

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

FRÉDÉRIC PHAM

## **Singularités des processus de diffusion multiple**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 6, n° 2 (1967), p. 89-204

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1967\\_\\_6\\_2\\_89\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__6_2_89_0)

© Gauthier-Villars, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Singularités des processus de diffusion multiple

par

Frédéric PHAM

(C. E. R. N.-Genève et C. E. N.-Saclay).

---

ABSTRACT. — As Coleman and Norton recently noticed, the phenomenological notion of « multiple scattering » allows a very simple interpretation of Landau singularities of the S matrix in the physical region, for processes with an arbitrary number of particles. Here this physical interpretation is deepened through a geometrical idea: *Landau singularities are apparent contours*. Using certain methods of differential topology, inspired by Thom, and developed in the Appendices, one shows that these apparent contours have in the physical region a much simpler structure than one would imagine. This gives the opportunity of formulating in a precise way the usual conjectures on the analyticity of the S matrix (distorsion of the physical region, Cutkosky's rules, etc.), and of providing a simple link between these conjectures and the multiple scattering idea: thus Cutkosky's rules lead very directly to the *factorization property of the S matrix for large timelike intervals*.

Still using the apparent contour idea, one studies systematically the « hierarchy » of the singularities for the various processes, thus supporting the conjectures through many mathematical consistency arguments.

RÉSUMÉ. — Comme Coleman et Norton l'ont remarqué récemment, la notion phénoménologique de « diffusion multiple » permet d'interpréter très simplement les singularités de Landau de la matrice S dans la région physique, pour des processus à un nombre quelconque de particules. Cette interprétation physique est ici approfondie, grâce à une idée géométrique : *les singularités de Landau sont des contours apparents*. Utilisant des méthodes de topologie différentielle inspirées par Thom, et développées dans les Appendices, on montre que la structure de ces contours apparents dans la région physique est beaucoup plus simple qu'on pouvait l'imaginer. On en

profite pour formuler avec précision les conjectures habituelles sur l'analyticité de la matrice  $S$  (détournement de la région physique, règles de Cutkosky, etc.), et pour les rattacher très simplement à l'idée de « diffusion multiple » : ainsi les règles de Cutkosky conduisent tout droit à la propriété de *factorisation de la matrice  $S$  pour des événements éloignés dans le temps*.

Toujours grâce à l'idée de contour apparent, on étudie systématiquement la « hiérarchie » des singularités des divers processus, étayant ainsi les conjectures par de nombreux arguments de cohérence mathématique.

---

## PLAN

INTRODUCTION. — Qui traite à fond l'idée physique de diffusion multiple, et résume les résultats topologiques les plus frappants . . . . .	90
CHAPITRE 0. — Étude de la notion abstraite (combinatoire) de <i>graphe</i> , où l'on voit poindre l'idée d'une « catégorie des graphes » . . . . .	110
CHAPITRE I <sup>er</sup> . — Étude topologique des espaces que la Physique associe aux « graphes de diffusion multiple », et des applications associées aux « contractions » de ces graphes; on y met en relief les propriétés des applications <i>composées</i> obtenues en composant les contractions . . . . .	127
CHAPITRE II. — Où l'on voit apparaître la « hiérarchie » des singularités, en étudiant les propriétés analytiques de la matrice $S$ et de ses parties absorbantes . . . . .	145
CHAPITRE III. — Où les bizarreries des graphes à lignes multiples sont expliquées par l'existence des processus élastiques . . . . .	163
APPENDICE 0. — Un lemme d'analyse, utile pour établir la factorisation de la matrice $S$ lors d'une diffusion multiple . . . . .	108
APPENDICE I. — Quelques idées de Thom sur les types stables de singularités d'applications différentiables . . . . .	177
APPENDICE II. — Comment la composition des applications donne naissance à de nouveaux types de singularités. . . . .	184
APPENDICE III. — Où l'on étudie les « détournements complexes » de variétés réelles, et les propriétés analytiques des intégrales « presque réelles » . . . . .	190
APPENDICE IV. — Un cas simple de groupe fondamental commutatif . . . . .	201

## I

### INTRODUCTION

Les difficultés auxquelles se heurtait la théorie des champs avaient conduit en 1943 Heisenberg [1] à dégager la notion de « matrice  $S$  », qu'il présentait comme étant l'observable fondamentale de la physique, et le seul concept

destiné à survivre dans « la théorie future ». Depuis lors, de grands progrès ont été faits dans l'étude des propriétés générales de la matrice  $S$ , et surtout de son *analyticité*, permettant de relier entre eux de nombreux résultats expérimentaux et donnant des vues profondes sur la dynamique des interactions fortes. Dans l'étude générale de ces propriétés analytiques, on peut distinguer deux styles de recherche : le premier consiste à démontrer rigoureusement, à partir des axiomes de la théorie des champs (aujourd'hui épurée et affermie sur ses bases [17] [36]) que la matrice  $S$  est certainement analytique dans tel ou tel domaine (de l'espace complexe des impulsions-énergies); bien que cette route soit longue et difficile, elle a déjà conduit à quelques prédictions vérifiables expérimentalement. La seconde voie, heuristique, est celle que nous allons adopter : elle consiste à essayer de deviner, au contraire, à quels endroits la matrice  $S$  sera obligatoirement singulière; le pas décisif a été fait par Landau [18], se guidant sur la théorie des perturbations; les études faites après lui ont élargi notre compréhension, confirmant l'existence des « singularités de Landau » à un niveau plus profond que la théorie des perturbations, mais en ce qui concerne les résultats bruts on n'a guère gagné en précision : par exemple, on ne sait toujours pas délimiter en général le « feuillet physique », ni donner de critères simples pour qu'une singularité de Landau y soit effectivement présente. En attendant de comprendre ce mystérieux « feuillet physique », il est intéressant de voir ce qu'on peut dire de la *région physique* : après tout, c'est là qu'ont lieu les expériences. Pour les processus à deux corps, les seules singularités de Landau présentes dans la région physique sont les « seuils normaux », ce qui ne nous conduit pas très loin. Mais quand on augmente le nombre de particules, les singularités de « graphes de Feynman » de plus en plus compliqués se mettent à rencontrer la région physique, ce qui intuitivement se comprend ainsi : les processus « virtuels » que décrivaient ces graphes deviennent « vraiment » possibles, *processus de diffusion multiple* tels qu'on peut en observer dans une chambre à bulles. A cette simplification de l'interprétation physique <sup>(1)</sup>, s'ajoute une simplification mathématique : nous montrerons que la structure topologique des singularités de Landau est, dans la région physique, la plus banale qu'on puisse imaginer, tout à fait semblable à la structure des seuils normaux, et cela nous permettra de formuler de façon simple et précise les conjectures usuelles sur l'analyticité de la matrice  $S$  (règles de Cutkosky [4], etc.), qui étaient jusqu'à présent enveloppées d'un brouillard protecteur. Il nous faudra

---

(1) Mise en relief récemment par Coleman et Norton [3].

bien sûr donner des arguments précis en faveur de ces conjectures (n'ayant pas encore l'ambition de les démontrer en théorie des champs). La *notion phénoménologique de diffusion multiple* nous fournira de tels arguments. En particulier, nous verrons que les règles de Cutkosky sont liées à la propriété de *factorisation de la matrice S pour une succession de processus largement séparés dans le temps*, propriété très importante <sup>(2)</sup> qui permet de comprendre pourquoi la matrice S, définie seulement en termes d'états *asymptotiques* de diffusion aux temps  $-\infty$  et  $+\infty$ , peut néanmoins servir à décrire une expérience de laboratoire, où les particules initiales doivent être *préparées* et les particules finales *détectées* à des instants finis. Ces arguments physiques (développés dans la section 3 de cette introduction) me semblent fournir une justification beaucoup plus convaincante que la théorie des perturbations <sup>(3)</sup>. Nous les compléterons par un autre type d'arguments, destinés à servir de jalons pour la preuve future des conjectures : on soupçonnait depuis longtemps, et cette idée s'est un peu précisée [30], qu'une certaine « hiérarchie » des graphes rend leurs singularités logiquement dépendantes les unes des autres; cette interdépendance fera l'objet dans les chapitres suivants (et surtout au chap. II) d'une étude systématique qui j'espère convaincra le lecteur de la puissance des méthodes topologiques <sup>(4)</sup>; en particulier, des arguments mathématiques tout à fait généraux nous permettront de déduire « en partie » <sup>(5)</sup> les conjectures pour les graphes d'ordre supérieur une fois admises pour les graphes d'ordre inférieur.

---

<sup>(2)</sup> Goldberger et Watson [8]. Il est amusant de noter qu'une propriété très analogue de factorisation des amplitudes est le point de départ de la formulation de la mécanique quantique selon Feynman [6], formulation qui lui a justement permis de découvrir ses graphes.

<sup>(3)</sup> Ce qui ne nous empêchera pas de justifier les conjectures *aussi* en théorie des perturbations : cf., section 4 de cette introduction.

<sup>(4)</sup> Joueront un rôle essentiel : d'une part les idées de Thom sur les singularités des applications différentiables [37]; d'autre part les techniques générales d'étude de l'analyticité des intégrales multiples, techniques issues du travail de Leray [22], et développées par Fotiadi, Froissart, Lascoux et l'auteur [7] [28]; pour un exposé d'ensemble, cf. [29]; pour la simplification apportée ici par la restriction au domaine *réel*, cf., l'appendice III du présent travail.

<sup>(5)</sup> Pour les déduire *en totalité* (et aussi pour donner le départ de la récurrence), il faudrait ajouter à ces arguments mathématiques un ingrédient supplémentaire : *l'unitarité de la matrice S* est un candidat évident, et permet en effet d'aller jusqu'au bout dans des cas particuliers simples, mais je n'ai pas essayé de m'attaquer au cas général, craignant de me perdre dans l'extrême complexité combinatoire des relations d'unitarité.

## 1. Rappel de propriétés générales de la matrice $S$ .

### 1.1. La matrice $S$ .

Le fait fondamental, qui permet de parler de la matrice  $S$ , est l'existence d'états asymptotiques [10] [31], c'est-à-dire le fait que tout système physique tend à se séparer <sup>(6)</sup>, aux temps  $-\infty$  et  $+\infty$ , en des systèmes (appelés *in* et *out*) de particules bien différenciées, indépendantes. Pour décrire un ensemble  $I$  de particules indépendantes, on peut choisir comme variables canoniques, outre les spins <sup>(7)</sup> et nombres quantiques internes de chacune de ces particules, leurs *impulsions-énergies*  $p_i$  ( $i \in I$ ), appartenant à la nappe d'hyperboloïde

$$\mathcal{M}_i = \{ p_i = (p_i^0, \mathbf{p}_i) \in \mathbb{R}^4 \mid p_i^2 \equiv (p_i^0)^2 - \mathbf{p}_i^2 = m_i^2 ; p_i^0 > 0 \}$$

où  $m_i$  est la *masse* (supposée  $\neq 0$ ) de la particule  $i$ . Un *état* du système est donné par une « fonction d'onde »  $\psi(p^1)$ , de carré sommable sur la « couche de masse »  $\mathcal{M}^1 = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$  munie de la mesure

$$\mu^1 = \prod_{i \in I} \mu_i, \quad \mu_i = d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2).$$

On note  $\langle \psi | S | \varphi \rangle$  l'*élément de matrice*  $S$  entre deux tels états, c'est-à-dire l'amplitude de transition d'un état *in* décrit par la fonction d'onde  $\varphi(p^1)$  à un état *out* décrit par la fonction d'onde  $\psi(p^1)$ . Il est commode d'introduire le « noyau intégral »  $\langle p^j | S | p^i \rangle$  défini par l'expression symbolique

$$\langle \psi | S | \varphi \rangle = \int_{iU_j} \langle p^j | S | p^i \rangle \bar{\psi}(p^j) \varphi(p^i)$$

où le symbole  $\int_{iU_j}$  doit s'interpréter comme une intégration sur la couche de masse  $\mathcal{M}^{iU_j}$ , avec la mesure  $\mu^{iU_j}$ . Ce noyau intégral  $\langle p^j | S | p^i \rangle$  est une

<sup>(6)</sup> Pourvu qu'aucune particule de masse nulle n'entre en jeu.

<sup>(7)</sup> On se limitera pour simplifier au cas de particules de *spin zéro*.

distribution <sup>(8)</sup> sur la variété  $\mathcal{M}^{I \cup J}$ . L'invariance par translation <sup>(9)</sup> de la matrice  $S$  entraîne immédiatement que la distribution  $\langle p^J | S | p^I \rangle$  se factorise en

$$\langle p^J | S | p^I \rangle = \delta^4(p_I - p_J) \langle p^J | S | p^I \rangle$$

où l'on a posé  $p_I = \sum_{i \in I} p_i$ ,  $p_J = \sum_{j \in J} p_j$ , et où  $\langle p^J | S | p^I \rangle$  désigne une distribution qui peut être restreinte à  $\{p_I - p_J = 0\}$ . On utilisera les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^u &= \text{l'espace euclidien } \{(p_i)_{i \in I \cup J} \mid p_I - p_J = 0\} \\ &\quad (\text{« conservation de l'impulsion-énergie »}); \\ \mathcal{F}^u &= \mathcal{E}^u \cap \mathcal{M}^{I \cup J}; \end{aligned}$$

la distribution  $\langle p^J | S | p^I \rangle$  est considérée comme définie sur cette variété  $\mathcal{F}^u$ .

## 1.2. « Décomposition en paquets » (cluster decomposition).

Imaginons un processus  $I \rightarrow J$  où les particules de  $I \cup J$  sont groupées en « paquets » situés à de *grandes distances d'espace* les uns des autres. Intuitivement, on s'attend [39] à ce que tous ces paquets représentent des processus indépendants les uns des autres, de sorte que l'amplitude de transition sera simplement le *produit* des amplitudes de chacun de ces processus. Et en effet, on démontre [12] la

### PROPRIÉTÉ DE « CLUSTER »

Soient  $\mathcal{K}$  une partition non triviale de  $I \cup J$ ,  $a = (a_K)_{K \in \mathcal{K}}$  une famille de quadrivecteurs tels que *toutes leurs différences*  $a_K - a_{K'}$  *soient du genre espace* (c'est-à-dire  $(a_K - a_{K'})^2 < 0$ ),  $\varphi_a$  [resp.  $\psi_a$ ] la fonction d'onde déduite

<sup>(8)</sup> C'est une conséquence du *théorème nucléaire* de Schwartz et du fait que la matrice  $S$  est un opérateur *borné* (cet argument m'a été indiqué par D. Iagolnitzer, qui l'avait appris de D. Ruelle).

<sup>(9)</sup> L'invariance par translation s'écrit  $\langle \psi | S | \varphi \rangle = \langle \psi_a | S | \varphi_a \rangle$ , où  $\varphi_a$  [resp.  $\psi_a$ ] désigne l'état « translaté du quadrivecteur  $a$  », défini par

$$\varphi_a(p^I) = e^{i \sum_{i \in I} p_i \cdot a} \varphi(p^I)$$

de  $\varphi$  [resp.  $\psi$ ] en opérant sur chaque particule  $i \in I$  [resp.  $J$ ] une translation de vecteur  $a_{\mathbf{k}_i}$ ,  $\mathbf{K}_i \ni i$  [c'est-à-dire

$$\varphi_a(p^i) = e^{i \sum_{\mathbf{k}_i \in I} p_i \cdot a_{\mathbf{k}_i}} \varphi(p^i).$$

Alors, quand tous les  $(a_{\mathbf{k}} - a_{\mathbf{k}'})^2$  tendent vers moins l'infini,  $\langle \psi_a | \mathbf{S} | \varphi_a \rangle$  tend vers l'expression

$$\int \left( \prod_{I \cup J, \mathbf{K} \in \mathcal{K}} \langle p^{i \cap \mathbf{K}} | \mathbf{S} | p^{i \cap \mathbf{K}} \rangle \right) \bar{\psi}(p^j) \varphi(p^i)$$

### 1.3. Définition des amplitudes tronquées.

Les amplitudes tronquées  $\langle p^j | \mathbf{S} | p^i \rangle_{\tau}$  sont définies, par récurrence sur les ensembles  $I$  et  $J$ , par les décompositions

$$\langle p^j | \mathbf{S} | p^i \rangle = \sum_{\mathcal{K}'} \prod_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}'} \langle p^{i \cap \mathbf{k}} | \mathbf{S} | p^{i \cap \mathbf{k}} \rangle_{\tau}$$

où la somme porte sur *toutes les partitions*  $\mathcal{K}'$  de  $I \cup J$  (y compris la partition triviale). Chacun des termes ainsi définis satisfait évidemment la conservation de l'impulsion-énergie de sorte que seule l'amplitude tronquée  $\langle p^j | \mathbf{S} | p^i \rangle_{\tau}$  contribuera à  $\langle \psi | \mathbf{S} | \varphi \rangle$  pourvu que les supports des fonctions d'onde  $\varphi(p^i)$ ,  $\psi(p^j)$  interdisent toute conservation « partielle » de l'impulsion-énergie.

Il est intéressant de voir ce que devient la propriété de « cluster » quand on remplace chacun de ses termes par sa décomposition en amplitudes tronquées : on voit que seules contribueront les partitions  $\mathcal{K}'$  plus fines que la partition  $\mathcal{K}$  donnée; en particulier, la contribution du terme  $\langle p^j | \mathbf{S} | p^i \rangle$  sera nulle pour toute partition  $\mathcal{K}$  non triviale, ce qui veut dire que la transformée de Fourier  $\langle a^j | \mathbf{S} | a^i \rangle_{\tau}$  de  $\langle p^j | \mathbf{S} | p^i \rangle_{\tau}$  tend vers zéro lorsque les vecteurs  $a$  « relatifs » tendent vers l'infini dans des directions du genre espace. Cette propriété de la transformée de Fourier est intimement liée au caractère « peu singulier » de l'amplitude tronquée  $\langle p^j | \mathbf{S} | p^i \rangle_{\tau}$  : en effet, il semble que celle-ci soit une distribution plutôt « douce », probablement une « brave » *valeur au bord de fonction analytique*. En gros, on peut dire que l'amplitude tronquée est ce qui reste une fois extraits de l'amplitude totale les termes les plus singuliers (ceux qui contiennent les fonctions  $\delta$  de conservation partielle de l'impulsion-énergie), termes qui sont responsables de la factorisation de la matrice  $\mathbf{S}$  pour de grandes sépa-



rations du genre espace. Nous verrons dans les sections suivantes qu'il reste aux amplitudes tronquées d'autres singularités (moins graves), correspondant aux factorisations de la matrice  $S$  pour de grandes séparations du genre temps (*processus de diffusion multiple*).

## 2. Singularités de Landau de la matrice $S$ .

### 2.1. La remarque de Coleman et Norton.

La plus simple des singularités de Landau, le *pôle* dû à la propagation d'une particule intermédiaire (fig. 1), est connue depuis les débuts de la mécanique quantique relativiste. Son interprétation en termes de « diffusion double » a suscité une abondante littérature <sup>(10)</sup>. Mais assez curieusement, c'est seulement récemment qu'on s'est aperçu [3] que la notion phénoménologique de diffusion multiple fournit *pour un graphe quelconque* une interprétation très simple des « équations de Landau ».

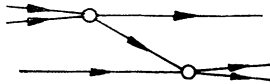


FIG. 1.

Considérons, pour fixer les idées, le graphe de la figure 2. On peut l'interpréter comme représentant trois diffusions successives, chacune des trois « collisions » ayant lieu dans une petite région A, B, C, pratiquement ponctuelle, de l'espace-temps. Classiquement, si  $\tau_7, \tau_8, \tau_9$  sont les « temps propres » des particules 7, 8, 9 entre l'instant de leur création et celui de leur destruction, les « vitesses » de ces particules seront les quadrivecteurs

$$v_7 = \overline{AC}/\tau_7, \quad v_8 = \overline{AB}/\tau_8, \quad v_9 = \overline{BC}/\tau_9$$

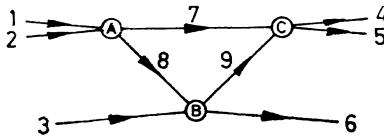


FIG. 2.

<sup>(10)</sup> Cf. par exemple [14] [15] [38].

de sorte que leurs impulsions-énergies seront

$$p_7 = \overline{AC}/\alpha_7, \quad p_8 = \overline{AB}/\alpha_8, \quad p_9 = \overline{BC}/\alpha_9$$

où l'on a posé  $\alpha_i = \tau_i/m_i$ . La donnée des moments  $p_i$  et des paramètres positifs  $\alpha_i$  détermine donc de façon unique, à une translation d'ensemble près, la position dans l'espace-temps des points A, B, C, *pourvu que l'on ait*  $\alpha_7 p_7 = \alpha_8 p_8 + \alpha_9 p_9$ .

Plus généralement, pour un « graphe de diffusion multiple » quelconque, un raisonnement analogue fournit les équations

$$(L) \quad \sum_{i \in I} z(i) \alpha_i p_i = 0$$

où  $I$  désigne l'ensemble des lignes internes du graphe et  $z$  *n'importe quel cycle* construit sur ces lignes internes [ $z(i) = 0$  si le cycle  $z$  ne contient pas la ligne  $i$ ,  $+1$  s'il la contient avec la bonne orientation,  $-1$  s'il la contient avec l'orientation opposée]. Aux équations (L) on doit naturellement joindre les équations de conservation de l'impulsion-énergie à chaque vertex, et toutes les contraintes de masses <sup>(11)</sup>. On obtient de cette façon les *équations de Landau* bien connues de la théorie des perturbations. En éliminant les moments internes  $p_i$  et les paramètres positifs <sup>(12)</sup>  $\alpha_i$  entre ces équations, on obtient des relations entre les moments externes : ce sont les équations des *singularités de Landau* du graphe considéré. Nous pouvons dès maintenant énoncer la

CONJECTURE A. — La distribution  $\langle p^1_1 | S | p^1_1 \rangle_T$  est égale à une fonction analytique en tous les points de  $\mathcal{P}^{1,1}$ , sauf sur les « singularités de Landau » de tous les graphes de diffusion multiple, connexes, ayant  $I_1$  et  $I_2$  comme ensembles de lignes entrantes et sortantes.

## 2.2. Les singularités de Landau comme « contours apparents ».

A tout graphe  $G$  associons l'espace  $\mathcal{P}(G)$ , intersection de la couche de masse  $\mathcal{M}^I$  ( $I$  étant l'ensemble de *toutes* les lignes, internes comme externes, du graphe) avec l'espace euclidien  $\mathcal{E}(G)$  défini par la conservation de l'impulsion-énergie à chaque vertex. On verra (Chap. 1<sup>er</sup>) que pour presque toutes

<sup>(11)</sup> Sans oublier les conditions de *positivité de l'énergie*.

<sup>(12)</sup> Les  $\alpha_i$  doivent être positifs parce que les  $\tau_i$  le sont (les particules ne peuvent pas « remonter le temps »).

les valeurs des masses cet espace  $\mathcal{Y}(\mathbf{G})$  est une *variété*. Soit  $\pi$  la projection canonique de cette variété sur la variété  $\mathcal{Y}^{1,1}$  des moments *externes* du graphe. On vérifiera qu'un point  $p^I \in \mathcal{Y}(\mathbf{G})$  est critique <sup>(13)</sup> pour la projection  $\pi$  si et seulement s'il existe des paramètres  $\alpha_i$  non tous nuls tels que les équations

$$(L) \quad \sum_{i \in I} z(i) \alpha_i p_i = 0$$

soient satisfaites pour tout cycle  $z$  construit sur l'ensemble  $I$  des lignes internes du graphe. Les équations de Landau sont donc simplement les équations de l'ensemble critique (avec en plus les contraintes  $\alpha_i \geq 0$ ), de sorte que les singularités de Landau sont un morceau du *contour apparent* (image de l'ensemble critique). En général, un contour apparent est un être géométrique extrêmement complexe (pensez aux formes bizarres que prennent les « surfaces caustiques » de l'optique géométrique). Pourtant, nous allons voir que le morceau correspondant aux  $\alpha_i \geq 0$  a au contraire une structure très simple.

Commençons par la remarque suivante :

### 2.3. Convexité des singularités de Landau hors de la couche de masse.

Sortons de l'espace  $\mathcal{Y}(\mathbf{G})$  pour nous placer dans l'espace

$$\mathcal{Y}'(\mathbf{G}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{E}(\mathbf{G})$$

(contraintes de masses pour les lignes *internes* seulement). On voit aisément que le caractère critique d'un point  $p^I \in \mathcal{Y}'(\mathbf{G}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}^{1,1}$  s'exprime aussi par les équations (L). Soit donc  $p^I \in \mathcal{Y}'(\mathbf{G})$  un point où les équations (L) admettent une solution avec  $\alpha_i \geq 0 \forall i \in I$ , et considérons, dans l'espace euclidien  $\mathcal{E}(\mathbf{G})$ , la fonction linéaire

$$t(p^I) = \sum_{i \in I} \alpha_i p_i^c \cdot (p_i - p_i^c);$$

---

<sup>(13)</sup> Le point  $x \in \mathcal{Y}$  est dit *critique* pour l'application  $\pi : \mathcal{Y}$  (source)  $\rightarrow \mathcal{B}$  (but) si l'application tangente  $T_x \pi : T_x \mathcal{Y} \rightarrow T_{\pi(x)} \mathcal{B}$  n'est pas surjective. Autrement dit, l'espace tangent à la source a pour image un espace vectoriel *plus petit* que l'espace tangent au but : la codimension de cette image s'appelle le *corang au but* du point critique.

on voit immédiatement que restreinte à la couche de masse  $\mathcal{M}^I$  cette expression est  $\geq 0$ , car il en est ainsi de chaque terme  $\overset{c}{p}_i \cdot (p_i - \overset{c}{p}_i)$ ; autrement dit, l'hyperplan  $\{t(p^I) = 0\}$ , qui passe par  $\overset{c}{p}^I$ , « supporte » l'espace  $\mathcal{S}'(\mathbf{G})$ ; d'autre part, cet hyperplan est évidemment « vertical » (puisque le point  $\overset{c}{p}^I$  est critique), c'est-à-dire qu'il se projette suivant un hyperplan <sup>(14)</sup> de  $\mathcal{E}^{1,1}$  : il est d'ailleurs facile de vérifier directement, à l'aide des équations (L), que  $t(p^I)$  est en fait une fonction des moments *externes*  $p^{1,1}$  seulement. Ainsi, *par tout point singulier de Landau passe un hyperplan par rapport auquel tout l'espace  $\mathcal{S}'(\mathbf{G})$  se projette d'un même côté, de sorte que cet hyperplan supporte, en particulier, tout le contour apparent.*

#### 2.4. Comment « détourner la région physique » des singularités de Landau au voisinage d'un point « lisse » <sup>(15)</sup>.

Revenant sur la couche de masse, nous voyons que tout l'espace  $\mathcal{S}(\mathbf{G})$  se projette d'un même côté de sa singularité de Landau : nous dirons qu'un point  $p^{1,1} \in \mathcal{S}^{1,1}$ , proche de la singularité de Landau considérée, est « au-dessus ou au-dessous du seuil de  $\mathbf{G}$  » selon qu'il appartient ou non à l'image de  $\mathcal{S}(\mathbf{G})$ . Cette définition nous servira à compléter la conjecture A sur l'analyticité de l'amplitude de diffusion dans la région physique, en indiquant par quels « détournements complexes » il faut franchir les singularités de Landau pour connecter les différentes fonctions analytiques qu'elles séparent. Tout point *lisse* <sup>(15)</sup> de Landau admet un voisinage  $\mathbf{U}$  dans lequel la variété de Landau  $\mathbf{L}$  peut être donnée par une équation analytique réelle  $l = 0$  ( $dl \neq 0$ ). Nous choisirons le signe de  $l$  de façon que  $l > 0$  au-dessus du seuil. La fonction analytique  $l$  admet une complexifiée  $\mathbf{I}$  qui, dans un voisinage complexe  $\mathbf{U}$  assez petit, est l'équation d'une variété (car  $d\mathbf{I} \neq 0$ ) analytique complexe de codimension 1 : c'est la « complexifiée »  $\mathbf{L}$  de  $\mathbf{L}$ . On énoncera alors la

CONJECTURE B. — Restreinte au voisinage  $\mathbf{U}$  assez petit, la distribution  $\langle p^1 | S | p^1 \rangle_{\mathbf{T}}$  est valeur au bord, suivant le domaine complexe  $\mathbf{U} \cap \{\text{Im } \mathbf{I} > 0\}$ , d'une fonction analytique prolongeable analytiquement le long de tout chemin de  $\mathbf{U} - \mathbf{L}$ .

<sup>(14)</sup> Suivant un usage répandu, nous réservons le préfixe « hyper- » (hyperplan, hypersurface) à la codimension 1.

