

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

D. TESTARD

## **Algèbre de covariance**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 6, n° 4 (1967), p. 267-297

<[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1967\\_\\_6\\_4\\_267\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__6_4_267_0)>

© Gauthier-Villars, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## Algèbre de covariance

par

**D. TESTARD**

Physique Théorique, Faculté des Sciences, Marseille

---

**SOMMAIRE.** — Étant donné une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  et un groupe localement compact quelconque  $G$  d'automorphismes de  $\mathcal{A}$ , nous généralisons la notion d'algèbre de covariance introduite précédemment par S. Doplicher, D. Kastler et D. Robinson dans le cas d'un groupe abélien. On montre une propriété essentielle de l'algèbre de covariance, à savoir le fait que ses  $*$ -représentations sont en bijection avec les représentations covariantes à un facteur près de  $\mathcal{A}$ ,  $*$ -représentations de  $\mathcal{A}$  où les automorphismes sont continûment implémentés par une représentation à un facteur près de  $G$ . Nous donnons également un exemple d'algèbre de covariance en relation avec la théorie du champ des bosons libres.

**ABSTRACT.** — Starting from a  $C^*$ -Algebra  $\mathcal{A}$  and an arbitrary locally compact group  $G$  of automorphisms of  $\mathcal{A}$ , we generalize the notion of « covariance algebra »  $\mathcal{A}_1^G$  introduced in a previous paper in the case of an abelian group by S. Doplicher, D. Kastler and D. Robinson. An essential property of a covariance algebra is shown to be the fact that its  $*$ -representations are in a one-to-one correspondence with the covariant ray-representations of  $\mathcal{A}$  i. e.  $*$ -representations of  $\mathcal{A}$  in which the automorphisms are continuously implemented by a ray-representation of the group  $G$ . Further on, we give an example of covariance algebra related to the theory of a free boson gas.

---

### INTRODUCTION

Le but du présent article est de généraliser au cas d'un groupe localement compact quelconque  $G$  (non nécessairement unimodulaire) agissant sur une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  la construction donnée dans [1] de l'algèbre de covariance  $\mathcal{A}_1^G$ .

Nous nous proposons de surcroît de considérer des représentations projectives du groupe  $G$  correspondant à un système d'exposants donné et de bâtir l'algèbre de covariance correspondante, et ceci en vue d'applications physiques ultérieures par exemple au groupe de Galilée.

Les méthodes employées seront essentiellement les mêmes que celles de [1]. Nos notations sont toutefois un peu différentes et nous donnons l'intégralité des démonstrations pour la commodité du lecteur.

Le paragraphe I est entièrement réservé à la construction de l'algèbre de covariance  $\mathcal{A}_1^{G\sigma}$ . Le paragraphe II étudie les représentations de l'algèbre de covariance et on y montre qu'elles fournissent (et *vice versa*) toutes les  $\sigma$ -représentations covariantes de  $\mathcal{A}$ . Au passage, on aura montré que l'algèbre de covariance possédait une unité approchée, résultat fondamental dans le paragraphe III où l'on montre que  $\mathcal{A}_1^{G\sigma}$  est une  $A^*$ -algèbre et que, pour tout exposant sur le groupe  $G$ , on sait construire des  $\sigma$ -représentations covariantes *fidèles*. Le paragraphe IV est consacré à l'étude de l'algèbre de Von Neumann enveloppante de  $\mathcal{A}_1^{G\sigma}$ , et est une généralisation de certains des résultats obtenus par D. Kastler et D. Robinson dans la section 3 de [5]. Le paragraphe V donne un exemple en rapport avec la théorie du champ des bosons libres. Les propriétés utilisées des exposants sur les groupes sont rassemblées dans un appendice.

## § I. — L'ALGÈBRE $\mathcal{A}_1^{G\sigma}$

La construction suivante s'applique au cas où l'on a les éléments suivants :

1) Une  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  (séparable ou non) qui, dans les applications physiques, sera l'algèbre des observables quasilocales.

2) Un groupe localement compact (unimodulaire ou non).

3) Un système d'exposants sur ce groupe (cf. Appendice).

4) Le groupe  $G$  agit sur  $\mathcal{A}$  en ce sens que :

a) Pour tout élément  $g$  de  $G$ , il existe un  $*$ -automorphisme, c'est-à-dire un opérateur  $\alpha_g$  de  $\mathcal{A}$  possédant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_g(aA + bB) &= a\alpha_g(A) + b\alpha_g(B) & g \in G \\ \alpha_g(AB) &= [\alpha_g(A)][\alpha_g(B)] & A, B \in \mathcal{A} \\ [\alpha_g(A)]^* &= \alpha_g(A^*) & a, b \text{ nombres complexes.} \end{aligned}$$

On sait que, dans ces conditions, pour tout  $g$  dans  $G$  et tout  $A \in \mathcal{A}$ , on a [4] :

$$(1) \quad \|\alpha_g(A)\| = \|A\| \quad (1)$$

$b)$  L'application  $g \rightarrow \alpha_g$  est un homomorphisme de  $G$  dans le groupe des  $*$ -automorphismes de  $\mathcal{A}$  :

$$\alpha_{gh} = \alpha_g \cdot \alpha_h \quad g, h \in G$$

si  $e$  est l'identité de  $G$  et pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$  :

$$\alpha_e(A) = A$$

$c)$  Cette application possède de plus la propriété de continuité suivante : pour tout  $A$  dans  $\mathcal{A}$  et tout nombre positif  $\varepsilon$ , il existe un voisinage  $V$  de l'identité  $e$  dans  $G$ , tel que, pour tout  $g \in V$ , on ait :

$$(2) \quad \|\alpha_g(A) - A\| \leq \varepsilon.$$

Nous entreprenons maintenant la construction de l'algèbre de covariance de la théorie, et nous commençons par la :

DÉFINITION 1. — On notera  $\mathcal{A}_1^G$  l'ensemble des fonctions  $X$  de  $G$  dans  $\mathcal{A}$

$$(3) \quad X : g \in G \rightarrow X_g \in \mathcal{A}$$

mesurables ([3], chap. IV, § 5, n° 1, prop. 1), définies en dehors d'un ensemble négligeable pour la mesure de Haar invariante à gauche de  $G$  (pour laquelle nous adoptons la notation  $dg$ ) et, qui sont de plus intégrables en norme, c'est-à-dire telles que la quantité :

$$(4) \quad \|X\|_1 = \int_G \|X_g\| dg$$

soit finie.

Nous définirions de même l'ensemble  $\mathcal{A}_p^G$  des fonctions mesurables, définies presque partout et telles que :

$$(5) \quad (\|X\|_p)^p = \int_G \|X_g\|^p dg < \infty$$

---

(1) On pourrait restreindre un peu les hypothèses concernant  $\mathcal{A}$  et admettre seulement que  $\mathcal{A}$  est une  $*$ -algèbre de Banach possédant une unité approchée, injectable dans une  $C^*$ -algèbre (c'est-à-dire que  $\mathcal{A}$  est une  $A^*$ -algèbre). Il est alors nécessaire pour la suite de donner la relation (1) comme hypothèse supplémentaire. La construction suivante s'applique donc aussi bien à une algèbre de groupe localement compact.

On désigne par  $\mathcal{A}_\infty^G$  (resp. :  $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^G$ ) l'ensemble des fonctions définies partout dans  $G$  continues et s'annulant à l'infini (resp. : à support compact). Enfin on pose pour  $X \in \mathcal{A}_\infty^G$

$$(6) \quad \|X\|_\infty = \sup_{g \in G} \|X_g\|$$

Avec ces définitions,  $\mathcal{A}_p^G$  est un espace de Banach pour la norme  $\|\cdot\|_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, \infty$  et  $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^G$  est partout dense dans  $\mathcal{A}_p^G$  pour cette même norme [3]. Les deux lemmes suivants donnent à  $\mathcal{A}_1^G$  une structure d'\*-algèbre de Banach.

LEMME 1. — Pour  $X, Y$  dans  $\mathcal{A}_1^G$ , pour tout exposant  $\sigma$  sur  $G$ , l'intégrale

$$(7) \quad (X *_\sigma Y)_g = \int e^{-i\sigma(h, h^{-1}g)} X_h \alpha_h(Y_{h^{-1}g}) dh$$

existe pour presque tout  $g$  et définit un élément  $X *_\sigma Y$  de  $\mathcal{A}_1^G$  tel que :

$$(8) \quad \|X *_\sigma Y\|_1 \leq \|X\|_1 \|Y\|_1$$

Il nous faut vérifier que l'application

$$(9) \quad h \rightarrow e^{-i\sigma(h, h^{-1}g)} X_h \alpha_h(Y_{h^{-1}g})$$

est mesurable et de norme intégrable pour presque tout  $g$ .

Puisque  $X$  est mesurable, pour tout compact  $K \subset G$  et tout nombre  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K' \subset K$  tel que la restriction  $X|_{K'}$  de  $X$  à  $K'$  soit continue et que la mesure de  $K - K'$  soit inférieure à  $\varepsilon/2$ . La mesurabilité de  $Y$  montre qu'il existe un compact  $K'' \subset K'$  tel que la restriction à  $K''$  de l'application  $h \rightarrow \alpha_h(Y_{h^{-1}g})$  soit continue (d'après la continuité de  $h \rightarrow h^{-1}$  et d'après (2)) et de plus tel que  $m(K' - K'') < \varepsilon/2$ .

L'application (9), restreinte à  $K''$ , est donc continue et d'autre part

$$m(K - K'') < \varepsilon$$

(9) est donc mesurable.

D'autre part, la majoration :

$$\int \|e^{-i\sigma(h, h^{-1}g)} X_h \alpha_h(Y_{h^{-1}g})\| dh \leq \int \|X_h\| \|Y_{h^{-1}g}\| dh$$

où le deuxième membre n'est autre que la convolution de deux fonctions de  $L_1(G)$ , montre que :

- 1) L'intégrale (7) existe pour presque tout  $G$ .
- 2) La relation (8) est vérifiée (la même relation existant pour la convolution de deux fonctions de  $L_1(G)$ ).

LEMME 2. — Étant donné  $X \in \mathcal{A}_1^\sigma$ , l'application

$$(10) \quad X^{(*, \sigma)} : g \rightarrow \Delta(g)^{-1} e^{i\sigma(g, g^{-1})} \alpha_g(X_{g^{-1}}^*) = [X^{(*, \sigma)}]_g$$

(où  $\Delta(g)$  est la fonction modulaire sur  $G$ ) est un nouvel élément de  $\mathcal{A}_1^\sigma$  tel que :

$$(11) \quad \| X^{(*, \sigma)} \|_1 = \| X \|_1.$$

La continuité (2) de  $g \rightarrow \alpha_g$ , les continuités des applications  $g \rightarrow g^{-1}$ ,  $g \rightarrow \Delta(g)$ ,  $(g, h) \rightarrow e^{i\sigma(g, h)}$  montrent que  $X^{(*, \sigma)}$  est mesurable.

D'autre part :

$$\int \| (X^{(*, \sigma)})_g \| dg = \int \Delta(g)^{-1} \| X_{g^{-1}} \| dg = \int \| X_g \| dg = \| X \|_1$$

et ceci montre que  $X^{(*, \sigma)}$  est dans  $\mathcal{A}_1^\sigma$  et établit l'équation (11).

