Mais $\bar{\Theta} \bar{\Sigma} \neq 0$ alors que $\bar{\Theta} \mathcal{Y}$ était nul; il subsiste dans δH_1 un terme en ∇A qui ne s'annule que si $\underline{\xi} = \underline{\sigma}$.

On vérifie en passant que dans ce cas, les équations se réduisent à celles qui ont été directement obtenues. Notons aussi une solution évidente dans le cas minkowskien : Σ est un plan, $\underline{\xi}$ se déduit de $\underline{\sigma}$ par une transformation de Lorentz globale.

Il convient enfin de montrer que ces équations admettent en général des solutions, contrairement à ce qui se passait au chapitre premier, pour faire pardonner à cette méthode sa lourdeur.

Nous reprenons donc les équations :

$$\begin{cases} \sigma^\alpha \nabla_\alpha \sigma_\rho = - \partial_\rho \text{Log} (\sigma \cdot \xi) \\ \nabla_\rho \xi^\rho = \xi^\rho \partial_\rho \text{Log} (\sigma \cdot \xi) \end{cases}$$

La seconde équivaut à

$$\begin{aligned}\xi^\rho \sigma^\alpha \nabla_\alpha \sigma_\rho &= -\nabla_\rho \xi^\rho = -(\Sigma_\rho^\alpha + \sigma^\alpha \sigma_\rho) \nabla_\alpha \xi^\rho \\ \sigma^\alpha \nabla_\alpha (\sigma \cdot \xi) &= -\Sigma_\rho^\alpha \nabla_\alpha \xi^\rho\end{aligned}$$

Mais comme $\underline{\sigma}$ est unitaire, il résulte de la première équation que

$$\sigma^\rho \partial_\rho (\sigma \cdot \xi) = 0;$$

on remplacera donc le système par le système équivalent :

$$\begin{cases} \sigma^\alpha \nabla_\alpha \sigma^\rho = -\partial_\rho \text{Log} (\sigma \cdot \xi) \\ \Sigma_\rho^\alpha \nabla_\alpha \xi^\rho = 0 \end{cases}$$

Une congruence unitaire $\underline{\sigma}$ normale à une famille de plans peut toujours être décrite dans des coordonnées locales comme

$$\sigma^\alpha = (g_{00})^{-\frac{1}{2}} \delta_0^\alpha$$

avec $g_{0i} = 0$, donc $\sigma_\alpha = (g_{00})^{-\frac{1}{2}} \delta_\alpha^0$. On démontre aisément l'existence locale de telles congruences sur une variété riemannienne quelconque ([37], § 113). Il reste à voir à quelles conditions on peut déterminer ξ . Les équations deviennent

$$\begin{aligned}\sigma^\alpha \nabla_\alpha \sigma_\rho &= (g_{00})^{-\frac{1}{2}} \nabla_0 \sigma_\rho \\ &= (g_{00})^{-\frac{1}{2}} [\partial_0 (g_{\rho 0} g_{00}^{-\frac{1}{2}}) - \Gamma_{0\rho}^\tau \sigma_\tau] \\ &= (g_{00})^{-\frac{1}{2}} \left(g_{\rho 0} \partial_0 g_{00}^{-\frac{1}{2}} + g_{00}^{-\frac{1}{2}} \partial_0 g_{\rho 0} - \frac{1}{2} g_{00}^{-\frac{1}{2}} \partial_\rho g_{00} \right) = -\partial_\rho \text{Log} (\xi_0 g_{00}^{-\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

soit, pour $\rho = 0$,

$$\partial_0 \text{Log} (\xi_0 g_{00}^{-\frac{1}{2}}) = 0$$

et pour $\rho = i$

$$-\partial_i \text{Log} \sqrt{g_{00}} = -\partial_i \text{Log} (\xi_0 g_{00}^{-\frac{1}{2}}) = -\partial_i \text{Log} (\xi^0 g_{00}^{\frac{1}{2}})$$

qui s'intègre en $\xi^0 = \exp -h(x^0)$. On en déduit la condition :

$$\text{Log} \sqrt{g_{00}} = f(x^i) + h(x)^0$$

Quand cette condition est satisfaite, et c'est le cas pour un assez grand nombre de solutions exactes connues, ξ^i est donnée par

$$\begin{aligned}\nabla_i \xi^i &= \tilde{\nabla}_i \xi^i|_\Sigma + \Gamma_{0i}^i \xi^0 = 0 \\ 1 &= g_{00} (\xi^0)^2 + g_{ij} \xi^i \xi^j\end{aligned}$$

