

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

Y. CHOQUET-BRUHAT

## **Espaces-temps einsteiniens généraux, chocs gravitationnels**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 8, n° 4 (1968), p. 327-338

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1968\\_\\_8\\_4\\_327\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__8_4_327_0)

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Espaces-temps einsteiniens généraux, chocs gravitationnels

par

Mme Y. CHOQUET-BRUHAT  
Institut Henri Poincaré, Paris.

## INTRODUCTION

Nous donnons dans cet article une définition très large de ce qu'est un espace-temps, aussi large qu'il semble possible pour que les principes de base de la Relativité Générale soient respectés d'une part, pour que les équations d'Einstein aient un sens dans le cadre de la théorie des distributions d'autre part. Nous donnons des conditions dites « de régularité forte » pour que le problème de Cauchy (local) ait une solution et une seule.

Un cas particulier des espaces-temps ainsi définis est celui des espaces-temps présentant des chocs gravitationnels. Nous écrivons les équations de ces chocs sous forme intrinsèque, à la traversée d'une hypersurface  $S$  que nous supposons seulement lipshitzienne. Nous montrons que les quatre conditions vérifiées lors d'un tel choc à travers une variété caractéristique expriment la continuité des conditions d'harmonicité.

Ce dernier résultat nous permet de montrer l'unicité du prolongement d'un espace-temps à travers un conoïde caractéristique, même si ce dernier peut être surface d'onde de choc gravitationnel.

## 1. — DÉFINITION

Un espace-temps  $(V_4, g)$  est une variété différentiable  $V_4$  de classe  $C^p (p \geq 1)$  muni d'une métrique riemannienne hyperbolique  $g$ , sur laquelle il n'est pas nécessaire de faire d'autre hypothèse *a priori* que de la supposer définie presque partout.

Deux espaces-temps  $(V_4, g)$  et  $(V'_4, g')$  sont considérés comme physiquement identiques si ils sont isométriques, c'est-à-dire s'il existe un difféomorphisme  $f$  de  $V_4$  sur  $V'_4$  tel que

$$f^*g' = g$$

Etant donné une structure  $C^p(p \geq 1)$  sur une variété  $V_n$ , on sait qu'il existe toujours une structure  $C^\infty$ , qui induit cette structure  $C^p$ . A tout espace-temps  $(V'_4, g')$ ,  $V'_4$  de classe  $C^p(p \geq 1)$  on peut donc associer un espace-temps isométrique  $(V_4, g)$  où  $V_4$  est de classe  $C^\infty$  et  $g$  a la même classe de différentiabilité ( $\leq p-1$ ) que  $g'$ . On ne restreint pas la généralité des espaces-temps physiques en ne considérant que des variétés  $C^\infty$ ; cette remarque permet de considérer, sur tout espace-temps, des dérivées de tous ordres des quantités géométriques et des distributions pour ces quantités. On pourra évidemment, dans la pratique, être amené à considérer des représentants d'espace-temps avec une variété  $V_4$  qui n'est pas  $C^\infty$ .

## 2. — ÉQUATIONS D'EINSTEIN

Un espace-temps  $(V_4, g)$  est dit einsteinien général <sup>(1)</sup> si le tenseur de Ricci  $R$  contracté du tenseur de courbure  $S$  correspondant à son tenseur métrique  $g$  est égal à un tenseur distribution  $Q$  donné sur  $V_4$ .

Le tenseur de Ricci, et le tenseur de courbure, d'une métrique donnée sur une variété différentiable de classe  $C^p$  n'ont un sens intrinsèque <sup>(2)</sup> que si  $p \geq 3$ , ce que nous supposons donc désormais.

Les équations d'Einstein s'écrivent en coordonnées locales

$$R_{\alpha\beta} \equiv \partial_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \partial_\alpha \Gamma_{\beta\lambda}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\beta\mu}^\lambda = Q_{\alpha\beta}$$

où les  $Q_{\alpha\beta}$  sont des distributions sur  $R_4$  satisfaisant aux conditions de conservation

$$\nabla_\alpha \left( Q^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} Q_{\lambda\mu} \right) = 0$$

Pour que  $R_{\alpha\beta}$  soit défini comme distribution les coefficients de connexion ne pourront pas être des distributions quelconques puisque leurs produits figurent. Sauf peut-être dans des cas très particuliers de symétrie de l'espace-

<sup>(1)</sup> Nous réservons le terme « einsteinien » tout court aux espaces temps du vide.