<sup>(15)</sup> Nous dirons qu'un point de Landau est *lisse* s'il admet un voisinage  $\mathbf{U}$  dans lequel les singularités de Landau de tous les graphes possibles forment une sous-variété analytique  $\mathbf{L}$  de codimension 1.

REMARQUE : Le fait que la fonction analytique en question a  $L$  pour seule singularité garantit que la valeur au bord est indépendante de la forme exacte du domaine  $\{ \text{Im } l > 0 \}$  (c'est-à-dire indépendante de l'équation locale  $l$  choisie). Pour avoir un énoncé intrinsèque, il faut utiliser la notion de « classe de détournement », introduite dans l'appendice III. *La raison pour laquelle la classe de détournement  $\{ \text{Im } l > 0 \}$  a été choisie de préférence à la classe opposée  $\{ \text{Im } l < 0 \}$  apparaîtra dans la section 3 de cette introduction.*

## 2.5. Structure des singularités « principales ».

La remarque 2.3, en prouvant la convexité des singularités de Landau, montre déjà que celles-ci ne peuvent pas souffrir « d'accidents » trop visibles (tels que points de rebroussement, etc.), tout au moins hors de la couche de masse. Nous démontrerons au chapitre I<sup>er</sup> un résultat beaucoup plus précis, et valable aussi bien sur la couche de masse qu'en dehors, concernant la structure des « singularités principales » des graphes : considérons un point critique de *corang au but*  $l$ , c'est-à-dire un point où les équations (L) sont satisfaites par un *seul* système de paramètres  $\alpha_i$  (à un facteur commun près) <sup>(16)</sup>; nous dirons qu'un tel point critique est *principal* si ces paramètres  $\alpha_i$  sont *tous strictement positifs* <sup>(17)</sup>; l'image d'un point critique principal sera appelée « point de Landau principal (du graphe considéré) ». Le chapitre I<sup>er</sup> démontrera que toute singularité principale est du type  $S_1$  de Thom, ce qui signifie (cf., Appendice I) que dans un voisinage du point critique la situation peut être décrite ainsi :

### *Type $S_1$ de Thom*

L'ensemble critique est une *variété analytique* de dimension égale à celle du but moins un, et sa projection sur le contour apparent est un *isomorphisme de variétés analytiques* <sup>(18)</sup>; restreinte à l'image réciproque d'une *droite* <sup>(19)</sup> transverse au contour apparent, l'application  $\pi$  (qui devient une *fonction*) a un *point critique quadratique non dégénéré* (c'est-à-dire que sa

<sup>(16)</sup> De façon générale, le corang au but est égal à la dimension de l'espace vectoriel des  $(\alpha_i)$  solutions des équations (L).

<sup>(17)</sup> Cette définition, provisoire, sera élargie au Chapitre I<sup>er</sup>, § I.2.5.

<sup>(18)</sup> En particulier, toute valeur critique (point de Landau) est l'image d'un *seul* point critique (localement).

<sup>(19)</sup> Puisqu'on décrit une situation locale, il est bien naturel de dire « droite » au lieu « d'ensemble analytique à une dimension ».

différentielle s'annule — par définition — au point critique, mais pas son « Hessien », déterminant de ses dérivées secondes).

REMARQUE : Un cas un peu spécial est celui où la dimension de la « source »  $\mathcal{F}(\mathbf{G})$  est égale à celle du but moins un. Ce que nous appelons « contour apparent » est alors simplement la *projection* de  $\mathcal{F}(\mathbf{G})$  et les points de corang 1 sont ceux pour lesquels cette projection est (localement) un isomorphisme de variétés analytiques (Théorème des fonctions implicites). Comme exemples de cette situation, citons le graphe de la figure 1, et celui de la figure 3. Nous ne considérerons jamais les cas (de corang  $> 1$ )

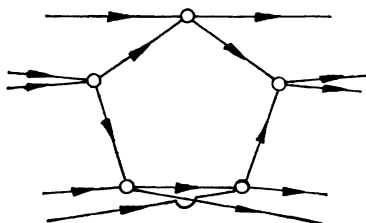


FIG. 3.

où la dimension de la source est *encore plus petite*, par exemple égale à celle du but moins deux, comme les graphes des figures 4 et 5. En effet,

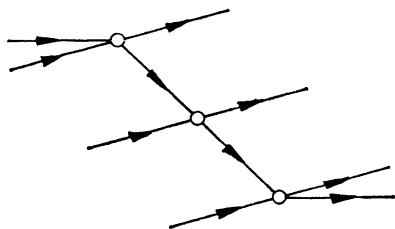


FIG. 4.

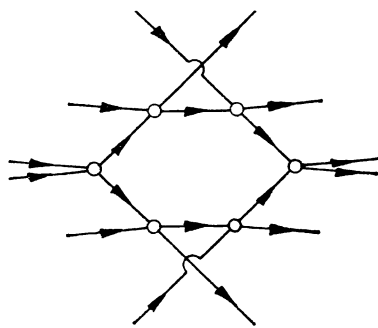


FIG. 5.

les singularités de Landau de tels graphes ont une codimension  $> 1$  et sont simplement des *intersections* de singularités d'autres graphes (la figure 4 provient de deux graphes analogues à celui de la figure 1 et la figure 5 de six graphes analogues à celui de la figure 3).

## 2.6. Parties absorptives.

La conjecture B a défini, dans un petit ouvert complexe  $U$  contenant une variété de Landau  $L$ , une fonction analytique (en général multiforme) dont  $\langle p^{1_2} | S | p^{1_1} \rangle_{\tau}$  était la valeur au bord suivant  $\{ \text{Im } l > 0 \}$ . Considérons maintenant, dans le domaine  $\{ \text{Im } l < 0 \}$ , la détermination de cette fonction qui coïncide avec  $\langle p^{1_2} | S | p^{1_1} \rangle_{\tau}$  au-dessous du seuil, et soit  $\langle p^{1_2} | S | p^{1_1} \rangle_{\tau}^{(L)}$  la valeur au bord de cette fonction. La « partie absorptive suivant  $L$  » sera par définition la distribution (définie seulement dans le voisinage  $U$ ) :

$$\langle p^{1_2} | A | p^{1_1} \rangle^{(L)} = \langle p^{1_2} | S | p^{1_1} \rangle_{\tau} - \langle p^{1_2} | S | p^{1_1} \rangle_{\tau}^{(L)}$$

On posera

$$\langle p^{1_2} | \mathbf{A} | p^{1_1} \rangle^{(L)} = \delta^4(p_{1_1} - p_{1_2}) \langle p^{1_2} | A | p^{1_1} \rangle^{(L)}$$

Nous allons énoncer une règle (« règle de Cutkosky ») permettant de calculer les parties absorptives.

Considérons un point de Landau tel qu'il existe *un graphe et un seul G* l'ayant pour *point de Landau principal*. Il résulte alors du paragraphe 2.5 que ce point est *lisse*, de sorte qu'on peut définir la partie absorptive suivant la *variété* de Landau  $L$ , dans un voisinage du point considéré.

CONJECTURE C. — Dans ces conditions, et si de plus le graphe  $G$  est *simple* <sup>(20)</sup>, c'est-à-dire si toute paire de vertex est reliée par au plus une ligne, la partie absorptive suivant  $L$  est donnée par l'expression

$$(A) \quad \langle p^{1_2} | \mathbf{A} | p^{1_1} \rangle^{(L)} = \int_I \prod_v \langle S_v \rangle_{\tau}$$

où le produit a lieu sur tous les vertex  $v$  du graphe  $G$ ;  $\langle S_v \rangle_{\tau}$  désigne l'élément de matrice  $S$  du « processus élémentaire » que symbolise le vertex  $v$ ;

$\int_I$  désigne, comme d'habitude, l'intégration sur la couche de masse  $\mathcal{M}^I$  des

moments *internes*, avec la mesure  $\mu^I = \prod_{i \in I} d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2)$  <sup>(21)</sup>.

<sup>(20)</sup> Le cas des graphes à lignes multiples sera traité au Chapitre III.

<sup>(21)</sup> Rappelons que les conditions de *positivité de l'énergie*  $p_i^0 > 0$  sont incluses dans la définition de la couche de masse  $\mathcal{M}^I$ .

Si l'on extrait de la formule (A) la fonction  $\delta^4(p_{1_1} - p_{1_2})$  exprimant la conservation de l'impulsion-énergie totale, on obtient la formule

$$(A) \quad \langle p_{1_2} | A | p_{1_1} \rangle^{(L)} = \int_{\pi^{-1}(p_{1_1, 1_2})} \prod_v \langle S_v \rangle_{\tau}$$

où l'intégration sur la « fibre »  $\pi^{-1}(p_{1_1, 1_2}) \subset \mathcal{Y}(\mathbf{G})$  se fait avec la mesure

$$\sigma_{p_{1_1, 1_2}}(\mathbf{G}) = \varepsilon_{p_{1_1, 1_2}}(\mathbf{G}) \prod_{i \in I} \delta(p_i^2 - m_i^2)$$

$\varepsilon_{p_{1_1, 1_2}}(\mathbf{G})$  désignant la mesure canonique sur le sous-espace euclidien de  $\mathcal{E}(\mathbf{G})$ , image réciproque du point  $p_{1_1, 1_2}$ . Compte tenu de l'analyticité des  $\langle S_v \rangle_{\tau}$  (conjectures A et B), on voit que l'intégrale (A) au-dessus du seuil est du type étudié dans l'Appendice III, et définit donc une fonction analytique, dont nous préciserons les propriétés au Chapitre II.

### 3. Factorisation de la matrice S.

Soit  $\mathbf{G}$  un graphe de diffusion multiple, connexe, ayant  $I_1$  et  $I_2$  comme ensembles de lignes entrantes et sortantes. Nous nous proposons d'étudier le comportement asymptotique de l'amplitude du processus élémentaire  $I_1 \rightarrow I_2$  lorsqu'on opère sur les paquets d'onde des diverses particules des *translations d'espace-temps convenables*, destinées à nous mettre dans les conditions d'observation du processus  $\mathbf{G}$ . A chaque vertex  $v$  du graphe  $\mathbf{G}$  on associera un quadrivecteur  $a_v$ , dont seront translatées toutes les particules externes incidentes à  $v$ . Le choix du système  $(a_v)$  se fera de la façon suivante : soit  $\overset{c}{p}_{1_1, 1_2} \in \mathcal{Y}_{1_1, 1_2}$  un point de Landau, censé représenter les impulsions-énergies moyennes des particules externes; on supposera qu'il s'agit d'un point de Landau principal du graphe  $\mathbf{G}$ , de sorte que (vu le paragraphe 2.5) sont associés à ce point des moments internes  $\overset{c}{p}_i$  définis de façon unique, et des paramètres positifs  $\alpha_i$  définis à un facteur commun près; l'analyse de Coleman et Norton suggère d'interpréter ce facteur commun  $\tau$  comme l'échelle de temps du processus, et, considérant les quadrivecteurs  $a_i = \tau \alpha_i \overset{c}{p}_i$ , d'en déduire les  $a_v$  par les équations  $a_i = a_{v_i} - a_{v'_i}$ ,  $v'_i$  et  $v_i$  désignant l'origine et l'extrémité de la ligne  $i$  (on ne détermine ainsi les  $a_v$  qu'à l'addition d'un vecteur commun près, mais peu importe, vu l'invariance par



translation de la matrice S). Sous l'action des translations ainsi choisis, l'élément de matrice S tronqué

$$\langle \psi | S | \varphi \rangle_{\tau} = \int_{\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2} \langle p^{1_2} | S | p^{1_1} \rangle_{\tau} \bar{\psi}(p^{1_2}) \varphi(p^{1_1})$$

devient

$$\langle S \rangle(\tau) = \langle \psi_a | S | \varphi_a \rangle_{\tau} = \int_{\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2} \langle p^{1_2} | S | p^{1_1} \rangle_{\tau} e^{i \sum_v p_v \cdot a_v} \bar{\psi}(p^{1_2}) \varphi(p^{1_1})$$

où  $p_v$  désigne la « somme algébrique » des moments *externes* incidents au vertex  $v$  (comptés positivement s'ils y entrent, négativement s'ils en sortent), encore égale, d'après la conservation de l'impulsion-énergie, à la « somme algébrique » (avec le signe opposé) des moments *internes* incidents à  $v$  : un calcul enfantin donne ainsi

$$\sum_v p_v \cdot a_v = - \sum_{i \in \mathbf{I}} p_i \cdot a_i$$

de sorte que le facteur de phase dans l'intégrale peut s'écrire

$$- \sum_{i \in \mathbf{I}} p_i \cdot a_i = - \tau \sum_{i \in \mathbf{I}}^c \alpha_i p_i \cdot p_i = - \tau \left[ t(p^{1_{1_2}}) + \sum_{i \in \mathbf{I}}^c \alpha_i m_i^2 \right]$$

où  $t(p^{1_{1_2}})$  est la fonction linéaire définie au paragraphe 2.3, équation de l'hyperplan tangent à la variété de Landau au point  $p^{1_{1_2}}$ . L'intégrale se présente donc comme transformée de Fourier (facteur  $e^{-i\tau t(p^{1_{1_2}})}$ ) du produit d'une fonction  $\bar{\psi}(p^{1_{1_2}})\varphi(p^{1_{1_2}})$ , que nous choisirons  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans un petit voisinage de  $p^{1_{1_2}}$ , par une valeur au bord de fonction analytique dans un demi-voisinage limité au demi-plan supérieur <sup>(22)</sup>. D'après l'Appendice 0, cette intégrale  $\langle S \rangle(\tau)$  tend donc vers zéro quand  $\tau \rightarrow -\infty$ , plus vite que toute puissance inverse de  $\tau$ . La même propriété est valable, quand  $\tau \rightarrow +\infty$ , pour la fonction  $\langle S \rangle^{(1)}(\tau)$  définie en remplaçant la distribu-

<sup>(22)</sup> Plus précisément, choisissons un système de coordonnées locales dont la première sera la fonction  $t$  tandis que les autres seront appelées  $(u_i)$ . Evidemment, puisque  $dt | \mathbf{L} = 0$ , aucun des  $du_i | \mathbf{L}$  ne pourra s'annuler. Compte tenu de la Conjecture B, on en déduit que

1)  $\langle p^{1_2} | S | p^{1_1} \rangle_{\tau}$  est une fonction continue de  $(u_i)$  à valeurs distributions dans la variable  $t$ ;

2) pour chaque  $(u_i)$  réel, cette distribution  $S_{(u_i)}$  est une valeur au bord de fonction analytique dans un demi-voisinage limité au demi-plan supérieur en  $t$  ( $\text{Im } t > 0$ ).

On est donc exactement dans les conditions du Corollaire final de l'Appendice 0.

tion  $\langle p^{1s} | S | p^{1s} \rangle_\tau$  par la distribution  $\langle p^{1s} | S | p^{1s} \rangle_\tau^{(L)}$  du paragraphe 2.6.

Or la conjecture C donne de la fonction  $\langle A \rangle^{(L)}(\tau) = \langle S \rangle(\tau) - \langle S \rangle^{(L)}(\tau)$  une expression fort suggestive, nous permettant d'énoncer la

PROPOSITION (23) : Modulo une fonction à décroissance rapide,  $\langle S \rangle(\tau)$  se comporte, quand  $\tau \rightarrow +\infty$ , comme la fonction

$$\langle A \rangle(\tau) = \int_{\Pi_1, I_1} \left( \prod_v \langle S_v \rangle_\tau \right) e^{-i \sum_{i \in I} p_i \cdot a_i} \overline{\Psi}(p^{1s}) \varphi(p^{1s}).$$

Ainsi, on obtient exactement la factorisation de la matrice S que suggérerait l'interprétation des vertex du graphe comme des processus *indépendants* [8]. Le facteur de phase  $p_i \cdot a_i$  provient de la propagation de la particule « libre »  $i$  entre le point de sa création (où elle joue le rôle d'une particule *out*) et le point de son annihilation (où elle joue le rôle d'une particule *in*). Ce facteur de phase a pour effet « d'amortir » l'amplitude du processus : en fait, on peut voir que  $\langle A \rangle(\tau)$  tend vers zéro comme une puissance inverse de  $\sqrt{\tau}$  (24).

REMARQUE : On voit pourquoi on ne peut pas s'attendre à ce que la conjecture C prenne exactement la même forme pour les graphes à lignes multiples. En effet, des particules intermédiaires « voyageant ensemble » ne sauraient être considérées comme des particules libres, c'est-à-dire qu'elles ne pourront pas jouer le rôle de particules *out* [resp. *in*] pour le vertex où elles sont créées [resp. détruites] : ce n'est donc pas exactement  $\langle S_v \rangle_\tau$  qu'il faudra mettre à un tel vertex.

#### 4. Discussion.

Comme nous venons de le voir, un chemin très direct mène des conjectures A, B, C à la notion phénoménologique de diffusion multiple (25). Quelles autres justifications donner de ces conjectures ?

(23) Il a fallu faire les hypothèses suivantes : G est le *seul* graphe ayant  $p^{1s}$  pour singularité principale, et ce graphe *n'a que des lignes simples*.

(24) C'est exactement le phénomène « d'étalement des paquets d'onde » en mécanique quantique. Mathématiquement, on a ici affaire à l'intégrale sur  $\mathcal{Y}(G)$  d'une fonction  $C^\infty$  multipliée par  $e^{-i\tau t(p^{1s})}$ . En évaluant cette intégrale par la méthode de la phase stationnaire, on voit qu'elle se comporte asymptotiquement comme  $\tau^{-n/2}$ , où  $n$  est le rang de la forme quadratique, premier terme du développement de Taylor de la fonction  $t | \mathcal{Y}(G)$  au point critique.

(25) Mais des hypothèses moins fortes pourraient aussi faire l'affaire : cf., Iagolnitzer [15] [16].

Citons d'abord, pour mémoire, les arguments tirés de la théorie des perturbations : les résultats de l'Appendice III s'appliquent immédiatement aux intégrales de Feynman <sup>(26)</sup>, la Proposition A-III 3.1 prouvant les conjectures A, B tandis que la formule (Disc. 1) prouve la conjecture C (malheureusement, la théorie des perturbations remplace par des constantes les amplitudes associées aux vertex des graphes, camouflant ainsi les subtilités que mentionnait la remarque finale de la section précédente).

Nous nous étendrons davantage sur les *arguments de compatibilité* suivants : les conjectures A, B énoncent des *propriétés d'analyticité* des amplitudes, tandis que la conjecture C formule des *relations intégrales* entre ces amplitudes; il faut évidemment vérifier que celles-ci sont compatibles avec celles-là : c'est ce que nous ferons de façon précise au Chapitre II. L'idée, déjà évoquée à la fin du paragraphe 2.6, consistera à chercher les propriétés analytiques des « *intégrales d'absorption* » (intégrales apparaissant dans la conjecture C), en supposant connues, grâce aux conjectures A, B, C, les propriétés analytiques de l'intégrand. Nous trouverons ainsi trois théorèmes A, B, C dont la similitude frappante avec les conjectures A, B, C posera d'intéressants problèmes de cohérence. C'est ainsi qu'une comparaison entre la conjecture C et le théorème C, fournissant l'égalité des discontinuités d'une amplitude de diffusion et d'une partie absorptive, nous conduira à constater l'absence de singularité de l'amplitude de diffusion prolongée analytiquement le long d'un certain lacet (Paragraphe II.3.2); or un raisonnement purement topologique (calcul d'un groupe d'homotopie) nous montrera par ailleurs (Paragraphe II.3.3) que cette holomorphie du prolongement analytique équivaut à l'holomorphie de l'amplitude elle-même en des « points de Landau » où les  $\alpha_i$  ne sont pas tous positifs : ainsi obtiendrons-nous un lien entre la conjecture C et le postulat, inclus dans la conjecture A, de *positivité des  $\alpha_i$* .

Bien sûr à ce stade nous sommes encore loin d'une preuve des conjectures, et d'ailleurs un ingrédient physique essentiel a été négligé : il s'agit de l'*unitarité de la matrice S*, d'où des physiciens de Cambridge ont réussi récemment à « extraire » les règles de Cutkosky dans quelques cas particuliers [2] [19] [20]. Grâce aux méthodes topologiques développées ici, rien ne nous empêche en principe de faire la même chose dans le cas général, si ce n'est l'extrême complexité combinatoire des relations d'unitarité.

---

<sup>(26)</sup> Sauf que, dans le cas des intégrales de Feynman, la « projection » étudiée n'est pas « propre », ce qui soulève le problème des « singularités de Landau de 2<sup>e</sup> type » (contours apparents « de l'infini »), sans parler de la question de la convergence des intégrales.

Mais même une fois cet écheveau débrouillé, nous n'aurions pas encore démontré les conjectures, car la distance est grande entre déduire les propriétés analytiques d'une intégrale de celles de son intégrand et trouver les propriétés analytiques d'une solution d'équation intégrale. C'est en effet à ce dernier type que s'apparente le vrai problème, qu'on peut formuler ainsi : connaissant des relations intégrales entre les amplitudes — les relations d'unitarité — et des propriétés d'analyticité « minimum » de ces amplitudes — fournies par le « programme linéaire » de la théorie des champs —, en déduire « davantage » d'analyticité (les conjectures A, B, C). Ce problème est certainement difficile, si tant est qu'il soit soluble dans l'état actuel d'avancement du programme linéaire (les seuls renseignements dont on dispose pour le moment sur les amplitudes à N corps concernent leur analyticité hors de la couche de masse).

## APPENDICE 0

THÉORÈME <sup>(1)</sup> : Soient  $\varphi(x)$  une fonction  $C^\infty$  à support compact (disons dans l'intervalle  $[0, 1]$ ),  $F$  une distribution, valeur au bord d'une fonction  $f(z)$  analytique dans un « demi-voisinage » complexe de  $[0, 1]$ , demi-voisinage limité au demi-plan supérieur.

Alors la fonction

$$\Phi(t) = \langle F, e^{itx} \varphi(x) \rangle$$

tend vers zéro plus vite que toute puissance inverse de  $t$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

PREUVE : 1) Il suffit de démontrer que  $\Phi(t) \rightarrow 0$ , et la rapidité de la décroissance s'en déduira par intégration par parties.

Par exemple, pour en déduire que  $\Phi(t) \rightarrow 0$  plus vite que  $1/t$ , il suffira de considérer l'expression

$$t\Phi(t) = \langle F, te^{itx} \varphi(x) \rangle = \frac{1}{i} [\langle F', e^{itx} \varphi(x) \rangle + \langle F, e^{itx} \varphi'(x) \rangle]$$

et de remarquer que les dérivées  $F'$  et  $\varphi'$  satisfont aux hypothèses du théorème.

2) On peut toujours supposer que la fonction analytique  $f(z)$  tend vers zéro quand  $z \rightarrow 0$  et quand  $z \rightarrow 1$  (dans toute direction transverse à l'axe réel).

En effet, puisque  $f(z)$  admet une valeur au bord distribution, elle est bornée en module par une puissance inverse de la distance à l'axe réel :

$$|f(x + iy)| < 1/y^N$$

et il suffira de la remplacer par la fonction analytique

$$[z(z-1)]^{N+1} f(z)$$

tout en divisant  $\varphi(x)$  par  $[x(x-1)]^{N+1}$  (ce qui ne change rien au caractère  $C^\infty$  de la fonction  $\varphi$ , dont le support ne contient pas les points 0 et 1).

3) Pour prouver que  $\Phi(t) \rightarrow 0$ , mettons-nous dans les conditions de 2) et considérons la fonction

$$\tilde{F}(t) = \int_{\Gamma} e^{itz} f(z) dz$$

où  $\Gamma$  est un arc joignant 0 et 1 dans le demi-plan supérieur, et transverse à l'axe réel aux points 0 et 1. D'après le théorème de Cauchy, cette fonction est indépendante de l'arc  $\Gamma$  choisi. Quand  $t \rightarrow +\infty$ , son intégrand tend uniformément vers zéro sur le compact  $\Gamma$  :

$$|e^{itz} f(z)| \leq M |z(z-1)| e^{-ty}$$

Donc  $\tilde{F}(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

<sup>(1)</sup> Ce théorème est probablement connu des analystes, mais je n'ai pas réussi à le trouver dans la littérature. J'en dois la démonstration à une discussion avec A. Martin, V. Glaser et J. Bros.

D'autre part,  $\tilde{F}(t)$  est bornée polynomialement quand  $t \rightarrow -\infty$  : en effet,  $\tilde{F}(t)$  peut être considérée comme transformée de Fourier de la distribution à support compact  $\chi F$  (où  $\chi$  désigne la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, 1]$ ) et c'est donc une fonction analytique à croissance polynomiale (bornée par  $M(1 + |t|)^N$ , où  $N$  est l'ordre de la distribution  $\chi F$ ).

Pour achever la preuve, il suffit de remarquer que  $\Phi(t)$  est le produit de convolution de  $\tilde{F}$  avec la transformée de Fourier  $\tilde{\varphi}$  de  $\varphi$ , et que  $\tilde{\varphi}$  est une fonction intégrable (d'ailleurs analytique) à décroissance rapide quand  $t \rightarrow \mp \infty$ .

Pour montrer que l'intégrale de convolution

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(t') \tilde{\varphi}(t - t') dt'$$

tend vers zéro quand  $t \rightarrow +\infty$ , on peut la découper en deux morceaux

$$\int_{-\infty}^{t/2} + \int_{t/2}^{+\infty}$$

Le premier morceau s'évalue ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t/2} |\tilde{F}(t') \tilde{\varphi}(t - t')| dt' &\leq \int_{-\infty}^{t/2} M(1 + |t'|)^N |\tilde{\varphi}(t - t')| dt' \\ &= \int_{t/2}^{\infty} M(1 + |t - t''|)^N |\tilde{\varphi}(t'')| dt'' \leq \int_{t/2}^{\infty} M(1 + |t''|)^N |\tilde{\varphi}(t'')| dt'' \end{aligned}$$

expression qui tend vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$  (intégrabilité de  $(1 + |t|)^N \tilde{\varphi}(t)$ ).  
Le deuxième morceau s'évalue ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{t/2}^{\infty} |\tilde{F}(t') \tilde{\varphi}(t - t')| dt' &\leq [\text{Sup}_{t' > t/2} |\tilde{F}(t')|] \int_{t/2}^{\infty} |\tilde{\varphi}(t - t')| dt' \\ &\leq [\text{Sup}_{t' > t/2} |\tilde{F}(t')|] \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}(t'')| dt'' \end{aligned}$$

qui tend aussi vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$  (puisque  $\tilde{F}(t)$  tend vers zéro).

REMARQUE : Au lieu d'une donnée  $(F, \varphi)$ , considérons une famille de données  $(F_u, \varphi_u)$  dépendant continûment d'un paramètre  $u$ . Alors la décroissance rapide de  $\Phi_u(t) = \langle F_u, e^{itx} \varphi_u(x) \rangle$  est uniforme en  $u$  sur tout compact.

PREUVE : Il suffit de vérifier l'uniformité des majorations qui ont servi à prouver le Théorème.

COROLLAIRE : Si  $\varphi_u(x)$  est à support compact dans l'ensemble des variables  $(u, x)$ , la propriété de décroissance rapide est vraie aussi pour la fonction

$$\Phi(t) = \int \langle F_u, e^{itx} \varphi_u(x) \rangle du$$

## II

### CHAPITRE 0

## QUELQUES PROPRIÉTÉS COMBINATOIRES DES GRAPHES

Ce chapitre, formalisé à l'extrême, risque d'être irritant. Le lecteur pourra se contenter de le parcourir rapidement (en regardant les images), quitte à y revenir chaque fois qu'un point aura besoin d'être précisé.

La section 0.1 rappelle quelques notions classiques (cf. par exemple [1]), dont les plus importantes sont celles de *cycles* (0.1.3) et de *lois de conservation* (0.1.4). Le paragraphe 0.2.2 rappelle la notion, fondamentale pour la suite, de *contraction* <sup>(1)</sup>, et s'inspire de la théorie des groupes pour proposer une terminologie (« *sous-graphes* », « *graphes-quotients* », « *extensions de graphes* ») et une notation (*suites exactes de graphes*) qui se révéleront très commodes. Poursuivant l'analogie, on étudie les « *extensions triviales* » (0.3), qui servent à bâtir les « *produits fibrés* » (0.4) : cette notion de produit fibré jouera un rôle important au Chapitre II, en particulier dans l'étude des « *doubles discontinuités* » où elle nous conduira à une formulation plus générale des « *relations de Cutkosky-Steinmann* » (comme disent les spécialistes de la matrice S).

Mathématiquement parlant, il est vraisemblable que toutes ces notions trouveraient leur place dans le cadre standard d'une « *catégorie des graphes* », et c'est dans cet esprit que j'ai défini, au paragraphe 0.2.1, les « *homomorphismes de graphes* » — mais je n'ai pas poussé plus loin dans cette voie.

