ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

BERNARD VIGNON

Sur une notation des distributions

Annales de l'I. H. P., section A, tome 7, nº 1 (1967), p. 95-102
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__7_1_95_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. VII, n° 1, 1967, p. 95-102. *Physique théorique.*

Sur une notation des distributions

par

Bernard VIGNON
Faculté des Sciences de Dijon.

SOMMAIRE. — On propose une notation des distributions, issue directement de la notion de dualité, qui permet, moyennant des conventions simples, d'identifier des êtres complexes tensoriels et spinoriels possédant le double caractère de fonction et de distribution.

SUMMARY. — A notation for distributions arising from the notion of duality is proposed. It allows, with simple conventions, the identification of complex elements (tensors, spinors) which are at once function and distribution.

DISTRIBUTION DE DIRAC

Nous conviendrons, pour commencer, de remplacer les notations $f(x)$, $f(x, y)$, ... par f_x, f_{xy}, ... La distribution de Dirac au point y est définie par

$$\langle \delta_y(x), f(x) \rangle = f(y). \tag{1}$$

Nous proposons, au lieu de $\delta_y(x)$ (ou $\delta(x - y)$) d'écrire δ_y^x, si bien que la relation (1) s'écrit :

$$\delta_y^x f_x = f_y. \tag{2}$$

Cette convention d'écriture présente une très grande analogie avec la convention de sommation d'Einstein; dans la relation (2), la variable x joue le même rôle qu'un indice muet, puisque placée une fois en position supérieure et une fois en position inférieure; la variable y joue le même rôle qu'un indice libre. L'écriture abusive

$$\int_{\mathbf{R}} \delta_y(x) f(x) dx = f(y)$$

de (2) rend cette analogie flagrante puisque x apparaît ici comme variable d' « intégration ».

DOUBLET

Un doublet D_y au point y est la distribution définie par

$$\langle D_y, f \rangle = f'(y).$$

Nous écrirons cette relation

$$D_y^x f_x = f'_y. \tag{3}$$

REMARQUE. — Si, dans la relation (3) nous considérons y comme une variable, D_y^x apparaît comme le symbole de l'opérateur de dérivation d'une fonction par rapport à x, y étant la variable pour la fonction dérivée. Nous généraliserons cette notation en écrivant

$$\begin{aligned} D_y^x f_{xz} &= \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, z)\right]_{x=y} \\ D^{2x}_{y} f_{xz} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, z)\right]_{x=y} \\ D_{uv}^{xy} f_{xyz} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y, z)\right]_{x=u,\, y=v}, \text{ etc...} \end{aligned}$$

On pourrait d'ailleurs écrire $D_y^t D_t^x$ au lieu de D^{2x}_y, $D_u^x D_v^y$ au lieu de D_{uv}^{xy}, etc.

FONCTION LOCALEMENT SOMMABLE

On sait qu'une fonction localement sommable f définit une distribution T_f par la relation

$$\langle T_f, g \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(x) g(x) dx. \tag{4}$$

Nous noterons f^x au lieu de T_f. La variable x introduite dans les écritures f_x et f^x est théoriquement inutile; elle permet, entre autres choses, de distinguer de manière commode une fonction de la distribution qu'elle définit. De plus, nous écrirons la relation (4) sous la forme

$$f^x g_x = \int_{\mathbf{R}} f(x) g(x) dx.$$

Une variable placée une fois en position supérieure, une fois en position inférieure, apparaît bien encore comme une variable d'intégration.

DISTRIBUTION QUELCONQUE SUR R

Soit T une distribution quelconque sur R; il est très souvent nécessaire, par exemple lorsque T agit sur une fonction de 2 variables dont l'une est considérée comme fixe, d'indiquer quelle est la variable correspondant à l'action de T. Nous écrirons donc pour généraliser les trois exemples ci-dessus, T^x au lieu de T, et $T^x f_x$ au lieu de $\langle T, f \rangle$, $T^x f_{xy}$ au lieu de $\langle T_x, f(x, y) \rangle$...