THÉORÈME 1. — L'espace de Banach  $\mathcal{A}_1^\sigma$  muni du produit  $*_\sigma$  (7) et de l'adjonction (10) est une  $*$ -algèbre de Banach.

Notation. — L'algèbre ainsi définie sera désignée dans la suite par algèbre de  $\sigma$ -covariance par  $G$ . Elle sera notée  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$  pour rappeler que le produit (7) et l'adjonction dépendent effectivement de l'exposant  $\sigma$ .

Cependant, dans un but évident de simplification d'écriture, nous omettons les indices  $\sigma$  au produit et à l'étoile, lorsqu'aucune confusion n'est possible, par exemple quand un seul exposant intervient comme c'est le cas dans la démonstration du théorème 1 qui suit. Nous noterons alors  $X, Y \rightarrow X * Y$  (resp.  $X \rightarrow X^*$ ) le produit (resp. l'adjonction) de  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$ .

Remarquons tout d'abord que l'on a évidemment :

$$(X^*)^* = X$$

(à l'aide de A6 (Appendice)).

Il reste donc à vérifier les propriétés :

$$(12) \quad (X * Y) * Z = X * (Y * Z)$$

$$(13) \quad (X * Y)^* = Y^* * X^*$$

Pour vérifier (12), calculons

$$((X * Y) * Z)_g = \int e^{-i\sigma(f, f^{-1}g)} \left( \int e^{-i\sigma(h, h^{-1}f)} X_h [\alpha_h(Y_{h^{-1}f})] dh \right) \alpha_f(Z_{f^{-1}g}) df$$

et

$$\begin{aligned} (X * (Y * Z))_g &= \int e^{-i\sigma(h, h^{-1}g)} X_h \alpha_h \left( \int e^{-i\sigma(f, f^{-1}h^{-1}g)} Y_f \alpha_f (Z_{f^{-1}h^{-1}g}) df \right) dh \\ &= \int e^{-i\sigma(h, h^{-1}g)} X_h \alpha_h \left( \int e^{-i\sigma(h^{-1}f, f^{-1}g)} Y_{h^{-1}f} \alpha_{h^{-1}f} (Z_{f^{-1}g}) df \right) dh \\ &= \int X_h \alpha_h \left( \int e^{-i[\sigma(h^{-1}f, f^{-1}g) + \sigma(h, h^{-1}g)]} Y_{h^{-1}f} \alpha_{h^{-1}f} (Z_{f^{-1}g}) df \right) dh \end{aligned}$$

En remarquant (A2) que l'on a :

$$\sigma(h^{-1}f, f^{-1}g) + \sigma(h, h^{-1}g) = \sigma(f, f^{-1}g) + \sigma(h, h^{-1}f)$$

On voit que les deux quantités calculées sont égales à :

$$\int \int e^{-i[\sigma(f, f^{-1}g) + \sigma(h, h^{-1}f)]} X_h [\alpha_h(Y_{h^{-1}f})] \cdot [\alpha_f(Z_{f^{-1}g})] dh df$$

Ce résultat est obtenu en calculant de deux façons différentes cette dernière intégrale par le théorème de Fubini, calcul justifié par le fait que l'intégrale est mesurable et sommable par  $dh df$ , en effet :

$$\begin{aligned} \int \int \| e^{-i[\sigma(f, f^{-1}g) + \sigma(h, h^{-1}f)]} X_h [\alpha_h(Y_{h^{-1}f})] \cdot [\alpha_f(Z_{f^{-1}g})] \| dh df \\ \leq \int \int \| X_h \| \| Y_{h^{-1}f} \| \| Z_{f^{-1}g} \| dh df \end{aligned}$$

Cette dernière expression est la norme (dans  $L_1(G)$ ) de la fonction obtenue par double convolution des fonctions (de  $L_1(G)$ )

$$h \rightarrow \| X_h \| ; h \rightarrow \| Y_h \|, h \rightarrow \| Z_h \|$$

(On a fait commuter les intégrations et les opérations continues pour la norme de  $\mathcal{A}$ ).

La vérification de (13) s'obtient de façon tout à fait analogue :

$$\begin{aligned} (Y * * X*)_g &= \int d h e^{-i\sigma(h, h^{-1}g)} \Delta(h)^{-1} e^{i\sigma(h, h^{-1})} [\alpha_h(Y_{h^{-1}}^*)] \\ &\quad \cdot \alpha_h[\Delta(g^{-1}h) e^{i\sigma(h^{-1}g, g^{-1}h)} \alpha_{h^{-1}g}(X_{g^{-1}h}^*)] \\ &= \int d h e^{i[\sigma(h, h^{-1}) + \sigma(h^{-1}g, g^{-1}h) - \sigma(h, h^{-1}g)]} \Delta(g)^{-1} [\alpha_h(Y_{h^{-1}}^*)] [\alpha_g(X_{g^{-1}h}^*)] \\ ((X * Y)^*)_g &= \Delta(g)^{-1} e^{i\sigma(g, g^{-1})} \alpha_g \left( \int d h e^{-i\sigma(h, h^{-1}g^{-1})} X_h \alpha_h(Y_{h^{-1}g^{-1}}^*) \right)^* \\ &= \int d h \Delta(g)^{-1} e^{i[\sigma(g, g^{-1}) + \sigma(h, h^{-1}g^{-1})]} [\alpha_g h(Y_{h^{-1}g^{-1}}^*)] \cdot [\alpha_g(X_h^*)] \\ &= \int d h \Delta(g)^{-1} e^{i[\sigma(g, g^{-1}) + \sigma(g^{-1}h, h^{-1})]} [\alpha_h(Y_{h^{-1}}^*)] [\alpha_g(X_{g^{-1}h}^*)] \end{aligned}$$

La vérification de (13) est ainsi ramenée à la démonstration de

$$\sigma(h, h^{-1}) + \sigma(h^{-1}g, g^{-1}h) - \sigma(h, h^{-1}g) = \sigma(g, g^{-1}) + \sigma(g^{-1}h, h^{-1})$$

or ceci n'est autre que la formule (A9) prise pour

$$f = h^{-1}g$$

Ceci achève la démonstration du théorème 1.

L'algèbre construite dépend — *a priori* — de l'exposant  $\sigma$  choisi. Nous avons cependant le

THÉORÈME 2. — *Si les exposants  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont équivalents (cf. Appendice), les algèbres  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$  et  $\mathcal{A}_1^{\sigma'}$  sont \*-isomorphes.*

Considérons deux exposants  $\sigma$  et  $\sigma'$  équivalents. Leur différence est donc triviale ; il existe donc une fonction continue  $\varphi$  définie sur le groupe  $G$ , à valeurs réelles, s'annulant sur l'identité, et telle que :

$$\sigma'(x, y) = \sigma(x, y) + \varphi(xy) - \varphi(x) - \varphi(y)$$

Définissons, pour toute fonction  $X$  de  $G$  dans  $\mathcal{A}$  :

$$(14) \quad [\Phi_{\sigma\sigma'}(X)]_y = e^{-i\varphi(y)}X_y$$

$\Phi_{\sigma\sigma'}$  est évidemment bijectif.

Vérifions que  $\Phi_{\sigma\sigma'}$  est un \*-isomorphisme de  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$  sur  $\mathcal{A}_1^{\sigma'}$ , c'est-à-dire que :

$$(15) \quad \Phi_{\sigma\sigma'}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \Phi_{\sigma\sigma'}(X) + \beta \Phi_{\sigma\sigma'}(Y)$$

$$(16) \quad \Phi_{\sigma\sigma'}(X *_{\sigma} Y) = \Phi_{\sigma\sigma'}(X) *_{\sigma'} \Phi_{\sigma\sigma'}(Y)$$

$$(17) \quad \Phi_{\sigma\sigma'}(X^{(*, \sigma)}) = [\Phi_{\sigma\sigma'}(X)]^{(*, \sigma')}$$

$$(18) \quad \|\Phi_{\sigma\sigma'}(X)\|_1 = \|X\|_1$$

Notons de plus, que  $\Phi_{\sigma\sigma'}$  laisse invariants les espaces  $\mathcal{A}_p^{\sigma}$  ( $p = 1, \dots, \infty$ ) ainsi que  $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^{\sigma}$  et  $y$  est bijectif.

Les relations (15) et (18) sont évidentes. La démonstration de (16) est simple, et laissée au lecteur. Vérifions (17) :

$$\begin{aligned} [\Phi_{\sigma\sigma'}(X)^{(*, \sigma')}]_h &= \Delta(h)^{-1} e^{i\sigma'(h, h^{-1})} \alpha_h ([e^{-i\varphi(h^{-1})} X_{h^{-1}}]^*) \\ &= \Delta(h)^{-1} e^{i\sigma(h, h^{-1})} e^{-i\varphi(h)} \alpha_h (X_{h^{-1}}^*) \\ &= e^{-i\varphi(h)} [X^{(*, \sigma)}]_h = [\Phi_{\sigma\sigma'}(X^{(*, \sigma)})]_h \end{aligned}$$

Partageons l'ensemble des exposants  $E(G)$  en classes d'équivalence  $S, T \dots$  et choisissons dans chaque classe un exposant arbitraire  $\sigma_0, \tau_0 \dots$  mais fixe, dans ces conditions :



**DÉFINITION 2.** — On appelle algèbre de S-covariance ( $S \in \mathfrak{B}(G)/\mathfrak{L}_1(G)$ ) l'algèbre  $\mathcal{A}_1^{\sigma_0}$  de  $\sigma_0$ -covariance construite comme dans le théorème 1 à l'aide de  $\sigma_0$ . Le théorème 2 justifie cette définition en affirmant que  $\mathcal{A}_1^{\sigma_s}$  ne dépend, en définitive, pas du choix de  $\sigma_0$  dans la classe S (à un  $\bar{*}$ -isomorphisme près).

Toute algèbre de  $\sigma$ -covariance  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$  avec  $\sigma \in S$  s'obtiendra en appliquant à  $\mathcal{A}_1^{\sigma_s}$  ( $\equiv \mathcal{A}_1^{\sigma_0}$ ) l' $\bar{*}$ -isomorphisme  $\Phi_{\sigma_0\sigma}$ .

*Remarque.* — L'arbitraire du choix de  $\sigma$  et le lemme A de l'appendice montrent qu'il est toujours possible de simplifier les calculs en prenant  $\sigma_0$  normal, par exemple, les définitions (7) et (10) deviennent :

$$(X *_{\sigma_0} Y)_g = \int e^{i\sigma(h^{-1}g)} X_h \alpha_h(Y_{h^{-1}g}) dh$$

$$(X^{(*, \sigma_0)})_h = \Delta(h)^{-1} \alpha_h(X_{h^{-1}})$$

**THÉORÈME 3.** —  $\mathcal{A}_\infty^{\sigma} \cap \mathcal{A}_1^{\sigma}$  est un idéal à gauche de  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$ . De plus, pour tout  $Y \in \mathcal{A}_\infty^{\sigma} \cap \mathcal{A}_1^{\sigma}$ ,  $X \in \mathcal{A}_1^{\sigma}$  et tout  $\sigma$  exposant sur G

$$(19) \quad \| X *_{\sigma} Y \|_{\infty} \leq \| X \|_1 \| Y \|_{\infty}$$

$\mathcal{A}_\infty^{\sigma} \cap \mathcal{A}_1^{\sigma}$  est un idéal à gauche de  $\mathcal{A}_1^{\sigma_s}$ .