### 0.1. « *Chemins* », « *cycles* » et « *lois de conservation* » des graphes.

#### 0.1.1. Définition d'un graphe.

Un *graphe* consiste en la donnée de deux ensembles  $I$  (« l'ensemble des lignes ») et  $V$  (« l'ensemble des vertex ») et d'une application qui à chaque ligne associe un couple de vertex appelés l'*origine* et l'*extrémité* de la

---

<sup>(1)</sup> Que beaucoup de physiciens ont l'habitude d'appeler « *réduction* ».

ligne <sup>(2)</sup>. On dit qu'une ligne  $i$  est *incidente* au vertex  $v$  si elle a ce vertex comme origine ou comme extrémité (on dit aussi que le vertex  $v$  est incident à la ligne  $i$ ). L'ensemble des lignes incidentes au vertex  $v$  s'appelle l'*étoile* de  $v$ .

Il sera commode dans la suite de considérer un graphe comme un ensemble de *chemins*, ensemble muni d'une loi de composition associative, pas partout définie : le composé  $c'c$  de deux chemins  $c$  et  $c'$  sera défini si et seulement si l'extrémité du chemin  $c$  coïncide avec l'origine du chemin  $c'$ . On définit l'« inverse »  $c^{-1}$  d'un chemin  $c$  (chemin « parcouru en sens inverse »), et les composés  $c^{-1}c$  et  $cc^{-1}$  sont bien définis : on les identifie respectivement à l'origine et à l'extrémité de  $c$ . L'intérêt de ce point de vue est qu'on n'a pas besoin d'introduire l'ensemble des vertex, qui apparaît comme un ensemble de chemins particuliers (« chemins nuls »).

Le lecteur peut sauter le paragraphe suivant, qui ne fait que mettre cette idée en forme. Il faudra néanmoins en retenir une *notation* : l'écriture  $i \in v$  [resp.  $i^{-1} \in v$ ] signifiera que la ligne  $i$  a le vertex  $v$  pour origine [resp. pour extrémité].

### 0.1.2. Groupoïdes.

On considère un ensemble  $G$ , muni d'une loi de composition interne associative, *pas partout définie*, notée multiplicativement.

#### ASSOCIATIVITÉ

La loi est dite *associative* si pour tout triple  $a, b, c \in G$  tel que  $ab$  et  $bc$  soient définis,  $(ab)c$  et  $a(bc)$  sont définis et sont égaux (notés  $abc$ ). On en déduit que si dans une suite  $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$  la composition de deux quelconques éléments consécutifs est définie, il existe un élément *unique*  $a_1 a_2 \dots a_n \in G$  défini par la composition de tous les  $a_k$  avec un *arrangement de parenthèses arbitraire*.

#### UNITÉ

Un élément  $e \in G$  est une *unité* si  $ea = a$  [resp.  $ae = a$ ] toutes les fois que  $ea$  [resp.  $ae$ ] est défini.

---

<sup>(2)</sup> Pour les graphes avec *lignes externes*, c'est-à-dire où certaines lignes n'ont pas d'origine, ou pas d'extrémité, on se ramènera au cas étudié ici en rajoutant un vertex *commun*, le « vertex de l'infini », au bout libre de chaque ligne externe.



## ÉLÉMENT INVERSE

On dit que  $a'$  est l'inverse de  $a$  (ou que  $a$  est l'inverse de  $a'$ ) si  $aa'$  et  $a'a$  sont définis et sont des unités. L'unicité de l'inverse (s'il existe) est évidente, car si  $a'$  et  $a''$  sont inverses de  $a$ , l'élément  $a'aa''$  est défini et égal à la fois à  $a'$  et à  $a''$  (utiliser l'associativité et la définition des unités).

DÉFINITION D'UN GROUPOÏDE <sup>(3)</sup>

Un « groupoïde » est un ensemble  $G$  muni d'une loi de composition interne, associative (pas partout définie), telle que tout élément  $a \in G$  admette un inverse, noté  $a^{-1}$ .

## PROPRIÉTÉS DES GROUPOÏDES

i) Toute unité est sa propre inverse.

En effet, si  $e$  est une unité,  $(ee^{-1})e$  est bien défini et égal à la fois à  $e$  (puisque  $ee^{-1}$  est une unité) et à  $e^{-1}$  (puisque  $e$  est une unité).

ii) Si  $ab$  est défini,  $b^{-1}a^{-1}$  est défini et égal à  $(ab)^{-1}$ .

La vérification que  $b^{-1}a^{-1}$  est l'inverse de  $ab$  n'offre aucune difficulté une fois qu'on sait qu'il est défini. Ce dernier point se démontre par application répétée du critère d'associativité. On commence par remarquer que  $(ab)b^{-1}$  est défini et égal à  $a$ . On en déduit que  $(ab)^{-1}(ab)b^{-1}$  est défini et égal, d'une part à  $(ab)^{-1}a$ , d'autre part à  $b^{-1}$ . Mais comme  $aa^{-1}$  est défini,  $[(ab)^{-1}a]a^{-1}$  est défini, ce qui est le résultat cherché puisque  $(ab)^{-1}a = b^{-1}$ .

iii) La propriété «  $ba^{-1}$  est défini », considérée comme relation entre éléments  $a, b$  de  $G$ , est une relation d'équivalence ;

- elle est réflexive, puisque  $aa^{-1}$  est défini ;
- elle est symétrique, car si  $ba^{-1}$  est défini,  $ab^{-1}$  l'est aussi d'après ii) ;
- elle est transitive : si  $ba^{-1}$  et  $cb^{-1}$  sont définis, l'associativité, jointe au fait que  $b^{-1}b$  est défini, montre que  $cb^{-1}ba^{-1}$ , c'est-à-dire  $ca^{-1}$ , est défini.

Les classes d'équivalences définies par la relation iii) seront appelées des *vertex*. L'appartenance de  $a$  à la classe  $v$  (en abrégé :  $a \in v$ ) s'exprimera en disant que  $v$  est l'origine de  $a$ , ou l'extrémité de  $a^{-1}$ . Il résulte de cette convention de langage que  $ab$  est défini si et seulement si l'extrémité de  $b$  coïncide avec l'origine de  $a$ .

<sup>(3)</sup> Cette définition, assez classique, apparaît d'ordinaire dans le cadre plus général de la théorie des « catégories » : cf. par exemple Ehresmann [5], Chap. I<sup>er</sup>.

Si  $aa$  est défini, c'est-à-dire si l'origine et l'extrémité de  $a$  coïncident, on dira que  $a$  est un « *lacet* ».

iv) *Tout vertex contient une unité et une seule.*

Il en contient une : car si  $a \in v$ ,  $v$  contient l'unité  $a^{-1}a$ , puisque  $(a^{-1}a)a^{-1}$  est défini. Il en contient une seule : si  $v$  contient deux unités  $e$  et  $e'$ ,  $e'e^{-1}$  est défini, mais d'après i),  $e^{-1} = e$ , donc  $e'e$  est défini, et égal à la fois à  $e$  et à  $e'$ .

Grâce à iv), on pourra convenir d'identifier l'ensemble des vertex à l'ensemble des unités du groupoïde.

#### HOMOMORPHISMES DE GROUPOÏDES

On les définira de façon évidente, comme des applications  $\varphi : G \rightarrow G'$  respectant la structure de groupoïde. Autrement dit,

- 1° si  $ab$  est défini dans  $G$ ,  $\varphi(a)\varphi(b)$  est défini dans  $G'$  et égal à  $\varphi(ab)$ ;  
2°  $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$ .

Une conséquence évidente de 1° est que  $\varphi$  transforme les lacets en lacets. D'autre part,  $\varphi$  respecte la relation d'équivalence iii), et transforme donc les vertex en vertex.

#### EXEMPLES DE GROUPOÏDES

Un *groupe* est un groupoïde à un seul vertex. De façon générale, tout groupoïde  $G$  peut être construit (de même que tout groupe) en se donnant une famille  $I \subset G$  de *générateurs* du groupoïde et une famille de *relations* entre ces générateurs (« relations de définition » du groupoïde). Un *graphe* est un groupoïde admettant une famille de relations de définition de la forme  $(aa^{-1} = bb^{-1})$ , où  $a$  et  $b$  sont certains éléments de  $I$  ou de

$$I^{-1} = \{i^{-1} \mid i \in I\}.$$

Les éléments de  $I$  seront les *lignes* du graphe. Les éléments du groupoïde  $G$  engendré par  $I$  seront les *chemins* du graphe.

#### 0.1.3. Cycles.

Reprenons l'étude des graphes, en introduisant quelques autres définitions.

— Un « *lacet* » (cf. 0.1.2) est un chemin dont l'origine et l'extrémité coïncident.

— Un chemin  $c$  est « dirigé » s'il est de la forme  $i_1 i_2 \dots i_p$ , avec les  $i_k$  pris dans  $I$  (et pas dans  $I^{-1}$ ).

— Un lacet dirigé est appelé « circuit ».

Notons  $\mathbb{Z}(I)$  le *groupe abélien libre sur  $I$*  : ses éléments sont des combinaisons linéaires formelles finies, à coefficients entiers positifs ou négatifs,  $\gamma = \sum_{i \in I} n_i i$  ( $n_i = 0$  sauf pour un nombre fini d'indices  $i$ ); on les appelle des *chaînes*. En particulier, tout chemin  $c = i_1^{\varepsilon_1} i_2^{\varepsilon_2} \dots i_p^{\varepsilon_p}$  ( $\varepsilon_k = \pm 1$ ) définit une chaîne  $\Gamma_c = \sum_i n_i i$ , où la somme porte sur toutes les lignes  $i$  distinctes apparaissant dans le développement de  $c$ , avec  $n_i$  égal à la somme des  $\varepsilon_k$  affectés à la ligne  $i$ .

A tout vertex  $v \in V$  on associera la fonction linéaire à valeurs entières

$$v^* : \mathbb{Z}(I) \rightarrow \mathbb{Z}$$

définie par

$$v^* \left( \sum_i n_i i \right) = \sum_{i \in v} n_i - \sum_{i^{-1} \in v} n_i.$$

En particulier, si  $\Gamma c$  est la chaîne associée au chemin  $c$ , on voit que

$$v^*(\Gamma c) = \begin{cases} 0 & \text{si } c \text{ n'est pas incident à } v, \text{ ou si} \\ & c \text{ est un lacet.} \\ + 1 & \text{si } c \in v, c^{-1} \notin v. \\ - 1 & \text{si } c^{-1} \in v, c \notin v. \end{cases}$$

Une chaîne  $\gamma \in \mathbb{Z}(I)$  est appelée *cycle* si  $v^*(\gamma) = 0 \quad \forall v \in V$ . L'ensemble des cycles est évidemment un *sous-groupe* de  $\mathbb{Z}(I)$  : on le notera  $Z_*$ . Il est facile de voir que ce *sous-groupe peut être engendré par les chaînes  $\Gamma l$  associées aux lacets  $l$  du graphe.*

#### 0.1.4. Lois de conservation.

Considérons l'ensemble de toutes les fonctions linéaires à valeurs entières  $f : \mathbb{Z}(I) \rightarrow \mathbb{Z}$  s'annulant sur tout cycle. C'est un sous-espace du dual  $Z^1$  de  $\mathbb{Z}(I)$  : « l'espace orthogonal à  $Z_*$  ». On le notera  $V^*$ .

Dans le cas des graphes finis — le seul qui nous intéressera en pratique — c'est-à-dire le cas où  $I$  est un ensemble fini,  $V^*$  n'est pas autre chose que l'espace linéaire engendré par toutes les fonctions  $v^*$ ,  $v \in V$ . Or, dans ce cas,  $Z^1$  peut s'identifier à  $Z(I)$ , en particulier la fonction  $v^*$  s'identifie à la combinaison linéaire formelle finie

$$\sum_{\substack{i \in v \\ i^{-1} \notin v}} i - \sum_{\substack{i^{-1} \in v \\ i \notin v}} i$$

que l'on peut interpréter intuitivement comme la « loi de conservation du courant » au vertex  $v$  (en considérant chaque ligne comme porteuse d'un « courant »). Pour cette raison,  $V^*$  sera appelé l'espace des lois de conservation du graphe.

*Attention* : Le fait que les espaces  $Z_*$  et  $V^*$  soient « mutuellement orthogonaux » (dans le cas des graphes finis) ne veut pas dire que  $Z(I)$  soit la somme directe de  $Z_*$  et  $V^*$  : par exemple, pour le graphe

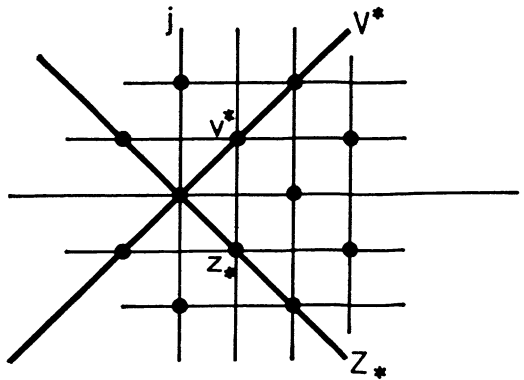
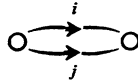



FIG. 1. — Cycles et lois de conservation du graphe .

$Z_*$  est engendré par  $z_* = i - j$ ,  $V^*$  par  $v^* = i + j$ , et  $Z_* \oplus V^*$  n'est qu'un sous-réseau du réseau  $Z(i, j)$  des points à coordonnées entières du plan (cf. fig. 1).

## 0.2. Sous-graphes et graphes-quotients.

### 0.2.1. Homomorphismes de graphes.

Un « homomorphisme de graphes » est une application  $\varphi : G \rightarrow G'$  de l'espace des chemins de  $G$  dans l'espace des chemins de  $G'$ , *respectant la loi de composition* : c'est donc un cas particulier de la notion d'« homomorphisme de groupoïde » de 0.1.2. Une telle application ne transforme pas forcément les lignes de  $G$  en lignes de  $G'$  (cf. fig. 2), mais on sait (0.1.2) qu'elle transforme vertex en vertex et lacets en lacets. D'autre part, elle induit évidemment un homomorphisme des groupes de chaînes

$$\varphi_* : Z(I) \rightarrow Z(I')$$

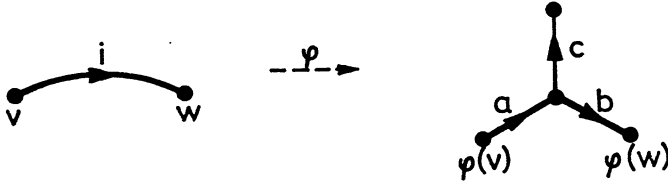


FIG. 2. — Exemple d'homomorphisme de graphes : la ligne  $i$  est transformée en le chemin  $ba$ .

défini en associant à toute chaîne  $\gamma = \sum_i n_i i$  la chaîne  $\varphi_* \gamma = \sum_i n_i \Gamma' \varphi(i)$ , où  $\Gamma' \varphi(i)$  désigne la chaîne associée au chemin  $\varphi(i)$  dans le graphe  $G'$ . Cet homomorphisme  $\varphi_*$  transforme les cycles en cycles (puisque les cycles sont engendrés par les lacets), de sorte qu'on pourra écrire

$$\varphi_* : Z_* \rightarrow Z'_*$$

On en déduit, par dualité, un homomorphisme

$$\varphi^* : V'^* \rightarrow V^*.$$

Nous arrêtons là ces généralités pour nous consacrer exclusivement à l'étude d'un type particulier d'homomorphismes de graphes, les « *inclusions* » et les « *contractions* ».

### 0.2.2. Inclusions et contractions.

Une « *inclusion de graphes* », notée  $\iota : G' \hookrightarrow G$ , est un homomorphisme tel que  $I' \subset I$  et  $\iota|_{I'} = \text{identité}$ . On dit alors que  $G'$  est un *sous-graphe* de  $G$ .

Une *contraction de graphes*, notée  $\kappa : G \twoheadrightarrow G''$ , est un homomorphisme tel que  $I \supset I''$ ,  $\kappa|_{I''} = \text{identité}$ , et tel que  $\kappa$  transforme toute ligne de  $\mathcal{C} I''$  en une unité (ligne nulle) de  $G''$ . On dit alors que  $G''$  est un *graphe-quotient* de  $G$ .

Il est facile de voir que pour tout graphe  $G$ , la donnée d'un sous-ensemble quelconque  $I' \subset I$  [resp.  $I'' \subset I$ ] détermine de façon *unique* <sup>(4)</sup> un sous-graphe  $G'$  [resp. un graphe-quotient  $G''$ ] ainsi que l'inclusion [resp. la contraction] correspondante :  $G'$  est obtenu simplement en restreignant à  $I'$  les lois de composition de  $G$ ; quant à  $G''$ , son espace de chemins se déduit de celui de  $G$  en « court-circuitant » toutes les lignes de  $\mathcal{C} I''$ .

Si  $\mathcal{C} I'' = I'$ , on dira, au choix, que « la suite  $G' \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\kappa} G''$  est exacte »; ou que «  $G''$  est le *quotient* de  $G$  par  $G' : G'' = G/G'$  »; ou que «  $G'$  est le *noyau* de la contraction  $\kappa : G' = \text{Ker } \kappa$  »; ou que «  $G$  est une *extension* de  $G'$  par  $G''$  »; ou que «  $G$  est une *extension sur*  $G''$ , de noyau  $G'$  »; toutes ces expressions sont naturellement empruntées à la théorie des groupes.

### 0.2.3. Suite exacte des cycles.

PROPOSITION : *Toute suite exacte de graphes*

$$G' \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\kappa} G''$$

*induit sur les cycles une suite exacte de groupes*

$$(Z) \quad Z'_* \xrightarrow{\iota_*} Z_* \xrightarrow{\kappa_*} Z''_* \quad (5)$$

En effet, il est évident que  $Z'_*$  est un sous-groupe de  $Z_*$ . De même, il est évident que  $\kappa_*$  est surjectif, car tout lacet de  $G''$  provient « par court-circuit » d'un lacet de  $G$ . Enfin, un cycle de  $G$  est annulé par  $\kappa_*$  si et seulement s'il se compose de lignes de  $I'$ , mais cela veut dire que c'est un cycle de  $G'$ .

COROLLAIRE : Pour que  $Z_* = Z''_*$ , il faut et il suffit que  $G'$  soit un « *arbre* » (on appelle « *arbre* » un graphe sans cycles <sup>(6)</sup>).

<sup>(4)</sup> Sauf si, dans le cas de la *contraction*,  $\mathcal{C} I''$  contient des *composantes connexes* de  $G$ . Ces composantes connexes donnent des vertex de  $G''$ , qu'on est libre de laisser *isolés*, ou d'identifier à n'importe quel autre vertex de  $G''$ .

<sup>(5)</sup> La notation  $\twoheadrightarrow$  et  $\twoheadrightarrow$  pour les mono- et épi-morphismes est empruntée à MacLane [24].

<sup>(6)</sup> Dans la littérature, on demande souvent aux « *arbres* » d'être connexes, sinon on les appelle — naturellement — des « *forêts* ».

EXERCICE : Un arbre  $A$ , sous-graphe de  $G$ , est dit *maximal dans  $G$*  s'il n'existe dans  $G$  aucun autre arbre le contenant. Vérifier que si  $G''$  est le quotient de  $G$  par un arbre maximal, toutes les lignes de  $G''$  sont des lacets, de sorte que  $Z_*^* = \mathbb{Z}(I'')$ . Compte tenu du corollaire ci-dessus, on retrouve ainsi la propriété bien connue que l'ensemble  $I''$ , complémentaire d'un arbre maximal, définit une base du groupe des cycles de  $G$  (fig. 3).

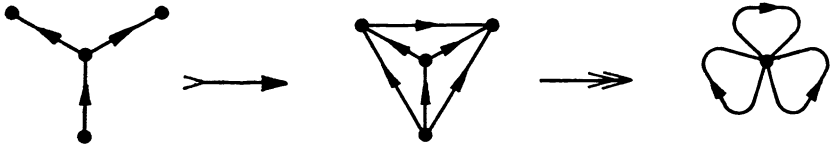


FIG. 3. — Contraction dont le noyau est un arbre maximal.

0.2.4. Suite exacte des lois de conservation.

De la proposition ci-dessus, on déduit, par dualité, le

COROLLAIRE : Toute suite exacte de graphes

$$G' \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\kappa} G''$$

induit sur les lois de conservation une suite exacte de groupes

$$(V) \quad V'^* \xleftarrow{\iota^*} V^* \xleftarrow{\kappa^*} V''^*$$

0.3. Extensions triviales : unions et bouquets de graphes.

0.3.1.

On dira qu'une suite exacte de graphes  $G' \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\kappa} G''$  est *scindée*, ou encore que  $G$  est une *extension triviale* de  $G'$  et  $G''$ , si l'on peut écrire aussi une suite exacte

$$G' \xleftarrow{\iota^*} G \xleftarrow{\kappa^*} G''.$$

Plus généralement, on parlera de *suite exacte scindée à droite*, resp. à gauche (et d'extension triviale à droite, resp. à gauche), si l'on a

$$G' \xrightarrow{\iota} G \xleftarrow{\kappa} G'' \quad \text{resp.} \quad G' \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\kappa} G''.$$

Dans chacun de ces deux cas, la suite exacte de groupes abéliens  $(Z)$  se scinde canoniquement <sup>(7)</sup>, de sorte que  $Z_* = Z'_* \oplus Z''_*$ . De même,  $V^* = V'^* \oplus V''^*$ . Par conséquent, si l'on appelle « *graphes équivalents* » deux graphes qui ont mêmes ensembles de lignes et mêmes groupes de cycles (donc mêmes lois de conservation), on voit qu'une *extension triviale* (à droite ou à gauche) de deux graphes donnés est unique à une équivalence près <sup>(8)</sup>.

### 0.3.2. Construction de toutes les extensions triviales de deux graphes donnés

Tout couple de graphes  $(G', G'')$ , avec  $I', I''$  *disjoints*, admet une extension triviale évidente, à savoir leur « *union* »  $G' \cup G''$ , définie simplement par l'union de leurs deux espaces de chemins.

Une autre extension triviale est le « *bouquet* » (fig. 4)  $G' \vee_{v', v''} G''$ , qui se déduit de l'union en identifiant un vertex  $v' \in V'$  avec un vertex  $v'' \in V''$ .

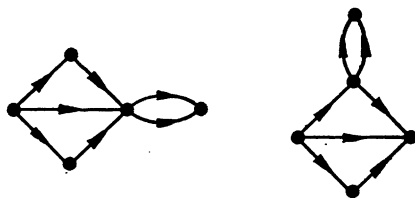


FIG. 4. — Bouquets de deux graphes.

Il résultera du paragraphe suivant que ce sont les *seules extensions triviales possibles*, si du moins l'un des deux graphes  $G', G''$  est *connexe* (rappelons qu'un graphe est dit « *connexe* » si tout couple de vertex peut être joint par un chemin).

<sup>(7)</sup> Bien sûr, puisque  $(Z)$  est une suite exacte de groupes *libres*, elle est *toujours scindée*, mais en général pas de façon *canonique*.

<sup>(8)</sup> Remarquons que cette notion « *d'équivalence* » est plus faible que la notion « *d'isomorphisme de graphes* » que suggérerait 0.2.1. Par exemple, les deux graphes de la figure 4 sont équivalents, mais leurs espaces de chemins sont complètement différents.



0.3.3.

Soit  $G' \xrightarrow{i'} G \xrightleftharpoons[\iota'']{\kappa''} G''$  une suite exacte *scindée à droite*, et supposons  $G'$  *connexe*. Alors  $G$  est égal à l'union ou au bouquet de  $G'$  et  $G''$  (et par conséquent la suite exacte est *scindée*).

PREUVE : Considérons les images par  $i'$  et  $\iota''$  des vertex de  $G'$  et  $G''$ . Si, pour tout couple de vertex  $(v' \in V', v'' \in V'')$ ,  $i'v' \neq \iota''v''$ , évidemment  $G = G' \cup G''$ . S'il existe un couple et un seul tel que  $i'v' = \iota''v''$ , évidemment  $G = G' \underset{v',v''}{\vee} G''$ .

Il reste donc à montrer que si  $G'$  est *connexe*, il ne peut pas exister deux tels couples  $(v'_1, v''_1), (v'_2, v''_2)$ . Et en effet, soient  $v_1 = i'v'_1 = \iota''v''_1$  et  $v_2 = i'v'_2 = \iota''v''_2$ . Comme  $G'$  est *connexe*, il existe un chemin de  $G'$  joignant  $v'_1$  à  $v'_2$ . Donc, par définition du graphe-quotient,  $\kappa'' i'v'_1 = \kappa'' i'v'_2$ , ce qui peut encore s'écrire  $\kappa'' \iota''v''_1 = \kappa'' \iota''v''_2$ , de sorte que  $v''_1 = v''_2$  (car  $\kappa'' \iota'' = \text{id}$ ). Donc  $v_1 = v_2$ , et puisque  $i'$  et  $\iota''$  sont des inclusions,  $v'_1 = v'_2$ . Les deux couples sont donc identiques.

0.3.4.

Demandons-nous maintenant ce qu'il advient du raisonnement précédent quand  $G'$  n'est pas *connexe*. On voit qu'il peut alors exister autant de couples  $(v', v'')$  que  $G'$  a de composantes *connexes*. Par conséquent,  $G$  s'obtient en attachant à  $G''$  (chaque fois par l'opération « bouquet ») certaines des composantes *connexes* de  $G'$ .

Considérons alors le graphe-quotient  $G''' = G/G''$  :

$$\begin{array}{ccc}
 G' & \xrightarrow{i'} & G \\
 & & \xrightleftharpoons[\iota''']{\kappa'''} G'' \\
 G''' & \xleftarrow{\kappa'''} & G
 \end{array} \quad (\text{Cf. fig. 5})$$

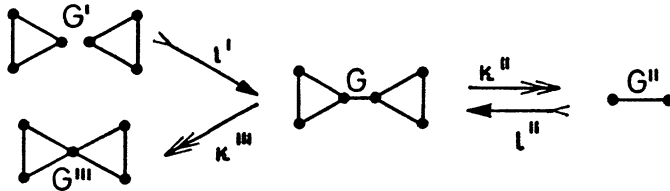


FIG. 5. — La suite exacte  $(i', \kappa'')$  est scindée à droite, tandis que la suite exacte  $(i'', \kappa''')$  est scindée à gauche.  $G'$  est une union, et  $G'''$  un bouquet.

On voit que  $G''$  se déduit de  $G'$  en identifiant entre eux tous les vertex qui s'attachent dans  $G$  à une même composante connexe de  $G''$ ; on a donc deux cas possibles : ou bien  $G' = G''$  (et la suite exacte est scindée); ou bien  $G''$  est un bouquet. On peut donc résumer ainsi les résultats des paragraphes 0.3.3 [sur la suite exacte scindée à droite ( $\iota'$ ,  $\kappa''$ )], et 0.3.4 [sur la suite exacte scindée à gauche ( $\iota''$ ,  $\kappa''$ )]:

**PROPOSITION :** *Si dans une suite exacte scindée à droite le graphe de gauche n'est pas une union (c'est-à-dire s'il est connexe), ou si dans une suite exacte scindée à gauche le graphe de droite n'est pas un bouquet, alors la suite est scindée.*

Voici maintenant une proposition fort utile, qui montre que la seule connaissance des *cycles* suffit à décider de la trivialité d'une suite exacte.

**0.3.5. PROPOSITION :** *Si  $G''$  n'est pas un bouquet, la condition nécessaire et suffisante pour que la suite exacte  $G' \rightarrow G \rightarrow G''$  soit scindée à droite est que la suite exacte des cycles soit scindée.*

Nous avons déjà remarqué au paragraphe 0.3.1 que la condition était nécessaire. Montrons la réciproque.

Dire que  $G''$  n'est pas un bouquet, c'est dire que dans chacune de ses composantes connexes, le complémentaire de l'étoile de tout vertex est connexe. Donc par tout couple de lignes  $i_1, i_2$  de cette étoile passe un lacet ne rencontrant l'étoile qu'en ces deux lignes. Mais puisque la suite exacte des cycles est scindée, ce lacet de  $G''$  est aussi un lacet dans  $G$ , ce qui implique que  $i_1$  et  $i_2$  soient encore incidentes dans  $G$  à un même vertex. Par conséquent,  $G''$  est un sous-graphe de  $G$ , et la suite  $G' \rightarrow G \rightarrow G''$  est scindée à droite.

En combinant 0.3.4 et 0.3.5, on trouve la

**0.3.6. PROPOSITION :** *Si le graphe de gauche n'est pas une union, et le graphe de droite pas un bouquet, la trivialité de la suite exacte de graphes équivaut à la trivialité de sa suite exacte des cycles.*

## 0.4. Produits fibrés.

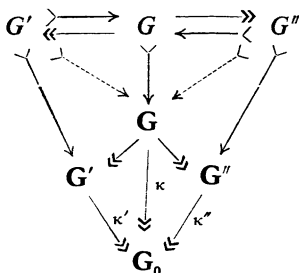
### 0.4.1. Définition du produit fibré.