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Soit f_{xy} une fonction localement sommable, pour tout x, par rapport à y; elle définit, en tout point x, une distribution, que nous noterons $f_x{}^y$, par la relation

$$f_x^y g_y = \int_{\mathbf{R}} f(x, y) g(y) dy,$$

et nous pouvons dire que $f_x{}^y$ est « fonction en x, distribution en y ». Par extension, nous pourrons dire que δ_x^y, D_x^y, par exemple, sont « fonctions en x, distributions en y » et, plus généralement, que toute expression où figurent des variables « libres » $x, y, \ldots$ en position inférieure, des variables « libres » $u, v, \ldots$ en position supérieure, est fonction en $x, y, \ldots$, distribution en $u, v, \ldots$

Le sens des exemples suivants est évident :

$$f_x{}^{yz}{}_t \ , \ T^x f_x{}^{yz}{}_t g_y \ , \ f_x{}^{yz}{}_t g_{yz} \ , \ f^x{}_x \ , \ f_{xy}{}^x.$$

Remarque 1. — Le produit usuel de deux fonctions ne saurait être écrit $f_x g_x$. On pourra écrire $(fg)_x$, où $f_{\underline{x}} g^x$ (ou $f_x g_{\underline{x}}$), étant entendu que toute variable soulignée fait double emploi, en ce qui concerne notre convention d'écriture, avec la même variable non soulignée placée dans la même position. Cette deuxième notation a l'avantage de s'appliquer à des fonctions de plusieurs variables; on écrira, par exemple,

$$\delta^x_y f_{\underline{x}u} g_{xz} \qquad (\text{ou } \delta^x_y f_{xu} g_{\underline{xz}})$$

au lieu de

$$\langle\ \delta_y(x)\ \ ,\ \ f(x, u) g(x, z)\ \rangle.$$

Remarque 2. — La fonction constante 1 devra nécessairement être notée, selon le cas, 1_x, 1_{xy}, ...; de même, les distributions, ou fonctions-distributions, qu'elle définit devront être notées 1^x, 1^{xy}, $1^x{}_y$, ... Si $g(x)$ est une fonction de x et y, indépendante de y, on l'écrira $1_y g_x$, etc.

PRODUIT D'UNE FONCTION PAR UNE DISTRIBUTION

Lorsqu'il a un sens, ce produit est défini, en notations usuelles, par

$$\langle\ \alpha T, \varphi\ \rangle = \langle\ T, \alpha\varphi\ \rangle \tag{5}$$

soit, avec nos notations

$$(\alpha T)^x \varphi_x = T^x (\alpha\varphi)_x.$$

LES SYMBOLES δ^{xy}, δ_{xy}

Si, dans la relation $\delta^x_y f_x = f_y$ définissant la distribution de Dirac au point y, nous faisons varier y, δ^x_y apparaît comme le symbole de l'opérateur identité (ou, ce qui revient au même, le symbole de l'opérateur « changement de nom de la variable »).

Nous désignerons par δ^{xy} l'opérateur symétrique qui, à une fonction définissant une distribution, fait correspondre cette distribution :

$$\delta^{xy} f_x = f^y \tag{6}$$

Nous désignerons de même par δ_{xy} l'opérateur symétrique qui, à une distribution définie par une fonction, fait correspondre cette fonction, ou, plus exactement, sa classe d'équivalence :

$$\delta_{xy} f^x = f_y \ (^1)\ ; \tag{7}$$

---

(1) Dans cette relation, on ne peut donner à y une valeur fixe que si une convention préalable permet de restreindre le second membre à une fonction particulière de la classe, la fonction f ayant effectivement servi à définir f^x, par exemple.

le symbole $\delta_{xy}\ T^x$ n'a donc pas de sens pour une distribution T^x quelconque.