<sup>(2)</sup> Avec les définitions usuelles. Certaines définitions géométriques de la courbure ont été données pour des variétés peu différentiables (Buseman) mais semblent peu variables.

temps il faudra, pour que la définition de  $R_{\alpha\beta}$  ne dépende pas du mode de calcul <sup>(1)</sup>, que  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$  soient des fonctions usuelles (définies presque partout) mesurables et localement sommables ainsi que leurs produits deux à deux. Nous réaliserons cette propriété par l'hypothèse suivante.

**Hypothèse de régularité faible (I)**

La métrique  $g$  et ses dérivées partielles premières sont des fonctions localement <sup>(2)</sup> de carré sommable sur  $V_4$ , ce que nous écrirons en utilisant les notations habituelles des espaces de Sobolef

$$g \in \tilde{W}_2^1(V_4)$$

et le tenseur dual  $g^*$  (de composantes  $g^{\alpha\beta}$ ) est aussi localement de carré sommable

$$g^* \in \tilde{W}_2(V_4)$$

Si  $V_4$  est de classe  $C^p$ , les espaces  $\tilde{W}_2^m(V_4)$  (tenseurs dont les composantes ont des dérivées partielles d'ordre  $\leq m$ , au sens des distributions, qui sont des fonctions localement de carré sommable) ne dépendent pas de l'atlas choisi sur  $V_4$  si  $m < p$ .

*Remarques*

1. —  $R$  étant sous l'hypothèse I une distribution d'ordre  $\leq 1$  (somme de dérivées d'ordre  $\leq 1$  de fonctions) il en sera de même de  $Q$  : en particulier  $Q$  ne pourra pas être de la forme  $\delta^{(n)} S$  où  $S$  est un tenseur usuel et  $\delta^{(n)}$  une dérivée d'ordre  $n > 1$  de la mesure de Dirac <sup>(3)</sup>.

2. — Sous l'hypothèse générale I il pourra n'y avoir ni existence, ni unicité des arcs géodésiques.

3. — Une fonction  $f$  sur  $V_4$  est identifiée à une distribution par la formule

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{V_4} f\varphi\eta$$

où  $\varphi$  est une fonction continue à support compact et  $\eta$  une  $n$ -forme régulière sur  $V_4$  <sup>(4)</sup> (continue et ne s'annulant pas).

Si  $V_4$  est munie d'une métrique non régulière la forme élément de volume

<sup>(1)</sup> Cf. le calcul effectué dans le cas du  $ds^2$  de Schwarzschild par J. Colleau [14].

<sup>(2)</sup> C'est-à-dire sur tout compact.

<sup>(3)</sup> Des exemples où  $Q$  est une mesure sont donnés par Israel et Papapetrou Hamoui (cf. [13]).

<sup>(4)</sup> Cf. A. Lichnerowicz [15].

correspondante n'est pas régulière, l'espace  $L_{loc}^1(V_4)$  n'est pas l'espace classique <sup>(1)</sup>. Il est cependant naturel d'identifier les fonctions sur  $(V_4, g)$  aux distributions par l'intermédiaire de la forme élément de volume correspondante. Les raisonnements précédents sont valables encore si  $\tilde{W}_2$  (et de même pour  $\tilde{W}_2^p$ ) est l'espace des fonctions de carré sommable par rapport à cet élément de volume. Une remarque analogue est valable pour les tenseurs.