Dans les chapitres suivants, les objets intéressants ne seront pas des graphes considérés isolément, mais des graphes considérés comme *extensions* sur un graphe donné  $G_0$ . Soient donc  $G' \rightarrow G_0$  et  $G'' \rightarrow G_0$  deux telles

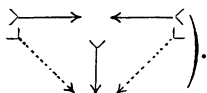
extensions. On dira qu'une contraction  $\kappa : G \twoheadrightarrow G_0$  est un *produit fibré des contractions*  $\kappa'$  et  $\kappa''$ , ou que l'extension  $G$  est un *produit fibré des extensions*  $G'$  et  $G''$ , si

- 1°  $G$  est une extension sur  $G'$  et sur  $G''$ ;
- 2°  $G = \text{Ker } \kappa$  est une extension triviale de  $G' = \text{Ker } \kappa'$  par  $G'' = \text{Ker } \kappa''$ .

La situation « produit fibré » peut donc se représenter par un diagramme exact



(où les inclusions en tirets sont définies par composition :



En considérant le diagramme exact des cycles qui s'en déduit par 0.2.3, on voit aisément que l'homomorphisme  $\kappa_* : Z_* \rightarrow Z_{0*}$  est le « produit fibré »<sup>(9)</sup> des homomorphismes  $\kappa'_* : Z'_* \rightarrow Z_{0*}$  et  $\kappa''_* : Z''_* \rightarrow Z_{0*}$ . De même, pour les lois de conservations, on a la proposition duale : l'inclusion  $\kappa^* : V_0^* \subset V^*$  est la « somme amalgamée »<sup>(10)</sup> des deux inclusions  $\kappa'^* : V_0^* \subset V'^*$  et  $\kappa''^* : V_0^* \subset V''^*$ .

Il en résulte, comme au paragraphe 0.3.1, que le produit fibré de deux contractions de graphes est *unique à une équivalence près*. Mais contrairement à ce qui se passait au paragraphe 0.3.2, il arrive même — très souvent — que ce produit fibré soit vraiment *unique*, ou *qu'il n'existe pas*. Nous allons donner des critères constructifs permettant d'en décider.

(9) Le *produit fibré*  $Z_* = Z'_* \wedge Z''_*$  est le sous-groupe de  $Z'_* \times Z''_*$  formé des couples  $(z', z'')$  tels que  $\kappa'_* z' = \kappa''_* z''$ ; cette valeur commune est par définition  $\kappa_*(z', z'')$ .

(10) La *somme amalgamée*  $V^* = V'^* \vee V''^*$  est le groupe-quotient de  $V'^* \oplus V''^*$  par le sous-groupe des éléments de la forme  $(\kappa'^* v^*, -\kappa''^* v^*)$ ,  $v^* \in V_0$ . Autrement dit  $(\kappa'^* v^*, 0)$  et  $(0, \kappa''^* v^*)$  représentent le même élément de  $V^*$ .

#### 0.4.2. Construction du produit fibré.

Etant donné les deux contractions  $\kappa'$  et  $\kappa''$ , on connaît leurs noyaux  $G'$  et  $G''$ , et l'on connaît donc, grâce à la section 0.3, toutes les extensions triviales  $G$  de  $G'$  par  $G''$ . Le problème de la construction du produit fibré, se réduit donc au problème de *construire une extension  $G$  de  $G'$  par  $G''$ , admettant  $G'$  et  $G''$  comme graphes-quotients*. Nous allons donner des

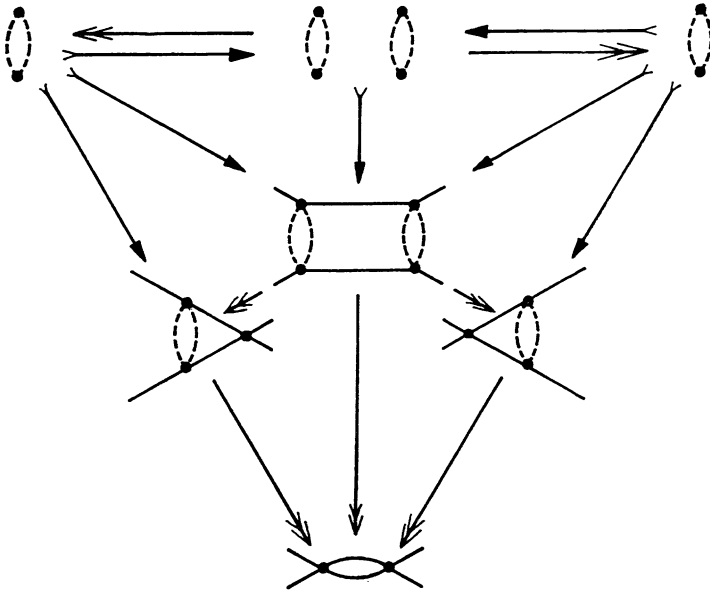


FIG. 6. — Produit fibré défini par une union.

conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une telle extension existe, en supposant pour simplifier que les noyaux  $G'$  et  $G''$  sont *connexes* : alors ils se contractent chacun sur *un* vertex de  $G_0$ . S'il s'agit de deux vertex différents, on voit immédiatement qu'il existe *un et un seul* produit fibré, défini comme extension de  $G' \cup G''$  (et inversement, l'existence d'un produit fibré comme extension de  $G' \cup G''$  implique évidemment que  $G'$  et  $G''$  se contractent sur deux vertex différents de  $G_0$ ). Un exemple de cette situation est la figure 6 <sup>(11)</sup>.

<sup>(11)</sup> Cette figure, ainsi que toutes les suivantes, représente des graphes *avec lignes externes*, du genre de ceux qui nous intéresseront dans les chapitres suivants.

Nous supposons donc dorénavant que  $G'$  et  $G''$  se contractent sur *un même vertex*  $v_0$  de  $G_0$ , de sorte que le produit fibré, s'il est défini, l'est nécessairement comme extension d'un *bouquet*.

Il est clair qu'on ne restreint pas le problème en oubliant toutes les lignes de  $G_0$  qui ne sont pas incidentes à  $v_0$ . Soit donc  $I_0$  l'étoile de  $v_0$  dans  $G_0$ . Il sera plus commode de raisonner sur l'étoile « rayonnant vers l'extérieur »

$$\bar{I}_0 = \{ a \in I_0 \cup I_0^{-1} \mid a \in v_0 \}$$

On déterminera complètement  $G$  en assignant à chaque élément  $a \in \bar{I}_0$  le vertex de  $G$  qui devra en être l'origine dans  $G$ .

Pour tout vertex  $v'$  de  $G'$ , notons

$$J_{v'} = \{ a \in I_0 \mid a \in v' \text{ dans } G' \}$$

et de même pour tout vertex  $v''$  de  $G''$ ,

$$J_{v''} = \{ a \in \bar{I}_0 \mid a \in v'' \text{ dans } G'' \}$$

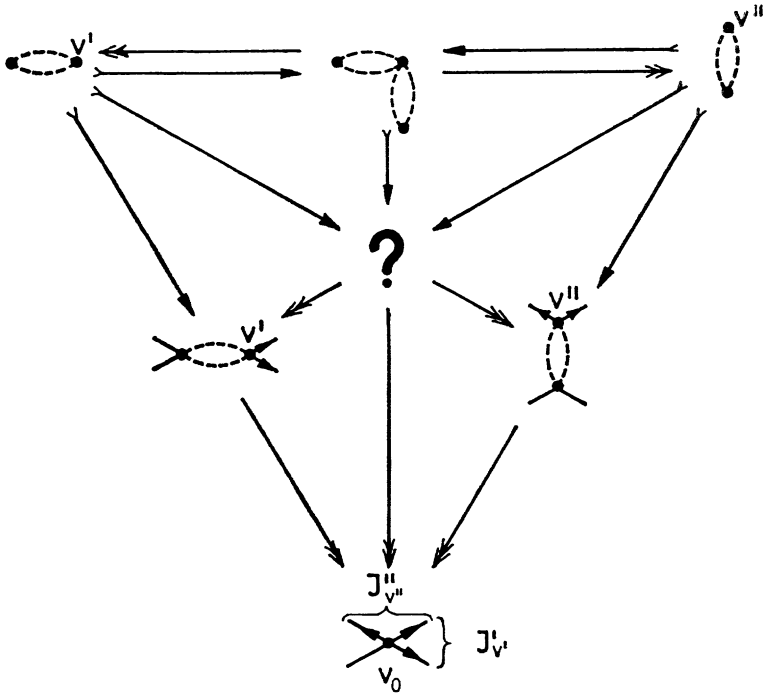


FIG. 7. — Exemple où le produit fibré n'existe pas.

PROPOSITION : Pour que le produit fibré soit défini comme extension du bouquet  $G' \underset{v', v''}{\vee} G''$ , il faut et il suffit que  $\bar{I}_0 = J'_v \cup J''_v$ .

Le détail du raisonnement est laissé au lecteur. Indiquons seulement l'idée de la construction : on assigne comme origine à tout élément de  $J'_v$

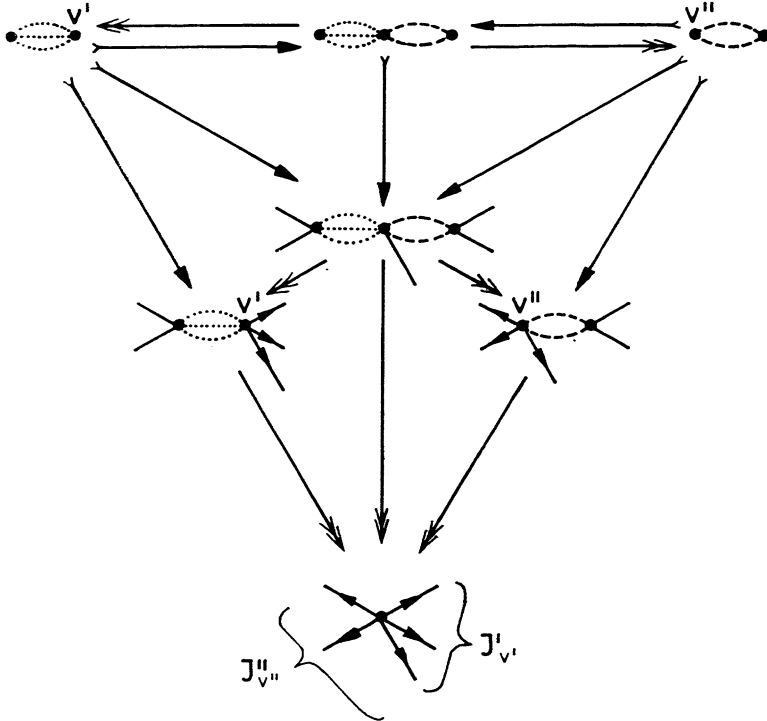


FIG. 8. — Produit fibré unique, défini par un bouquet.

le vertex de  $G' \underset{v', v''}{\vee} G''$  qui en était l'origine dans  $G''$ , et à tout élément de  $J'_v$  le vertex qui en était l'origine dans  $G'$ ; ces deux prescriptions coïncident sur l'intersection  $J'_v \cap J''_v$ , dont tous les éléments sont envoyés sur le vertex  $v$ , « nœud du bouquet » (image commune de  $v'$  et  $v''$ ).

On pourra construire *exactement autant de produits fibrés qu'il existe de couples*  $(v', v'')$  satisfaisant aux conditions de la Proposition. Souvent, il n'existera pas de tels couples (fig. 7), parfois il en existera un seul (fig. 8), parfois plusieurs (fig. 9).

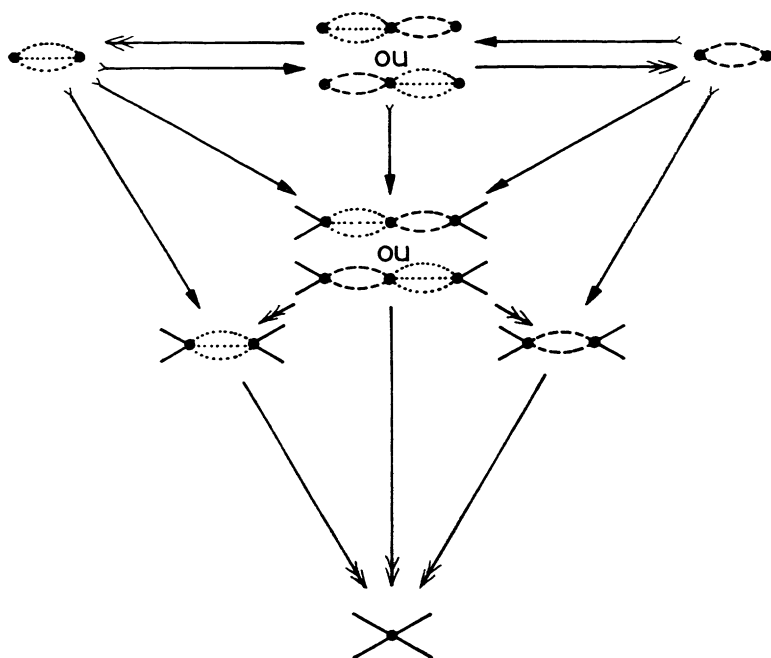
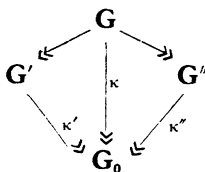


FIG. 9. — Deux produits fibrés définis par des bouquets.

0.4.3. Contractions compatibles.

Vu l'importance que prendra cette notion dans les chapitres suivants, il est bon d'avoir un mot pour dire que le produit fibré de deux contractions existe. Nous dirons dans ce cas qu'elles sont *compatibles*.

Voici encore une définition utile : nous dirons qu'une contraction  $\kappa : G \twoheadrightarrow G_0$  domine une contraction  $\kappa' : G' \twoheadrightarrow G_0$  si elle se factorise en  $\kappa : G \twoheadrightarrow G' \twoheadrightarrow G_0$ . Il faut bien remarquer que l'existence d'une contraction dominant à la fois deux contractions  $\kappa'$  et  $\kappa''$ , c'est-à-dire l'existence d'un diagramme



*n'implique pas que  $\kappa'$  et  $\kappa''$  soient compatibles* <sup>(12)</sup>.

<sup>(12)</sup> Par conséquent, la signification donnée ici au mot « compatible » est différente de celle que lui donne Stapp [35].

Un contre-exemple en est donné par la figure 10.

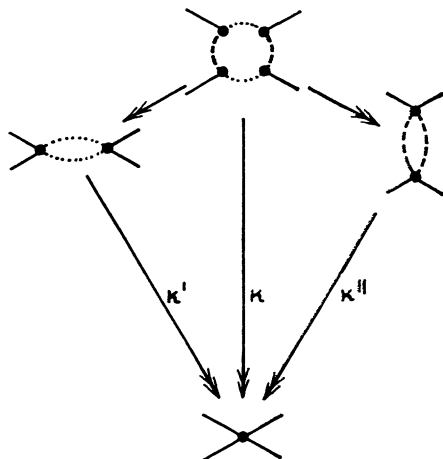


FIG. 10. — Les deux contractions  $\kappa'$  et  $\kappa''$ , bien « qu'incompatibles » (cf. fig. 7), sont dominées par une même contraction  $\kappa$ .

## CHAPITRE PREMIER

### ÉTUDE TOPOLOGIQUE DES ESPACES ASSOCIÉS AUX GRAPHES

Nous ne nous occuperons désormais que de graphes finis, avec lignes externes, *sans circuits* <sup>(1)</sup> : l'absence de circuits permet de définir sur l'ensemble des vertex <sup>(2)</sup> une *relation d'ordre* (partiel), liée physiquement à la « succession causale » des événements que représentent ces vertex. Dans ce chapitre, on associera à chaque graphe  $G$  de cette catégorie un espace analytique  $\mathcal{F}(G)$ , et à chaque contraction <sup>(3)</sup>  $\kappa : G \rightarrow G'$  une application analytique  $\mathcal{F}(\kappa) : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(G')$ . Il s'agira toujours d'espaces analytiques

<sup>(1)</sup> Sauf ceux qui passent par le « vertex de l'infini ».

<sup>(2)</sup> L'« ensemble des vertex » s'entendra désormais *sans le vertex de l'infini*. Noter que la suppression d'un vertex ne modifie pas le groupe des « lois de conservation ».

<sup>(3)</sup> On s'interdira de contracter des lignes externes. Le noyau de la contraction, n'ayant ainsi aucune ligne externe, sera hors de la catégorie étudiée, et aucun espace ne lui sera attaché.



réels, mais il peut être intéressant de noter que certains résultats s'étendent aux *complexifiés* de ces espaces : on indiquera ceci par un (C) en marge; pour éviter tout malentendu, on mettra un (R) en marge des résultats où la structure réelle joue un rôle essentiel.

### I.1. Les espaces $\mathcal{Y}(\mathbf{G})$ et leurs applications.

Chaque ligne  $i$  d'un graphe  $\mathbf{G}$  représentera une particule de masse  $m_i > 0$ . Soit  $\mathcal{M}_i$  la *nappe à énergie positive* de l'hyperboloïde de masse correspondant :

$$\mathcal{M}_i = \{p = (p^0, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^4 \mid p^2 \equiv (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m_i^2; \quad p^0 > 0\}.$$

L'espace  $\mathcal{Y}(\mathbf{G})$  du graphe sera défini comme section de la « couche de masse »  $\mathcal{M}^{\mathbf{I}} = \prod_{i \in \mathbf{I}} \mathcal{M}_i$  par l'espace linéaire  $\mathcal{E}(\mathbf{G})$  exprimant la conservation de

l'impulsion-énergie à chaque vertex :

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}) = \left\{ (p_i \in \mathbb{R}^4)_{i \in \mathbf{I}} \mid \sum_{i \in \mathbf{I}} v^*(i) p_i = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V} \right\};$$

$$\mathcal{Y}(\mathbf{G}) = \mathcal{M}^{\mathbf{I}} \cap \mathcal{E}(\mathbf{G}).$$

$\mathcal{Y}(\mathbf{G})$  est donc un *ensemble analytique* <sup>(4)</sup> *réel*; ce sera même, sauf pour des valeurs « exceptionnelles » des masses, une *variété analytique*, de dimension  $3|\mathbf{I}| - 4 \dim \mathbf{V}^* = 4 \dim \mathbf{Z}_* - |\mathbf{I}|$  : en effet, soit  $\sigma : \mathcal{E}(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbb{R}^{|\mathbf{I}|}$  l'application qui au point  $p^{\mathbf{I}}$  associe la famille de nombres  $(s_i = p_i^2)$ ; pour que l'ensemble analytique  $\sigma^{-1}((m_i^2))$ , dont  $\mathcal{Y}(\mathbf{G})$  est une composante connexe, soit une variété, il suffit que le point  $(m_i^2)$  soit « valeur régulière » de l'application  $\sigma$ , c'est-à-dire qu'il n'appartienne pas au « contour apparent » de  $\sigma$ , qui est un *ensemble maigre* <sup>(5)</sup>. Il est instructif d'écrire explicitement la condi-

<sup>(4)</sup> Et même une *composante connexe de « variété »* (variety) *algébrique réelle*; la structure algébrique interviendra peu dans les raisonnements qui suivent.

<sup>(5)</sup> C'est-à-dire un ensemble dont l'adhérence n'est nulle part dense; en effet,  $\sigma$  est une application polynomiale, de sorte que son ensemble critique est algébrique; or la projection d'un ensemble algébrique est semi-algébrique (théorie de l'élimination); ainsi, le contour apparent est un ensemble semi-algébrique, mais, d'après le théorème de Sard [32], il est de mesure nulle, de sorte qu'il doit être contenu dans un sous-ensemble algébrique propre de  $\mathbb{R}^{|\mathbf{I}|}$ .

tion : les  $(p_i)$  satisfaisant aux lois de conservation peuvent s'écrire  $p_i = \sum_k z_k(i)p_k$ , où  $(z_k \in \mathbf{Z}_*)$  est une base du groupe des cycles de  $\mathbf{G}$ , les  $p_k$  étant des variables indépendantes; on a donc  $\partial s_i / \partial p_k = 2p_i z_k(i)$ , et la condition pour que le point  $(p_i)$  soit critique, c'est-à-dire pour que le rang de la matrice  $\|\partial s_i / \partial p_k\|$  soit inférieur à  $|\mathbf{I}|$ , se traduit par l'existence de paramètres  $\alpha_i$  non tous nuls tels que

$$(L) \quad \sum_{i \in \mathbf{I}} \alpha_i p_i z(i) = 0 \quad \forall z \in \mathbf{Z}_*$$

### I.1.1. Exemple.

Considérons un graphe « sans structure interne », formé de lignes externes incidentes à un seul vertex  $v$ ;  $\mathbf{Z}_*$  est engendré par tous les couples de lignes  $i, j$  combinés ainsi :  $v^*(i)i - v^*(j)j$ . Les équations (L) signifient donc que tous les  $p_i$  sont proportionnels entre eux, *ce qui n'est possible que si la somme des masses entrantes est égale à la somme des masses sortantes.*

On voit sur cet exemple que les valeurs « exceptionnelles » des masses sont très souvent réalisées en physique, et en particulier pour tous les graphes sans structure interne décrivant des processus de diffusion élastique. Nous nous autoriserons néanmoins du caractère « exceptionnel » de ces singularités pour les exclure de notre étude, ayant toujours la ressource de les étudier par passage à la limite à partir de valeurs « régulières » des masses.

### I.1.2. Les applications $\mathcal{F}(\kappa)$ .

De 0.2.4, il ressort en particulier que pour toute contraction  $\kappa : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}'$  l'espace  $\mathbf{V}'^*$  des lois de conservation de  $\mathbf{G}'$  est inclus dans l'espace  $\mathbf{V}^*$  des lois de conservation de  $\mathbf{G}$ . Par conséquent, la projection canonique de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{4\mathbf{I}}$  sur le sous-espace euclidien  $\mathbb{R}^{4\mathbf{I}'}$  ( $\mathbf{I} \supset \mathbf{I}'$ ) induit une projection

$$\mathcal{E}(\kappa) : \mathcal{E}(\mathbf{G}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbf{G}')$$

et, par restriction aux couches de masse, une application analytique

$$\mathcal{F}(\kappa) : \mathcal{F}(\mathbf{G}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{G}').$$

(R) PROPOSITION :  $\mathcal{F}(\kappa)$  est une application propre <sup>(6)</sup>.

La preuve utilisera le

LEMME (évident) : Pour qu'un sous-ensemble fermé  $K \subset \mathcal{F}(G)$  soit compact, il faut et il suffit que toutes les énergies  $p_i^0$  soient bornées quand  $(p_i)$  parcourt  $K$ .

PREUVE : Soit  $G = \text{Ker } \kappa$  le noyau de la contraction  $\kappa$ . Il suffit de démontrer que le fait pour les énergies  $p_{i'}^0$  ( $i' \in I'$ ) d'être bornées entraîne la même propriété pour les énergies  $p_i^0$  ( $i \in I$ , ensemble des lignes de  $G$ ). Soit  $v \in V$  un vertex maximal pour la relation d'ordre causal du sous-graphe  $G$ . La propriété est évidente pour toutes les lignes de  $G$  incidentes à  $v$ , car les énergies (positives !) de toutes ces lignes interviennent avec le même signe dans la loi de conservation du vertex  $v$ . Enlevant ces lignes, on recommence avec le sous-graphe de  $G$  ainsi obtenu, etc.

### 1.1.3. Produits fibrés.

Des considérations de 0.4.1, on déduit facilement que le « foncteur »  $\mathcal{F}$  « commute aux produits fibrés », c'est-à-dire transforme le produit fibré des contractions de graphes en produit fibré des applications d'espaces <sup>(7)</sup> : autrement dit, si  $\kappa_1 : \mathbf{G}_1 \twoheadrightarrow \mathbf{G}_0$  et  $\kappa_2 : \mathbf{G}_2 \twoheadrightarrow \mathbf{G}_0$  sont deux contractions compatibles, et si  $\kappa_1 \wedge \kappa_2 : \mathbf{G}_1 \wedge \mathbf{G}_2 \twoheadrightarrow \mathbf{G}_0$  désigne leur produit fibré, on a

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbf{G}_1 \wedge \mathbf{G}_2) = \mathcal{F}(\mathbf{G}_1) \wedge \mathcal{F}(\mathbf{G}_2) & & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{F}(\kappa_1 \wedge \kappa_2) = \mathcal{F}(\kappa_1) \wedge \mathcal{F}(\kappa_2) & & \\ \searrow & & \swarrow \\ & \mathcal{F}(\mathbf{G}_0) & \end{array}$$

### 1.2. Singularités des applications $\mathcal{F}(\kappa)$ .

Pour étudier les singularités de l'application  $\mathcal{F}(\kappa) : \mathcal{F}(\mathbf{G}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{G}')$ , on pourra considérer l'espace  $\mathcal{E}(\kappa)^{-1}(\mathcal{F}(\mathbf{G}'))$ , qui est un espace fibré de

<sup>(6)</sup> C'est-à-dire que l'image réciproque de tout compact est compacte.

<sup>(7)</sup> Rappelons la définition du produit fibré  $f \wedge g : X \wedge Y \rightarrow T$  de deux applications  $f : X \rightarrow T$  et  $g : Y \rightarrow T$  :  $X \wedge Y$  est le sous-espace de  $X \times Y$  formé des couples  $(x, y)$  tels que  $f(x) = g(y)$ ; cette valeur commune  $t$  est par définition  $(f \wedge g)(x, y)$ . Il résulte de cette définition que  $(f \wedge g)^{-1}(t) = f^{-1}(t) \times g^{-1}(t)$  : « la fibre est le produit des fibres » (c'est là l'origine du vocable « produit fibré »). Evidemment  $(f \wedge g)(X \wedge Y) = f(X) \cap g(Y)$  : « l'image est l'intersection des images ».

base  $\mathcal{F}(\mathbf{G}')$ , à fibre euclidienne, dans lequel la sous-variété  $\mathcal{F}(\mathbf{G})$  est donnée par les équations  $p_i^2 - m_i^2 = 0$ ,  $i \in I$ . En appliquant alors la formule (L) de l'Appendice I, on trouve que l'ensemble critique de  $\mathcal{F}(\kappa)$  est donné par l'élimination des paramètres  $\alpha_i$  non tous nuls entre les équations

$$(L) \quad \sum_{i \in I} \alpha_i p_i z(i) = 0 \quad \forall z \in Z_*$$

(c'est-à-dire les mêmes équations que (L), mais relatives aux lignes  $i$  et aux cycles  $z$  du *sous-graphe*  $G$ , noyau de la contraction). Les équations (L) sont les « *équations de Landau* ». L'image de l'ensemble critique [« contour apparent » de  $\mathcal{F}(\kappa)$ ] sera appelée *lieu de Landau* <sup>(8)</sup> de la contraction  $\kappa$ , et ses points seront les « *points de Landau* ».

On notera  $\Gamma(\kappa)$  l'ensemble critique, et  $L(\kappa)$  le lieu de Landau.

### 1.2.1. Étude des points critiques de corang 1.

Les points critiques de corang 1 sont ceux pour lesquels l'espace vectoriel des  $(\alpha_i)$  solutions de (L) est à une dimension. Nous nous posons le problème du caractère « générique » de ces points critiques. Il sera commode, dans un premier temps, d'*oublier les contraintes de masse pour le graphe* « *but* » <sup>(9)</sup>  $\mathbf{G}'$ , c'est-à-dire d'étudier les singularités de l'application

$$\mathcal{F}'(\kappa) : \mathcal{F}'(\mathbf{G}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbf{G}')$$

avec  $\mathcal{F}'(\mathbf{G}) = \mathcal{M}^I \cap \mathcal{E}(\mathbf{G})$  (contraintes de masse pour le sous-graphe  $G$  seulement). Il suffira ensuite de remarquer que notre principal résultat (la règle I.2.3 ci-dessous, relative au « type  $S_1$  » de la singularité), reste valable après restriction à la couche de masse, en vertu de la Remarque A.I.3.2.

Première question à se poser : est-ce que la « condition de transversalité » de l'Appendice I est satisfaite ? D'après les formules de cet Appendice, la non-transversalité pour un point critique de corang 1 se traduit par l'existence de quadrivecteurs  $\mathbf{V}_k$  non tous nuls et de scalaires  $\beta_i$  tels que

$$(Trs)_1 \quad \sum_{i \in I} \left( \sum_k \alpha_i z_j(i) z_k(i) \mathbf{V}_k + \beta_i z_j(i) p_i \right) = 0 \quad \forall z_j \in Z_*$$

<sup>(8)</sup> Ou *variété de Landau*, chaque fois qu'il s'agira en effet d'une variété au sens de la topologie différentielle.