APPLICATIONS. — En métrique de Schwarzschild, g_{00} ne dépend pas de x^0 ; ξ^0 est une constante (> 1);

$$\begin{aligned} f(x^i) &= \text{Log } \xi^0 \sqrt{1 - \frac{2a}{x^1}} \\ \sum_i g_{ii}(\xi^i)^2 &= 1 - \left(1 - \frac{2a}{x^1}\right)(\xi^0)^2 \\ \tilde{\nabla}_i \xi^i|_{\Sigma} &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations sont valides dans un ouvert $x^1 > \frac{2a}{1 - (\xi^0)^{-2}}$ un peu plus restreint que le domaine des coordonnées de Schwarzschild. On obtient une solution particulière en prenant ξ^1 et ξ^2 nuls; la dernière équation exprime que ξ^3 est x^3 -indépendant, celle d'avant donne sa valeur

$$\sqrt{(\xi^0)^2 \left(1 - \frac{2a}{x^1}\right) - 1/x^1} \sin x^2$$

De même, en espace de de Sitter (g diagonal, $g_{00} = 1$, $g_{ii} = -\exp \Lambda x^0$; $\Gamma_{0(i)}^{(i)} = -\frac{\Lambda}{2}$), ξ^0 est encore une constante > 1 et on peut prendre pour ξ^i la solution indépendante de x^2 et de x^3 :

$$\begin{aligned} \xi^1 &= -\frac{3\Lambda}{2} x^1 \xi^0 \\ \xi^2 &= \sqrt{e^{-\Lambda x^0} [(\xi^0)^2 - 1] - \left(\frac{3\Lambda \xi^0 x^1}{2}\right)^2} \\ \xi^3 &= 0 \end{aligned}$$

III.2. Comparaison avec les travaux d'Andrzej Trautman.

Il convient maintenant de comparer ces calculs à ceux de Trautman. Celui-ci obtient en effet des équations de Hamilton dans le formalisme à deux champs de vecteurs sans aucune condition supplémentaire. L'emploi de dérivées de Lie de densités et non plus de tenseurs lui permet d'absorber les termes en $X\sqrt{g}$ qui donnaient naissance à la condition d'aire extrémale. L'élimination de la seconde condition n'est possible qu'au prix d'une dépendance explicite des différentes grandeurs par rapport à la paramétrisation de Σ et d'une redéfinition de la dérivée variationnelle.

Nous appellerons $L = L\sqrt{g}$ le lagrangien de Trautman qui sera fonction des densités $\bar{\varphi}_A = \varphi_A \sqrt{g}$. Le vecteur normal à la surface est $\bar{\sigma}_\alpha = \partial_\alpha f$,

où $f(x^\alpha) = 0$ est une équation locale ou peut-être même globale de Σ ; il est lié au vecteur unitaire, qui seul possède une signification géométrique indépendante de toute paramétrisation, par

$$\bar{\sigma}_\alpha = v\sigma_\alpha \quad \text{ou} \quad v^2 = \Delta_1 f$$

Le vecteur ξ de la congruence est « accroché » à $\bar{\sigma}$ par la condition de normalisation $\bar{\xi}^\alpha \bar{\sigma}_\alpha = +1$.

Les moments sont définis comme $\bar{\pi}^\alpha = \bar{\sigma}_\rho \partial \bar{L} / \partial (\partial_\rho \bar{\varphi}_A)$.