Nous conviendrons aussi de poser

$$\delta^x_y T^y = T^x, \tag{8}$$

T étant une distribution quelconque.

Les opérateurs δ^x_y, δ^{xy}, δ_{xy} peuvent aussi être appliqués à des fonctions distributions (sous réserve que les « descentes de variables » aient un sens) :

$$\delta^{xy} f_{xz} = f^y{}_z,$$
$$\delta_{xy} f^{xz}{}_t = f_y{}^z{}_t, \text{ etc...}$$

LE BISCALAIRE DE DIRAC

Considérons l'expression

$$\delta^{xy} f_x g_y \ ;$$

compte tenu de la définition ci-dessus, elle est égale à $f^y g_y$ (ou $g^x f_x$), soit

$$\int_R f(y)g(y)dy.$$

Si nous appliquons δ^{xy} à une fonction de deux variables f_{xy}, nous obtenons

$$\delta^{xy} f_{xy} = f^y{}_y \qquad (= f_x{}^x),$$

soit

$$\int_R f(x, x)dx.$$

δ^{xy} apparaît donc ici comme une distribution sur R^2; c'est le biscalaire de Dirac.

DÉRIVÉES D'UNE DISTRIBUTION

Nous conserverons, sans qu'il y ait d'ambiguïté, le même symbole pour les dérivées des distributions que pour les dérivées des fonctions, et écrivons :

$$D^y_x T^x \ , \ D^2{}^x_y T^{yz} \ , \ D^{uv}_{xy} T^{xy} \ , \ \ldots$$

La relation définissant la dérivée $\dfrac{\partial T}{\partial x_1}$ d'une distribution $T = T^{x_1 \dots x_n}$ sur R^n s'écrira donc

$$D^{y}_{x_1} T^{x_1 \dots x_n} f_{y x_2 \dots x_n} = - T^{x_1 \dots x_n} D^{y}_{x_1} f_{y x_2 \dots x_n},$$

au lieu de

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, f \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\rangle.$$

Si H_{xy} est la fonction d'Heaviside ($H = 0$ pour $x < y$, $H = 1$ pour $x > y$), elle définit la fonction-distribution $H^{x}{}_{y}$; et on a

$$D^{z}_{x} H^{x}{}_{y} = \delta^{z}_{y} \,;$$

on a aussi

$$D^{z}_{x} H^{xy} = \delta^{zy} \text{ (}^{2}\text{)}.$$

Remarque. — Si f_x est une fonction dérivable pour $x < 0$ et pour $x > 0$, telle que sa dérivée ait des limites à gauche et à droite pour $x = 0$, donc présente un saut σ, la formule classique s'écrit

$$D^{x}_{y} f^{y} = \delta^{xz} D^{y}_{z} f_{y} + \sigma \delta^{x}_{0}.$$

PRODUIT TENSORIEL, PRODUIT DE CONVOLUTION DE DISTRIBUTIONS

Distribution sur R^n, le produit tensoriel de n distributions sur R est défini par

$$\left(U_1^{x_1} \otimes U_2^{x_2} \otimes \dots U_n^{x_n}\right) \varphi_{x_1 x_2 \dots x_n} = U_1^{x_1} U_2^{x_2} \dots U_n^{x_n} \varphi_{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Distribution sur R, le produit de convolution des distributions S, T sur R est défini par

$$(S * T)^{x} \varphi_{x} = S^{x} T^{y} \varphi_{x+y}.$$

TENSEURS-DISTRIBUTIONS

Soit une variété V_n différentiable orientée de dimension n, de classe C^{∞}, munie d'un élément de volume η. Un p-tenseur-distribution covariant (resp. contravariant) T est une fonctionnelle linéaire continue et à valeurs

---

(2) Ces relations peuvent servir de définition aux symboles δ^{zy}, δ^{z}_{y}, ce qui permet de démontrer les formules (6) et (8).

scalaires sur les p-tenseurs contravariants (resp. covariants) à support compact, de classe C^∞.