<sup>(9)</sup> Remarquez que les équations (L) ne font pas intervenir explicitement le graphe *but*  $\mathbf{G}'$ .

$$(Trs)'_2 \quad \sum_k z_k(i) V_k \cdot p_i = 0 \quad \forall i \in I$$

où  $(z_j)$  resp.  $(z)_k$  est une base de  $Z_*$  resp.  $Z_*$ .

En posant  $W_i = \sum_k z_k(i) V_k$ , on transforme ces équations en

$$(Trs)'_1 \quad \sum_{i \in I} (\alpha_i W_i + \beta_i p_i) z_j(i) = 0 \quad \forall z_j \in Z_*$$

$$(Trs)'_2 \quad W_i \cdot p_i = 0 \quad \forall i \in I$$

où les quadrivecteurs  $W_i$  sont astreints à satisfaire les lois de conservation du sous-graphe  $G$  (de façon à assurer l'existence des  $V_k$ ).

Tâchons de tirer de ces équations quelques règles simples.

(C) I.2.2. Règle valable pour les contractions « périphériques ».

Une ligne  $i$  du sous-graphe  $G$ , noyau de la contraction  $\kappa : G \rightarrow G'$ , sera dite « périphérique » s'il existe un cycle  $z \in Z_*$  n'ayant que la ligne  $i$  en commun avec  $G$ . Supposons que toutes les lignes de  $G$  soient périphériques (exemple : fig. 11; contre-exemple : fig. 12). Alors, si tout cycle de  $G$  contient au moins une ligne  $i$  telle que  $\alpha_i \neq 0$ , la condition de transversalité est satisfaite.

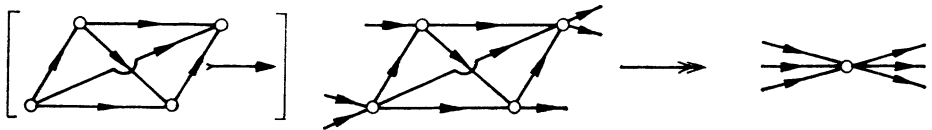


FIG. 11. — Exemple de contraction dont toutes les lignes sont périphériques.

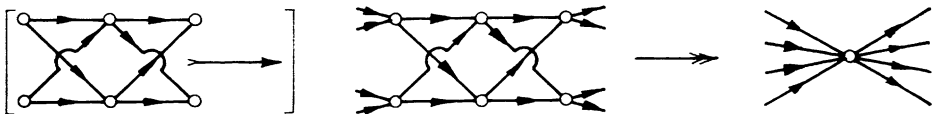


FIG. 12. — Exemple de contraction dont aucune ligne n'est périphérique.

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un système de quadrivecteurs  $W_i$  non tous nuls et de scalaires  $\beta_i$  satisfaisant  $(\text{Trs})'_1(\text{Trs})'_2$ . D'après  $(\text{Trs})'_1$ ,  $\alpha_i W_i + \beta_i p_i = 0$  pour toute ligne périphérique  $i$ , c'est-à-dire pour toute ligne. Reportant cela dans  $(\text{Trs})'_2$ , on trouve  $\beta_i p_i^2 = 0$ , et comme les masses sont supposées non nulles,  $\beta_i = 0$ , de sorte que l'on doit avoir  $\alpha_i W_i = 0 \forall i \in I$ . Montrons que cette condition entraîne l'existence d'un cycle de  $G$  où tous les  $\alpha_i$  sont nuls, contrairement à l'hypothèse.

En effet, soit  $G''$  le sous-graphe (non vide) de  $G$ , ensemble des lignes où  $W_i \neq 0$ . Comme les  $W_i$  devaient satisfaire les lois de conservation de  $G$ , ils devront aussi satisfaire celles de  $G''$ , ce qui n'est possible (puisque  $W_i \neq 0$  sur  $G''$ ) que si  $G''$  a au moins un cycle.

REMARQUE : On peut se demander si la règle I.2.2 admet une réciproque, c'est-à-dire : *quand il existe un cycle de  $G$  dont tous les  $\alpha_i$  sont nuls, la condition de transversalité est-elle nécessairement violée ?*

La réponse est *oui si ce cycle n'a pas plus de trois lignes* (et peu importe que la contraction soit périphérique ou non). Mais pour un cycle de plus de trois lignes, un contre-exemple est fourni par la figure 13 : sur cet exemple, il est facile de fabriquer un point critique où  $\alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \neq 0$ , mais où  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ , avec les quatre vecteurs  $p_1, p_2, p_3, p_4$  linéairement indépendants; comme la contraction est périphérique, le raisonnement de I.2.2 montre qu'il faudrait prendre  $W_5 = W_6 = W_7 = 0$ , de sorte que les lois de conservation fourniraient l'égalité entre les quatre premiers  $W_i$  (au signe près); mais puisque  $p_1, p_2, p_3, p_4$  sous-tendent tout  $\mathbb{R}^4$ , il serait alors impossible de satisfaire  $(\text{Trs})'_2$  sur les quatre premières lignes à la fois.

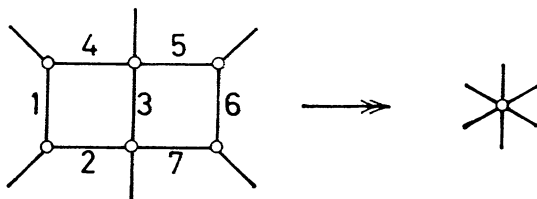


FIG. 13. — Illustration de la remarque I.2.2.

(R) I.2.3. Règle valable pour une contraction quelconque.

Si  $\alpha_i \geq 0 \forall i \in I$ , et si tout cycle de  $G$  contient au moins une ligne où  $\alpha_i > 0$ , alors la condition de transversalité est satisfaite. De plus, le point critique est « ordinaire », « d'indice transverse » nul.

En effet, puisque  $Z_* \subset \mathbf{Z}_*$ , les conditions  $(\text{Trs})'_1$  devraient être satisfaites *a fortiori* sur  $Z_*$ . En remplaçant dans  $(\text{Trs})'_1 z_i$  par  $z_k$ , faisant le produit scalaire de l'équation obtenue par  $V_k$ , et sommant sur  $k$ , on obtient, compte tenu de  $(\text{Trs})'_2$  :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i W_i^2 = 0.$$

Or les  $W_i$  sont, d'après  $(\text{Trs})'_1$ , des vecteurs du genre espace. L'équation ci-dessus n'est donc possible que si  $\alpha_i W_i = 0$  sur toute ligne, et le raisonnement se poursuit comme pour la règle I.2.2, prouvant la transversalité.

Or on a utilisé seulement les conditions *restreintes* à  $Z_*$ , conditions restreintes qui expriment justement (Remarque A.I.3.1) le caractère « exceptionnel » d'un point critique. Le point critique est donc bien ordinaire.

Quant à l'affirmation sur « l'indice transverse nul », elle résultera du fait, démontré au paragraphe suivant, que l'espace  $\mathcal{Y}(\mathbf{G})$  se projette d'un même côté de son contour apparent.

**(R) I.2.4. Convexité de  $\mathcal{Y}'(\mathbf{G})$  près d'un point critique « efficace ».**

Un point critique sera dit « efficace » (en anglais : « relevant ») si les équations de Landau y sont satisfaites par un système de paramètres  $\alpha_i \geq 0$ . Soit donc  $\overset{c}{p}^I \in \mathcal{Y}'(\mathbf{G})$  un point critique efficace, de corang quelconque, et choisissons un système  $(\alpha_i \geq 0)$  de solutions des équations de Landau en ce point. Considérons sur  $\mathcal{E}(\mathbf{G})$  la fonction linéaire, nulle au point  $\overset{c}{p}^I$  :

$$t(p^I) = \sum_{i \in I} \alpha_i \overset{c}{p}_i \cdot (p_i - \overset{c}{p}_i).$$

Restreinte aux nappes positives des hyperboloïdes de masse ( $p_i^2 = m_i^2$ ,  $\overset{c}{p}_i^0 > 0$ ), cette expression n'est jamais négative. Donc l'hyperplan  $\{ t(p^I) = 0 \}$  « supporte » l'espace  $\mathcal{Y}'(\mathbf{G})$ . D'autre part, cet hyperplan est évidemment « vertical » (fig. 14), c'est-à-dire que son équation ne dépend que des coordonnées de la « base »  $\mathcal{E}(\mathbf{G}')$  <sup>(10)</sup>. Sa projection sur  $\mathcal{E}(\mathbf{G}')$  « supporte » donc également tout le contour apparent de  $\mathcal{Y}'(\mathbf{G})$ .

<sup>(10)</sup> Remarquez que la différentielle de la fonction  $t$  au point  $\overset{c}{p}^I$ , qui s'écrit

$$dt(\overset{c}{p}^I) = \sum_{i \in I} \alpha_i \overset{c}{p}_i \cdot dp_i,$$

n'est autre que le covecteur « horizontal »  $\omega = \pi_j^* \theta$  de l'Appendice I (A.I.1).

On obtient ainsi, outre le résultat *local* énoncé à la fin de la règle I.2.3 (« l'indice transverse du point critique est nul »), un résultat *global* : la projection de  $\mathcal{S}(\mathbf{G})$  est tout entière située d'un même côté du contour apparent.

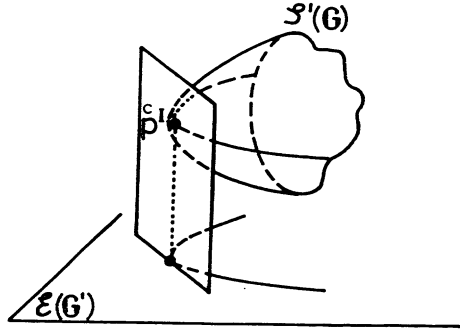


FIG. 14. — Convexité du contour apparent.

On obtient aussi des limitations très sévères sur les points critiques de corang  $> 1$  : s'il existe une solution ( $\alpha_i > 0$ ) des équations de Landau, toute solution suffisamment voisine sera aussi positive de sorte que le raisonnement précédent fournit, pour un point critique de corang  $r$ , une famille à  $r - 1$  paramètres d'hyperplans supportant le contour apparent. Ainsi, toute singularité de corang  $> 1$  est en forme de « coin » (cf., par exemple, fig. 18). Or cette forme n'est pas du tout celle des singularités « génériques » de Thom (dont la définition est rappelée dans l'Appendice I) : on voit donc que les singularités de corang  $> 1$  des graphes de diffusion multiple « ont quelque chose de bizarre »; nous en reparlerons dans la section I.3.

### I.2.5. Résumé et conclusions.

Nous venons de définir un « point critique efficace » comme un point où les équations de Landau sont satisfaites par un système de paramètres  $\alpha_i \geq 0$ ; si de plus le corang est 1 (c'est-à-dire si les  $\alpha_i$  sont uniques à un facteur près), et si tout cycle de  $\text{Ker } \kappa$  contient au moins une ligne  $i$  où  $\alpha_i$  n'est pas nul, le point critique sera dit « principal ». L'image d'un point critique efficace [resp. principal] sera un « point de Landau efficace » [resp. principal].

De tout ce qui précède, il faut essentiellement retenir ceci :

1° tout lieu de Landau efficace borde l'image de  $\mathcal{S}(\kappa)$ ;



2° tout lieu de Landau principal est une variété de codimension 1, correspondant à une situation de type  $S_1^+$  de Thom : l'expression « type  $S_1$  » résume le fait que le point critique est de corang 1, transversalement critique et ordinaire; cette situation est décrite en détail dans l'Appendice I (A.I.2); le  $+$  rappelle que « l'indice transverse » du point critique est nul.

Concluons par une remarque triviale, qui montre l'intérêt de la notion de « lieu de Landau principal » : *étant donné un point de Landau efficace, on peut toujours trouver une contraction dont il est point de Landau principal.* En effet, soit  $\kappa_1 : G_1 \rightarrow G_0$  une contraction ayant  $x_1$  comme point critique efficace. Supposons que les équations de Landau puissent être satisfaites au point  $x_1$  par un système de  $\alpha_i$  dont certains s'annulent, les autres restant positifs (un tel système existe toujours pour un point de corang  $> 1$ , comme nous le verrons au paragraphe I.3.2). En contractant toutes les lignes de  $G_1$  où ces  $\alpha_i$  s'annulent, on obtient un graphe  $G_2$  (dont on vérifie sans peine qu'il est *sans circuits*), ce qui fournit un diagramme de contractions

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\kappa_{12}} & G_2 \\ & \searrow \kappa_1 & \downarrow \kappa_2 \\ & & G_0 \end{array}$$

tel que  $x_2 = \mathcal{Y}(\kappa_{12})x_1$  soit point critique efficace de  $\kappa_2$ . Si le point  $x_2$  est de corang  $> 1$ , on peut lui réappliquer le processus qui doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'étapes, puisque  $G_1$  n'a qu'un nombre fini de lignes. Au bout du compte, on se trouve en présence d'un diagramme de contractions

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\kappa_{1n}} & G_n \\ & \searrow \kappa_1 & \downarrow \kappa_n \\ & & G_0 \end{array}$$

tel que  $x_n = \mathcal{Y}(\kappa_{1n})(x_1)$  soit point critique de corang 1, à  $\alpha_i$  tous strictement positifs, *donc point critique principal*, de la contraction  $\kappa_n$ .

### I.3. Composition des singularités.

La composition de deux contractions

$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{\kappa'} & G \\ & \searrow \kappa'_0 & \downarrow \kappa_0 \\ & & G_0 \end{array}$$

donne naissance à un diagramme commutatif d'applications

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(\mathbf{G}') & \xrightarrow{\mathcal{Y}(\kappa')} & \mathcal{Y}(\mathbf{G}) \\ & \searrow \mathcal{Y}(\kappa'_0) & \downarrow \mathcal{Y}(\kappa_0) \\ & & \mathcal{Y}(\mathbf{G}_0) \end{array}$$

auquel on peut essayer d'appliquer l'analyse de l'Appendice II.

### I.3.0. Le contour apparent d'une variété de Landau est un lieu de Landau.

Soit  $L(\kappa') \subset \mathcal{Y}(\mathbf{G})$  un lieu de Landau principal de  $\kappa'$ . C'est une variété (provenant, d'après I.2.3, d'une situation de type  $S_1^+$ ), et puisque  $\mathcal{Y}(\kappa_0)$  la projette sur  $\mathcal{Y}(\mathbf{G}_0)$  il est naturel d'en chercher le contour apparent.

Si nous nous plaçons en dehors de l'ensemble critique  $\Gamma(\kappa_0)$ , la section A.II.3, nous apprend que le contour apparent du lieu de Landau  $L(\kappa')$  coïncide avec le lieu de Landau  $L(\kappa'_0)$ . De plus, si  $L(\kappa'_0)$  est lieu de Landau principal de  $\kappa'_0$ , l'application  $\mathcal{Y}(\kappa_0) | L(\kappa')$  est de type  $S_1^+$  (A.II.2).

Reste à étudier le cas où  $L(\kappa')$  rencontre l'ensemble critique  $\Gamma(\kappa_0)$ . On dira dans ce cas qu'on a affaire à une intersection effective des lieux de Landau  $L(\kappa_0)$  et  $L(\kappa'_0)$ . Les paragraphes suivants sont consacrés à l'analyse de différents cas d'intersection effective.

### I.3.1. Cas du corang 1 : « contact effectif » de deux lieux de Landau <sup>(11)</sup>.

Le cas le plus simple d'intersection effective est la situation décrite dans la section A.II.4 sous le nom de « singularité  $(S_1 \circ S_1)_1$  ». Rappelons que dans l'espace but  $\mathcal{Y}(\mathbf{G}_0)$ , les lieux de Landau consistent alors en deux variétés  $L_0, L'_0$  de codimension 1 tangentes entre elles le long d'une variété  $\Lambda_0 = L_0 \cap L'_0$  de codimension 2. Pour cette raison, on dira qu'on a affaire à un « contact effectif » des lieux de Landau  $L(\kappa_0)$  et  $L(\kappa'_0)$ . Pour plus de détails, cf. fig. 15.

<sup>(11)</sup> Il serait plus conforme à l'usage de réserver à ce cas le nom « d'intersection effective » (en anglais : « effective intersection »). Nous préférons le terme plus spécifique de « contact effectif », gardant au terme « d'intersection effective » un sens plus large.

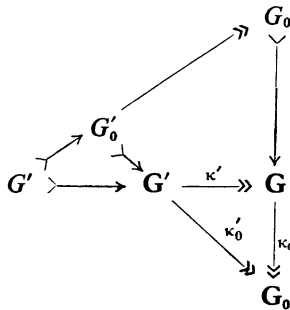
Comment reconnaître en pratique que cette situation est réalisée ? On sait déjà, d'après I.2.3, que les applications  $\mathcal{F}(\kappa_0)$  et  $\mathcal{F}(\kappa')$  sont de type  $S_1^+$  toutes les fois qu'on a affaire à des singularités *principales*. Maintenant, pour s'assurer que l'application composée est bien de type  $(S_1^+ \circ S_1^+)_1$ , il faut vérifier d'une part la condition de transversalité :

(Trs)  $L(\kappa')$  et  $\Gamma(\kappa_0)$  se coupent transversalement; d'autre part, la condition sur le corang :

(Crg 1)  $\mathcal{F}(\kappa'_0)$  — ou, de façon équivalente,  $\mathcal{F}(\kappa_0) \mid L(\kappa')$  — est de corang 1.

Avant d'expliciter la condition de transversalité, précisons un peu les notations.

Soient  $G_0, G', G'_0$  les noyaux de  $\kappa_0, \kappa', \kappa'_0$



et  $I_0, Z_{0*}, I', Z'_*$ , etc., les ensembles de lignes et les groupes de cycles correspondants ( $I'_0 = I_0 \cup I'$  et  $Z'_{0*}$  est une extension sur  $Z_{0*}$ , de noyau  $Z'_*$ ). Les ensembles critiques  $\Gamma(\kappa_0)$  et  $\Gamma(\kappa')$  sont donnés par les équations de Landau

$$\Gamma(\kappa_0) : \sum_{i_0 \in I_0} \alpha_{i_0} p_{i_0} z_0(i_0) = 0 \quad \forall z_0 \in Z_{0*}$$

$$\Gamma(\kappa') ; \sum_{i' \in I'} \alpha_{i'} p_{i'} z'(i') = 0 \quad \forall z' \in Z'_*$$

Quant à la variété de Landau  $L(\kappa')$ , image de  $\Gamma(\kappa')$ , on peut se la donner par une équation locale  $l(\kappa')$  ayant pour différentielle au point considéré

$$dl(\kappa') = \sum_{i' \in I'} \alpha_{i'} p_{i'} dp_{i'}$$

Précisons en quel sens l'expression ci-dessus détermine  $dl(\kappa')$  : une base  $(z'_i)$  de  $Z'_*$  peut être choisie comme union d'une base  $(z'_i)$  de  $Z'_*$  (« noyau »)

et d'une famille  $(z'_j)$  de cycles donnant par contraction une base  $(z_j)$  de  $Z_*$  (« quotient ») :

$$\begin{array}{ccc} Z'_* & \xrightarrow{\quad} & Z'_* \xrightarrow{\kappa'_*} Z_* \\ & & (z'_j) \mapsto (z_j) \\ (z'_i) = (z'_i) & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & (z'_i) \end{array}$$

si l'on remplace, dans l'expression ci-dessus,  $dp_{i'}$  par son développement  $\sum_h z'_h(i') dp_h$ , et si l'on tient compte des équations de Landau, on voit que les termes du « noyau » ne contribuent pas, de sorte qu'on peut écrire

$$dl(\kappa') = \sum_{i' \in I'} \sum_j \alpha_{i'} p_{i'} z'_j(i') dp_j.$$

Muni de ces expressions, on est prêt à écrire la condition de transversalité : par un raisonnement analogue à celui de I.2.1, et qui sera laissé en exercice au lecteur, on trouve que la *négation* de cette condition se traduit par l'existence de quadrivecteurs  $V_k$  non tous nuls et de scalaires  $\beta_i$  tels que

$$\left( \text{Trs}' \right) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i_0 \in I_0} \left( \sum_k \alpha_{i_0} z_j(i_0) z_{0k}(i_0) V_k + \beta_{i_0} p_{i_0} z_j(i_0) \right) + \sum_{i' \in I'} \alpha_{i'} p_{i'} z'_j(i') = 0 \quad \forall z_j \in Z_* \\ \sum_k z_{0k}(i_0) V_k \cdot p_{i_0} = 0 \quad \forall i_0 \in I_0, \end{array} \right.$$

où  $z_{0k}$  parcourt une base de  $Z_{0*}$ .

Sans tenter une exploitation détaillée de ces équations, contentons-nous d'indiquer un cas évident où elles ne peuvent pas être satisfaites, et où, par conséquent, la condition de transversalité est remplie : c'est le cas où *il existe une ligne  $i' \in I'$ , périphérique pour la contraction composée  $\kappa'_0$*  (cf. I.2.2 où a été défini le mot « périphérique »), *telle que  $\alpha_{i'} \neq 0$* . En effet, il y aurait alors un cycle  $z_j$  pour lequel la première des équations  $(\text{Trs})'$  s'écrirait  $\alpha_{i'} p_{i'} = 0$ , ce qui est impossible si  $p_{i'}^2 = m_{i'}^2 \neq 0$ .

EXEMPLE : Les contractions composées de la figure 16 (étudiées en détail dans [19] [20]) remplissent évidemment le critère de « périphérisme » ci-dessus. Par conséquent, toute intersection effective de corang 1 sera bien

un *contact effectif* : la figure 16 a produira la situation représentée sur la figure 15 a et la figure 16 b la situation représentée sur la figure 15 b.

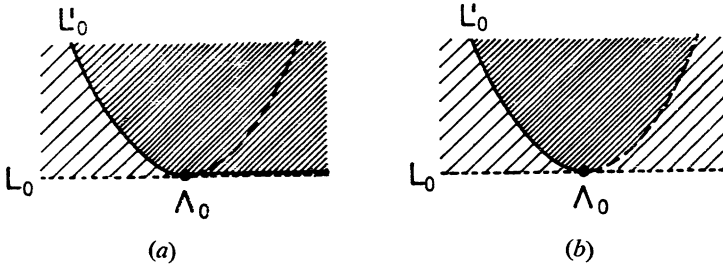


FIG. 15 a. — Cas général  $\dim \mathcal{Y}(G') \geq \dim \mathcal{Y}(G)$ .

FIG. 15 b. — Cas particulier  $\dim \mathcal{Y}(G') = \dim \mathcal{Y}(G) - 1$ .

FIG. 15. — Contact effectif de deux lieux de Landau  $L(\kappa_0)$  et  $L(\kappa'_0)$ .

Traits pleins : partie efficace de  $L(\kappa'_0)$ ; tirets : partie inefficace de  $L(\kappa'_0)$ ; pointillés :  $L(\kappa_0)$ . Zone ombrée : image de  $\mathcal{Y}(\kappa'_0)$ ; zone hachurée : image de  $\mathcal{Y}(\kappa_0)$ .

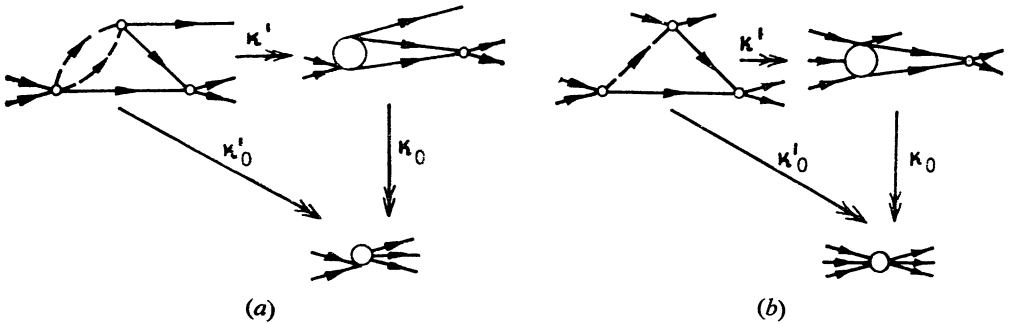


FIG. 16. — Exemples de contractions donnant lieu à des contacts effectifs : la figure 16 a correspond à la figure 15 a, et la figure 16 b correspond à la figure 15 b.

**PROBLÈME OUVERT** : Peut-on trouver des cas de contractions composées où la condition de transversalité est violée ?

1.3.2. **Corang 2 : commentaires généraux.**

Le cas du corang 2 est plus difficile à étudier.

Les arguments de convexité de I.2.4 nous ont déjà conduits à remarquer qu'une singularité de corang 2 n'est certainement pas « générique » au sens

de l'Appendice I. Les mêmes arguments nous montrent que ce n'est pas non plus une « singularité stable d'application composée » au sens de l'Appendice II (la fig. 38 n'est pas convexe).

Pour chercher l'origine de cette bizarrerie, oublions le diagramme triangulaire du début de cette section, et considérons simplement une contraction  $\kappa'_0 : G' \rightarrow G_0$ , ayant un point critique  $x'$  de corang 2, et « strictement efficace », c'est-à-dire que les équations de Landau y admettent une solution  $(\alpha_{i'_0} > 0 \forall i'_0 \in I'_0)$  : autrement dit, le « plan des  $(\alpha_{i'_0})$  » (sous-espace vectoriel à deux dimensions de  $\mathbb{R}^{|I'_0|}$  défini par les solutions des équations de Landau) « rencontre le premier quadrant » de  $\mathbb{R}^{|I'_0|}$ . Ce premier quadrant découpe alors sur lui un certain « secteur » (fig. 17) dont chacun des deux

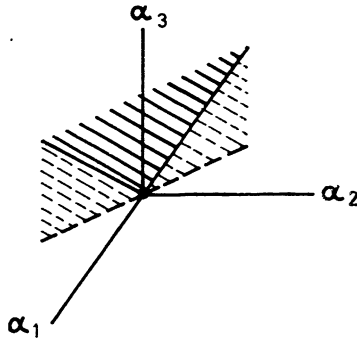
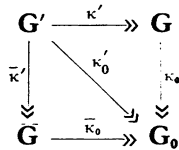


FIG. 17. — Plan des  $\alpha_i$  pour un point critique « strictement efficace » de corang 2.

bords est défini par l'annulation d'un certain nombre de  $\alpha_{i'_0}$ . On peut alors, comme au paragraphe I.2.5, contracter ces deux systèmes de lignes, et les contractions  $\kappa'$ ,  $\bar{\kappa}'$  ainsi définies s'insèrent dans un diagramme carré



tel que les images  $x$  et  $\bar{x}$  de  $x'$  dans  $\mathcal{F}(G)$  et  $\mathcal{F}(G_0)$  soient des points critiques efficaces de  $\kappa_0$  et  $\bar{\kappa}_0$ , qu'on peut supposer de corang 1 (par le raisonnement du paragraphe I.2.5). Alors  $x'$  est nécessairement critique (de corang 1)

pour les contractions  $\kappa'$  et  $\bar{\kappa}'$  (sinon son corang pour  $\kappa'_0$  ne serait pas 2 mais 1).

Toute cette discussion fait soupçonner pourquoi la classification des *types topologiques de « diagrammes triangulaires d'applications »*, entreprise dans l'Appendice II, n'est pas adaptée à notre problème des points critiques de corang 2 : il faudrait plutôt étudier les *types topologiques de diagrammes carrés commutatifs*, et même de diagrammes plus compliqués, dans la mesure où le plan des  $(\alpha_i)$  rencontre encore d'autres « hyperplans de coordonnées » (nécessairement en dehors du premier quadrant : par exemple le plan  $\alpha_3 = 0$  de la fig. 17), définissant peut-être d'autres singularités (non efficaces).

Voilà de bien horribles détails. A titre d'amusement, j'ai représenté sur la figure 18 ce que je crois être une forme « stable » du contour apparent pour un diagramme carré du type précédent : cette figure est fabriquée en « agglutinant » deux répliques de la figure 38, et l'on voit d'un coup d'œil qu'elle a bien les propriétés de convexité voulues.

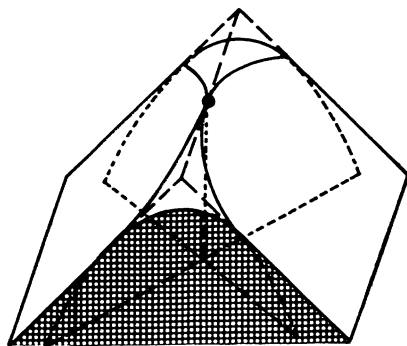


FIG. 18. — Surfaces de Landau pour un diagramme carré du type I.3.2.