Prenons  $X \in \mathcal{A}_1^{\sigma}$  partout défini ; un raisonnement en tout point analogue à celui du lemme 1 montre que l'intégrale

$$\int e^{-i\sigma(h, h^{-1}g)} X_h \alpha_h(Y_{h^{-1}g}) dh$$

existe pour tout  $g$ .

Prouvons la continuité de  $X *_{\sigma} Y$  au point  $g$ . Puisque Y s'annule à l'infini, pour tout nombre  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact K tel que :

$$\| Y_{h^{-1}g} \| = \| \alpha_h(Y_{h^{-1}g}) \| < \varepsilon$$

dès que  $h \notin K$ . D'autre part, puisque Y est uniformément continu, il existe un voisinage V de l'identité dans G tel que pour tout élément  $f$  de V on ait :

$$\| Y_{h^{-1}gf} - Y_{h^{-1}g} \| = \| \alpha_h(Y_{h^{-1}gf}) - \alpha_h(Y_{h^{-1}g}) \| < \varepsilon$$

et ce pour tout  $h$ . Il existe donc un compact K et un voisinage V indépendants de  $h$  tels que les conditions  $u \notin K$  et  $h \in V$  impliquent :

$$\| Y_{h^{-1}gf} \| = \| \alpha_h(Y_{h^{-1}gf}) \| < 2\varepsilon$$

Dans ces conditions, on a :

$$\begin{aligned} \|(X *_\sigma Y)_{gf} - (X *_\sigma Y)_g\| &\leq \int \|X_h\| \|e^{-i\sigma(h, h^{-1}gf)} Y_{h^{-1}gf} - e^{-i\sigma(h, h^{-1}g)} Y_{h^{-1}g}\| dh \\ &\leq \int \|X_h\| \|Y_{h^{-1}gf} - Y_{h^{-1}g}\| dh \\ &+ \int_K \|X_h\| \|Y_{h^{-1}gf}\| |e^{-i\sigma(h, h^{-1}gf)} - e^{-i\sigma(h, h^{-1}g)}| dh \\ &+ \int_{CK} \|X_h\| \|Y_{h^{-1}gf}\| |e^{-i\sigma(h, h^{-1}gf)} - e^{-i\sigma(h, h^{-1}g)}| dh \end{aligned}$$

Les premier et troisième termes du deuxième membre sont bornés respectivement par  $\varepsilon \|X\|_1$  et  $4\varepsilon \|X\|_1$  dès que  $h \in V$ . Le deuxième terme est inférieur à

$$\|X\|_1 \|Y\|_\infty \sup_{h \in K} |e^{-i\sigma(h, h^{-1}gf)} - e^{-i\sigma(h, h^{-1}g)}|$$

qui peut être rendu aussi petit qu'on le veut, en choisissant  $h$  suffisamment proche de l'identité à cause de la continuité en  $g$  de  $e^{i\sigma(h, h^{-1}g)}$  *uniforme en  $h$  appartenant au compact  $K$* . La majoration :

$$\|(X *_\sigma Y)_g\| \leq \int \|X_h\| \|Y_{h^{-1}g}\| dh$$

montre :

1) que  $X *_\sigma Y$  tend vers zéro à l'infini (puisque le deuxième membre n'est autre que la convolution des fonctions  $h \rightarrow \|X_h\|$ ,  $h \rightarrow \|Y_h\|$ , respectivement dans  $L_1(G)$  et dans  $C_0(G) \cap L_1(G)$ , qui a la même propriété) ;

2) que la relation (19) est vérifiée car pour tout  $g$

$$\|(X *_\sigma Y)_g\| \leq \|X\|_1 \|Y\|_\infty$$

## § II. — REPRÉSENTATION DE $\mathcal{A}_1^{G_s}$ ET S-REPRÉSENTATIONS COVARIANTES DE $\mathcal{A}$

Nous commençons par deux lemmes.

LEMME 3. — *Pour tout  $x \in G$  et tout  $A \in \mathcal{A}$ , nous désignons par  $V^\sigma(g)$  et  $\rho(A)$  les opérateurs (évidemment linéaires) définis par :*

$$(20) \quad \begin{aligned} [V^\sigma(g)X]_h &= e^{-i\sigma(g, g^{-1}h)} \alpha_g(X_{g^{-1}h}) \\ [\rho(A)X]_h &= AX_h \end{aligned}$$

Ces opérateurs laissent invariants les espaces vectoriels  $\mathcal{A}_p^{\sigma}$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) ainsi que  $\mathcal{A}_X^{\sigma}$ .

Ils ont les propriétés suivantes :

$$(VI) \quad \begin{cases} V^{\sigma}(hg) = e^{i\sigma(h,g)} V^{\sigma}(h) V^{\sigma}(g) & h, g \in G \\ & X \in \mathcal{A}_p^{\sigma} \\ V^{\sigma}(e)X = X \end{cases}$$

$$(V2) \quad \|V^{\sigma}(g)X\|_p = \|X\|_p \quad p = 1 \text{ ou } \infty \\ X \in \mathcal{A}_p^{\sigma}$$

$$(V3) \quad \lim_{g \rightarrow g_0} \|V^{\sigma}(g)X - V^{\sigma}(g_0)X\|_p = 0 \quad p = 1 \text{ ou } \infty \\ X \in \mathcal{A}_p^{\sigma}$$

$$(V4) \quad \begin{cases} X^{(*,\sigma)} *_\sigma V^{\sigma}(g)Y = (V^{\sigma}(g)^{-1}X)^{(*,\sigma)} *_\sigma Y \\ (V^{\sigma}(g)X)^{(*,\sigma)} *_\sigma V^{\sigma}(g)Y = X^{(*,\sigma)} *_\sigma Y \end{cases}$$

$$(V5) \quad \{V^{\sigma}(g)X\} *_\sigma Y = V^{\sigma}(g) \{X *_\sigma Y\}$$

(V6) L'application  $g \rightarrow V^{\sigma}(g)$  est injective,  $V^{\sigma}(g)$  opérant dans  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$

$$(\rho 1) \quad \rho(A)\rho(B) = \rho(AB)$$

$$(\rho 2) \quad \|\rho(A)X\|_p \leq \|A\| \|X\|_p \quad p = 1 \text{ ou } \infty \\ X \in \mathcal{A}_p^{\sigma}$$

$$(\rho 3) \quad \begin{cases} X^{(*,\sigma)} *_\sigma \rho(A)Y = (\rho(A^*)X)^{(*,\sigma)} *_\sigma Y \\ \{\rho(A)X\}^{(*,\sigma)} *_\sigma \rho(A)Y = X^{(*,\sigma)} *_\sigma \rho(A^*A)Y \end{cases}$$

(\rho 4) Soit  $(A_\lambda)_{\lambda \in I}$  une unité approchée dans  $\mathcal{A}$ , on a :

$$\lim_{\lambda} \|\rho(A_\lambda)X - X\|_p = 0 \quad p = 1 \text{ ou } \infty \\ X \in \mathcal{A}_p^{\sigma}$$

(\rho 5) Soit  $\eta$  une forme positive sur  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$ , la forme

$$\xi(A) = \eta(X^{(*,\sigma)} *_\sigma \rho(A)X)$$

sur  $\mathcal{A}$  (positive d'après (\rho 3)), a pour norme ;

$$\|\xi\| = \eta(X^{(*,\sigma)} *_\sigma X)$$

$$(\rho 6) \quad \{\rho(A)X\} *_\sigma Y = \rho(A) \{X *_\sigma Y\}$$

(\rho 7) L'application  $A \rightarrow \rho(A)$  est injective,  $\rho(A)$  opérant dans  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$

$$(V\rho 1) \quad \rho(\alpha_g(A)) = V^{\sigma}(g)\rho(A)V^{\sigma}(g)^{-1} \quad g \in G \\ A \in \mathcal{A}$$

$$(V\rho 2) \quad X *_{\sigma} Y = \int \rho(X_g) V^{\sigma}(g) Y dg \quad X, Y \in \mathcal{A}_1^G$$

l'intégrale étant définie au sens de la norme  $\| \cdot \|_1$ .

Les propriétés (V1) et ( $\rho 1$ ) sont évidentes. Si X est mesurable,  $V(g)X$  et  $\rho(A)X$  le sont également ( $\sigma$  étant ici fixé nous écrivons  $V(g)$  au lieu de  $V^{\sigma}(g)$  pour abrégé), de plus

$$\begin{aligned} \| (V(h)X)_g \| &= \| X_{h^{-1}g} \| \\ \| (\rho(A)X)_g \| &\leq \| A \| \| X_g \| \end{aligned}$$

Par suite  $V(g)$  et  $\rho(A)$  laissent invariants les espaces  $\mathcal{A}_p^G (1 \leq p \leq \infty)$  ainsi que  $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^G$  avec les propriétés (V2) et ( $\rho 2$ ).

Prouvons (V3). Il suffit en vertu de (V1) et de la continuité de  $\sigma$  de prendre  $g_0 = e$ . Soit  $X \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}^G$ , on obtient :

$$\begin{aligned} &\| e^{i\sigma(h, h^{-1}g)} \alpha_h(X_{h^{-1}g}) - X_g \| \\ &\leq | e^{i\sigma(h, h^{-1}g)} - 1 | \| \alpha_h(X_{h^{-1}g}) \| + \| X_{h^{-1}g} - X_g \| + \| \alpha_h(X_g) - X_g \| \\ &\leq | e^{i\sigma(h, h^{-1}g)} - 1 | \| X \|_{\infty} + \| X_{h^{-1}g} - X_g \| + \| \alpha_h(X_g) - X_g \| \end{aligned}$$

Le deuxième terme est rendu aussi petit qu'on le veut (pour tout  $g$ ) à condition de choisir  $h$  voisin de  $e$  à cause de la continuité uniforme de X. Le premier et le troisième peuvent également être rendus petits dans les mêmes conditions (uniformément en  $g$  par un argument de compacité puisque  $g$  est contenu dans le support de X compact par hypothèse).

Par suite :

$$\| V(g)X - X \|_{\infty} \xrightarrow{g=e} 0 \quad X \in \mathcal{A}_{\mathcal{K}}^G$$

donc *a fortiori* pour la norme  $\| \cdot \|_1$ . (V3) s'obtient alors simplement en considérant le fait que  $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}^G$  est partout dense dans  $\mathcal{A}_p^G$  pour  $p = 1$  ou  $\infty$ .