Un tenseur T définit un tenseur-distribution par la relation

$$\langle T, U \rangle = \int_{V_n} (T, U)_x \eta(x).$$

où

$$(T, U)_x = T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x) U^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x).$$

Nous conviendrons d'écrire $T_{x,\alpha_1\ldots\alpha_p}$ le tenseur covariant (ordinaire) $T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, $T^{x,}{}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ le tenseur-distribution qu'il définit, et nous poserons

$$T^x U_x \left(\text{ou mieux } T^{x,}{}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} U_{x,}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\right) = \int_{V_n} T_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x) U^{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x) \eta(x).$$

Nous noterons encore δ_y^x l'opérateur identité (changement de nom de la variable-point) sur les tenseurs et les tenseurs-distributions de V_n.

Nous utiliserons à nouveau les symboles symétriques δ^{xy}, δ_{xy}, définis ici par $\delta^{xy} T_x = T^y$, $\delta_{xy} T^x = T_y$ (si T_y a un sens).

Les expressions $\nabla_y^x T_x$, $\nabla_x^y T^x$ désigneront respectivement les dérivées covariantes d'un tenseur et d'un tenseur-distribution. Un bitenseur, un bitenseur-distribution, un bitenseur (tenseur en x, tenseur-distribution en y) seront respectivement notés T_{xy}, T^{xy}, $T_x{}^y$, des indices tensoriels pouvant au besoin achever leur caractérisation : $T_{x,\alpha_1\ldots\alpha_p;y,}{}^{\beta_1\ldots\beta_p}, \ldots$; nous utiliserons encore des notations telles que

$$\delta^{xy} T_{xz}\ ,\ \delta_{xy} T^{xz}\ ,\ \delta_y^x T^{yz}, \ldots$$

L'expression $\delta^{xy} f_{xy}$ est égale à $f^y{}_y$ (ou $f_x{}^x$) c'est-à-dire à

$$\int_{V_n} f(x, x) \eta(x) ;$$

δ^{xy} apparaît donc comme biscalaire distribution sur V_n; c'est le biscalaire de Dirac sur V_n.

La notation est compatible avec des êtres plus complexes, tels que les tenseurs-spineurs-distributions; nous conviendrons de noter un tel être en faisant suivre chaque caractère de fonction ou de distribution par les indices tensoriels, puis spinoriels attachés à ce caractère; par exemple,

$$T_{x,\alpha,}{}^{a}{}_{;}{}^{y,\beta,b}{}_{;}{}^{z} \qquad \begin{array}{r}\text{(ind. grecs : tensoriels,}\\ \text{ind. latins : spinoriels)}\end{array}$$

est un

1-tenseur covariant, 1-spineur contiavariant en x,

1-tenseur-distribution contravariant, 1-spineur-distribution contravariant en y,

scalaire-distribution en z.

Dans une expression, il suffit d'observer les indices non saturés pour savoir avec précision de quel être mathématique il s'agit.

REMARQUE. — La convention de notation que nous venons d'exposer peut sembler assez lourde, mais la simplification classique consistant à supprimer les indices muets, c'est-à-dire ici les « variables muettes », pourra être utilisée lorsqu'aucune ambiguïté ne sera à craindre : $\delta_x f$ au lieu de $\delta_x^y f_y$, $D_x f$ au lieu de $D_x^y f_y$, etc.

BIBLIOGRAPHIE

André LICHNEROWICZ, Propagateurs et commutateurs en relativité générale (Institut des Hautes Études Scientifiques).

L. SCHWARTZ, Théorie des distributions. I. Hermann et Cie, 1950.

(Manuscrit reçu le 19 décembre 1966).

Directeur de la publication : P. GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1491*a*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 5479. 7-1967.