Les deux plans formant les « pans » du « toit » sont  $L(\kappa_0)$  et  $L(\bar{\kappa}_0)$ . La surface opaque est la partie efficace de  $L(\kappa'_0)$ . La zone d'ombre qu'elle enferme est l'image de  $\mathcal{H}(\kappa'_0)$ .

**EXERCICE PROPOSÉ :** Le diagramme carré de la figure 19 est parmi les plus simples à admettre des points critiques de corang 2. Voir à quoi ressemblent ses lieux de Landau (attention : il se trouve que sur cet exemple les points de Landau de corang 2 sont en même temps critiques pour l'applica-

tion qui fait passer de l'espace  $\mathcal{F}(G_0)$  à « l'espace des invariants »; on aura donc dans l'espace des invariants une image incorrecte de la « vraie » situation).

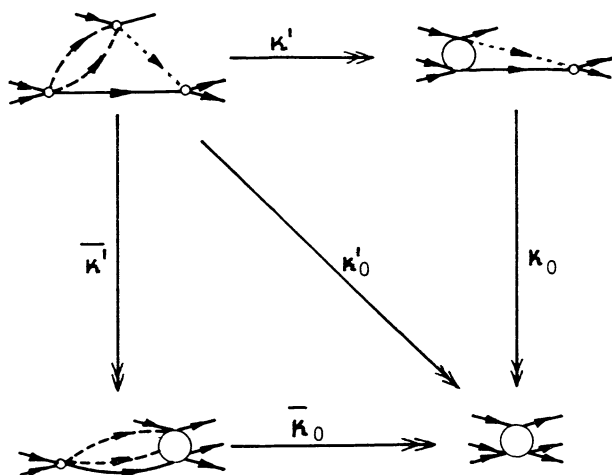


FIG. 19. — Diagramme carré de contractions.

### I.3.3. Corang 2 : cas du « croisement effectif ».

Un exemple particulièrement simple de singularité de corang 2 est fourni par le diagramme de contractions du paragraphe I.3.2 lorsque  $\kappa'_0$  est le produit fibré de  $\kappa_0$  et  $\bar{\kappa}_0$ . Supposant qu'on ait affaire à des singularités principales de  $\kappa_0$  et  $\bar{\kappa}_0$ , on peut profiter des remarques du paragraphe I.1.3 sur les produits fibrés pour décrire entièrement la situation : le lieu de Landau  $L(\kappa'_0)$  forme un « dièdre » dont chacune des deux « faces » est « la moitié » d'une des variétés de Landau  $L(\kappa_0)$ ,  $L(\bar{\kappa}_0)$ ; ces deux variétés se coupent transversalement (cela résulte par exemple des arguments de convexité); l'image de  $\mathcal{F}(\kappa'_0)$  est le domaine enclos à l'intérieur du dièdre; cf. figure 20. Avec les notations de A.II.4, cette situation peut être caractérisée, pour l'un quelconque des deux diagrammes triangulaires qui la composent, par le fait que  $z_{q-1} = y_p$ . Autrement dit, la variété de Landau  $L(\kappa')$  est l'image réciproque par  $\mathcal{F}(\kappa_0)$  de la variété de Landau  $L(\bar{\kappa}_0)$ .

Cette situation sera baptisée « croisement effectif » des lieux de Landau  $L(\kappa_0)$ ,  $L(\bar{\kappa}_0)$ . Je voudrais essayer de montrer qu'elle caractérise le pro-



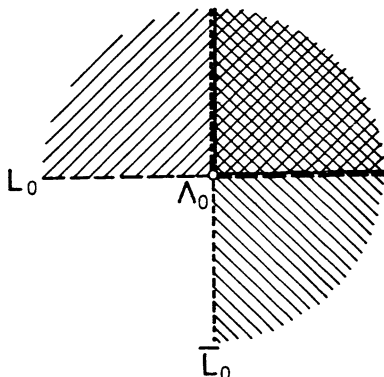


FIG. 20. — Croisement effectif de deux lieux de Landau  $L(\kappa_0)$  et  $L(\bar{\kappa}_0)$ .

Tirets :  $L(\kappa_0)$ ; pointillés :  $L(\bar{\kappa}_0)$ ; traits pleins :  $L(\kappa'_0)$ .

Zones hachurées : images de  $\mathcal{F}(\kappa_0)$  et  $\mathcal{F}(\bar{\kappa}_0)$ .

Zone quadrillée : image de  $\mathcal{F}(\kappa'_0)$ .

*duit fibré.* En effet, soit  $l(\kappa')$  une équation locale de la variété de Landau  $L(\kappa')$ . On a vu au paragraphe I.3.1 que sa différentielle pouvait s'écrire

$$dl(\kappa') = \sum_{i' \in I'} \sum_j \alpha_{i'} p_{i'} z'_{0j}(i) dp_j.$$

Dire qu'on a affaire à un croisement effectif, c'est dire que *sur tout*  $L(\kappa')$ , cette différentielle ne dépend que des coordonnées de la « base »  $\mathcal{F}(\mathbf{G}_0)$ , et pas de celles de la « fibre »  $\mathcal{F}(\kappa_0)^{-1}(p^0)$  : cela se traduit par la condition

$$\sum_{i' \in I'} \alpha_{i'} p_{i'} z'_0(i') = 0 \quad \forall z'_0 \in Z'_{0*}$$

qui doit être vérifiée sur tout  $L(\kappa')$ , c'est-à-dire pour tous  $\alpha_{i'}$ ,  $p_{i'}$  solutions des équations de Landau

$$\sum_{i' \in I'} \alpha_{i'} p_{i'} z'(i') = 0 \quad \forall z' \in Z'_*$$

sans oublier les contraintes sur les  $p_{i'}$  exprimant leur appartenance à  $\mathcal{F}(\mathbf{G})$ . Oubliant provisoirement ces contraintes, et posant  $a_{i'} = \alpha_{i'} p_{i'}$ , on voit que tout système de quadrivecteurs  $(a_{i'})$  « orthogonal » à  $Z'_*$  doit être

« orthogonal » à  $Z'_{0*} | I'$  (restriction de  $Z'_{0*}$  au sous-ensemble de lignes  $I'$ ). Compte tenu de l'inclusion évidente  $Z'_* \subset Z'_{0*} | I'$ , ceci montre que  $Z'_* = Z'_{0*} | I'$ , c'est-à-dire que la suite exacte de groupes

$$Z'_* \twoheadrightarrow Z'_{0*} \twoheadrightarrow Z'_*$$

est scindée. Par conséquent (Proposition 0.3.6), il en est de même de la suite exacte de graphes

$$G' \twoheadrightarrow G'_0 \twoheadrightarrow G'$$

de sorte qu'on a bien affaire à un produit fibré.

La seule faille du raisonnement réside donc dans l'oubli des contraintes supplémentaires entre les  $(a_i)$  :  $Z'_{0*} | I'$  pourrait être *strictement plus grand* que  $Z'_*$  si ces contraintes supplémentaires fournissaient justement les relations manquantes. Or,

1° il me semble que seules des valeurs « exceptionnelles » des masses pourraient permettre de tirer de ces contraintes des *relations linéaires à coefficients entiers* entre les  $(a_i)$ ;

2° même si, pour des raisons pratiques (existence des processus élastiques), on ne peut pas se permettre d'exclure ces valeurs exceptionnelles des masses, il me paraît fort improbable qu'on puisse obtenir des relations linéaires à coefficients entiers qui coïncident justement avec les relations de  $(Z'_{0*} | I')/Z'_*$ .

Ces deux points demanderaient vérification.

#### I.3.4. Remarque : un produit fibré n'a pas de lieux de Landau principaux.

En effet, on vérifiera facilement que  $L(\kappa_0 \wedge \bar{\kappa}_0)$  ne comprend que des points de corang  $\geq 2$  [en particulier les points de  $L(\kappa_0) \cap L(\bar{\kappa}_0)$ ] ou bien des points où les  $\alpha_i$  s'annulent sur un cycle.

## CHAPITRE II

### ANALYTICITÉ DES AMPLITUDES DE DIFFUSION ET D'ABSORPTION

Nous entrons maintenant dans le vif du sujet : l'analyticité de la matrice  $S$ . Il s'agit d'étudier la cohérence mathématique du système de conjectures A, B, C de l'Introduction, en allant le plus loin possible dans le sens

d'une *preuve* de ces conjectures. Quelques complications surgiront du fait des graphes à lignes multiples, complications dont la signification physique a déjà été expliquée dans l'Introduction (fin de la section 3). L'étude de ces complications sera reportée au chapitre suivant : *au cours du présent chapitre, tous les graphes seront supposés n'avoir que des lignes simples.*

## II.1. Analyticité des amplitudes de diffusion.

### II.1.1.

Il sera commode de symboliser un « processus élémentaire »  $I_1 \rightarrow I_2$  par son *graphe*  $G_0$  (graphe connexe, sans lignes internes : cf. fig. 21), et de noter  $S(G_0)$  (au lieu de  $\langle p^{1s} | S | p^{1t} \rangle_T$ ) l'amplitude de ce processus élémentaire : c'est une distribution sur la variété  $\mathcal{Y}(G_0)$  et une *valeur au bord de fonction analytique* si l'on en croit les conjectures A, B.

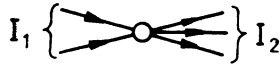


FIG. 21. — Graphe d'un processus élémentaire.

Considérant maintenant, plus généralement un *graphe de diffusion multiple*  $G$  (à lignes simples !), nous appellerons « *amplitude du processus de diffusion multiple* », et nous noterons  $S(G)$ , le produit des amplitudes des processus élémentaires associés à chaque vertex de  $G$ . Il résulte immédiatement des conjectures A et B que ce produit de distributions est bien défini comme distribution sur la variété  $\mathcal{Y}(G)$ , étant lui-même une valeur au bord de fonction analytique; on peut ainsi donner des conjectures A et B l'énoncé général suivant :

**CONJECTURE A.** — La distribution  $S(G)$  est égale à une fonction analytique sauf sur les lieux de Landau efficaces de toutes les contractions sur  $G$ .

**CONJECTURE B.** — Au voisinage d'une variété de Landau efficace, la distribution  $S(G)$  est valeur au bord d'une fonction, analytique en dehors de la complexifiée de cette variété de Landau, valeur au bord prise suivant le détournement  $\{ \text{Im } l > 0 \}$ , où  $l$  est une équation locale de la variété de Landau, choisie de façon que  $l > 0$  au-dessus du seuil.

### II.1.2. Remarque.

Le détournement ainsi défini au voisinage des points « lisses » de Landau (Introduction, note p. 12) s'étend facilement aux *intersections de variétés de Landau*. S'il s'agit de variétés en position générale, la construction est automatique, d'après A.III.1. S'il s'agit d'un *contact effectif* (I.3.1), on profite du fait que *le dessus du seuil* pour les deux variétés tangentes se trouve « du même côté » (fig. 15). Avec la convention de l'Appendice III de figurer un détournement par un « *champ de vecteurs* » transverse aux variétés dont on se détourne, cela donne les figures 22 et 23. Dans le cas d'un contact effectif, on remarquera qu'il *suffit de se détourner de l'une des variétés pour être automatiquement détourné de l'autre* au voisinage de l'intersection.

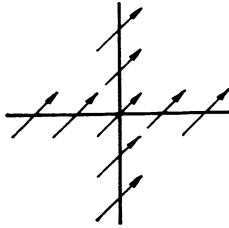


FIG. 22. — Détournement au voisinage d'une intersection en position générale.

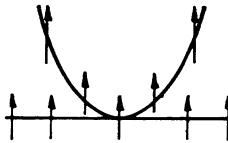


FIG. 23. — Détournement au voisinage d'un contact effectif.

## II.2. Analyticité des amplitudes d'absorption.

### II.2.1.

Soient  $G_0$  le graphe d'un processus élémentaire, et  $G$  un graphe de diffusion multiple se contractant sur  $G_0$  :

$$G \xrightarrow{\kappa_0} G_0.$$

Nous appellerons « *intégrale d'absorption associée au processus de diffusion multiple  $\mathbf{G}$*  », et nous noterons  $A_{\mathbf{G}}$ , la fonction définie sur  $\mathcal{Y}(\mathbf{G}_0)$ , au-dessus du seuil du processus  $\mathbf{G}$ , par l'intégrale

$$A_{\mathbf{G}}(p^{I_0}) = \int_{\mathcal{Y}(\kappa_0)^{-1}(p^{I_0})} S(\mathbf{G})$$

où l'intégration sur la « fibre »  $\mathcal{Y}(\kappa_0)^{-1}(p^{I_0})$  se fait avec la mesure « canonique »  $\sigma_{p^{I_0}}(\mathbf{G})$  définie dans l'Introduction (2.6) <sup>(1)</sup>.

*A priori*, on ne sait pas si l'intégrale a un sens, puisque  $S(\mathbf{G})$  n'est pas une fonction mais une distribution. Cependant, cette distribution est une valeur au bord de fonction analytique suivant un certain détournement complexe (Conjecture B). Par conséquent, si ce détournement peut être choisi *compatible avec l'application  $\mathcal{Y}(\kappa_0)$*  (A.III.2),  $A_{\mathbf{G}}(p^{I_0})$  pourra être définie comme *intégrale sur la fibre détournée* (rappelons que la fibre est compacte, d'après la Proposition I.1.2). Dans ce cas, non seulement l'intégrale aura un sens, mais ce sera même une *fonction analytique* de  $p^{I_0}$  (A.III.3).

D'après l'Appendice III (A.III.2.2), les « mauvais » points  $p^{I_0}$ , ceux où  $A_{\mathbf{G}}(p^{I_0})$  pourra être singulière, sont les *valeurs critiques* de l'application  $\mathcal{Y}(\kappa_0)$  restreinte aux différentes « strates » que définissent les lieux singuliers de l'intégrand  $S(\mathbf{G})$ . Commençons l'inventaire de ces strates.

o) *Strates de dimension maximale.*

Ce sont des ouverts de  $\mathcal{Y}(\mathbf{G})$ . Leurs contours apparents donnent les *lieux de Landau de la contraction  $\kappa_0$* .

i) *Strates de codimension 1.*

Elles consistent essentiellement en variétés de Landau principales de toutes les contractions  $\kappa' : \mathbf{G}' \twoheadrightarrow \mathbf{G}$ . Les contours apparents de ces variétés de Landau ne sont autres, d'après I.3.0, que les *variétés de Landau des contractions composées  $\kappa'_0 : \mathbf{G}' \xrightarrow{\kappa'} \mathbf{G} \xrightarrow{\kappa_0} \mathbf{G}_0$* .

ii) *Strates de codimension 2.*

Considérons une contraction  $\kappa' : \mathbf{G}' \twoheadrightarrow \mathbf{G}$  ayant une singularité du type « *croisement effectif* » (I.3.3), et soit  $\Lambda' \subset \mathcal{Y}(\mathbf{G})$  la strate de codimension 2 correspondante, intersection des deux variétés en position générale  $L'_1, L'_2$  constituant le lieu de Landau de  $\kappa'$ . On sait qu'un croisement effectif correspond à une singularité de corang 2, c'est-à-dire que le noyau de l'application

<sup>(1)</sup>  $I_0$  désigne bien entendu l'ensemble des lignes du graphe  $\mathbf{G}_0$ .

cotangente  $\mathcal{Y}(\kappa')^*$  est à deux dimensions, et il est facile de voir que *ce noyau n'est autre que l'espace cotangent transverse à  $\Lambda'$* . Il en résulte que le contour apparent de  $\Lambda'$  n'est autre que le lieu de Landau de la contraction composée

$$\kappa'_0 : G' \xrightarrow{\kappa'} G \xrightarrow{\kappa_0} G_0.$$

Bien sûr les lieux singuliers de Landau définissent toutes sortes de strates de codimension 2, autres que les strates de croisement effectif. Considérons par exemple les strates de « *contact effectif* ». D'après la Remarque II.1.2, il suffit de se détourner de l'une des variétés en contact pour être automatiquement détourné de l'autre, dans un voisinage de la strate de contact; par conséquent, toutes les constructions de l'Appendice III peuvent être refaites sans se soucier de l'existence de ces strates de contact, qui ne peuvent créer aucune obstruction à la construction de détournements.

Considérons maintenant une strate de *croisement non effectif*, par exemple une strate d'intersection de deux variétés de Landau en position générale ne pouvant pas être considérées comme lieux de Landau d'une même contraction. On montrera (II.3.4, Théorème D) que la « double discontinuité » autour de telles variétés de Landau est nulle. Il en résulte, grâce à la formule (Disc. 2) de l'Appendice III, que *l'intégrale d'absorption n'est pas discontinue autour du contour apparent de la strate de croisement* : si les formules de discontinuité sont prises « au sens des distributions » (A.III.3.4), cela suffit à prouver le caractère *non singulier* de ce contour apparent.

iii) Etc. : des raisonnements analogues pourraient être bâtis pour les strates de codimensions supérieures, en définissant des « croisements effectifs de trois lieux de Landau », etc.

L'analyse esquissée ci-dessus conduit au :

**THÉORÈME A** : *L'intégrale d'absorption  $A_G$  est bien définie, et égale à une fonction analytique, au-dessus du seuil de  $G$  en dehors des lieux de Landau de toutes les contractions  $\kappa'_0$  « dominant »  $\kappa_0$ , c'est-à-dire de toutes les contractions pouvant se factoriser en  $\kappa'_0 : G' \xrightarrow{\kappa'} G \xrightarrow{\kappa_0} G_0$  <sup>(2)</sup>.*

---

(<sup>2</sup>) Ce théorème correspond à peu près au « *strong hierarchical principle* » de Polkinghorne *et al.* Ceux-ci se sont aperçus récemment [21] que leur « *strong hierarchical principle* » était faux, mais c'est parce qu'ils en avaient donné un énoncé trop restrictif, ne considérant que les lieux de Landau *principaux* de  $\kappa'_0$ .

On peut même préciser cet énoncé en rajoutant :

### II.2.2.

Les seuls points de Landau de  $\kappa'_0$  où  $A_G$  soit singulière (points de Landau « efficaces pour l'intégrale d'absorption ») sont ceux pour lesquels  $\alpha_{i'} \geq 0$  pour toute ligne  $i'$  du noyau de la contraction  $\kappa'$ .

Montrons-le.

Dans le cas i), on a une variété de Landau  $L'$  (de la contraction  $\kappa'$ ), dont on considère le contour apparent. Celui-ci se calcule comme au Chapitre I<sup>er</sup> le contour apparent de  $\mathcal{Y}(G)$  : la seule différence est qu'en plus des équations  $p_{i_0}^2 = m_{i_0}^2$  on doit considérer l'équation proprement dite de la variété de Landau,  $l' = 0$ ; l'ensemble critique est donc défini par l'existence de paramètres  $\alpha_{i_0}$  tels que la forme différentielle

$$dl' + \sum_{i_0 \in I_0} \alpha_{i_0} p_{i_0} \cdot dp_{i_0}$$

s'annule quand on la restreint à la fibre ( $I_0$  désigne l'ensemble des lignes du noyau de  $\kappa_0$ ); or la différentielle  $dl'$  [ou plutôt son image réciproque dans l'espace source  $\mathcal{Y}(G')$ ] est donnée par l'expression

$$dl' = \sum_{i' \in I'} \alpha_{i'} p_{i'} \cdot dp_{i'}$$

( $I'$  = ensemble des lignes du noyau de  $\kappa'$ ), de sorte que la forme différentielle ci-dessus s'écrit tout bonnement

$$\sum_{i'_0 \in I'_0} \alpha_{i'_0} p_{i'_0} \cdot dp_{i'_0}$$

( $I'_0 = I' \cup I_0$  = ensemble des lignes du noyau de  $\kappa'_0$ ), et permet bien de retrouver, comme prévu, les équations de Landau de la contraction composée  $\kappa'_0$ . La précision supplémentaire II.2.2 résulte alors simplement du fait suivant : seule est singulière pour l'intégrand la partie de  $L'$  correspondant aux  $\alpha_{i'} \geq 0$  (Conjecture A pour la contraction  $\kappa'$ ).

Dans le cas ii), le raisonnement est analogue, mais avec deux variétés de Landau  $L'_1$  et  $L'_2$ ; l'ensemble critique de  $\Lambda' = L'_1 \cap L'_2$  est défini par l'existence de paramètres  $(\lambda'_1, \lambda'_2, \alpha_{i_0})$  tels que la forme différentielle

$$\lambda'_1 dl'_1 + \lambda'_2 dl'_2 + \sum_{i_0 \in I_0} \alpha_{i_0} p_{i_0} \cdot dp_{i_0}$$

s'annule quand on la restreint à la fibre ; or  $\lambda'_1 dl'_1 + \lambda'_2 dl'_2$ , expression générale d'un covecteur transverse à  $\Lambda'$ , peut aussi s'écrire

$$\lambda'_1 dl'_1 + \lambda'_2 dl'_2 = \sum_{i' \in I'} \alpha_{i'} p_{i'} \cdot dp_{i'}$$

où  $(\alpha_{i'})$  est un élément bien déterminé de l'espace vectoriel à deux dimensions des  $(\alpha_{i'})$  satisfaisant les équations de Landau de  $\kappa'$ . On retombe donc, là encore, sur l'expression

$$\sum_{i'_0 \in I'_0} \alpha_{i'_0} p_{i'_0} \cdot dp_{i'_0}.$$

La précision supplémentaire II.2.2 résulte du fait suivant : d'après A.III.2.2, on n'a pas à considérer *tout* l'ensemble critique de  $\Lambda'$ , mais seulement la partie correspondant à  $\lambda'_1$  et  $\lambda'_2 > 0$ ; autrement dit, le covecteur  $\lambda'_1 dl'_1 + \lambda'_2 dl'_2$  doit appartenir au « premier quadrant » (fig. 22); mais ce « premier quadrant » peut justement être défini par les conditions  $\alpha_{i'} \geq 0 \quad \forall i' \in I'$ .

### II.2.3. Détours « naturels ».

L'Appendice III ne nous apprend pas seulement que l'intégrale est analytique en dehors des contours apparents. Il nous dit aussi comment sont reliées les différentes fonctions analytiques que séparent ces contours apparents. Nous pouvons énoncer ainsi le

**THÉORÈME B :** *De part et d'autre d'un lieu de Landau  $L_0$  de la contraction composée  $\kappa'_0 : G' \xrightarrow{\kappa'_0} G \xrightarrow{\kappa_0} G_0$  (lieu supposé efficace pour l'intégrale d'absorption  $A_G$ ) les deux fonctions analytiques  $A_G(p^{L_0})$  se déduisent l'une de l'autre par prolongement analytique en franchissant  $L'_0$  par un petit détour complexe  $\{ \text{Im } l'_0 > 0 \}$ , où  $l'_0$  est une équation locale de  $L'_0$  choisie de façon que*

$$dl'_0 = \sum_{i'_0 \in I'_0} \alpha_{i'_0} p_{i'_0} \cdot dp_{i'_0} \quad (\alpha_{i'_0} \geq 0 \quad \forall i'_0 \in I'_0).$$

Un tel détour sera appelé *détour naturel pour l'intégrale d'absorption  $A_G$* . Plus généralement, on appellera *chemin naturel pour l'intégrale d'absorption  $A_G$*  un chemin « presque réel » qui évite les lieux de Landau efficaces de  $A_G$  par des détours naturels.



Il faut remarquer que *tout chemin naturel pour l'intégrale d'absorption est également naturel pour l'amplitude de diffusion* : en effet, parmi les lieux de Landau efficaces de l'intégrale d'absorption ( $\alpha_{i'} \geq 0$ ) figurent en particulier tous les lieux de Landau efficaces de l'amplitude de diffusion ( $\alpha_{i_0} \geq 0$ ), et la façon d'éviter ces derniers lieux est la même, que l'on considère le Théorème B ou la Conjecture B. Comme conséquence de cette remarque, la formule de discontinuité

$$A_G = S(G_0) - S^{(L_0)}(G_0)$$

vraie (d'après la Conjecture C : Introduction, § 2.6) un peu au-dessus d'un seuil principal  $L_0$  de  $\kappa_0$ , peut être prolongée analytiquement le long de tout chemin naturel pour  $A_G$ , *définissant* le prolongement analytique de  $S^{(L_0)}(G_0)$  le long d'un tel chemin.

#### DANGER

Il ne faut pas oublier que parmi les singularités de  $A_G$  figurent en général tous les lieux de Landau de la contraction  $\kappa_0$  elle-même (II.2.1 o)). D'après la Remarque A.III.3.2, *il n'existe « en général » aucun détour qui soit naturel pour  $A_G$  au voisinage de tels lieux*, de sorte que ceux-ci ne pourront être franchis par aucun chemin naturel. Ce fait semble impliquer l'existence possible, au-dessus du seuil de  $\kappa_0$ , de domaines qu'aucun chemin naturel ne pourrait relier à un seuil principal  $L_0$  de  $\kappa_0$ . Dans de tels domaines, il semble difficile, sinon impossible, d'interpréter l'intégrale d'absorption comme discontinuité de l'amplitude de diffusion.

#### II.2.4. Remarque.

Pour les lecteurs qui ont entendu parler des « singularités de Landau de 2<sup>e</sup> type » (provenant de « pincements à l'infini » du cycle d'intégration), insistons sur le fait que ces « singularités de 2<sup>e</sup> type » *n'existent pas pour les intégrales d'absorption dans le domaine où nous les avons définies*, c'est-à-dire au-dessus du seuil. La raison en est que l'application  $\mathcal{F}(\kappa_0)$  est *propre* (I.1.2), circonstance essentielle qui nous a permis d'appliquer la Proposition A.III.2.2. Cela cesse d'être vrai si l'on essaie de prolonger analytiquement  $A_G$  en dehors de son domaine primitif de définition (par exemple au-dessous du seuil), car le cycle d'intégration se déforme en devenant *complexe* et la complexifiée de  $\mathcal{F}(\kappa_0)$  n'est pas propre.

### II.3. Discontinuités des amplitudes.

#### II.3.1. Discontinuités des intégrales d'absorption.

Soit  $L'_0$  une variété de Landau de la contraction composée

$$\kappa'_0 : G' \xrightarrow{\kappa'} G \xrightarrow{\kappa_0} G_0,$$

efficace pour l'intégrale d'absorption  $A_G$ . Nous allons calculer, autour de  $L'_0$ , la discontinuité de cette intégrale d'absorption, *en supposant que l'application  $\mathcal{F}(\kappa'_0)$  est de type  $S_1^+$* , de façon à pouvoir utiliser facilement les résultats de A.III.3.3.

Puisqu'on a affaire à une singularité de type  $S_1^+$ , on peut parler du *dessus* et du *dessous* du seuil, et définir, comme dans l'Appendice III, les prolongements analytiques de l'intégrale d'absorption au-dessus du seuil :  $A_G^+$  obtenu par un détour « imaginaire positif » et  $A_G^-$  par un détour « imaginaire négatif » (fig. 24). On doit distinguer deux cas, suivant que c'est le premier détour ou le second qui est naturel pour  $A_G$  : on dira dans le premier cas qu'il y a *concordance*, et dans le second qu'il y a *discordance*. Par exemple, il y a concordance lorsque  $L'_0$  est singularité principale de  $\kappa'_0$ . Un exemple de discordance apparaîtra dans II.3.3. Reprenons l'analyse des différents cas de II.2.

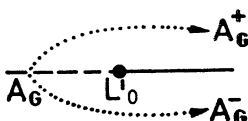


FIG. 24. — Prolongements analytiques de l'intégrale d'absorption.

Cas i).

$L'_0$  est le contour apparent de  $L'$ , variété de Landau principale de  $\kappa'$ .

Puisqu'on a affaire à une variété de Landau principale, l'application  $\mathcal{F}(\kappa')$  est de type  $S_1^+$ ; mais il en est de même, par hypothèse, de  $\mathcal{F}(\kappa'_0)$ , et aussi par conséquent (A.II.3.2) de  $\mathcal{F}(\kappa_0) | L'$ . On notera  $e_L^{\kappa'_0}$  la « cellule évanouissante », boule de  $\mathcal{F}(\kappa_0)^{-1}(p^{l_0})$  définie par  $l' \geq 0$ .

S'il y a concordance, la formule (Disc. 2)<sup>+</sup> de l'Appendice III donne :

$$A_G^+ - A_G^- = \int_{e_L^{\kappa'_0}} \text{Disc}^{(L')} S(G).$$

Or la discontinuité  $\text{Disc}^{(L')} S(\mathbf{G})$  se calcule aisément par la conjecture C : il faut noter que puisque  $L'$  est singularité principale de  $\kappa'$ , le noyau de  $\kappa'$  est nécessairement connexe, et se contracte donc sur un seul vertex de  $\mathbf{G}$ , de sorte que parmi tous les processus élémentaires qui composent  $\mathbf{G}$ , seul celui que représente ce vertex est discontinu autour de  $L'$ ; en lui appliquant la Conjecture C, on trouve

$$\text{Disc}^{(L')} S(\mathbf{G}) = \int_{e^{\kappa'}} S(\mathbf{G}')$$

où  $e^{\kappa'}$  est la « sphère évanouissante », fibre de l'application  $\mathcal{Y}(\kappa')$  (cette sphère s'évanouit quand  $p^I$  vient sur  $L'$ , c'est-à-dire justement sur le bord de la cellule  $e_L^{\kappa_0}$ ).