En ce qui concerne (V4), notons tout d'abord que (V1) montre que  $V(g)^{-1}$  existe pour tout  $g$  ; nous justifions ainsi l'écriture de la première relation (V4). La deuxième relation est évidemment équivalente à la première, et nous nous contentons de prouver :

$$X * * (V(g)Y) = (V(g)^{-1}X) * * Y$$

Nous avons, en effet :

$$\begin{aligned} [X * * V(h)Y]_g &= \int df e^{-i\sigma(f, f^{-1}g)} \Delta(f)^{-1} e^{i\sigma(f, f^{-1})} \alpha_f(X_{f^{-1}}) * \\ &\quad \cdot \alpha_f(e^{-i\sigma(h, h^{-1}f^{-1}g)} \alpha_h(Y_{h^{-1}f^{-1}g})) \\ &= \int e^{-i[\sigma(f, f^{-1}g) + \sigma(h, h^{-1}f^{-1}g) - \sigma(f, f^{-1})]} \alpha_f(X_{f^{-1}}) * \alpha_f \alpha_h(Y_{h^{-1}f^{-1}g}) \Delta(f)^{-1} df \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 ((V(h)^{-1}X)^* * Y)_g &= e^{-i\sigma(h,h^{-1})}((V(h^{-1})X)^* * Y)_g \\
 &= \int e^{-i\sigma(h,h^{-1})} e^{-i\sigma(f,f^{-1}g)} [\Delta(f)^{-1} e^{i[\sigma(f,f^{-1}) + \sigma(h^{-1},hf^{-1})]} \alpha_{fh^{-1}}(X_{hf^{-1}})^*] \alpha_f(Y_{f^{-1}g}) df \\
 &= \int e^{-i[\sigma(h,h^{-1}) + \sigma(f,f^{-1}g) - \sigma(f,f^{-1}) - \sigma(h^{-1},hf^{-1})]} \alpha_{fh^{-1}}(X_{hf^{-1}})^* \alpha_f(Y_{f^{-1}g}) \Delta(f)^{-1} df \\
 &= \int e^{-i[\sigma(h,h^{-1}) + \sigma(fh,h^{-1}f^{-1}g) - \sigma(fh,h^{-1}f^{-1}) - \sigma(h^{-1},f^{-1})]} \alpha_f(X_{f^{-1}})^* \alpha_{fh}(Y_{h^{-1}f^{-1}g}) \Delta(f)^{-1} df
 \end{aligned}$$

en utilisant le fait que  $\Delta(f)^{-1}df$  est une mesure invariante à droite. Il suffit alors de vérifier :

$$\begin{aligned}
 \sigma(h, h^{-1}) + \sigma(fh, h^{-1}f^{-1}g) - \sigma(fh, h^{-1}f^{-1}) - \sigma(h^{-1}, f^{-1}) \\
 = \sigma(f, f^{-1}g) + \sigma(h, h^{-1}f^{-1}g) - \sigma(f, f^{-1})
 \end{aligned}$$

Pour cela, considérons l'identité (A2)

$$\sigma(fh, h^{-1}f^{-1}g) + \sigma(f, h) = \sigma(f, f^{-1}g) + \sigma(h, h^{-1}f^{-1}g)$$

et remarquant d'après (A9) que :

$$\sigma(f, h) = -\sigma(h^{-1}, f^{-1}) - \sigma(fh, h^{-1}f^{-1}) + \sigma(f, f^{-1}) + \sigma(h, h^{-1})$$

on obtient la relation cherchée.

La démonstration de (V5) est semblable et laissée au lecteur. La propriété ( $\rho_3$ ) est évidente à partir de la définition (20) ainsi que ( $\rho_6$ ).

Pour démontrer ( $\rho_5$ ), on sait que ([4], 2.1.5 (V))

$$\|\xi\| = \lim_{\lambda} \xi(A_{\lambda})$$

on voit qu'il suffit de démontrer ( $\rho_4$ ).

Prenons  $X$  dans  $\mathcal{A}_{\mathcal{J}_c}^G$  et calculons

$$(21) \quad \|(\rho(A_{\lambda})X - X)_h\| = \|A_{\lambda}X_h - X_h\|$$

Cette quantité tend bien vers zéro pour tout  $h$  dans le support (compact) de  $X$  donc uniformément en  $h$  par suite

$$\lim_{\lambda} \|\rho(A_{\lambda})X - X\|_{\infty} = 0$$

et — *a fortiori* — pour la norme  $\|\cdot\|_1$ . ( $\rho_4$ ) se déduit alors de la densité de  $\mathcal{A}_{\mathcal{J}_c}^G$  dans  $\mathcal{A}_p^G$  ( $p = 1, \infty$ ) pour la norme  $\|\cdot\|_p$ .

Pour démontrer (V6) nous utiliserons le résultat suivant : Soit

$X$  (resp.  $Y$ )  $\in \mathcal{A}_1^G$  s'annulant en dehors de l'ensemble mesurable  $V_1$  (resp.  $V_2$ ).  
Si  $V_1$  et  $V_2$  sont disjoints, on a :

$$\|X + Y\|_1 = \|X\|_1 + \|Y\|_1$$

En effet, puisque  $X + Y$  s'annule en dehors de  $V_1 \cup V_2$

$$\begin{aligned} \|X + Y\|_1 &= \int_G \|(X + Y)_h\| dh = \int_{I_{V_1 \cup V_2}(h)} \|(X + Y)_h\| dh \\ &= \int (I_{V_1}(h) + I_{V_2}(h)) \|(X + Y)_h\| dh \\ &= \int I_{V_1}(h) \|(X + Y)_h\| dh + \int I_{V_2}(h) \|(X + Y)_h\| dh \\ &= \int \|X\|_h dh + \int \|Y\|_h dh = \|X\|_1 + \|Y\|_1 \end{aligned}$$

où  $I_A$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $A$  et où l'on utilise la relation (due au fait que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ).

$$I_{V_1 \cup V_2} = I_{V_1} + I_{V_2}.$$

Introduisons la notation  $A\varphi$  où  $A \in \mathcal{A}$  et  $\varphi \in L_1(G)$  pour l'élément de  $\mathcal{A}_1^G$  défini par

$$(22) \quad (A\varphi)_g = A\varphi(g)$$

Il est bien évident que  $A\varphi \in \mathcal{A}_1^G$  et même que

$$\|A\varphi\|_1 = \|A\| \|\varphi\|_1$$

Soient alors  $g$  et  $h$  des éléments distincts de  $G$  ; soient  $V_1$  et  $V_2$  des voisinages respectifs de  $g$  et  $h$  disjoints. Posons

$$W = g^{-1}V_1 \cap h^{-1}V_2$$

$W$  est un voisinage de l'identité  $e$  de  $G$ . Soit  $\Phi$  un élément de norme 1 dans  $L_1(G)$  à valeurs positives dont le support est dans  $W$ . Pour  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $\|A\| = 1$ , les éléments de  $\mathcal{A}_1^G$  :  $V(g)A\Phi$  et  $V(h)A\Phi$  sont nuls en dehors de  $V_1$  et  $V_2$  respectivement et d'après le résultat cité plus haut :

$$\|V(g)A\Phi - V(h)A\Phi\|_1 = \|V(g)A\Phi\|_1 + \|V(h)A\Phi\|_1 = 2$$

d'où :

$$\begin{aligned} V(g)A\Phi &\neq V(h)A\Phi \\ V(g) &\neq V(h) \end{aligned}$$

et (V6) est démontré.

Pour démontrer ( $\rho 7$ ) envisageons un  $A$  dans  $\mathcal{A}$  tel que pour tout  $X$  dans  $\mathcal{A}_1^G$ , on ait :

$$\rho(A)X = 0$$

Avec la notation (22) on a pour tout  $\varphi$  de  $L_1(G)$

$$\rho(A)A^*\varphi = AA^*\varphi = 0$$

La relation

$$\|AA^*\varphi\|_1 = \|AA^*\| \|\varphi\|_1$$

montre alors que (en prenant un  $\varphi$  non nul de  $L_1(G)$ )

$$\|AA^*\| = \|A\|^2 = 0$$

et  $A = 0$ .

C. Q. F. D.

( $V\rho 1$ ) est une conséquence immédiate des définitions (20).

( $V\rho 2$ ) : montrons tout d'abord que l'intégrale

$$(23) \quad \int \rho(X_g)V(g)Y dg$$

existe pour la norme  $\|\cdot\|_1$ .

Puisque  $X$  est mesurable, pour tout compact  $K$  et tout nombre  $\varepsilon$  positif, il existe un compact  $K' : K' \subset K$  tel que la mesure de  $K - K'$  soit inférieure à  $\varepsilon$  et que  $X|K'$ , restriction de  $X$  à  $K'$ , soit continue ; les propriétés de continuité ( $\rho 2$ ) et ( $V 3$ ) (pour  $p = 1$ ) montrent alors que l'application

$$g \rightarrow \rho(X_g)V(g)Y$$

est continue sur  $K'$  donc mesurable. La norme ( $\|\cdot\|_1$ ) de la valeur en  $g$  de cette application est d'autre part bornée par :

$$\|X_g\| \|Y\|_1$$

d'après ( $\rho 2$ ) et ( $V 3$ ). Et par suite (23) qui est bilinéaire en  $X$  et  $Y$  est bornée par

$$\|X\|_1 \|Y\|_1$$

donc continue en  $(X, Y)$ . Il suffira donc de vérifier la relation ( $V\rho 2$ ) sur un ensemble dense (car  $X, Y \rightarrow X * Y$  est continu pour la norme 1). Prenons donc  $X, Y$  dans  $\mathcal{A}_{K'}^G$ .

L'intégrale

$$Z = \int \rho(X_g)V(g)Y dg$$

existe alors au sens de la norme  $\| \cdot \|_\infty$  (par le même raisonnement que ci-dessus, en utilisant  $(\rho 2)$  et  $(V3)$  pour  $p = \infty$ ). Pour cette norme les opérations :

$$\begin{aligned} Z &\rightarrow Z_g \\ Y &\rightarrow Y_g \end{aligned}$$

sont continues et par suite :

$$\begin{aligned} \left[ \int \rho(X_g)V(g)Y dg \right]_h &= \int (\rho(X_g)V(g)Y)_h dg \\ &= \int e^{-i\sigma(g, g^{-1}h)} X_g \alpha_g(Y_{g^{-1}h}) dg = (X * Y)_h \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

LEMME 4. — Soit  $A_\lambda \in \mathcal{A}(\lambda \in I)$  une unité approchée de  $\mathcal{A}$ . Soit d'autre part  $\mathcal{V}(g)$  le filtre des voisinages du point  $g$  de  $G$ . Pour tout  $V \in \mathcal{V}(g)$ , on choisit un élément  $\varepsilon_{g, V}$  à valeurs positives de  $L_1(G)$  tel que  $\| \varepsilon_{g, V} \| = 1$  et dont le support est inclus dans  $V$ .

Avec la notation introduite plus haut (22) on a pour  $X \in \mathcal{A}_1^\sigma$  :

$$(24) \quad \lim_{\lambda, V} \| A_\lambda \varepsilon_{g, V} *_\sigma X - V^\sigma(g)X \|_1 = 0$$

(la limite est prise sur le filtre produit  $I \times \mathcal{V}(g)$ ).