### 3. — ESPACES-TEMPS FAIBLEMENT ISOMORPHES

Soient  $(V_4, g)$  et  $(V'_4, g')$  deux espaces-temps, où  $V_4$  et  $V'_4$  sont deux variétés différentiables de classe  $C^p$ ,  $p \geq 3$ , isométriques dans le difféomorphisme  $f$ :

$$3-1 \quad g' = f^*g$$

L'hypothèse (I) vérifiée par  $g$  n'implique pas, sans hypothèse supplémentaire sur  $f$ , que cette hypothèse soit vérifiée par  $g'$  : le tenseur de courbure de  $g'$  peut-être non défini bien que le tenseur de courbure de  $g$  le soit. Pour supprimer cette éventualité nous dirons que :

DÉFINITION 2. — Deux espaces-temps sont dits faiblement isomorphes si

$$df \in \tilde{W}_2^1 \quad \text{et} \quad df^{-1} \in \tilde{W}_2$$

On dit que  $df \in \tilde{W}_2^1$  si, pour les cartes d'un atlas sur  $V_4$  et d'un atlas sur  $V'_4$  où  $f$  est représenté par

$$y^\alpha = f^\alpha(x^\beta)$$

$\partial_\beta f^\alpha$  et  $\partial_{\beta\gamma}^2 f^\alpha$  sont localement de carré sommable : cette condition ne dépend pas des atlas puisque  $V_4$  et  $V'_4$  ont été supposées de classe  $\geq 3$ .

*Remarque.* — Si  $df \in \tilde{W}_2^1$  et  $f \in C^1$ , alors  $df^{-1} \in \tilde{W}_2^1 \subset \tilde{W}_2$ .

La définition 2 entraîne que l'hypothèse I est vérifiée pour  $g'$  si elle l'est pour  $g$ , d'après les classiques formules de transformation de  $g$  et  $\Gamma$ .

Elle entraîne de plus (d'après la définition de la dérivation au sens des distributions) que le tenseur de courbure  $S'$  de  $g'$  est image par  $f$  du tenseur de courbure  $S$  de  $g$

$$3-2 \quad S' = f^*S \quad \text{de même} \quad R' = f^*R$$

<sup>(1)</sup> Cf. J. Colleau [14] : l'espace des distributions ne dépend pas de l'élément de volume.

*Remarque.* — Si  $f$  est une application de  $V_4$  dans  $V_4$  qui n'est pas un difféomorphisme, des formules comme 3-1, 3-2 peuvent introduire (ou faire disparaître) des singularités du tenseur métrique et du tenseur de courbure (mais non des invariants si ceux-ci sont définis). Dans notre langage les espaces-temps correspondants ne sont pas physiquement identiques. On peut considérer que l'un d'entre eux est irrecevable et n'est qu'une mauvaise image du premier, c'est ce que l'on fait habituellement ; on pourrait aussi en chercher une autre interprétation <sup>(1)</sup>.

**4. — RÉSULTATS D'EXISTENCE  
ET D'UNICITÉ LOCAUX  
POUR LE PROBLÈME DE CAUCHY**

D'après les travaux récents de Leray-Dionne, les résultats de [6] peuvent être généralisés comme suit :

**I. — Existence**

a) Les équations d'Einstein en *coordonnées harmoniques* forment un système quasi linéaire d'équations hyperboliques du second ordre, ayant toutes même partie principale,  $g^{\lambda\mu}\hat{c}_{\lambda\mu}^2$ . Le problème de Cauchy sur un morceau d'hypersurface différentiable  $S$ , de classe  $C^{5+\nu}$  ( $\nu \geq 0$ ), d'image dans les coordonnées locales un ouvert  $\omega$  de  $R_3$ , a pour ces équations une solution et une seule, dans un voisinage de  $S$  d'image dans les coordonnées locales un ouvert  $\Omega$  de  $R_4$  <sup>(2)</sup>.

4-1 
$$g^{\lambda\mu} \in W_2^{4+\nu}(\Omega)$$

si les données de Cauchy sur  $S$  sont bornées et vérifient :

4-2 
$$g^{\lambda\mu}|_S \in W_2^{4+\nu}(\omega) \quad , \quad \hat{c}_x g^{\lambda\mu}|_S \in W_2^{3+\nu}(\omega), \quad \nu \geq 0$$

avec  $g^{\lambda\mu}|_S$  uniformément hyperbolique, et  $S$  spatial pour cette métrique.