Mais nous retrouvons les exigences de covariance : L devant s'exprimer en fonction des seuls φ_A , $\nabla_\alpha \varphi_A$, g , on a

$$\frac{\partial L \sqrt{g}}{\partial (\partial_\rho \tilde{\varphi}_A)} = \sqrt{g} \frac{\partial L}{\partial (\sqrt{g} \nabla_\rho \varphi_A)} = \frac{\partial L}{\partial (\nabla_\rho \varphi_A)}$$

autrement dit l'effet du changement de variables indépendantes se fera sentir seulement quand on évaluera $\partial L / \partial \varphi$ et $\bar{\pi} = v\pi$. Enfin Trautman utilise comme élément de surface la capacité

$$dS_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} dx^\beta dx^\gamma dx^\delta$$

qui satisfait à

$$\begin{aligned} \sqrt{g} dS_\alpha &= \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} dx^\beta dx^\gamma dx^\delta = \tilde{\eta} \sigma_\alpha \\ \sqrt{g} \xi^\alpha dS_\alpha &= \tilde{\eta} \bar{\xi}^\alpha \sigma_\alpha = \tilde{\eta} v^{-1} \\ \sqrt{g} \sigma^\alpha dS_\alpha &= \tilde{\eta} \sigma^\alpha \sigma_\alpha = \tilde{\eta} \end{aligned}$$

Le hamiltonien est

$$H = \int_d (\bar{\pi}^\alpha X \bar{\varphi}_A - \bar{L}) \bar{\xi}^\alpha dS_\alpha = \int \frac{\tilde{\eta}}{v} \left[\frac{\bar{\pi}^\alpha X \bar{\varphi}_A}{\sqrt{g}} - L \right]$$

Sa variation s'évalue aisément au moyen du projecteur de Taub $v \xi^\sigma \sigma_\rho$ et du projecteur supplémentaire $\mathcal{Y}^\sigma_\rho$:

$$\begin{aligned} \delta H &= \int \frac{\tilde{\eta}}{v} \left\{ \delta \bar{\pi}^\alpha \frac{X \bar{\varphi}_A}{\sqrt{g}} + \bar{\pi}^\alpha \frac{X \delta \bar{\varphi}_A}{\sqrt{g}} - \nabla_\sigma \left[(v \bar{\xi}^\sigma \sigma_\rho + \mathcal{Y}^\sigma_\rho) \frac{\partial L}{\partial \nabla_\rho \varphi_A} \right] \delta \varphi_A \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial L}{\partial (\nabla_\rho \varphi_A)} (v \bar{\xi}^\sigma \sigma_\rho + \mathcal{Y}^\sigma_\rho) \nabla_\sigma \delta \varphi_A \right\} \\ &= \int \frac{\tilde{\eta}}{v} \left\{ \delta \bar{\pi}^\alpha \frac{X \bar{\varphi}_A}{\sqrt{g}} + \bar{\pi}^\alpha (\bar{\xi}^\sigma \nabla_\sigma \delta \varphi_A + \delta \varphi_B F_{A\mu}^{Bv} \nabla_v \bar{\xi}^\mu + \delta \varphi_A \nabla_\rho \bar{\xi}^\rho) \right. \\ &\quad \left. - \nabla_\sigma (\mathcal{Y}^\sigma_\rho A^\rho) - \bar{\pi}^\alpha \delta \varphi_A \nabla_\sigma \bar{\xi}^\sigma - \delta \varphi_A \bar{\xi}^\sigma \nabla_\sigma \bar{\pi}^\alpha - \bar{\pi}^\alpha \bar{\xi}^\sigma \nabla_\sigma \delta \varphi_A \right\} \\ &= \int \frac{\tilde{\eta}}{v} \left(\delta \bar{\pi}^\alpha \frac{X \bar{\varphi}_A}{\sqrt{g}} - \delta \varphi_A X \bar{\pi}^\alpha \right) - \int \frac{\tilde{\eta}}{v} \nabla_\sigma (\mathcal{Y}^\sigma_\rho A^\rho) \end{aligned}$$

Les premiers termes conduisent aux équations de Hamilton

$$\delta H = \int \vec{\xi} d\vec{S} \left(\frac{\delta H}{\delta \varphi} \delta \bar{\varphi} + \frac{\delta H}{\delta \pi} \delta \bar{\pi} \right)$$

si l'on montre que le dernier terme (soit $-\delta H_1$) est nul.