En particulier  $(A_\lambda \varepsilon_{e, V})(\lambda, V) \in I \times \mathcal{V}(e)$  est une unité approchée de  $\mathcal{A}_1^{\sigma e}$  :

$$(25) \quad \| A_\lambda \varepsilon_{e, V} \|_1 = 1$$

$$(26) \quad \lim_{\lambda, V} \| A_\lambda \varepsilon_{e, V} *_\sigma X - X \|_1 = 0$$

Étant donné  $B \in \mathcal{A}$ , on a aussi :

$$(27) \quad \lim_{(\lambda, V)} \| (BA_\lambda \varepsilon_{g, V}) *_\sigma X - \rho(B)V^\sigma(g)X \|_1 = 0$$

(en particulier

$$(28) \quad \lim_{(\lambda, V)} \| BA_\lambda \varepsilon_{e, V} *_\sigma X - \rho(B)X \|_1 = 0)$$

Rappelons que  $A\varphi \in \mathcal{A}_1^\sigma$  et que  $(A \in \mathcal{A}, \varphi \in L_1(G))$

$$\| A\varphi \|_1 = \| A \| \| \varphi \|_1$$

De plus, pour tout  $X \in \mathcal{A}_1^{\sigma e}$

$$A\varphi * X = \rho(A)(\varphi * X)$$

avec la définition

$$(\varphi * X)_g = \int e^{-i\sigma(h, h^{-1}g)} \varphi(h) \alpha_h(X_{h^{-1}g}) dh$$



Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \| A_\lambda \varepsilon_{g,v} * X - V(g)X \|_1 &= \| \rho(A_\lambda)(\varepsilon_{g,v} * X) - V(g)X \|_1 \\ &\leq \| \rho(A_\lambda)(\varepsilon_{g,v} * X) - \rho(A_\lambda)V(g)X \|_1 + \| \rho(A_\lambda)V(g)X - V(g)X \|_1 \end{aligned}$$

Le premier terme du dernier membre est majoré par :

$$(29) \quad \| \varepsilon_{g,v} * X - V(g)X \|_1$$

(en vertu de (ρ2)) ; quant au deuxième terme, il tend vers zéro avec λ((ρ4) pour p = 1). Il suffit donc pour achever la preuve de (24) de montrer que :

$$\lim_v \| \varepsilon_{g,v} * X - V(g)X \|_1 = 0$$

Or nous avons :

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{g,v} * X - V(g)X]_h &= \int e^{-i\sigma(f, f^{-1}h)} \varepsilon_{g,v}(f) \alpha_f(X_{f^{-1}h}) - \varepsilon_{g,v}(f) e^{-i\sigma(g, g^{-1}h)} \alpha_g(X_{g^{-1}h}) df \\ &= \int \varepsilon_{g,v}(f) (V(f)X - V(g)X)_h df \\ &\leq \text{Sup}_{f \in V} \| (V(f)X - V(g)X)_h \| \end{aligned}$$

(29) est donc inférieur à :

$$\text{Sup}_{f \in V} \| V(f)X - V(g)X \|_1$$

expression qui tend vers zéro pour le filtre  $\mathcal{U}(g)$  d'après (V3) pour p = 1.

Pour démontrer (27), remarquons que :

$$BA_\lambda \varepsilon_{g,v} = \rho(B)(A_\lambda \varepsilon_{g,v})$$

et utilisant (ρ6), on voit que

$$BA_\lambda \varepsilon_{g,v} * X = \rho(B)[A_\lambda \varepsilon_{g,v} * X] ;$$

(ρ2) (p = 1) et (24) démontrent alors (27).

Nous en arrivons maintenant au résultat essentiel de cette section et nous donnons tout d'abord quelques définitions :

**DÉFINITION 3.** — Une représentation projective  $\mathcal{U}$  unitaire, continue dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  d'exposant  $\sigma$  c'est-à-dire telle que :

$$(30) \quad \mathcal{U}(hg) = e^{i\sigma(h,g)} \mathcal{U}(h) \mathcal{U}(g)$$

$$(31) \quad \mathcal{U}(e) = I$$

sera dite  $\sigma$ -représentation de G dans  $\mathcal{H}$ .

— Une  $\sigma$ -représentation covariante  $(\Pi, \mathcal{V})$  de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{K}$  est un couple constitué par une  $*$ -représentation  $\Pi$  de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{K}$  et une  $\sigma$ -représentation de  $G$  dans le même espace telles que

$$(32) \quad \Pi(\alpha_g(A)) = \mathcal{V}(g)\Pi(A)\mathcal{V}(g)^{-1}$$

Une  $\sigma$ -représentation covariante  $(\Pi, \mathcal{V})$  de  $\mathcal{A}$  sera dite essentielle si  $\Pi$  est essentielle (non dégénérée c'est-à-dire si elle ne contient pas la représentation nulle comme sous-représentation).

— Un vecteur  $\varphi$  de  $\mathcal{K}$  sera dit cyclique pour  $(\Pi, \mathcal{V})$  si l'enveloppe linéaire fermée de l'ensemble  $\{\Pi(A)\varphi\} \cup \{\mathcal{V}(G)\varphi\}$  coïncide avec  $\mathcal{K}$ .

— Deux représentations covariantes  $(\Pi, \mathcal{V})$  et  $(\Pi', \mathcal{V}')$  seront dites projectivement équivalentes si :

a)  $\Pi$  est identique à  $\Pi'$ ,

b)  $\mathcal{V}$  est projectivement équivalente à  $\mathcal{V}'$  c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $\varphi$  définie sur  $G$ , à valeurs réelles telle que  $\varphi(e) = 0$  et que

$$\mathcal{V}'(g) = e^{i\varphi(g)}\mathcal{V}(g)$$

pour tout  $g \in G$ .

Une  $\sigma$ -représentation covariante  $(\Pi, \mathcal{V})$  est dite fidèle si  $\Pi$  et  $\mathcal{V}$  sont injectives.

Énonçons alors le :

THÉORÈME 4. — Il existe une bijection entre les  $*$ -représentations essentielles de  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$  et les  $\sigma$ -représentations covariantes  $(\Pi, \mathcal{V})$  essentielles de  $\mathcal{A}$ .

Plus précisément, la correspondance de  $(\Pi, \mathcal{V})$  ( $\sigma$ -représentation covariante de  $\mathcal{A}$ ) à  $\widehat{\Pi}$  ( $*$ -représentation de  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$ ) est donnée par :

$$(33) \quad \widehat{\Pi}(X)\Psi = \int \Pi(X_g)\mathcal{V}(g)\Psi dg$$

La correspondance inverse étant donnée par

$$(34) \quad \Pi(A)\widehat{\Pi}(X) = \widehat{\Pi}(\rho(A)X)$$

$$(35) \quad \mathcal{V}(g)\widehat{\Pi}(X) = \widehat{\Pi}(V(g)X)$$

( $\Pi$  et  $\mathcal{V}$  sont déterminées de façon unique à cause du caractère essentiel de  $\widehat{\Pi}$ ).

Une définition équivalente de  $\Pi$  et de  $\mathcal{V}$  est la suivante :

$$(36) \quad \Pi(A) = \lim_{\lambda} \text{forte} \widehat{\Pi}(\rho(A)E_{\lambda})$$

$$(37) \quad \mathcal{V}(g) = \lim_{\lambda} \text{forte} \widehat{\Pi}(V(g)E_{\lambda})$$

( $E_{\lambda}$  = unité approchée de  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$ ).

*La fermeture faible de  $\widehat{\Pi}(\mathcal{A}_1^{\sigma})$  est identique au bicommutant*

$$\{ \Pi(\mathcal{A}) \cup \mathcal{U}(\mathbf{G}) \}'$$

$\widehat{\Pi}$  et  $(\Pi, \mathcal{U})$  sont en même temps cycliques.

$(\Pi, \mathcal{U})$  est fidèle si  $\widehat{\Pi}$  l'est.

*Si deux représentations  $\widehat{\Pi}$  et  $\widehat{\Pi}'$  de  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$  sont unitairement équivalentes, on a les équivalences unitaires respectives de  $\Pi$  avec  $\Pi'$  et de  $\mathcal{U}$  avec  $\mathcal{U}'$  avec le même opérateur d'entrelacement pour  $\widehat{\Pi}, \widehat{\Pi}' ; \Pi, \Pi'$  et  $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ .*

*Il existe une bijection entre les  $\ast$ -représentations essentielles de  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$  et les classes d'équivalence projective des représentations covariantes essentielles dont les exposants appartiennent à  $S$ .*

Soit  $\widehat{\Pi}$  une représentation essentielle de  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$ . Montrons tout d'abord l'existence des limites fortes (36) et (37) et plaçons-nous pour ce faire sur l'ensemble dense de  $\mathcal{K} : \{ \widehat{\Pi}(X)\Psi \mid X \in \mathcal{A}_1^{\sigma}, \Psi \in \mathcal{K} \}$ . On a :

$$\begin{aligned} & \| \widehat{\Pi}(\rho(A)E_{\lambda})\widehat{\Pi}(X)\Psi - \widehat{\Pi}(\rho(A)X)\Psi \| \\ & \leq \| \rho(A)[E_{\lambda} \ast X - X] \|_1 \| \Psi \| \leq \| A \| \| \Psi \| \| E_{\lambda} \ast X - X \|_1 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} & \| \widehat{\Pi}(V(g)E_{\lambda})\widehat{\Pi}(X)\Psi - \widehat{\Pi}(V(g)X)\Psi \| \\ & \leq \| V(g)[E_{\lambda} \ast X - X] \|_1 \| \Psi \| = \| \Psi \| \| E_{\lambda} \ast X - X \|_1 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

On a utilisé (V5), ( $\rho$ 6), ( $\rho$ 2), (V2) du lemme 3 pour  $p = 1$ . Nous avons aussi démontré l'équivalence respective de (34), (36) et (35), (37).

$\Pi$  et  $\mathcal{U}$  sont respectivement une  $\ast$ -représentation de  $\mathcal{A}$  et une représentation projective unitaire de  $\mathbf{G}$  d'exposant  $\sigma$  (à l'aide des définitions (34) et (35) et de (V1), (V4), ( $\rho$ 1), ( $\rho$ 3) du lemme 3).

Pour établir que  $\mathcal{U}$  est bien une  $\sigma$ -représentation, il suffit donc de vérifier sa continuité faible ; considérons

$$\begin{aligned} | (\widehat{\Pi}(X)\Psi \mid \mathcal{U}(g) - \mathcal{U}(g_0) \mid \widehat{\Pi}(Y)\Psi') | &= | (\Psi \mid \widehat{\Pi}(X \ast [V(g) - V(g_0)]Y)\Psi') | \\ &\leq \| \Psi \| \| \Psi' \| \| X \|_1 \\ &\quad \| (V(g) - V(g_0))Y \|_1 \end{aligned}$$

pour tout  $\Psi, \Psi' \in \mathcal{K}, X, Y \in \mathcal{A}_1^{\sigma}$ . (V3) (pour  $p = 1$ ) permet alors de conclure (en utilisant de nouveau le fait que  $\widehat{\Pi}$  est essentielle).

La propriété (32) peut facilement se vérifier sur l'ensemble dense  $\{ \widehat{\Pi}(X)\Psi \mid X \in \mathcal{A}_1^{\sigma}, \Psi \in \mathcal{K} \}$  et provient de (V $\rho$ 1), (34), (35).

Montrons que  $\Pi$  est essentielle. Pour cela, considérons l'expression ( $X \in \mathcal{A}_1^{\sigma}, \Psi \in \mathcal{K}$ )

$$\begin{aligned} \|\Pi(A_\lambda)\widehat{\Pi}(X)\Psi - \widehat{\Pi}(X)\Psi\| &= \|\widehat{\Pi}(\rho(A_\lambda)X - X)\Psi\| \\ &\leq \|\rho(A_\lambda)X - X\|_1 \|\Psi\| \end{aligned}$$

qui tend vers zéro en vertu de  $(\rho 4)$  pour  $p = 1$ .  $\widehat{\Pi}$  étant essentielle, on en déduit que :

$$\lim_{\lambda} \text{forte } \Pi(A_\lambda) = I = \text{identité sur } \mathcal{K}$$

et, par suite,  $\Pi$  est bien essentielle.

Effectuons maintenant le trajet inverse, et considérons la  $\sigma$ -représentation covariante essentielle  $(\Pi, \mathcal{U})$  de  $\mathcal{A}$  et définissons  $\widehat{\Pi}$  par (33). Cela est légitime car l'intégrand est bien mesurable (au sens de la norme habituelle de  $\mathcal{K}$ ) en vertu de la continuité forte de  $\mathcal{U}$  et de la mesurabilité de  $X$ . Cet intégrand est d'autre part de norme inférieure à  $\|X_x\| \|\Psi\|$  donc sommable. Le fait que  $\widehat{\Pi}$  est une  $*$ -représentation, est montré de la façon suivante (en utilisant le théorème de Fubini et (32)).