<sup>(1)</sup> L'interprétation géométrique (c'est-à-dire physique) d'un espace-temps dépend de l'interprétation du paramétrage, si celui-ci cesse d'être considéré comme de vraies coordonnées locales. Par exemple  $dy^2 + y^2 dx^2$ , métrique singulière sur  $R^2$  (coordonnées locales  $x, y$ ), peut-être interprétée comme métrique régulière (euclidienne) sur  $R^2$  si  $x, y$  sont considérés comme un paramétrage polaire : mais les points  $x + 2k\pi$ , en entier, doivent alors être identifiés ainsi que les points  $y = 0, x$  quelconque.

<sup>(2)</sup>  $W_p^q(\Omega)$  : espace des fonctions dont les dérivés d'ordre  $\leq p$  sont de carré sommable sur  $\Omega$ .

*Remarques :*

1) La démonstration de Leray-Dionne suppose que  $S$  a pour équation locale  $x^0 = 0$  : on peut toujours se ramener à ce cas, dans un voisinage d'un point de  $S$ , supposée sous-variété différentiable de  $V_4$ .

2) Si  $\Omega$  est un ouvert de  $R_4$  on a <sup>(1)</sup>, pour tout  $\nu \geq 0$

$$W_2^{4+\nu}(\Omega) \supset C^{1+\nu}(\Omega)$$

et, si  $\omega$  est un ouvert de  $R_3$

$$W_2^{4+\nu}(\omega) \supset C^{2+\nu}(\omega)$$

On en déduit que si  $N$  est un ouvert relativement compact de  $S$  tel que

$$\bar{N} \subset S$$

les conditions 4-1 entraînent que les données de Cauchy sont continues et bornées sur  $N$ , la condition 4-2 que la solution et ses dérivées premières sont continues et bornées sur un ouvert relativement compact  $M$  tel que  $\bar{M} \subset \Omega$ .

b) Une solution des équations d'Einstein en coordonnées harmoniques, vérifiant les conditions initiales, c'est-à-dire :

$$4-3 \quad F^\mu|_S = 0 \quad , \quad \partial_\lambda F^\mu|_S = 0,$$

est solution des équations tensorielles d'Einstein si les équations (cf. [6], chap. IV, § 4)

$$g^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu}^2 F^\alpha + P^\alpha(\partial_\lambda F^\mu) = 0$$

ont pour le problème de Cauchy 4-3 la solution unique  $F^\mu = 0$ , ce qui est assuré (cf. [9], n° 5) sous les hypothèses de  $a$ .

## II. — Unicité

Une solution  $g^{\lambda\mu}$  des équations d'Einstein étant donnée en coordonnées quelconques, pour le problème de Cauchy

$$g^{\lambda\mu}|_S \quad , \quad \partial_\alpha g^{\lambda\mu}|_S$$

on construit des coordonnées harmoniques dans un voisinage de  $S$  en résolvant le problème de Cauchy

$$f^\alpha|_S = x^\alpha \quad , \quad \partial_\lambda f^\alpha|_S = \delta_\lambda^\alpha$$

---

<sup>(1)</sup> Relations de Sobolev, cf. J. L. Lions [5], § 3, chap. II.

pour les équations

$$g^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu}^2 f^\alpha - g^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu \partial_\nu f^\alpha = 0$$

ce problème a une solution, unique

$$f^\alpha \in W_2^{4+\nu}$$

si  $g^{\lambda\mu}$  vérifie 4-1, et définit des coordonnées dans un voisinage de S  
 (sur S,  $\frac{D(f^\alpha)}{D(x^\lambda)} = 1$ ).

Les potentiels dans les coordonnées harmoniques ainsi construites  $g_{(h)}^{\lambda\mu}$  seront tels que

$$g_{(h)}^{\lambda\mu} \in W_2^{3+\nu}$$

et seront déterminés de manière unique par des données de Cauchy déduites des précédentes par le changement de coordonnées  $y^\alpha = f^\alpha(x^\lambda)$ , pour tout  $\nu \geq 1$ .

D'où le :

**THÉORÈME.** — Le problème de Cauchy local pour les équations d'Einstein, sur une hypersurface S de classe  $C^{5+\nu}$ , de données de Cauchy

$$g^{\lambda\mu}|_S \in W_2^{4+\nu}(S) \quad , \quad \partial_\alpha g^{\lambda\mu}|_S \in W_2^{3+\nu}(S)$$

vérifiant (cf. [6]) les équations dites « conditions initiales » et  $F^\mu|_S = 0$ , a une solution si  $\nu \geq 0$  cette solution est géométriquement unique si  $\nu \geq 1$ .