$$\begin{aligned} \delta H_1 &= \int \frac{\tilde{\eta}}{v} \nabla_\sigma [(\delta_\rho^\sigma - \bar{\xi}^\sigma \bar{\sigma}_\rho) A^\rho] \\ &= \int \frac{\tilde{\eta}}{v} [\nabla_\rho A^\rho - \nabla_\sigma (\bar{\xi}^\sigma \bar{\sigma}_\rho A^\rho) - A^\rho \bar{\xi}^\sigma (\nabla_\rho \bar{\sigma}_\sigma - \nabla_\sigma \bar{\sigma}_\rho)] \end{aligned}$$

puisque $\bar{\sigma}$ est un gradient; c'est aussi

$$\delta H_1 = \int \frac{\tilde{\eta}}{v} [\nabla_\rho A^\rho - \bar{\sigma}_\rho \nabla_\sigma (\bar{\xi}^\sigma A^\rho) - A^\rho \bar{\xi}^\sigma \nabla_\rho \bar{\sigma}_\sigma]$$

ou, compte tenu de la normalisation :

$$\begin{aligned} \delta H_1 &= \int \frac{\tilde{\eta}}{v} [(\bar{\sigma}_\alpha \bar{\xi}^\alpha) \nabla_\rho A^\rho - \bar{\sigma}_\rho \nabla_\sigma (\bar{\xi}^\sigma A^\rho) + A^\rho \bar{\sigma}_\sigma \bar{\nabla}_\rho \bar{\xi}^\sigma] \\ &= \int \tilde{\eta} \sigma_\alpha \nabla_\rho (\bar{\xi}^{[\alpha} A^{\rho]}) = \int *i(\sigma) \delta F \end{aligned}$$

où $F^{\alpha\beta}$ est la 2-forme $\bar{\xi}^{[\alpha} A^{\beta]}$. Mais de façon générale, on a

$$\int_\Sigma *V = \int_\Sigma \tilde{*}i(\sigma)V$$

(en particulier, si $V = \sigma$, on retrouve bien l'aire comme flux de σ). En repère adapté, σ_α admet en effet les composantes $(\sigma_0, 0, 0, 0)$ avec $\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$.

La forme induite sur Σ par $*V$ est

$$(*V)_{ijk} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^k} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} V^\delta$$

Comme $g^{00} = \frac{\tilde{g}}{g}$, on a

$$(*V)_{ijk} = \eta_{ijk\delta} V^\delta = \eta_{ijk0} V^0 = \sqrt{\tilde{g}} \varepsilon_{ijk0} V^0 \sigma_0 = \tilde{\eta}_{ijk} \sigma_0 V^0$$

soit encore $*V = \tilde{*}(\sigma.V)$; la formule étant tensorielle vaut pour tout repère et

$$\delta H_1 = \int_{\Sigma} *\delta F = \int_{\Sigma} d(*F),$$

qui, grâce à la formule de Stokes se réduit au terme de bord $\int_{\partial\Sigma} *F$.

Toutes les hypothèses introduites sont nécessaires pour que δH_1 s'annule. Il suffit de refaire les calculs en supprimant une ou plusieurs d'entre elles pour s'en rendre compte. Mais, à procéder ainsi, on pourrait croire à un succès accidentel, alors que cette méthode tire sa cohérence d'une idée, qui est de faire abstraction autant que possible de la structure riemannienne, qui n'intervient guère que dans la définition des $\bar{\varphi}_A$ comme densités tensorielles. On définit les moments à partir d'un vecteur normal arbitraire, alors que le vecteur normal unitaire orienté vers le futur est défini de façon unique. Ceci est d'ailleurs physiquement admissible, il n'est pas désagréable de pouvoir changer d'échelle de temps. Ensuite, on fait jouer à la dérivée de Lie dans une direction transversale ξ le rôle de la dérivée temporelle; or la dérivée de Lie est définie indépendamment de toute métrique, même si le résultat admet ensuite une forme explicitement covariante. On oublie enfin que Σ est naturellement douée par le plongement d'une métrique riemannienne et partant d'un élément de volume canonique, et on lui préfère l'élément de volume $\xi.dS$, qui, en réalité, ne dépend pas de ξ , mais, grâce à la normalisation, n'est autre que $\frac{\omega}{\sqrt{g}}$, où ω est une forme de Leray associée à $\bar{\sigma}$:

$$\eta = \tilde{\eta} \wedge \sigma = \frac{\tilde{\eta}}{v} \wedge v\sigma = \omega \wedge \bar{\sigma}$$

Cet élément de volume est le seul canonique sur une sous-variété non métrique.