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}(X)\widehat{\Pi}(Y) &= \int \Pi(X_g)\mathcal{U}(g)dg \cdot \int \Pi(Y_h)\mathcal{U}(h)dh \\ &= \int \Pi(X_g)\Pi(\alpha_g(Y_h))\mathcal{U}(g)\mathcal{U}(h)dhdg \\ &= \int dh \Pi\left(\int dg e^{-i\sigma(g, g^{-1}h)} X_g \alpha_g(Y_{g^{-1}h})\right)\mathcal{U}(h) \\ &= \widehat{\Pi}(X * Y) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}(X^*) &= \int \Pi((X^*)_g)\mathcal{U}(g)dg \\ &= \int \Pi(\alpha_g(X_{g^{-1}}^*)\mathcal{U}(g)\Delta(g)^{-1}e^{i\sigma(g, g^{-1})}dg \\ &= \int \mathcal{U}(g^{-1})\Pi(X_g)^*e^{i\sigma(g, g^{-1})}dg \\ &= \int \mathcal{U}(g)^{-1}\Pi(X_g)^*dg = \widehat{\Pi}(X)^* \end{aligned}$$

Le fait que  $\widehat{\Pi}$  est essentielle, s'obtient de la façon suivante : Soit  $\Psi \in \mathcal{K}$  tel que, pour tout  $X \in \mathcal{A}_1^{\sigma}$  on ait :

$$\widehat{\Pi}(X)\Psi = 0 ;$$

dans ces conditions, pour tout  $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\mathcal{V}} \widehat{\Pi}(A\varepsilon_{e,\mathcal{V}})\Psi = \lim_{\mathcal{V}} \int \Pi(A)\varepsilon_{e,\mathcal{V}}(g)\mathcal{U}(g)\Psi dg \\ &= \Pi(A) \left[ \lim_{\mathcal{V}} \int \varepsilon_{e,\mathcal{V}}(g)\mathcal{U}(g)\Psi dg \right] = \Pi(A)\Psi \end{aligned}$$

d'où  $\Psi = 0$  (dû au caractère essentiel de  $\Pi$ ).

Il nous faut maintenant prouver que l'application :

$$\Phi_1 : \widehat{\Pi} \rightarrow (\Pi, \mathcal{U}) \text{ ((34) et (35))}$$

est une bijection. Considérons

$$\Phi_2 : (\Pi, \mathcal{U}) \rightarrow \widehat{\Pi} \text{ (33)}$$

et prouvons que  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont inverses l'un de l'autre. Soit donc :

$$(\Pi', \mathcal{U}') = (\Phi_1 \circ \Phi_2) (\Pi, \mathcal{U})$$

on a ;  $A \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in \mathcal{A}_1^{\sigma}$ ,  $\Psi \in \mathcal{K}$  avec  $\widehat{\Pi} = \Phi_2(\Pi, \mathcal{U})$

$$\begin{aligned} \Pi'(A)\widehat{\Pi}(Y)\Psi &= \widehat{\Pi}(\rho(A)Y)\Psi \\ &= \int \Pi(A)Y_g\mathcal{U}(g)\Psi dg \\ &= \Pi(A) \int \Pi(Y_g)\mathcal{U}(g)\Psi dg \\ &= \Pi(A)\widehat{\Pi}(Y)\Psi \end{aligned}$$

d'où  $\Pi = \Pi'$  (car  $\widehat{\Pi}$  est essentielle).

De même, pour tout  $g \in G$  et à l'aide de (32) :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}'(g)\widehat{\Pi}(Y)\Psi &= \widehat{\Pi}(V(g)Y)\Psi \\ &= \int e^{-i\sigma(g,g^{-1}h)} \Pi(\alpha_g(Y_{g^{-1}h}))\mathcal{U}(h)\Psi dh \\ &= \int \Pi(\alpha_g(Y_{g^{-1}h}))\mathcal{U}(g)\mathcal{U}(g^{-1}h)\Psi dh \\ &= \mathcal{U}(g) \int \Pi(Y_{g^{-1}h})\mathcal{U}(g^{-1}h)\Psi dh \\ &= \mathcal{U}(g)\widehat{\Pi}(Y)\Psi \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$ .

Réciproquement, soit  $\widehat{\Pi}' = \Phi_2 \circ \Phi_1(\widehat{\Pi})$  (posant  $(\Pi, \mathcal{V}) = \Phi_1(\widehat{\Pi})$ ), alors pour tout  $X, Y \in \mathcal{A}_1^{\sigma}$  :

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}'(X)\widehat{\Pi}(Y)\Psi &= \int \Pi(X_g)\mathcal{V}(g)\widehat{\Pi}(Y)\Psi dg \\ &= \int \widehat{\Pi}(\rho(X_g)V(g)Y)\Psi dX \\ &= \widehat{\Pi}\left(\int \rho(X_g)V(g)Y dg\right)\Psi = \widehat{\Pi}(X * Y)\Psi = \widehat{\Pi}(X)\widehat{\Pi}(Y)\Psi \end{aligned}$$

en utilisant (V $\rho$ 2).  $\widehat{\Pi}$  étant essentielle, on en conclut que :

$$\widehat{\Pi}' = \widehat{\Pi}$$

Soit  $B$  un opérateur borné sur  $\mathcal{H}$ , tel que  $B \in \Pi(\mathcal{A})' \cap \mathcal{V}(G)'$ , dans ces conditions (cf. (33)),  $B \in \widehat{\Pi}(\mathcal{A}_1^{\sigma})'$  et réciproquement d'après (34) et (35).

Ceci permet de conclure à la cyclicité simultanée d'un vecteur pour  $\widehat{\Pi}$  et  $(\Pi, \mathcal{V})$  puisque la cyclicité pour un ensemble d'opérateurs est équivalente à la cyclicité pour l'algèbre de Von Neumann engendrée.

Envisageons une représentation  $\widehat{\Pi}$  fidèle de  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$  et supposons que l'on ait un  $A$  dans  $\mathcal{A}$  tel que

$$\Pi(A) = 0.$$

Alors pour tout  $X$  dans  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$

$$\Pi(A)\widehat{\Pi}(X) = \widehat{\Pi}(\rho(A)X) = 0$$

d'où puisque  $\widehat{\Pi}$  est fidèle :

$$\rho(A)X = 0$$

et par suite ( $\rho$ 7)

$$A = 0$$

De même, supposons que  $g$  et  $h$  dans  $G$  sont tels que :

$$\mathcal{V}(g) = \mathcal{V}(h)$$

alors : (pour tout  $X$  dans  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$ )

$$\mathcal{V}(g)\widehat{\Pi}(X) = \mathcal{V}(h)\widehat{\Pi}(X)$$

$$\widehat{\Pi}((V(g) - V(h))X) = 0$$

et (V6) avec le fait que  $\widehat{\Pi}$  est fidèle, montre alors que  $g = h$ . L'affirmation concernant les équivalences unitaires des représentations  $\widehat{\Pi}$  et  $\widehat{\Pi}'$  est immédiate à vérifier d'après les définitions (34) et (35).

Enfin, considérons une représentation essentielle  $\widehat{\Pi}$  de  $\mathcal{A}_1^{\sigma_s}$  ( $\equiv \mathcal{A}_1^{\sigma_s}$ ) dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Pour tout  $\sigma \in S$  l'application  $\widehat{\Pi}^\sigma = \widehat{\Pi} \circ \Phi_{\sigma\sigma}$ , est une représentation essentielle de  $\mathcal{A}_1^{\sigma\sigma}$  (théorème 2). Le procédé décrit dans le théorème 4 (utilisant les opérateurs  $\rho(A)$  et  $V^\sigma(g)$ ) permet d'en déduire une  $\sigma$ -représentation covariante essentielle  $(\Pi^\sigma, \mathcal{U}^\sigma)$ . Montrons que l'ensemble  $\{(\Pi^\sigma, \mathcal{U}^\sigma \mid \sigma \in S)\}$  est une classe d'équivalence projective (définition 3) de représentations covariantes.

Soient donc  $(\Pi^\sigma, \mathcal{U}^\sigma)$  et  $(\Pi^{\sigma'}, \mathcal{U}^{\sigma'})$  deux représentations covariantes obtenues comme ci-dessus,  $\widehat{\Pi}^\sigma$  et  $\widehat{\Pi}^{\sigma'}$  les représentations de  $\mathcal{A}_1^{\sigma\sigma}$  et  $\mathcal{A}_1^{\sigma'\sigma'}$  associées. On a évidemment :

$$\widehat{\Pi}^{\sigma'} = \widehat{\Pi}^\sigma \circ \Phi_{\sigma'\sigma}$$

Les relations (évidentes)

$$\begin{aligned}\Phi_{\sigma'\sigma} \circ \rho(A) &= \rho(A) \circ \Phi_{\sigma'\sigma} \\ \Phi_{\sigma'\sigma} \circ V^{\sigma'}(g) &= e^{i\varphi(g)} V^\sigma(g) \circ \Phi_{\sigma'\sigma}\end{aligned}$$

(où  $\sigma'(h, g) = \sigma(h, g) + \varphi(hg) - \varphi(h) - \varphi(g)$  montrent que, pour tout  $A \in \mathcal{A}$  et tout  $X$  dans  $\mathcal{A}_1^{\sigma'\sigma'}$  :

$$\begin{aligned}\Pi^{\sigma'}(A)\widehat{\Pi}^{\sigma'}(X) &= \widehat{\Pi}^{\sigma'}(\rho(A)X) = \widehat{\Pi}^\sigma(\Phi_{\sigma'\sigma}(\rho(A)X)) \\ &= \widehat{\Pi}^\sigma(\rho(A)(\Phi_{\sigma'\sigma}(X))) = \Pi^\sigma(A)\widehat{\Pi}^\sigma(X)\end{aligned}$$

d'où

$$\Pi^{\sigma'} = \Pi^\sigma$$

D'autre part, pour tout  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{\sigma'}(g)\widehat{\Pi}^{\sigma'}(X) &= \widehat{\Pi}^{\sigma'}(V^{\sigma'}(g)X) = \widehat{\Pi}^\sigma(\Phi_{\sigma'\sigma}(V^{\sigma'}(g)X)) \\ &= \widehat{\Pi}^\sigma(e^{i\varphi(g)}V^\sigma(g)(\Phi_{\sigma'\sigma}(X))) = e^{i\varphi(g)}\mathcal{U}^\sigma(g)\widehat{\Pi}^\sigma(X)\end{aligned}$$

d'où :

$$\mathcal{U}^{\sigma'}(g) = e^{i\varphi(g)}\mathcal{U}^\sigma(g)$$

Les représentations covariantes  $(\Pi^\sigma, \mathcal{U}^\sigma)$  et  $(\Pi^{\sigma'}, \mathcal{U}^{\sigma'})$  sont donc bien projectivement équivalentes.

Inversement, étant donnée une classe d'équivalence projective de

représentations covariantes, on peut sélectionner le représentant  $(\Pi^\sigma, \mathcal{U}^\sigma)$  tel que

$$\mathcal{U}^\sigma(hg) = e^{i\sigma_0(h,g)} \mathcal{U}^\sigma(h) \mathcal{U}^\sigma(g)$$

et obtenir à l'aide du théorème 4 une représentation de  $\mathcal{A}_1^{\sigma_s}$ . Ce procédé est évidemment l'inverse du procédé ci-dessus.