*Remarque.* — Le théorème précédent signifie que s'il existe deux solutions  $g^{\lambda\mu}$  et  $g'^{\lambda\mu}$  du problème de Cauchy 4-2 pour les équations d'Einstein dans les voisinages de S d'image dans  $R_4$  respectivement  $\Omega$  et  $\Omega'$ , elles coïncident numériquement dans les coordonnées harmoniques respectives  $y^\alpha$  et  $y'^\alpha$  :

$$g_{(h)}^{\lambda\mu}(y^\alpha) = g'_{(h)}{}^{\lambda\mu}(y'^\alpha) \quad \text{pour} \quad y^\alpha = y'^\alpha$$

c'est-à-dire qu'il existe une isométrie entre (U, g) et (U', g') U et U' étant des voisinages de S.

Ces propriétés d'existence et d'unicité géométriques démontrées dans le voisinage d'un point peuvent être étendues au voisinage d'une hypersurface différentiable, sous variété spatiale de dimension 3.



*Définition* <sup>(1)</sup>. — Un espace-temps sera dit régulier si il satisfait les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité local, c'est-à-dire si la métrique  $g$  est, dans l'espace de Sobolev  $\tilde{W}_2^{4+\nu}$  ( $\nu \geq 1$ ) elle est alors continue ainsi que ses dérivées d'ordre  $\leq 1 + \nu$ .

## 5. — CHOCS GRAVITATIONNELS

Nous exprimons dans ce paragraphe sous forme intrinsèque les formules connues des chocs gravitationnels (cf. [1], [2], [4]) et nous les étendons au cas de surfaces lipshitziennes.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $V_4$  séparé en deux ouverts disjoints connexes  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  par une hypersurface  $S$  lipshitzienne, d'équation locale

$$x^0 + \tau(x^i) = 0 \quad , \quad \{x^i\} \in U$$

ouvert connexe de  $\mathbb{R}^3$  telle <sup>(2)</sup> que  $\tau(x^i)$  soit sur  $S$  une fonction continue, dérivable en dehors d'un ensemble  $Q$  de mesure 3-dimensionnelle nulle avec  $x^0 + \tau(x^i) < 0$  dans  $\Omega_-$  et  $x^0 + \tau(x^i) > 0$  dans  $\Omega_+$ .

*Définition.* — Une métrique  $g$  continue dans  $\Omega$ , de classe  $C^2$  dans  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  est dite subir un choc gravitationnel à la traversée de  $S$  si les dérivées premières  $\partial_\lambda g_{\alpha\beta}$  dans  $\Omega_+$  (resp.  $\Omega_-$ ) se prolongent en des fonctions continues et bornées dans  $\bar{\Omega}_+ - Q$  (resp.  $\bar{\Omega}_- - Q$ ).

On sait (cf. Lichnerowicz [15]) qu'en un point où  $S$  est différentiable on a :

$$(\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_+ - (\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_- = \gamma_{\alpha\beta} n_\lambda$$

où les  $\gamma_{\alpha\beta}$  sont les composantes d'un tenseur et  $n_\lambda$  la normale à  $S$  : ici

$$n_0 = 1 \quad , \quad n_i = \partial\tau/\partial x^i$$

On en déduit que, lors d'un choc gravitationnel la connexion est de classe  $C^1$  dans  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  et qu'en un point de  $S - Q$  (où  $S$  est différentiable) on a :

$$5-1 \quad (\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda)_+ - (\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda)_- = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} (n_\alpha \gamma_{\beta\mu} + n_\beta \gamma_{\alpha\mu} - n_\mu \gamma_{\alpha\beta})$$

<sup>(1)</sup> Remarquons qu'un espace-temps isométrique à un espace-temps régulier n'est pas forcément régulier.

<sup>(2)</sup>  $S$  est frontière (relativement à  $\Omega$ ) d'un « domaine standard » au sens de Whitney [7]. chap. III, § 14, ce qui permettra d'appliquer à  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  la formule de Stokes pour obtenir la relation 5-2.