$A_G^+ - A_G^-$  est donc donnée par une intégrale itérée sur la boule  $e_L^{\kappa_0}$  « fibrée » par la sphère  $e^{\kappa'}$ , sphère qui s'évanouit sur le bord de la boule : on voit immédiatement que le résultat de cette « fibration » n'est autre que la sphère (fig. 25)

$$e^{\kappa'_0} = \mathcal{Y}(\kappa'_0)^{-1}(p^{I_0})$$

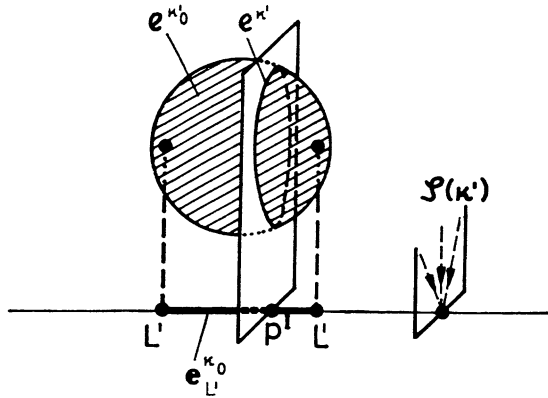


FIG. 25. — « Fibration » de la cellule  $e_L^{\kappa_0}$  par la sphère  $e^{\kappa'}$ .

Ainsi, dans le cas de la concordance

$$A_G^+ - A_G^- = \int_{e^{\kappa'_0}} S(\mathbf{G}')$$

S'il y a discordance, la formule (Disc. 2)<sup>-</sup> de l'Appendice III donne :

$$A_G^+ - A_G^- = \int_{e_{L'}^{k_0}} \omega'^{-1} \text{Disc}^{(L')} S(G)$$

où  $\omega'$  désigne la classe d'homotopie d'un petit lacet positif autour de  $L'$ , et  $\omega'_*$  l'action de ce petit lacet sur l'intégrand. L'intégrand ainsi modifié peut s'écrire

$$\omega'^{-1} \text{Disc}^{(L')} S(G) = \int_{e^{\kappa'} \omega'^{-1}} S(G')$$

où  $\omega'^{-1}$  désigne l'action, sur l'homologie de la « fibre »  $\mathcal{F}(\kappa')^{-1}(p^I)$ , du lacet  $\omega'^{-1}$  de la « base »  $\mathcal{F}(G) - L'$ . Sur une classe évanouissante, cette action consiste simplement en un changement de signe :

$$e^{\kappa'} \omega'^{-1} = (-)^{\dim \kappa' + 1} e^{\kappa'}$$

où  $\dim \kappa'$  désigne la dimension de la fibre  $\mathcal{F}(\kappa')^{-1}(p^I)$  (cf., par exemple [29], Chap. V, n° 2.6).

Ainsi, dans le cas de la discordance,

$$A_G^+ - A_G^- = (-)^{\dim \kappa' + 1} \int_{e_{L'}^{k_0}} S(G').$$

Cas ii)

$L'_0$  est le contour apparent de  $\Lambda' = L'_1 \cap L'_2$ , intersection de variétés de Landau principales des contractions  $\kappa'_1 : G'_1 \rightarrow G$  et  $\kappa'_2 : G'_2 \rightarrow G$  (qui admettent  $\kappa' : G' \rightarrow G$  comme produit fibré).

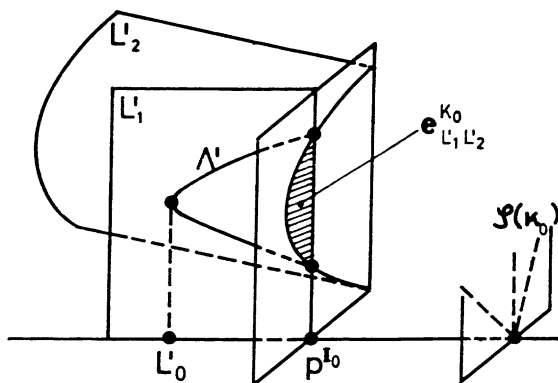


FIG. 26. — Cellule  $e_{L'_1 L'_2}^{k_0}$ .

Cette fois, la cellule évanouissante  $e^{k_0}_{L'_1 L'_2}$ , est bordée par les deux variétés  $L'_1, L'_2$  (fig. 26) : c'est le sous-ensemble de la fibre  $\mathcal{Y}(\kappa_0)^{-1}(p^1_0)$  défini par  $l'_1 \geq 0, l'_2 \geq 0$ .

S'il y a concordance, la formule (Disc 2)<sup>+</sup> de l'Appendice III donne

$$A_G^+ - A_G^- = \int_{e^{k_0}_{L'_1 L'_2}} \text{Disc}^{(L'_1)} \text{Disc}^{(L'_2)} S(G).$$

La double discontinuité qui figure sous l'intégrale sera calculée dans II.3.4. On trouvera <sup>(3)</sup>

$$\text{Disc}^{(L'_1)} \text{Disc}^{(L'_2)} S(G) = \int_{e^{k'_1} \times e^{k'_2}} S(G');$$

$e^{k'_1}$  et  $e^{k'_2}$  sont les « sphères évanouissantes », fibres de  $\mathcal{Y}(\kappa'_1)$  et  $\mathcal{Y}(\kappa'_2)$  [leur produit est la fibre de  $\mathcal{Y}(\kappa')$ ] : l'une s'évanouit sur  $L'_1$ , l'autre sur  $L'_2$ . On trouve ainsi que  $A_G^+ - A_G^-$  est donnée par une intégrale itérée sur la cellule  $e^{k_0}_{L'_1 L'_2}$

fibrée par le produit des deux sphères  $e^{k'_1}, e^{k'_2}$ , dont chacune s'évanouit sur l'un des deux bords  $L'_1, L'_2$  de la cellule : là encore, on voit aisément que le résultat de cette « fibration » n'est autre que la sphère  $e^{k'_0} = \mathcal{Y}(\kappa'_0)^{-1}(p^1_0)$ , fibre de la contraction composée

$$\kappa'_0 : G' \xrightarrow{\kappa'} G \xrightarrow{\kappa_0} G_0.$$

S'il y a discordance, la formule (Disc. 2)<sup>-</sup> de l'Appendice III donne :

$$A_G^+ - A_G^- = - \int_{e^{k_0}_{L'_1 L'_2}} \omega_{1*}^{-1} \omega_{2*}^{-1} \text{Disc}^{(L'_1)} \text{Disc}^{(L'_2)} S(G).$$

Le lacet  $\omega_1^{-1}$  agit sur la sphère  $e^{k'_1}$  en la multipliant par  $(-)^{\dim k'_1 + 1}$ , tandis que le lacet  $\omega_2^{-1}$  multiplie  $e^{k'_2}$  par  $(-)^{\dim k'_2 + 1}$ . La formule finale diffère donc du cas concordant par le signe  $(-)^{\dim \kappa' + 1}$ .

<sup>(3)</sup> Ce résultat est trivial à démontrer lorsque  $G'_1$  et  $G'_2$  se contractent sur deux vertex distincts de  $G$  : il suffit d'appliquer la Conjecture C successivement à ces deux vertex.

Cas iii), etc. : le raisonnement serait analogue.

En résumé, nous pouvons énoncer le

**THÉORÈME C** : Soit  $L'_0$  une variété de Landau de la contraction composée  $\kappa'_0 : G' \xrightarrow{\kappa'_0} G \xrightarrow{\kappa_0} G_0$ , efficace pour l'intégrale d'absorption  $A_G$ , et provenant d'une situation de type  $S_1^+$ . La discontinuité de l'intégrale d'absorption au-dessus de  $L'_0$  est donnée, dans le cas concordant, par l'expression

$$A_G^+ - A_G^- = \int_{e^{\kappa'_0}} S(G')$$

et dans le cas discordant par la même expression multipliée par  $(-)^{\dim \kappa'+1}$ .

### II.3.2. Comparaison des discontinuités.

Nous avons déjà noté (II.2.3) que si une variété de Landau  $L'_0$  de la contraction composée  $\kappa'_0 : G' \xrightarrow{\kappa'_0} G \xrightarrow{\kappa_0} G_0$  est efficace pour l'amplitude de diffusion  $S(G_0)$ , elle l'est a fortiori pour l'intégrale d'absorption  $A_G$ . Mais en plus, nous savons maintenant que ces deux fonctions ont la même discontinuité autour de  $L'_0$ , pourvu que  $L'_0$  soit singularité principale de  $\kappa'_0$  : en effet, la Conjecture C et le Théorème C affirment que

$$S(G_0) - S^{(L'_0)}(G_0) = A_G - A_G^{(L'_0)} = \int_{e^{\kappa'_0}} S(G')$$

où l'on a noté  $A_G$  (au lieu de  $A_G^+$ ) la détermination « naturelle » (il y a « concordance ») et  $A_G^{(L'_0)}$  (au lieu de  $A_G^-$ ) la détermination « opposée ». Cette égalité des discontinuités mérite qu'on en cherche les « raisons profondes » : en effet, si l'on savait la démontrer directement, on aurait, grâce au Théorème C, une preuve par récurrence de la Conjecture C (« par récurrence » dans la mesure où la preuve du Théorème C suppose la Conjecture C vraie pour la contraction  $\kappa'$ ). Essayons.

Rappelons que l'interprétation de l'intégrale d'absorption comme discontinuité de l'amplitude de diffusion

$$A_G = S(G_0) - S^{(L_0)}(G_0),$$

vraie au voisinage d'une variété de Landau principale  $L_0$  de  $\kappa_0$  (Conjecture C pour la contraction  $\kappa_0$ ), se prolonge le long de tout chemin natu-

rel (II.2.3). Pour étiqueter les différentes « déterminations de fonctions analytiques » qui entrent en jeu, il sera commode de définir des *lacets* évitant les lieux de Landau (ou plutôt des « classes d'homotopie de lacets »). Commençons par nous placer au voisinage de la variété de Landau complexifiée  $L_0$ , que nous entourerons d'un « petit lacet positif » (défini par exemple dans une droite analytique complexe transverse à  $L_0$ ), puis allongons ce lacet en déplaçant son point de base le long du « chemin naturel » choisi. Si  $\lambda_0$  désigne ce lacet, et  $\lambda_{0*}S(G_0)$  la détermination de  $S(G_0)$  obtenue par prolongement analytique le long de  $\lambda_0$ , l'intégrale d'absorption peut s'écrire

$$(a) \quad A_G = (1 - \lambda_{0*})S(G_0).$$

Supposons que le chemin naturel nous ait conduits un peu au-dessus de  $L'_0$ , et profitons-en pour entourer  $L'_0$  d'un « petit lacet positif »  $\lambda'_0$ . L'égalité des discontinuités s'écrit

$$(b) \quad (1 - \lambda'_{0*})S(G_0) = (1 - \lambda_{0*})A_G.$$

En substituant (a) dans (b), on tire

(c)

$$\lambda'_{0*}\lambda_{0*}S(G_0) = \lambda_{0*}S(G_0)$$

équation d'ailleurs équivalente à (b) si l'on admet (a) (c'est-à-dire si l'on admet la Conjecture C pour la contraction  $\kappa$ ).

Ainsi, à condition de savoir démontrer (c), la Conjecture C pour la contraction composée  $\kappa'_0$  se déduit de la Conjecture C pour les contractions composantes  $\kappa_0$  et  $\kappa'$ .

La figure 27 représente les divers lacets dans le cas le plus simple, celui où le chemin naturel n'a pas à franchir d'autres lieux de Landau que  $L'_0$ . On voit que si l'axe réel à droite de  $L_0$  est pris comme « coupure »  $(1 - (\lambda'_0 \cdot \lambda_0)_*)S(G_0)$  peut s'interpréter comme la *discontinuité* de  $S(G_0)$  sur la coupure (à droite de  $L'_0$ ).

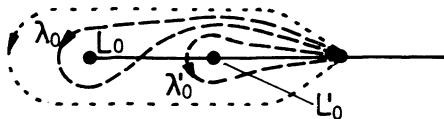


FIG. 27. — Les lacets  $\lambda_0$  et  $\lambda'_0$  (en tirets).

En pointillés : un lacet homotope à  $\lambda'_0 \cdot \lambda_0$ .

La relation (c) équivaut alors à dire que *cette discontinuité est égale, aussi bien à droite qu'à gauche de  $L'_0$ , à l'intégrale d'absorption*. Sous cette forme, il devrait être possible de déduire (c), et par conséquent la Conjecture C, de « l'unitarité de la matrice S » (4).

### II.3.3. Ramification au voisinage d'un contact effectif.

Pour continuer notre étude de la « ramification des amplitudes » (façon dont elles se modifient sous l'action de divers lacets), plaçons-nous dans la situation décrite dans I.3.1 : un « contact effectif » des lieux de Landau  $L(\kappa_0)$ ,  $L(\kappa'_0)$ . La figure 28 reprend la figure 15 et définit, à l'aide de deux sections par des droites  $\Sigma$ ,  $\bar{\Sigma}$ , quatre lacets  $\lambda_0$ ,  $\lambda'_0$ ,  $\bar{\lambda}_0$ ,  $\bar{\lambda}'_0$ . Dans la section  $\Sigma$ , la situation est exactement celle du paragraphe précédent (la courbe en traits pleins est variété de Landau principale de  $\kappa'_0$ ). Par contre, la section  $\bar{\Sigma}$  traverse une partie *inefficace* du lieu de Landau  $L_0$ , de sorte que

$$(1 - \bar{\lambda}'_0)S(G_0) = 0$$

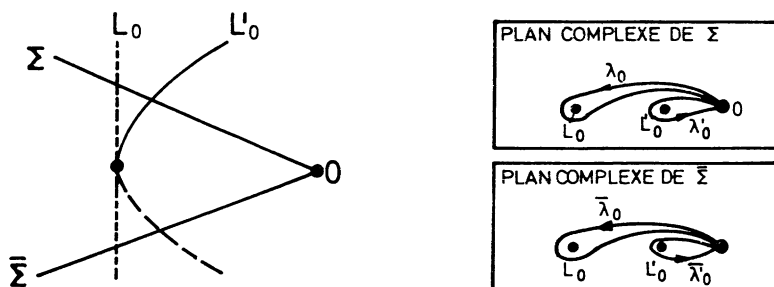


FIG. 28. — Construction de lacets au voisinage d'un contact effectif.

Or, si l'on calcule le « groupe fondamental » (premier groupe d'homotopie) de l'espace complexe privé des deux variétés complexes  $L_0$ ,  $L'_0$ , on s'aperçoit (cf. [29], Chap. V, n° 3.3) que les quatre lacets ci-dessus ne sont pas indépendants, mais satisfont aux relations

$$\lambda'_0 \cdot \lambda_0 = \bar{\lambda}'_0 \cdot \bar{\lambda}_0 = \lambda_0 \cdot \bar{\lambda}'_0 = \bar{\lambda}_0 \cdot \lambda'_0.$$

(4) C'est évident par exemple si  $G$  est un « graphe d'unitarité » tandis que  $G'$  ne l'est pas : la relation d'unitarité prend alors la même forme à droite et à gauche de  $L'_0$ . L'exemple étudié par Landshoff et Olive dans [19] entre dans ce cas (fig. 16 b).



En particulier,  $\bar{\lambda}'_0 = \lambda_0^{-1} \cdot \lambda'_0 \cdot \lambda_0$ , de sorte que la formule de ramification ci-dessus peut s'écrire

$$(1 - \lambda_0^{-1} \lambda'_0 \lambda_0) S(\mathbf{G}_0) = 0,$$

ou encore

$$\lambda_0 S(\mathbf{G}_0) = \lambda'_0 \lambda_0 S(\mathbf{G}_0)$$

*c'est-à-dire exactement l'équation (c), clef de la Conjecture C.* Ainsi, l'équation (c) équivaut, au voisinage d'un contact effectif, à la propriété de non-ramification autour de la partie inefficace du lieu de Landau. Compte tenu de ce que nous avons dit au paragraphe précédent, nous voyons donc qu'*au voisinage d'un contact effectif* ( $L_0, L'_0$ ), *la Conjecture C pour la partie efficace de  $L'_0$  d'une part, et le caractère non singulier* <sup>(5)</sup> *de la partie inefficace d'autre part, sont deux propriétés équivalentes, si l'on admet la Conjecture C pour les contractions « composantes »  $\kappa_0$  et  $\kappa'$ .*

*Remarque sur la « discordance ».*

La partie inefficace de  $L'_0$  au voisinage du contact effectif offre un exemple de situation « discordante » au sens de II.3.1. En effet, c'est une situation de type  $S_1^+$ , et si  $I'_0$  est une équation locale de  $L'_0$  positive au-dessus du seuil (c'est-à-dire à droite sur la fig. 28), sa différentielle s'écrit

$$dI'_0 = \sum_{i'_0 \in I'_0} \alpha_{i'_0} p_{i'_0} \cdot dp_{i'_0}$$

avec  $\alpha_{i'_0} \leq 0$  pour tout  $i'_0 \in I'_0$ ; c'est donc le détour  $\text{Im}l_0 < 0$  qui est « naturel » pour l'intégrale d'absorption  $A_{\mathbf{G}}$ .

### II.3.4. Doubles discontinuités.

Considérons deux contractions

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{G} \\ & & | \\ & & \kappa_0 \\ \bar{\mathbf{G}} & \xrightarrow{\bar{\kappa}} & \tilde{\mathbf{G}}_0 \end{array}$$

<sup>(5)</sup> « Non-ramification » implique « non-singularité » si les formules de ramification sont prises au sens des distributions : cf. A.III.3.4.

dont les variétés de Landau principales  $L_0, \bar{L}_0$  se coupent en position générale. Supposant qu'aucun autre lieu de Landau ne se trouve dans ce voisinage, nous nous intéresserons à l'action, sur l'amplitude de diffusion  $S(G_0)$ , du groupe fondamental local de l'espace complexifié,  $\pi_1^{\text{loc}}(\mathcal{Y}(G_0) - L_0 \cup \bar{L}_0)$ : c'est un *groupe libre commutatif à deux générateurs*  $\omega, \bar{\omega}$  (lacets tournant autour de  $L_0$  et  $\bar{L}_0$ ). Nous savons déjà calculer les « discontinuités simples » : d'après la Conjecture C,

$$(1 - \omega_*)S(G_0) = A_G = \int_{e^{\kappa_0}} S(G).$$

Nous nous intéresserons maintenant à la *double discontinuité*  $(1 - \bar{\omega}_*)(1 - \omega_*)S(G_0)$ , et principalement à la question de savoir *quand cette double discontinuité est nulle*. On pourrait songer à appliquer les résultats des paragraphes précédents sur l'analyticité de l'intégrale  $A_G$ , mais nous obtiendrons des résultats beaucoup plus complets par une étude *directe*.

Il s'agit donc de savoir comment le lacet  $\bar{\omega}$  modifie l'intégrale d'absorption

$$\int_{e^{\kappa_0}} S(G).$$

*A priori*, on pourrait imaginer deux sources possibles de modification :

- 1° une déformation du cycle d'intégration  $e^{\kappa_0}$ , obligé de « fuir » devant les singularités de l'intégrand;
- 2° un changement de détermination de l'intégrand lui-même.

Nous allons voir que la première possibilité est exclue ici.

En effet, l'intégrale d'absorption est définie, un peu au-dessus du seuil principal  $L_0$ , comme intégrale sur le cycle  $e^{\kappa_0}$  *réel, non détourné*, et ceci est vrai aussi bien « à droite » « qu'à gauche » de  $\bar{L}_0$  (fig. 20), puisque l'une comme l'autre de ces régions est bordée par le seuil principal  $L_0$ . D'autre part, comme  $\bar{L}_0$  n'est *pas* lieu de Landau pour la contraction  $\kappa_0$ , il existe un « chemin naturel pour l'intégrale d'absorption » (II.2.3), qui, franchissant  $\bar{L}_0$  par un petit détour complexe, transforme le cycle d'intégration  $e^{\kappa_0}$  *à gauche* de  $\bar{L}_0$  en le cycle d'intégration  $e^{\kappa_0}$  *à droite*. Mais comme ces deux cycles sont *réels* et que les lieux singuliers qu'ils doivent éviter sont invariants par conjugaison complexe, le chemin complexe conjugué fera aussi bien l'affaire. On voit ainsi, en parcourant l'un de ces deux chemins puis l'autre en sens inverse, que le lacet  $\bar{\omega}$  agit *trivialement* sur le cycle d'intégration  $e^{\kappa_0}$ .

Reste la seconde possibilité : le lacet  $\bar{\omega}$  change la détermination de l'intégrand. Mais cela signifie que l'intégrand est singulier sur  $\mathcal{Y}(\kappa_0)^{-1}(\bar{L}_0)$ , donc qu'il existe une contraction  $\kappa' : G' \rightarrow G$  ayant  $\mathcal{Y}(\kappa_0)^{-1}(\bar{L}_0)$  comme lieu de Landau principal : on reconnaît là la définition du « *croisement effectif* » des lieux de Landau  $L_0, \bar{L}_0$ . Dans ce cas,

$$(1 - \bar{\omega}_*)A_G = \int_{e^{\kappa_0}} (1 - \omega'_*)S(G)$$

où  $\omega'$  est la classe d'homotopie d'un « petit lacet » autour de

$$L(\kappa') = \mathcal{Y}(\kappa_0)^{-1}(\bar{L}_0).$$

En appliquant la Conjecture C à l'intégrand, on trouve une intégrale itérée sur la sphère  $e^{\kappa_0}$  fibrée par la sphère  $e^{\kappa'}$ . Cette fibration est triviale, et peut se représenter par le produit de sphères  $e^{\kappa_0} \times \bar{e}^{\kappa_0}$ , fibre de l'application composée  $\mathcal{Y}(\kappa'_0)$ .

Tout ceci peut se résumer par le

**THÉORÈME D** : *La double discontinuité autour d'un croisement effectif s'écrit*

$$(1 - \bar{\omega}_*)(1 - \omega_*)S(G) = \int_{e^{\kappa_0} \times \bar{e}^{\kappa_0}} S(G')$$

où le cycle d'intégration n'est autre que la fibre de l'application composée  $\mathcal{Y}(\kappa'_0)$ , fibre homéomorphe canoniquement au produit des deux sphères évanouissantes  $e^{\kappa_0}, \bar{e}^{\kappa_0}$ .

*Autour d'un croisement « non effectif », la double discontinuité est nulle.*

Dans la mesure où la notion de « croisement effectif » implique celle de « produit fibré » (cf. I.3.3), la deuxième partie du Théorème D admet le

**COROLLAIRE** : *Si les contractions  $\kappa_0$  et  $\bar{\kappa}_0$  sont incompatibles, la double discontinuité est nulle.*

Il s'agirait là d'une généralisation intéressante de ce que les spécialistes appellent *relations de Cutkosky-Steinmann* [27]. C'est pourquoi je pense qu'il vaudrait la peine d'approfondir la discussion de I.3.3, d'autant plus que nous aurons besoin de ces relations à la fin du chapitre III.

## CHAPITRE III

SEUILS ÉLASTIQUES  
ET GRAPHES A LIGNES MULTIPLES

Un « *processus élastique* » est un processus élémentaire dont les particules entrantes sont les mêmes que les particules sortantes. En particulier, les masses initiales et finales sont les mêmes, et cette égalité des masses donne lieu à quelques bizarreries. Nous en avons mentionné une au Chapitre I<sup>er</sup>, à savoir le caractère *singulier* de l'espace  $\mathcal{Y}(\mathbf{G})$  d'un graphe ayant un vertex élastique. En voici une autre, très liée à la précédente : dans un graphe à lignes multiples (fig. 29 a), si l'on « insère » au milieu d'une ligne multiple un vertex élastique (fig. 29 b) le graphe obtenu a les mêmes lieux de Landau <sup>(1)</sup>

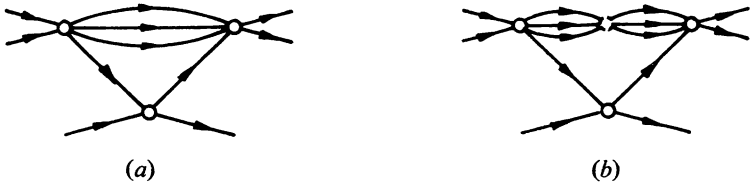


FIG. 29. — Insertion d'un vertex élastique dans une ligne multiple (le vertex élastique est figuré par un rond en pointillés).

que le graphe initial; en effet, les équations de Landau imposent aux impulsions-énergies de la ligne multiple d'être proportionnelles entre elles, et le caractère *élastique* du vertex inséré oblige alors les impulsions-énergies entrantes de ce vertex à être égales aux sortantes (d'après la conservation de l'impulsion-énergie). Intuitivement, ce phénomène peut être rapproché de la remarque concluant la section 3 de l'Introduction : une ligne multiple représente des particules *voyageant ensemble*, et insérer un vertex élastique signifie *faire interagir ces particules*.

Après quelques remarques sur la topologie des processus élastiques (III.1),

<sup>(1)</sup> Le lecteur peut se demander comment on définit l'ensemble critique et le contour apparent d'un ensemble analytique *singulier* — comme l'est l'espace du graphe après insertion du vertex élastique. Posée sous cette forme générale, la question est délicate (cf. cependant [29], Chap. IV). Mais ici il suffit de prendre les « équations de Landau » comme *définition*.

nous indiquerons (III.2) comment la Conjecture C doit être modifiée pour les graphes à lignes multiples. Dans la section III.3, nous verrons comment l'existence des processus élastiques oblige à remanier les raisonnements du Chapitre II sur la cohérence mathématique des conjectures, et comment la Conjecture C *modifiée* satisfait justement aux nouveaux critères de cohérence.

### III.1. Étude topologique des seuils élastiques.

#### III.1.1. Seuils normaux et seuils élastiques.

On appellera « *contraction normale* » une contraction dont le noyau consiste en une ligne multiple I (fig. 30). Les équations de Landau d'une telle contraction disent simplement que tous les  $p_i$ ,  $i \in I$  sont proportionnels. Par conséquent, le lieu de Landau s'écrit  $\left\{ p_i^2 = \left( \sum_{i \in I} m_i \right)^2 \right\}$ , où  $p_i$  désigne la variable externe égale à la somme des  $p_i$ ,  $i \in I$ . Un tel lieu de Landau est appelé

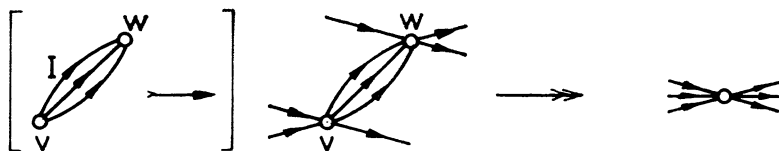


FIG. 30. — Contraction normale.

*seuil normal*. L'analyse générale, faite au Chapitre I<sup>er</sup>, des lieux de Landau principaux s'applique en particulier aux seuils normaux, montrant que ceux-ci sont des variétés de codimension 1, qu'au-dessous du seuil la fibre est vide tandis qu'au-dessus elle est homéomorphe à une sphère <sup>(\*)</sup>, etc. Cependant, cette analyse avait exclu les valeurs « exceptionnelles » des masses, pour lesquelles l'espace du graphe n'était pas une variété. Or de telles valeurs « exceptionnelles » sont justement réalisées par les « *contractions élastiques* », c'est-à-dire les contractions normales où la ligne multiple I, noyau de la contraction, a pour origine ou pour extrémité un vertex élastique  $I \rightarrow I$  (fig. 31). Bien sûr, ce cas est facile à étudier directement. Si I dési-

(\*) Pour les seuils normaux, c'est vrai *partout au-dessus du seuil*, et pas seulement dans un voisinage : c'est une conséquence du fait qu'une contraction normale n'a pas d'autres lieux de Landau que ses lieux de Landau principaux.

gne l'ensemble des lignes externes incidentes au vertex élastique, le « seuil élastique »  $\Sigma_I$  est donné par l'équation

$$\left( \sum_{i \in I} p_i \right)^2 = \left( \sum_{i \in I} m_i \right)^2$$

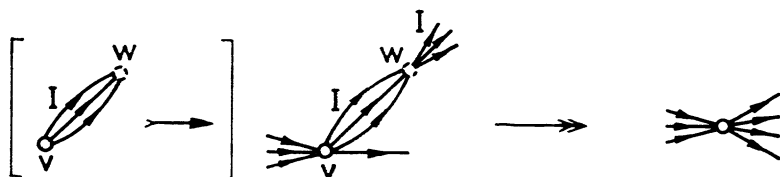


FIG. 31. — Contraction élastique.

dont la seule solution *réelle*, sur la couche de masse  $\mathcal{M}^1$ , est la « diagonale »  $D_I$ , définie par la proportionnalité de tous les  $p_i$ ,  $i \in I$ . Cette diagonale est un lieu de *points singuliers quadratiques* pour l'ensemble analytique *complexe*  $\Sigma$  défini par l'équation ci-dessus. De façon imagée, on peut dire qu'un modèle local pour  $\Sigma_I$  s'obtient en « suspendant » (le long de la diagonale) une « sphère de rayon nul ».