Le théorème 4 est alors démontré.

### § III. — $\mathcal{A}_1^{\sigma_s}$ EST UNE $A^*$ -ALGÈBRE

Nous avons démontré dans la section précédente que  $\mathcal{A}_1^{\sigma_s}$  possédait une unité approchée. Nous utiliserons ce résultat dans cette section où l'on munit  $\mathcal{A}_1^{\sigma_s}$  d'une nouvelle norme qui en fait une  $C^*$ -Algèbre. On sait que les quatre quantités :

$$\begin{aligned}
 (a) &= \sup_{\widehat{\Pi} = * \text{-représentation de } \mathcal{A}_1^{\sigma_s}} \|\widehat{\Pi}(X)\| \\
 (b) &= \sup_{\widehat{\Pi} = * \text{-représentation irréductible de } \mathcal{A}_1^{\sigma_s}} \|\widehat{\Pi}(X)\| \\
 (c) &= \sup_{\varphi = \text{forme positive de norme 1 sur } \mathcal{A}_1^{\sigma_s}} \varphi(X^* * X)^{\frac{1}{2}} \\
 (d) &= \sup_{\varphi = \text{état pur normalisé de } \mathcal{A}_1^{\sigma_s}} \varphi(X^* * X)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

sont égales et définissent sur  $\mathcal{A}_1^{\sigma_s}$  un pseudonorme notée  $X \rightarrow \|X\|$  et qui satisfait :

$$\|X^* * X\| = \|X\|^2 \quad (\forall X \in \mathcal{A}_1^{\sigma_s})$$

En général, on n'obtient pas par ce procédé une norme. Dans le cas de  $\mathcal{A}_1^{\sigma_s}$ , on a cependant le

**THÉORÈME 5.** —  $\mathcal{A}_1^{\sigma_s}$  est une  $A^*$ -Algèbre, c'est-à-dire que (38) définit une norme sur  $\mathcal{A}_1^{\sigma_s}$ . Avec cette norme  $\mathcal{A}_1^{\sigma_s}$  est une  $C^*$ -Algèbre incomplète. Sa complétion (la  $C^*$ -algèbre enveloppante) sera notée  $\overline{\mathcal{A}_1^{\sigma_s}}$  :

Il suffit de montrer que  $\|X\| = 0$  implique  $X = 0$ . Nous utiliserons la définition (38 c) de  $\|X\|$ .



LEMME 5. — Soit  $\eta$  une forme positive sur  $\mathcal{A}$  et  $Z$  un élément de  $\mathcal{A}_1^G \cap \mathcal{A}_\infty^G$ .  
 Posons, pour tout  $X$  de  $\mathcal{A}_1^{G\sigma}$

$$(39) \quad \eta_Z(X) = \eta((Z^* * X * Z)_e)$$

$\eta_Z$  est une forme positive sur  $\mathcal{A}_1^{G\sigma}$  telle que :

$$(40) \quad \eta_Z(X^* * X) = \int \eta(\alpha_{h^{-1}}((X * Z)_h)^*(\alpha_{h^{-1}}((X * Z)_h)))dh$$

Etant donné  $Y, Z \in \mathcal{A}_1^G \cap \mathcal{A}_\infty^G$ , on a (théorème 3)  $Z^* * Y \in \mathcal{A}_1^G \cap \mathcal{A}_\infty^G$  et :

$$(Z^* * Y)_e = \int e^{-i\sigma(h, h^{-1})\Delta(h)^{-1}e^{i\sigma(h, h^{-1})}[\alpha_h(Z_{h^{-1}}^*)][\alpha_h(Y_{h^{-1}})]dh = \int \alpha_{h^{-1}}(Z_h^* Y_h)dh$$

et, puisque  $\eta$  est continue :

$$\eta((Z^* * Y)_e) = \int \eta(\alpha_{h^{-1}}(Z_h^*) \cdot \alpha_{h^{-1}}(Y_h))dh$$

En particulier  $\eta((Y^* * Y)_e) \geq 0$  et le lemme s'obtient en posant  $Y = X * Z$ .

Utilisant la définition (38 c) de la pseudonorme  $\| \cdot \|$ , on obtient pour un  $X$  tel que  $\| X \| = 0$ ,

$$\xi(X^* * X) = 0$$

pour toute forme positive  $\xi$  sur  $\mathcal{A}_1^{G\sigma}$  et, en particulier, pour toute forme positive  $\eta$  sur  $\mathcal{A}$  et tout  $Z \in \mathcal{A}_1^G \cap \mathcal{A}_\infty^G$

$$\eta_Z(X^* * X) = 0.$$

Ceci implique puisque l'intégrand de (40) est continu en  $h$  que l'on a :

$$\eta(\alpha_{h^{-1}}[((X * Z)_h)^*(X * Z)_h]) = 0$$

pour toute forme positive  $\eta$  sur  $\mathcal{A}$ , tout  $h$  dans  $G$  et tout  $Z$  dans  $\mathcal{A}_1^G \cap \mathcal{A}_\infty^G$ .  
 $\mathcal{A}$  étant une  $C^*$ -algèbre et  $\varphi \circ \alpha_{h^{-1}}$  une nouvelle forme positive, on obtient alors :

$$(X * Z)_h = 0$$

pour tout  $h$  dans  $G$ , d'où  $X * Z = 0$  pour tout  $Z \in \mathcal{A}_1^G \cap \mathcal{A}_\infty^G$ . Mais, on peut toujours choisir une unité approchée dont les valeurs  $A_\lambda \varepsilon_\nu$  sont à support compact et par continuité (Lemme 4 (26)), on obtient :

$$X = 0$$

Remarquons que l'application :

$$\Pi \rightarrow \Pi \circ \Phi_{\sigma' \sigma}$$

est une bijection de l'ensemble des  $\ast$ -représentations de  $\mathcal{A}_1^{\sigma_0}$  dans l'ensemble des  $\ast$ -représentations de  $\mathcal{A}_1^{\sigma'}$  et que, pour tout  $X$  dans  $\mathcal{A}_1^{\sigma_0}$  :

$$\| \Pi(X) \| = \| (\Pi \circ \Phi_{\sigma'_0})(\Phi_{\sigma'_0}(X)) \|$$

donc que

$$\| X \| = \| \Phi_{\sigma'_0}(X) \|$$

en utilisant la définition (38 a).

Par suite, la bijection  $\Phi_{\sigma'_0}$  isométrique pour la norme (38) peut s'étendre par continuité à  $\overline{\mathcal{A}_1^{\sigma'_0}}$  et on peut définir  $\overline{\mathcal{A}_1^{\sigma_0}} = \overline{\mathcal{A}_1^{\sigma'_0}}$ . Ici encore, le choix de l'exposant  $\sigma_0$  de la classe  $S$  importe peu.

Les théorèmes 4 et 5 entraînent immédiatement que :

COROLLAIRE. — Il existe une  $\sigma$ -représentation fidèle de  $\mathcal{A}$ .

#### § IV. — ALGÈBRE DE VON NEUMANN ENVELOPPANTE $W_\sigma$

Munie de la norme (38), nous avons vu que  $\overline{\mathcal{A}_1^{\sigma_0}}$  est une  $C^*$ -algèbre ; le concept d'algèbre de Von Neumann enveloppante  $W_\sigma$  est alors clair : il s'agit du bidual  $\mathcal{A}_1^{\sigma_0**}$  (pour la norme de  $C^*$ -algèbre de  $\mathcal{A}_1^{\sigma_0}$ ). On sait ([4], 12.1.3) qu'une définition équivalente est la suivante : l'algèbre de Von Neumann enveloppante est la fermeture faible de l'ensemble  $\widehat{R}(\mathcal{A}_1^{\sigma_0})$  des représentants pour la représentation universelle  $\widehat{R}$  de  $\mathcal{A}_1^{\sigma_0}$ .

Sous cette forme, on voit que  $W_\sigma$  est une algèbre de Von Neumann contenant  $\mathcal{A}_1^{\sigma_0}$  (en ce sens que  $W_\sigma$  contient  $\widehat{R}(\mathcal{A}_1^{\sigma_0})$  lui-même en bijection avec  $\mathcal{A}_1^{\sigma_0}$  car  $\widehat{R}$  est fidèle).

Le théorème 4 montre qu'une définition équivalente de  $W_\sigma$  est la suivante :

$W_\sigma$  est la fermeture faible de l'ensemble

$$\{ \mathcal{R}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{U}(G) \}$$

où  $(\mathcal{R}, \mathcal{U})$  est la  $\sigma$ -représentation covariante attachée (théorème 4) à la représentation universelle  $\widehat{R}$  de  $\mathcal{A}_1^{\sigma_0}$ .

Il est alors clair que  $W_\sigma$  contient  $\mathcal{A}$  (resp.  $G$ ) c'est-à-dire contient  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$

(resp.  $\mathcal{U}(G)$ ) ; le corollaire du théorème 5 permettant l'identification de  $\mathcal{A}$  avec  $R(\mathcal{A})$  (resp. de  $G$  avec  $\mathcal{U}(G)$ ).  $\mathcal{A}$  et  $G$  sont ainsi plongés dans  $W_\sigma$  en tant que sous-algèbre et en tant que sous-groupe du groupe unitaire de  $W_\sigma$ .

Désignons par  $L_1^\sigma(G)$  l'algèbre des fonctions complexes définies presque partout dans  $G$  de norme intégrable où le produit est :

$$(\varphi *_{\sigma} \varphi')(g) = \int e^{-i\sigma(h, h^{-1}g)} \varphi(h) \varphi'(h^{-1}g) dh$$

et l'adjonction est :

$$(\varphi(*, \sigma))(g) = \overline{\varphi(g^{-1})} \Delta(g)^{-1} e^{i\sigma(g, g^{-1})}$$

$L_1^\sigma(G)$  est obtenu comme cas particulier de  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$  quand  $\mathcal{A} \equiv \mathbb{C}$  est le corps des complexes (munis de sa structure de  $C^*$ -algèbre naturelle) et où  $G$  agit sur  $\mathbb{C}$  trivialement.

Le théorème 4 attache alors à toute  $*$ -représentation essentielle de  $L_1^\sigma(G)$ , une  $\sigma$ -représentation du groupe  $G$ , résultat bien connu [2] se réduisant si  $\sigma = 0$  au fait que les représentations de  $G$  sont données (et réciproquement) par les  $*$ -représentations essentielles de  $L_1(G)$ .

Le théorème 5 exprime qu'il y a « suffisamment » de représentations pour que les points de  $L_1^\sigma(G)$  soient séparés par celles-ci. Le corollaire du théorème 5 montre l'existence de  $\sigma$ -représentations fidèles de  $G$ .

Nous allons plonger  $L_1^\sigma(G)$  dans  $W_\sigma$  : pour ce faire définissons : pour  $\varphi \in L_1^\sigma(G)$

$$\widehat{R}(\varphi) = \int dg \varphi(g) \mathcal{U}(g)$$

Il est facile de se convaincre que  $f \rightarrow \widehat{R}(f)$  est une  $*$ -représentation de  $L_1^\sigma(G)$ , fidèle et telle que  $\widehat{R}(\varphi) \in [\mathcal{U}(G)]^n$  ; l'injection de  $L_1^\sigma(G)$  dans  $W_\sigma$  est ainsi réalisée (\*).