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  dans  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$ , se prolongeant en une fonction continue et bornée dans  $\bar{\Omega}_+ - Q$  (resp.  $\bar{\Omega}_- - Q$ ) dont on désigne la valeur sur  $S$ , définie presque partout, par  $f_+$  (resp.  $f_-$ ).

On a, en désignant par  $\partial_\lambda f$  la dérivée de  $f$  au sens des distributions et par  $\{\partial_\lambda f\}$  la fonction définie presque partout, égale à  $\partial_\lambda f$  dans  $\Omega_+$  et dans  $\Omega_-$

$$5-2 \quad \partial_\lambda f = \{\partial_\lambda f\} + (f_+ - f_-)\delta(S)n_\lambda$$

où  $\delta(S)$  est la mesure de support  $S$ , dont la densité sur  $S$  est une fonction usuelle <sup>(1)</sup>, définie par

$$5-3 \quad \langle \delta(S), \varphi \rangle = \int_U \varphi dx^1 dx^2 dx^3$$

si  $\varphi$  est une fonction continue à support compact dans  $\Omega$ .

On trouve par un calcul analogue, pour  $R_{\alpha\beta}$ , au sens des distributions

$$5-4 \quad R_{\alpha\beta} \equiv \{R_{\alpha\beta}\} + [(\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda)_+ - (\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda)_-]n_\lambda\delta(S) - [(\Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda)_+ - (\Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda)_-]n_\beta\delta(S) = 0$$

où  $\{R_{\alpha\beta}\}$  est une fonction usuelle.

Supposons que  $Q_{\alpha\beta}$  soit une fonction usuelle <sup>(2)</sup> : la mesure singulière, de support  $S$ , figurant dans  $R_{\alpha\beta}$  sera nulle nécessairement si les équations d'Einstein sont vérifiées, c'est-à-dire, compte tenu de 5-1 :

$$g^{\lambda\mu}n_\lambda(n_\alpha\gamma_{\beta\mu} + n_\beta\gamma_{\alpha\mu} - n_\mu\gamma_{\alpha\beta}) - g^{\lambda\mu}n_\beta(n_\alpha\gamma_{\lambda\mu} + n_\lambda\gamma_{\alpha\mu} - n_\mu\gamma_{\alpha\lambda}) = 0$$

c'est-à-dire

$$5-5 \quad -g^{\lambda\mu}n_\lambda n_\mu \gamma_{\alpha\beta} + n^\mu(n_\beta\gamma_{\alpha\mu} + n_\alpha\gamma_{\beta\mu}) - g^{\lambda\mu}n_\alpha n_\beta \gamma_{\lambda\mu} = 0$$

Le déterminant de ce système de 10 équations linéaires aux 10 inconnues  $\gamma_{\alpha\beta}$  est identiquement nul, la solution générale de ces équations en un point où  $n_\lambda$  est défini et  $g^{\lambda\mu}n_\lambda n_\mu \neq 0$  est

$$5-6 \quad \gamma_{\alpha\beta} = n_\alpha\psi_\beta + n_\beta\psi_\alpha$$

où  $\psi_\alpha$  est une fonction arbitraire (mais déterminée si  $\gamma_{\alpha\beta}$  est donné).

**THÉORÈME 1.** — Si  $S$  est différentiable et caractéristique en aucun point, l'espace-temps  $(\Omega, g)$  est isométrique à un espace-temps  $(\Omega', g')$  où  $g'$  est de classe  $C^1$  dans  $\Omega'$  (et toujours  $C^2$  dans  $\Omega'_+$  et  $\Omega'_-$ ).

<sup>(1)</sup> La forme  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$  est ici, vu le choix de l'équation de  $S$ , la forme différentielle invariante considérée par Leray pour  $S$  différentiable.

<sup>(2)</sup> Des exemples où  $Q$  est une mesure sont donnés par Israel et Papapetrou.