Les différences entre les deux méthodes sont à part cela minimales : les hamiltoniens sont quasiment les mêmes :

$$\begin{aligned} H_{\text{Trautman}} &= \int \frac{\tilde{\eta}}{v} [v\pi^A(X\varphi_A + \varphi_A \nabla_{\rho} \xi^{\rho}) - \mathfrak{L}] \\ &= \int \tilde{\eta} (\pi^A X\varphi_A - \mathfrak{L}\sigma \cdot \xi) + \int \tilde{\eta} \pi^A \varphi_A \nabla_{\rho} \xi^{\rho} \\ &= H' \text{ (cf. page 307)} + \int \tilde{\eta} \pi^A \varphi_A \nabla_{\rho} \xi^{\rho} \end{aligned}$$

et il y a toujours des conditions supplémentaires, moins strictes il est vrai chez Trautman.

L'emploi de cette forme de Leray est-il intéressant dans le formalisme à une congruence ? La question n'a de sens que si $v^\alpha v_\alpha \neq 1$, car sinon ω ne se distingue pas de $\tilde{\eta}$. Donnons-nous un degré de liberté en posant

$$H = \int \omega(v^\rho v_\rho)^n (\pi^\Lambda v^\rho \nabla_\rho \varphi_\Lambda - \mathfrak{L} v^\rho v_\rho) ;$$

alors

$$\begin{aligned} \delta H = & \int \omega(v^\rho v_\rho)^{n+1} (\delta \pi^\Lambda v^\rho \nabla_\rho \varphi_\Lambda - \delta \varphi_\Lambda v^\rho \nabla_\rho \pi^\Lambda) \\ & - \int \omega(v^\rho v_\rho)^{n+1} \left[C \nabla_\sigma \left(\frac{v^\sigma}{v^\rho v_\rho} \right) - \nabla_\sigma B^\sigma \right] \end{aligned}$$

Il faut toujours que le vecteur unitaire porté par v soit sans expansion; un calcul déjà effectué nous montre que l'autre terme de δH_1 s'annule quand $\underline{v}$ est un gradient si $n + 1 = 0$; mais alors δH s'écrit

$$\delta H = \int \omega \left(\delta \pi^\Lambda \frac{v^\rho}{v^\sigma v_\sigma} \nabla_\rho \varphi_\Lambda - \delta \varphi_\Lambda \frac{v^\rho}{v^\sigma v_\sigma} \nabla_\rho \pi^\Lambda \right)$$

de sorte que l'on est ramené à un cas particulier du formalisme de Trautman, celui où $\bar{\sigma}$ et ξ sont colinéaires.

En conclusion, les difficultés du formalisme hamiltonien en Relativité Générale tiennent essentiellement à l'usage systématique de la métrique induite sur les sections d'espace qui amène à privilégier certains feuilletages. Le formalisme est toujours possible quand on fait abstraction de la connexion riemannienne (chaque fois que l'on s'attaque au champ de gravitation total, c'est indispensable et on a alors intérêt, selon Droz-Vincent [38] à faire également abstraction de la métrique de la surface porteuse des données de Cauchy). Si la métrique d'espace-temps est donnée, on pourra toujours satisfaire aux conditions de Trautman en s'en servant le moins possible, tandis que nos conditions ne sont satisfaites que dans une certaine classe d'espace-temps (incluant, il est vrai, de nombreuses solutions usuelles) et y supposent un choix de surfaces particulières, si du moins on désire un formalisme global. Ceci suggère que la métrique induite g_{ij} n'a qu'une signification physique limitée dans un espace-temps quelconque; elle ne fournit d'ailleurs pas de solution satisfaisante au problème de la distance spatiale de deux points.