Pour finir, on remarque que l'application qui, à toute représentation  $\Pi$  de  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$  fait correspondre la représentation  $\Pi \circ \Phi_{\sigma, \sigma'}$  de  $\mathcal{A}_1^{\sigma'}$  où  $\sigma'$  est un exposant équivalent à  $\sigma$  est une bijection de l'ensemble des représentations cycliques de  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$  sur l'ensemble des représentations cycliques de  $\mathcal{A}_1^{\sigma'}$ . On en conclut que la représentation universelle  $\widehat{R}$  de  $\mathcal{A}_1^{\sigma}$  est unitairement équivalente à la représentation universelle  $\widehat{R}'$  de  $\mathcal{A}_1^{\sigma'}$ . D'après le théorème 4, on voit que l'on a un opérateur isométrique  $U$  tel que

$$R'(A)U = UR(A)$$

(\*) Nous remercions S. Doplicher pour nous avoir signalé ce fait.

et

$$\mathcal{U}'(g)U = U\mathcal{U}(g)$$

et par suite en utilisant la définition de  $W_\sigma$  et  $W_{\sigma'}$  (sous la troisième forme donnée plus haut) on voit que  $W_\sigma$  et  $W_{\sigma'}$  sont spatialement isomorphes *via*  $U$ .

§ V. — EXEMPLE

Afin d'illustrer ce qui précède, nous donnons à titre d'exemple, deux nouvelles façons de construire, dans le cas d'un nombre fini de degrés de liberté, la  $C^*$ -algèbre d'un champ de bosons libres, introduite par D. Kastler dans [6].

Envisageons un espace vectoriel de réel dimension finie  $H_1$  et désignons par  $\tilde{H}_1$  son dual ; la connexion entre  $H_1$  et  $\tilde{H}_1$  est donnée par la forme bilinéaire  $x \in H_1, p \in \tilde{H}_1 \rightarrow \langle x, p \rangle$  nombre réel. Considérant  $H = H_1 \times \tilde{H}_1$ , on peut définir sur  $H$  une forme symplectique

$$(41) \quad \sigma[(x, p), (y, q)] = \langle x, q \rangle - \langle y, p \rangle$$

(il est immédiat de vérifier que  $\sigma$  est bilinéaire et antisymétrique).

Remarquant que  $\sigma$  est un exposant normal pour le groupe abélien sous-jacent à  $H$ , on voit que l'on sait construire par le procédé décrit au paragraphe IV l'algèbre  $L_1^\sigma(H)$  qui est exactement le même objet que celui défini sous le nom de  $L_1(H, \sigma)$  dans [6] (théorème 4) en particulier le produit et l'involution sont donnés pour  $\varphi, \varphi' \in L_1(H)$  par :

$$(\varphi *_{\sigma} \varphi')(x, p) = \int e^{-i\sigma[(y, q), (x, p)]} \varphi(y, q) \varphi'(x - y, p - q) dy dq$$

$$(\varphi^{(*, \sigma)})(x, p) = \overline{\varphi(-x, -p)}$$

Considérons maintenant l'algèbre  $\mathcal{A} = L_1(H_1)$  pour la convolution et l'adjonction habituelle et faisons agir  $\tilde{H}_1$  sur  $\mathcal{A}$  de la façon suivante :

$$[\alpha_p(\varphi)](x) = e^{+2i\langle x, p \rangle} \varphi(x)$$

pour tout  $\varphi$  de  $L_1(H_1)$ . La note (1) s'applique à ce cas et il est donc possible de construire  $\mathcal{A}_1^{\tilde{H}_1}$ . Pour  $X$  dans  $\mathcal{A}_1^{\tilde{H}_1}$ , définissons  $\widehat{X} \in L_1(H)$  de la façon suivante

$$\widehat{X}(x, p) = e^{-i\langle x, p \rangle} X_p(x)$$

L'application évidemment linéaire  $X \rightarrow \widehat{X}$  est bijective parce qu'elle est isométrique :

$$\|\widehat{X}\|_1 = \|X\|_1$$

où la norme dans le premier membre est prise dans  $L_1(H)$ . Il est aisé de vérifier que, de plus :

$$\widehat{X} *_{\sigma} \widehat{Y} = \widehat{X *_{\sigma} Y}$$

et que

$$(\widehat{X})^{(*, \sigma)} = \widehat{X^{(*, \sigma)}}$$

Notons que, pour ces deux constructions, on aurait pu remplacer  $H_1$  (resp.  $\widetilde{H}_1$ ) par un de ses sous-espaces vectoriels ; le fait que la dualité soit ou non séparante, ou, ce qui revient au même, le fait que la forme symplectique  $\sigma$  soit ou non régulière, n'influe en rien sur la possibilité de construire  $L_1^{\sigma}(H)$  dans le cas d'un nombre fini de degrés de liberté.

---

## APPENDICE

## EXPOSANTS SUR UN GROUPE

DÉFINITION A [2]. — On désigne par *exposant sur un groupe G*, une fonction  $\sigma$  de  $G \times G$  à valeurs réelles, continue et telle que :

$$(A1) \quad \sigma(e, e) = 0$$

$$(A2) \quad \sigma(hg, f) + \sigma(h, g) = \sigma(h, gf) + \sigma(g, f).$$

L'ensemble  $E(G)$  des exposants sur le groupe  $G$  n'est jamais vide puisque, par exemple, pour toute fonction  $\varphi$  définie dans  $G$ , à valeurs réelles, continue et s'annulant à l'identité  $e$  de  $G$ , l'application :

$$(x, y) \rightarrow \varphi(xy) - \varphi(x) - \varphi(y)$$

est un exposant sur  $G$ . La vérification dans ce cas des relations (A1), (A2) est triviale. La continuité du produit dans  $G$  implique la continuité de l'application ci-dessus. Tout exposant obtenu par ce procédé sera dit *trivial*.

L'ensemble  $E(G)$  des exposants sur le groupe  $G$  forme évidemment un espace vectoriel réel pour la loi naturelle

$$(A3) \quad (a\sigma + b\sigma')(h, g) = a\sigma(h, g) + b\sigma'(h, g)$$

pour tout  $\sigma, \sigma' \in E(G)$ ,  $a, b$  réels.

L'ensemble de tous les exposants triviaux sur le groupe  $G : E_T(G)$  est un sous-espace vectoriel de  $E(G)$  et il est intéressant de considérer le quotient  $E(G)/E_T(G)$  obtenu par le découpage de  $E(G)$  en classes d'équivalence pour la relation :

$$(A4) \quad \sigma \sim \sigma' \iff \sigma - \sigma' \text{ est trivial.}$$

## PROPRIÉTÉS DES EXPOSANTS

Les relations suivantes sont utiles :

$$(A5) \quad \sigma(g, e) = \sigma(e, g) = 0 \quad \forall g \in G$$

$$(A6) \quad \sigma(g, g^{-1}) = \sigma(g^{-1}, g)$$

(Il suffit de porter successivement dans (A2))

$$\begin{aligned} g &= f = e \\ h &= g = e \\ g &= h^{-1}, \quad f = h \end{aligned}$$

et d'utiliser (A1).

La relation (A6) nous permet de considérer (sans crainte d'inconsistance) les exposants particuliers suivants (et qui seront dits *normaux*) : ceux pour lesquels :

$$(A7) \quad \sigma(h, h^{-1}) = 0$$

Pour ces derniers, on a les propriétés :

$$\begin{aligned}\sigma(h^{-1}, g) &= \sigma(g, g^{-1}h) = \sigma(g^{-1}h, g^{-1}) \\ \sigma(h^{-1}, g) + \sigma(h, h^{-1}g) &= 0\end{aligned}$$

en utilisant (A1), (A2), (A5) et (A7).

Notons qu'il existe des exposants normaux, par exemple, l'exposant trivial construit à l'aide d'une fonction antisymétrique sur  $G$ , c'est-à-dire telle que :

$$\varphi(h) + \varphi(h^{-1}) = 0.$$

Nous avons le résultat suivant :

LEMME A. — Toute classe d'équivalence  $S \in \frac{E(G)}{E_T(G)}$  pour la relation (A4) contient des exposants normaux, ou, de manière équivalente,

$$E(G) = E_N(G) + E_T(G)$$

où  $E_N(G)$  désigne le sous-espace vectoriel de  $E(G)$  des exposants normaux et où la somme n'est pas forcément directe (L'exemple donné pour illustrer (A7) était justement un élément non nul de  $E_N(G) \cap E_T(G)$ ).

Soit  $\sigma \in E(G)$ . L'application :

$$\tilde{\sigma} : (h, g) \rightarrow \sigma(g^{-1}, h^{-1})$$

est évidemment un exposant sur  $G$ .

$$\text{Posons : } \sigma_N = \frac{\sigma - \tilde{\sigma}}{2}$$

$$\sigma_T = \frac{\sigma + \tilde{\sigma}}{2} \quad \text{d'où} \quad \sigma = \sigma_N + \sigma_T$$

et prouvons que  $\sigma_N$  (resp.  $\sigma_T$ ) est normal (resp. trivial) ; on a :

$$\sigma_N(h, h^{-1}) = \frac{1}{2} [\sigma(h, h^{-1}) - \sigma(h^{-1}, h)] = 0$$

(en vertu de (A6)).

Prouvons maintenant que  $\sigma + \tilde{\sigma} = 2\sigma_T$  est trivial. Pour cela, calculons :

$$\begin{aligned}(\sigma + \tilde{\sigma})(h, f) + \sigma(hf, f^{-1}h^{-1}) &= \sigma(h, f) + \sigma(f^{-1}, h^{-1}) + \sigma(hf, f^{-1}h^{-1}) \\ &= \sigma(h, f) + \sigma(h, h^{-1}) + \sigma(hf, f^{-1}) \\ &= \sigma(h, h^{-1}) + \sigma(h, e) + \sigma(f, f^{-1}) \\ &= \sigma(h, h^{-1}) + \sigma(f, f^{-1})\end{aligned}$$

d'où :

$$(A9) \quad \sigma(h, f) + \sigma(f^{-1}, h^{-1}) = \sigma(h, h^{-1}) + \sigma(f, f^{-1}) - \sigma(hf, f^{-1}h^{-1})$$

Par suite :

$$\sigma_T(h, f) = \frac{1}{2} [\sigma(hf, f^{-1}h^{-1}) - \sigma(h, h^{-1}) - \sigma(f, f^{-1})]$$

est bien trivial puisque :

$$h \rightarrow \sigma(h, h^{-1})$$

est continu et que  $\sigma(e, e^{-1}) = 0$ .

Nous avons au passage démontré la relation (A9) dont nous faisons un usage fréquent.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. DOPLICHER, D. KASTLER et D. W. ROBINSON, Covariance Algebras in Field Theory and Statistical Mechanics (*à paraître*).
- [2] V. BARGMANN, *Ann. Math.*, 59, 1, 1954.
- [3] N. BOURBAKI, Intégration. Hermann, Paris.
- [4] J. DIXMIER, Les C\*-algèbres et leurs représentations. Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [5] D. KASTLER et D. W. ROBINSON, Invariant States in Statistical Mechanics. Preprint, 1966.
- [6] D. KASTLER, *Commun. Math. Phys.*, 1, 14, 1965.

(Manuscrit reçu le 23 novembre 1966).

---