*Preuve.* — On utilise une technique analogue à celle de Lichnerowicz <sup>(1)</sup> pour les discontinuités des dérivées secondes, munissant  $\Omega$ , dans un voisinage de  $S$ , d'une structure différentiable qui n'est que  $C^1$  équivalente à la première <sup>(2)</sup>, par le changement de coordonnées

$$x'^{\lambda} = x^{\lambda} + \frac{1}{2}(x^0 + \tau(x^i))^2 \varphi^{\lambda}(x^{\lambda})$$

où  $\varphi^{\lambda}$  désigne une fonction de classe  $C^2$  dans  $\Omega_+$ , nulle dans  $\Omega_-$ , continue dans  $\overline{\Omega}_+$  et telle que, sur  $\partial\Omega_+$

$$(\varphi^{\lambda})_+ = \psi^{\lambda}$$

## 6. — INTERPRÉTATION DES ÉQUATIONS. CONSÉQUENCES

Rappelons les formules usuelles

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda} g^{\lambda\mu} &= -g^{\lambda\rho} g^{\mu\sigma} \partial_{\lambda} g_{\rho\sigma} \\ \partial_{\lambda} |g| &= g^{\lambda\mu} \partial_{\lambda} g_{\lambda\mu} \end{aligned}$$

( $|g|$  désigne le déterminant d'éléments  $g_{\lambda\mu}$ )  
d'où si  $F^{\mu}$  désigne le premier membre des conditions d'harmonicité

$$6-1 \quad F^{\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\lambda} (\sqrt{-g} g^{\lambda\mu})$$

un calcul simple montre que, sous l'hypothèse de choc gravitationnel, les équations s'écrivent

$$6-2 \quad g^{\lambda\mu} n_{\lambda} n_{\mu} \gamma_{\alpha\beta} + (g_{\beta\mu} n_{\alpha} + g_{\alpha\mu} n_{\beta}) [(F^{\mu})_+ - (F^{\mu})_-] = 0$$

ce qu'on aurait pu aussi déduire de l'écriture des équations d'Einstein.

**THÉORÈME 2.** — En coordonnées harmoniques les dérivées premières  $\partial_{\lambda} g_{\alpha\beta}$  sont continues presque partout à la traversée d'une hypersurface lipshitzienne presque partout non caractéristique.

<sup>(1)</sup> Cf. [3], chap. I, § 13.

<sup>(2)</sup> Exemple : changement de coordonnées rendant  $C^1$  la solution extérieure et intérieure de Schwarzhild (dont le raccordement n'est pas  $C^1$  en coordonnées usuelles).

**Cas où S est caractéristique**

On déduit des équations 6-2 si  $g^{\lambda\mu}n_\lambda n_\mu = 0$

6-3  $(F^\mu)_+ - (F^\mu)_- = 0$

c'est-à-dire que :

THÉORÈME 3. — Les conditions d'harmonicité sont continues à la traversée d'une variété caractéristique.

Cette propriété importante va nous permettre de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4. — Un espace-temps einsteinien régulier donné à l'extérieur d'un conoïde caractéristique  $\Gamma$  de sommet O admet un prolongement unique régulier <sup>(1)</sup> à l'intérieur de  $\Gamma$ , dans un voisinage de O, même si  $\Gamma$  est onde de choc gravitationnel.

Preuve

$\Omega_+$  est ici l'intérieur de  $\Gamma$ ,  $S = \partial\Omega_+ = \Gamma$ .

Cherchons dans  $\bar{\Omega}_+$  des coordonnées harmoniques c'est-à-dire des fonctions  $f^\alpha$  telles que

6-4  $Df^\alpha \equiv g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}^2 f^\alpha - F^\lambda\partial_\lambda f^\alpha = 0$

avec

6-5  $f^\alpha = x^\alpha \quad \text{sur } \Gamma$

les équations hyperboliques linéaires 6-4 ont une solution unique dans  $\bar{\Omega}_+$ , satisfaisant à 6-5 dont les dérivées partielles  $\partial_\lambda f^\alpha$  sont déterminées sur  $\Gamma$  par des équations différentielles ordinaires (cf. [11]), qui ne dépendent que des valeurs des coefficients de 6-3 sur  $\Gamma$ , donc puisque  $g^{\lambda\mu}$  est supposé continu à travers  $\Gamma$  et que  $F^\lambda$  vérifie 6-3, les  $\partial_\lambda f^\alpha$ , sur  $\Gamma$ , sont déterminées par la donnée de la métrique dans  $\bar{\Omega}_-$ .