REMERCIEMENTS

Je suis heureux de témoigner ici ma profonde reconnaissance à M. André Lichnerowicz qui a inspiré et guidé ce travail. J'ai aussi bénéficié des conseils ou des critiques de Mme Winogradzki et de MM. Cattaneo et Flato et les prie d'accepter ici mes remerciements.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTAN, *Ann. École Normale Sup.*, t. **40**, 1923, p. 385; t. **41**, 1924, p. 1.
- [2] EINSTEIN, *Ann. der Physik*, t. **35**, 1911, p. 898.
- [3] RAY, Thèse, Ohio University, 1964.
- [4] LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sci.*, t. **250**, 1960, p. 3122.
- [5] LICHNEROWICZ, I. H. E. S., *Publ. Math.*, t. **10**, 1961.
- [6] TRAUTMAN, Propriétés d'invariance des théories physiques. Conférences données au Collège de France, 1963, mimeographié.
- [7] HEISENBERG et PAULI, *Zeits. Phys.*, t. **56**, 1929, p. 1.
- [8] CATTANEO, Formulation relative des lois physiques. Cours professé au Collège de France, 1961-1962, mimeographié.
- [9] FRONSDAL, *Rev. mod. Phys.*, t. **37**, 1965, p. 221.
- [10] ROCHE, *C. R. Acad. Sci.*, t. **258**, 1964, p. 5359.
- [11] ROCHE, *Cah. Phys.*, t. **20**, 1966, p. 265.
- [12] ROCHE, *Abstracts, 5th International Conference on gravitation and the theory of relativity*, Tbilisi, 1968, p. 133.
- [13] TRAUTMAN, *Bull. Ac. Pol. Sci.*, Cl. III, t. **4**, 1956, p. 675.
- [14] BERGMANN, *Phys. Rev.*, t. **75**, 1949, p. 680.
- [15] LEDERER et TONNELAT, *Nuovo Cimento*, X, t. **34**, 1964, p. 883.
- [16] KOSMANN, *C. R. Acad. Sci.*, t. **262**, 1966, p. 289.
- [17] KOSMANN, *C. R. Acad. Sci.*, t. **262**, 1966, p. 394.
- [18] KOSMANN, *C. R. Acad. Sci.*, t. **264**, 1967, p. 355.
- [19] PIRANI, Gauss's theorem and gravitational energy, dans *Les théories relativistes de la gravitation*, C. N. R. S., 1962.
- [20] DIRAC, *Phys. Rev.*, t. **114**, 1959, p. 924.
- [21] RAYSKI, *Acta Phys. Pol.*, t. **21**, 1962, p. 99.
- [22] RAYSKI, *Acta Phys. Pol.*, t. **22**, 1962, p. 433.
- [23] BERNSTEIN, *C. R. Acad. Sci.*, t. **151**, 1910, p. 636.
- [24] DE GIORGI, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, t. **19**, 1965, p. 79.
- [25] ALMGREN, *Ann. of Math.*, t. **2**, 1966, p. 277.
- [26] LICHNEROWICZ, *Bull. Sc. Math.*, t. **65**, 1941, p. 54.
- [27] LICHNEROWICZ, *J. Math. pures et appl.*, t. **23**, 1944, p. 37.
- [28] RAYSKI, A revised interpretation of General Relativity and Quantization of the gravitational field (I), inédit communiqué par l'auteur.
- [29] OSTROGRADSKY, *Mem. Ac. Sc. St-Petersbourg*, t. VI, 4, 1850, p. 385.
- [30] UMEZAWA, *Quantum field theory*, ed. North-Holland, 1956.
- [31] DIRAC, *Can. J. Math.*, t. **2**, 1950, p. 129.
- [32] KUNDT, *Ergebnisse d. ex. Naturwiss.*, t. **40**, 1966, p. 107.

- [33] BLANCHETON, Publications scientifiques de l'Université d'Alger, Mathématiques, série A, t. 9, 1962, p. 31.
- [34] WENTZEL, *Quante theorie der Wellenfelder*, 1943.
- [35] CAPELLA, *Cah. Phys.*, t. 16, 1962, p. 330.
- [36] DIRAC, *Proc. Roy. Soc.*, t. 246 A, 1958, p. 326.
- [37] MÖLLER, *The theory of relativity*, éd. Clarendon Press, Oxford, 1952.
- [38] DROZ-VINCENT, Thèse, Paris, 1964.

Manuscrit reçu le 6 février 1969.