Les fonctions  $f^\alpha$  ainsi construites dans  $\bar{\Omega}_+$  forment un système de coordonnées, harmoniques, dans un voisinage du sommet O de  $\Gamma$ . Les potentiels dans ces coordonnées,  $g_{\alpha\beta}^{(h)}$  sont liés aux précédents par

$$g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha f^\lambda \partial_\beta f^\mu g_{\lambda\mu}^{(h)}$$

donc leurs valeurs sur  $\Gamma$  sont déterminées par la donnée de la métrique dans  $\bar{\Omega}_-$ . On sait d'autre part que les équations d'Einstein en coordonnées

---

<sup>(1)</sup> Définition § 4.

harmoniques forment un système hyperbolique classique, d'ordre 2, dont la solution est déterminée par la donnée des inconnues sur  $\Gamma$ .

Donc si  $g_{\alpha\beta}$  et  $g'_{\alpha\beta}$  sont 2 espaces-temps réguliers dans  $\bar{\Omega}_+$  (coordonnées  $x^\alpha$ ) se raccordant <sup>(1)</sup> à  $g_{\alpha\beta}$  dans  $\bar{\Omega}_-$  pour donner une solution des équations d'Einstein on a montré que dans les coordonnées harmoniques respectives ( $f^\alpha$ ) et ( $f'^\alpha$ ) ces espaces-temps ont mêmes potentiels, ils sont donc isométriques <sup>(2)</sup>.

Ce théorème peut probablement être étendu au cas où  $\Gamma$  est formé de deux morceaux d'hypersurfaces caractéristiques déterminant une frontière semi-spatiale.

Nous démontrons ailleurs un théorème global d'unicité du prolongement d'un espace-temps régulier à l'intérieur d'une frontière « semi-spatiale »  $\partial\varepsilon_P^+$ , frontière de l'émission  $\varepsilon_P^+$  d'un ensemble compact vers le passé P, il est probable que, sous des conditions globales de régularité de cette frontière ce théorème pourrait être étendu, grâce aux théorèmes locaux précédents, au cas où  $\partial\varepsilon_P^+$  est surface d'onde gravitationnelle.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. H. TAUB, Singular hypersurface in general relativity, *Illinois Journ. of Maths*, 1957, n° 3.
- [2] Y. BRUHAT, *Comptes rendus*, **248**, 1959.
- [3] A. LICHNEROWICZ, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Masson, 1955.
- [4] A. LICHNEROWICZ, *Ann. Inst. Poincaré*.
- [5] J. L. LIONS, Équations différentielles opérationnelles, Springer 196.
- [6] Y. BRUHAT, *Acta mathematica*, 1952.
- [7] H. WHITNEY, Geometric integration theory, Princeton University press, 1957.
- [8] J. LERAY, Hyperbolic differential equations, Princeton, 1952.
- [9] P. A. DIONNE, *Journal d'Analyse Mathématique*, 1962.
- [10] Y. BRUHAT, *Journal of rat. mech. and analyses*, 1956.
- [11] Y. BRUHAT, Problème des conditions initiales sur un conoïde caractéristique. *C. R. Acad. Sc.*, **256**, 1963.
- [12] J. A. WHEELER, Geometrodynamics, Academic Press, 1962.
- [13] A. PAPAPETROU et A. HAMOUI, *Ann. Inst. Poincaré*, A, vol. VI, n° 4, 1967, 343-364.
- [14] J. COLLEAU, Distribution matérielle correspondant à la solution extérieure de Schwarzschild (Notes mimeographiées).
- [15] A. LICHNEROWICZ, Propagateurs et commutateurs en relativité générale, publications I. H. E. S. n° 10, 1962.

*Manuscrit reçu le 6 mars 1968.*

---

<sup>(1)</sup> Au sens des chocs gravitationnels, définition § 5.

<sup>(2)</sup> On en déduit que l'espace-temps est isométrique à un espace-temps de classe  $C^1$  dans  $\Omega$  : il n'y a pas sous les hypothèses de régularité faites dans  $\bar{\Omega}_+$  et  $\bar{\Omega}_-$  de choc gravitationnel vrai à travers S. Cette propriété a été démontrée par Papapetrou par une autre méthode.