Remarquons que par définition de la diagonale,  $D_I \subset D$ ,  $\forall J \subset I$ . Autrement dit, tout point réel du seuil élastique  $\Sigma_I$  appartient aussi aux seuils élastiques « partiels »  $\Sigma_J$ ,  $\forall J \subset I$ . Ainsi, même pour une étude *locale* de la ramification des amplitudes, il est en principe impossible de considérer *un seul* seuil élastique, en oubliant l'existence de tous les autres. Heureusement, les choses sont plus simples en pratique, comme va le montrer l'étude qui suit <sup>(8)</sup>.

### III.1.2. Groupe fondamental local au voisinage des seuils élastiques.

Soit  $I$  un ensemble de particules entrantes — ou sortantes — d'un processus élémentaire. On supposera pour simplifier les notations que toutes les masses sont égales à 1, et l'on notera  $\mathcal{M}^1$  la « couche de masse complexe »

$$\mathcal{M}^1 = \{ p^1 = (p_i \in \mathbb{C}^4)_{i \in I} \mid p_i^2 = (p_i^0)^2 - p_i^3^2 = 1 \quad \forall i \in I \}.$$

<sup>(8)</sup> Il pourra sembler au lecteur que nous compliquons les choses à plaisir en travaillant « dans l'espace des quadrivercteurs » au lieu de travailler « dans l'espace des invariants », où les seuils élastiques sont d'apparence plus simple. Mais il ne faut pas oublier que dès qu'on a plus de quatre quadrivercteurs indépendants à étudier, leurs produits scalaires ne sont plus indépendants, et les contraintes qui lient ces produits scalaires définissent une variété algébrique assez compliquée.

A tout sous-ensemble  $J \subset I$  ( $|J| > 1$ ) est associé un « seuil élastique complexe »

$$\Sigma_J = \{ p^1 \in \mathcal{M}^1 \mid p_i^2 = |J|^2 \}$$

où l'on a noté  $p_J = \sum_{i \in J} p_i$ , et  $|J|$  le nombre d'éléments de l'ensemble  $J$ ,

encore égal à la « masse totale » de cet ensemble de particules. Chaque  $\Sigma_J$  est un ensemble analytique avec singularités : l'ensemble de ses points singuliers n'est autre que la « diagonale »  $D_J$ , définie par l'égalité de tous les  $p_i \forall i \in J$ . Localement,  $\Sigma_J$  a le type topologique d'un cône quadratique dégénéré de sommet  $D_J$ . La question se pose de savoir si tous ces cônes sont « sagement disposés » au voisinage de la diagonale, s'ils ne sont pas « noués les uns aux autres ». De façon précise, on se pose le

PROBLÈME : Le groupe fondamental local  $\pi_1^{\text{loc}}(\mathcal{M}^1 - \bigcup_{J \subset I} \Sigma_J)$  au voisinage d'un point de la diagonale  $D_I$  est-il commutatif ?

Un premier pas vers une réponse affirmative sera fourni par le

LEMME : Sauf sur un ensemble algébrique de codimension 3, les  $\Sigma_J$  sont des variétés en position générale.

Pour prouver le Lemme, on commence par remarquer que les diagonales  $D_J$  sont de codimension  $\geq 3$  dans  $\mathcal{M}^1$ . En dehors de ces diagonales, les  $\Sigma_J$  sont des variétés. Dire qu'une sous-famille  $\mathcal{F}$  de cette famille de variétés est en position générale, c'est dire qu'en un point de l'intersection  $\bigcap_{J \in \mathcal{F}} \Sigma_J$ , le système d'équations

$$\sum_{\substack{J \in \mathcal{F} \\ J \ni i}} \alpha_J p_J + \alpha_i p_i = 0 \quad \forall i \in I$$

n'admet que la solution triviale ( $\alpha_J = 0, \alpha_i = 0$ ). Considérons en particulier une famille à deux éléments  $\mathcal{F} = \{J, J'\}$ ; comme  $J \neq J'$ , l'un au moins des deux ensembles  $J - J', J' - J$  est non vide; supposons que ce soit le premier; pour  $i \in J - J'$ , le système d'équations ci-dessus donne

$$\alpha_J p_J + \alpha_i p_i = 0.$$

On en conclut qu'en dehors des sous-ensembles de codimension 3 définis par la proportionnalité d'un  $p^i$  et d'un  $p_J$ , les variétés étudiées sont deux à deux en position générale.

Pour achever de démontrer le Lemme, il suffira de démontrer que les

intersections trois à trois  $\Sigma_i \cap \Sigma_{j'} \cap \Sigma_{j''}$  sont de codimension  $\geq 3$ . Ceci peut se voir de la façon suivante. Si l'un des trois ensembles  $J - J' \cup J''$ ,  $J' - J'' \cup J$ ,  $J'' - J \cup J'$  est non vide, le même raisonnement que tout à l'heure aboutit au même type d'équation, montrant qu'en dehors d'un sous-ensemble de codimension 3 les trois variétés étudiées sont en position générale. Si  $J - J' \cup J''$ , etc., sont tous les trois vides,  $J \cup J' \cup J''$  admet une *partition*  $\{J_1 = J' \cup J'' - J, J_2 = J'' \cup J - J', J_3 = J \cup J' - J''\}$ ; si un terme de la partition contient plus d'un élément, soient  $i$  et  $j \in J_1$ , le système d'équations ci-dessus donne

$$\alpha_{j'} p_{j'} + \alpha_{j''} p_{j''} + \alpha_i p_i = 0$$

et

$$\alpha_{j'} p_{j'} + \alpha_{j''} p_{j''} + \alpha_j p_j = 0$$

et ne pourra donc pas être satisfait en dehors de la diagonale  $D_{ij}$  : là encore, il suffit donc d'enlever un ensemble de codimension 3 (la diagonale) pour obtenir trois variétés en position générale. Par conséquent, un seul cas reste à étudier, celui où chaque membre de la partition n'a qu'un seul élément :  $J_1 = \{j_1\}$ ,  $J_2 = \{j_2\}$ ,  $J_3 = \{j_3\}$ , c'est-à-dire le cas où  $J = \{j_2, j_3\}$ ,  $J' = \{j_3, j_1\}$ ,  $J'' = \{j_1, j_2\}$ . Mais il n'est pas difficile d'étudier directement ce cas et de se convaincre que là encore l'intersection  $\Sigma_i \cap \Sigma_{j'} \cap \Sigma_{j''}$  est de codimension 3.

On remarquera que l'énoncé du Lemme ressemble beaucoup aux hypothèses du Théorème de l'Appendice IV : c'est pourquoi il me semble suggérer une réponse affirmative au problème posé. Un moyen d'en être sûr serait de fabriquer un homéomorphisme du voisinage étudié sur tout  $\mathbb{C}^n$  transformant la famille de sous-ensembles  $\Sigma_i$  en une famille de sous-ensembles  $S_i \subset \mathbb{C}^n$  satisfaisant aux hypothèses de l'Appendice IV (problème de la construction d'un bon « *modèle local* » des  $\Sigma_i$ ). J'ignore si c'est possible, néanmoins on peut remarquer que les cônes quadratiques  $S_i$ , déduits des  $\Sigma_i$ , par l'*approximation non relativiste* (4) satisfont justement aux hypothèses de l'Appendice IV, et qu'il est fort raisonnable physiquement de penser

(4) Sur la couche de masse  $\mathcal{M}^I$ , l'équation  $p_i^2 - |J|^2$  de  $\Sigma^j$  peut encore s'écrire

$$\left( \sum_{i \in J} \sqrt{p_i^2 + 1} \right)^2 - \left( \sum_{i \in J} p_i \right)^2 - |J|^2.$$

L'*approximation non relativiste* consiste à négliger dans le développement de Taylor de cette fonction analytique les termes de degré supérieur à deux : on trouve ainsi  $|J| \sum_{i \in J} p_i^2 - \left( \sum_{i \in J} p_i \right)^2$ , qui est l'équation d'un cône quadratique.



que l'approximation non relativiste fournit un bon modèle local du voisinage des seuils. Si l'on savait le démontrer, on obtiendrait ainsi la

**PROPOSITION :** *Au voisinage d'un point de la diagonale  $\mathbf{D}_1$ , le groupe fondamental local  $\pi_1^{\text{loc}}\left(\mathcal{M}^1 - \bigcup_{\mathbf{J} \subset \mathbf{I}} \Sigma_{\mathbf{J}}\right)$  est un groupe libre commutatif, doté d'une base canonique*

$$\left. \begin{array}{l} (\lambda)_{\mathbf{J} \subset \mathbf{I},} \\ |\mathbf{J}| \geq 2 \end{array} \right\}$$

où chaque lacet  $\lambda_{\mathbf{J}}$  « tourne » autour de l'ensemble  $\Sigma_{\mathbf{J}}$  correspondant.

Cette proposition nous sera fort utile dans la suite, et nous l'admettrons.

### III.1.3. Remarque sur les détournements.

Les seuils élastiques présentent, du point de vue du « détournement de la région physique », un caractère pathologique : en effet on vérifie facilement qu'il est impossible de se « détourner » (au sens de l'Appendice III) d'un « cône isotrope » (sphère de rayon nul) au voisinage du sommet de ce cône. Cette pathologie a sans doute un rapport avec les ennuis qu'on rencontre en essayant de définir la matrice  $S$  au voisinage de la diagonale  $\mathbf{D}$  (cf. Hepp [13]).

## III.2. Conjecture C pour les graphes à lignes multiples.

Nous avons déjà suggéré, à l'aide d'arguments heuristiques, que la présence de *lignes multiples* dans le noyau d'une contraction obligeait à modifier l'énoncé de la Conjecture C. Comment doit-on exactement le modifier, c'est ce que nous allons préciser ici, sans autre justification que les arguments de cohérence mathématique de la section suivante. Indiquons toutefois que de nombreux travaux ont été consacrés à cette conjecture et à ses liens avec l'unitarité de la matrice  $S$ , et que tous semblent confirmer l'énoncé général proposé ici.

### III.2.1. Conjecture C pour les seuils normaux.

*La partie absorptive associée à un seuil normal  $L$  peut être donnée, avec les notations de l'Introduction, par l'une quelconque des deux expressions*

$$\begin{aligned} \langle p^{1_2} | \mathbf{A} | p^{1_1} \rangle^{(L)} &= \int_{\mathbf{I}} \langle \mathbf{S}_v \rangle \left\langle \left( \prod_{\mathbf{J} \subset \mathbf{I}} \lambda_{\mathbf{J}} \right)_* \mathbf{S}_w \right\rangle \\ &= \int_{\mathbf{I}} \left\langle \left( \prod_{\mathbf{J} \subset \mathbf{I}} \lambda_{\mathbf{J}} \right)_* \mathbf{S}_v \right\rangle \langle \mathbf{S}_w \rangle \end{aligned}$$

où  $I$  désigne la ligne multiple, noyau de la contraction normale ;  $v$  et  $w$  l'origine et l'extrémité de cette ligne multiple ;  $\lambda$ , la classe d'homotopie d'un « petit lacet » autour du seuil élastique  $\Sigma$ , associée à la ligne multiple  $J \subset I$  : cette classe d'homotopie a été définie au paragraphe III.1.2.

Autrement dit, on remplace l'amplitude associée à l'un quelconque des deux vertex, origine ou extrémité de la ligne multiple, par le prolongement analytique de cette amplitude le long du lacet composé  $\prod_{J \subset I} \lambda$ , c'est-à-dire d'un lacet tournant autour de tous les seuils élastiques <sup>(5)</sup> (les seuils « partiels » aussi bien que le seuil « total ») de la ligne multiple  $I$ .

REMARQUE : Par définition, la partie absorptive autour du seuil  $L$  peut s'écrire

$$\langle p^{12} | \mathbf{A} | p^{12} \rangle^{(L)} = (1 - \lambda_*) \langle p^{12} | \mathbf{S} | p^{12} \rangle$$

où  $\lambda$  est la classe d'homotopie d'un « petit lacet » autour du seuil  $L$  : si  $L$  est un seuil normal *non élastique*, donc une variété analytique de codimension 1, cette classe d'homotopie est définie comme d'habitude. *Mais si  $L$  est un seuil élastique, on peut encore définir  $\lambda$ , grâce à III.1.2, et l'énoncé III.2.1 de la Conjecture C reste valable*; insistons sur le fait que le lacet  $\lambda$  « tourne » *seulement* autour du seuil élastique  $L$  et pas autour des seuils élastiques « partiels » qui lui sont attachés.

### III.2.2. Énoncé général de la Conjecture C.

Le paragraphe III.2.1 suggère la modification suivante à l'énoncé de la Conjecture C, pour toute contraction dont le noyau a des lignes multiples <sup>(6)</sup> :

*on fait agir le lacet composé  $\prod_{J \subset I} \lambda$ , sur l'amplitude associée à l'origine ou à l'extrémité de la ligne multiple « maximale »  $I$ , en répétant cette opération autant de fois qu'il y a de lignes multiples « maximales ».*

Remarquons que même si plusieurs lignes multiples maximales sont incidentes à un même vertex (comme sur la fig. 32), l'ordre des opérations est indifférent, car III.1.2 nous apprend que les différents « lacets élastiques » commutent.

<sup>(5)</sup> Pour la justification, cf. par exemple [9] [26] [27] [35].

<sup>(6)</sup> On pourra trouver dans [20] un exemple confirmant cette règle.

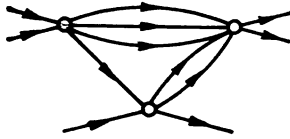


FIG. 32. — Graphe où plusieurs lignes multiples maximales sont incidentes à un même vertex.

Remarquons aussi qu'il ne faut jamais s'occuper de graphes tels que celui de la figure 29 *b*, c'est-à-dire de graphes où un vertex élastique s'est « bêtement » inséré au milieu d'une ligne multiple.

### III.3. Réexamen de la cohérence des Conjectures.

Ayant ainsi modifié la Conjecture C pour les graphes à lignes multiples, nous devons évidemment modifier de façon correspondante la définition des intégrales d'absorption donnée dans II.2.1. Il faut alors nous attendre à quelques modifications dans les raisonnements du Chapitre II. Cependant, nous allons voir que ces modifications sont compensées par un phénomène bizarre, produit par « l'insertion de vertex élastiques », et qu'en fin de compte les résultats essentiels du Chapitre II restent valides.

#### III.3.1. Insertion de vertex élastiques.

Soient  $G$  un graphe de diffusion multiple,  $J$  un ensemble de lignes de  $G$ , d'origine [resp. d'extrémité] commune  $v$ . On appellera « *extension J-élastique sur  $G$*  » le graphe  $G_J$ , obtenu en « insérant un vertex élastique » dans l'ensemble de lignes  $J$  (fig. 33) : il s'agit bien d'une extension, dont le noyau consiste en une ligne multiple  $J_v$  issue du vertex  $v$  [resp. aboutissant au vertex  $v$ ]. Dans le cas où  $J$  est une *ligne multiple* du graphe  $G$ , il y a *deux façons* de considérer le graphe  $G_J$ , comme une extension sur  $G$ , suivant qu'on se rapporte à l'*origine*  $v$  ou à l'*extrémité*  $w$  de la ligne multiple. On notera  $\kappa_{J,v}$  et  $\kappa_{J,w} : G_J \rightarrow G$  les deux contractions correspondantes.

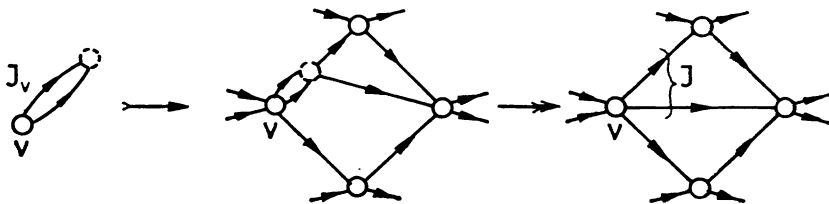


FIG. 33. — Extension J-élastique sur un graphe.

Soit donc  $G$  un graphe ayant une ligne multiple  $J$  d'origine  $v$  et d'extrémité  $w$ , et considérons une contraction  $\kappa' : G' \rightarrow G$ , dont le noyau est connexe et s'envoie sur le vertex  $v$  (on dira pour abrégé : « une contraction sur  $G$  en  $v$  »). L'ensemble de lignes  $J$  continue à avoir dans  $G'$  une extrémité commune  $w$ , de sorte qu'on peut définir l'extension  $J$ -élastique  $G'_J$  sur  $G'$ . Les diverses extensions peuvent être disposées en deux diagrammes exacts : le diagramme (I) est du type « produit fibré »;

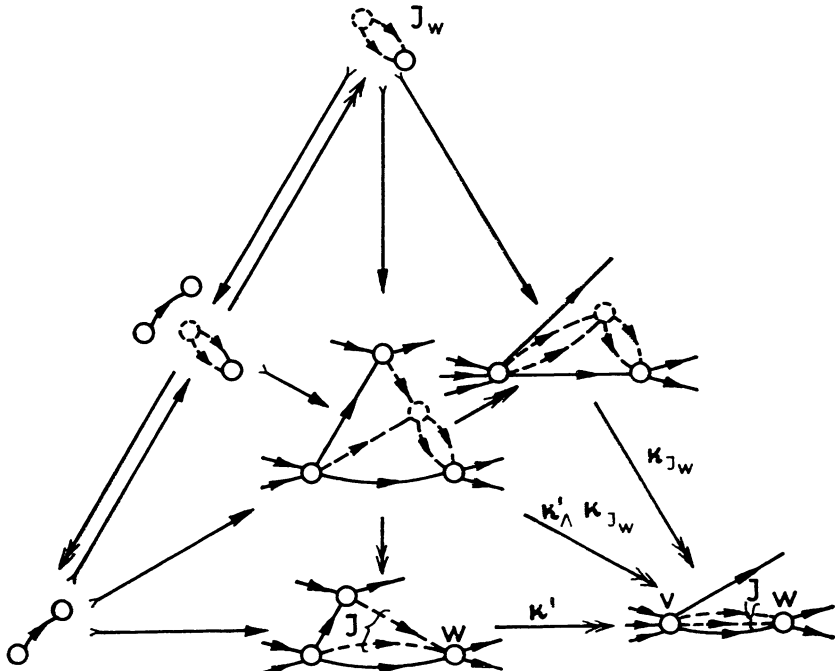
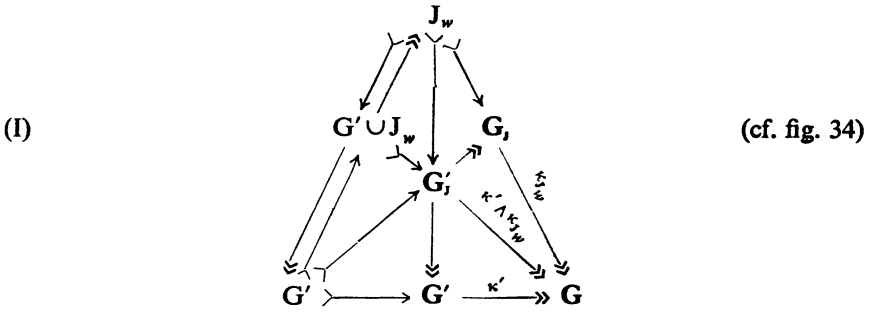


FIG. 34. — Produit fibré d'une contraction  $\kappa'$  par une contraction élastique.

le diagramme (II) définit une nouvelle contraction,  $\kappa'_j$ , qui sera appelée « extension J-élastique de la contraction  $\kappa'$  » : c'est une contraction sur  $G$  en  $v$ , dont le noyau, connexe, est une extension de celui de  $\kappa'$

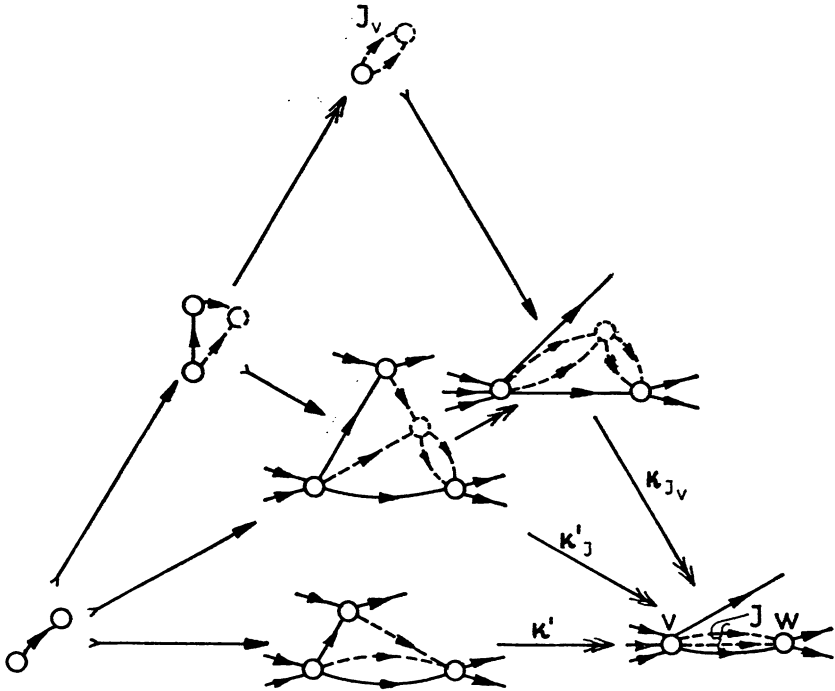
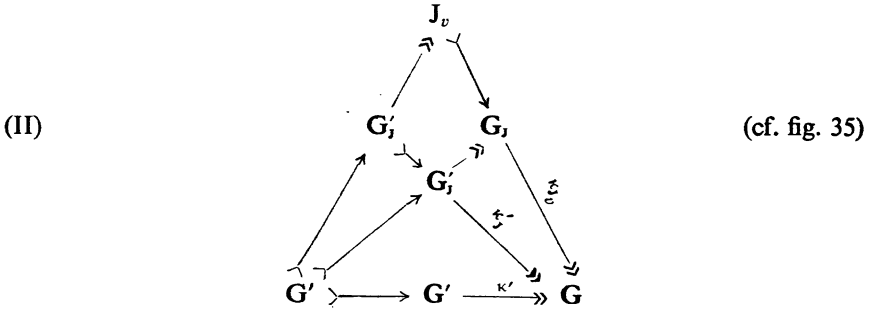


FIG. 35. — Extension J-élastique d'une contraction  $\kappa'$ .

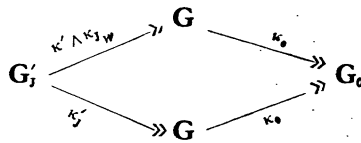
*Bizarrie* : Soit  $\kappa_0 : G \rightarrow G_0$  une contraction dont le noyau contient la ligne multiple  $J$  (dans la suite,  $\kappa_0$  sera simplement la contraction de toutes les lignes internes de  $G$ ). *Projetées sur  $\mathcal{Y}(G_0)$ , les variétés de Landau principales  $L'$  et  $L'_j$  de  $\kappa'$  et  $\kappa'_j$  ont même contour apparent.*

PREUVE : Par un raisonnement semblable à celui de II.2.2.i), on voit que l'ensemble critique de  $\mathcal{F}(\kappa_0) | L_j$  s'obtient en écrivant les équations de Landau de la contraction composée  $\kappa'_j \circ \kappa'_j$ , avec les contraintes supplémentaires sur les paramètres  $\alpha_{i'_j}$  ( $i'_j \in I'_j$ ) imposées par le caractère « principal » de  $L'_j$ . On supposera que  $L'_j$  est principal « au sens strict », c'est-à-dire avec des  $\alpha_{i'_j}$  tous strictement positifs. Alors,

1° les quadrivecteurs  $p_{j_v}$ ,  $j_v \in J_v$  ne peuvent pas être tous proportionnels : en effet, pour qu'ils le soient, il faudrait que tous les cycles  $j_v - j'_v$  de  $J_v$  soient des cycles de  $G'_j$ , c'est-à-dire que  $G'_j$  soit une extension triviale sur  $J_v$  (Proposition 0.3.6); mais alors la contraction  $\kappa'_j$  serait un produit fibré, et n'admettrait pas de lieu de Landau principal (Remarque I.3.4). Il résulte de 1° que

2° les quadrivecteurs  $p_{j_w}$ ,  $j_w \in J_w$  ne peuvent pas être tous proportionnels : cela est interdit par la conservation de l'impulsion-énergie au vertex élastique. Or, comme  $J_w$  est un sous-graphe de  $G'_j$ , 2° signifie que tous les  $\alpha_{j_w}$  ( $j_w \in J_w$ ) sont nuls. On se trouve donc sur l'ensemble critique du graphe déduit de  $G'_j$  par contraction de la ligne multiple  $J_w$ , c'est-à-dire justement du graphe  $G'$ .

REMARQUE : La « bizarrerie » précédente aurait pu aussi se démontrer en utilisant la commutativité du diagramme



et les propriétés du produit fibré.

### III.3.2. Intégrales d'absorption : singularités de l'intégrand.

La présence de lignes multiples dans le graphe  $G$  nous amène à modifier ainsi l'intégrand  $S(G)$  de l'intégrale d'absorption  $A_G$  : au vertex  $v$ , origine (ou extrémité) de la ligne multiple maximale  $I$ , se trouve associée l'amplitude  $(\prod_{j \in I} \lambda_j)_* \langle S_v \rangle$ . Les propriétés analytiques de l'intégrand ainsi modifié se déduisent facilement des Conjectures A, B, C (qui donnent les propriétés analytiques de  $\langle S_v \rangle$ ) et des Théorèmes A, B, C (qui donnent

les propriétés analytiques de  $(1 - \lambda_{j*}) \langle S_v \rangle$ ). Evidemment, les seules singularités possibles seront, comme auparavant, les lieux de Landau des contractions sur  $G$ , mais il faudra prendre soin de définir correctement les nouveaux « critères d'efficacité ». Le cas le plus simple est celui d'une contraction  $\kappa' : G' \rightarrow G$  en  $v$ , ne dominant aucune des contractions élastiques  $\kappa_{j_v} : G_j \rightarrow G$ ,  $J \subset I$ . Il résulte alors du Théorème A que les discontinuités  $(1 - \lambda_{j*})S(G)$  ne sont pas singulières sur  $L(\kappa')$ . Par conséquent, l'amplitude initiale  $S(G)$  et l'amplitude modifiée  $\left(\prod_{J \subset I} \lambda_j\right)_* S(G)$  sont singulières sur les mêmes parties de  $L(\kappa')$ , celles qui correspondent à  $(\alpha_{i'} \geq 0)$ .

Considérons maintenant le cas d'une contraction en  $v$  qui domine  $\kappa_{j_v}$ . Nous pouvons toujours la considérer comme l'extension  $J$ -élastique d'une contraction  $\kappa' : G' \rightarrow G$ , et la noter comme dans III.3.1

$$\kappa'_j : G'_j \rightarrow G$$

( $\kappa'$  se déduit de  $\kappa'_j$  par « retrait de vertex élastique », opération inverse de « l'insertion d'un vertex élastique »). Reprenant toutes les notations du paragraphe III.3.1, nous pouvons alors énoncer le

**LEMME :** *Les seules parties de  $L(\kappa'_j)$  à être efficaces pour  $\lambda_{j*} \langle S_v \rangle$  sont celles pour lesquelles  $\alpha_{i'} \geq 0$  pour toute ligne de  $G'$  tandis que  $\alpha_{j_v} < 0$  pour certaines lignes de  $J_v$ .*

**PREUVE :** D'après la Conjecture A, les seules parties efficaces pour  $\langle S_v \rangle$  sont celles pour lesquelles  $\alpha_{i'} \geq 0$  pour toute ligne de  $G'_j$ . Mais, comme nous l'avons déjà remarqué (II.3.2), la Conjecture C et le Théorème C fournissent alors l'égalité des discontinuités de  $\langle S_v \rangle$  et de  $(1 - \lambda_{j*}) \langle S_v \rangle$ , de sorte que  $\lambda_{j*} \langle S_v \rangle$  est non discontinue, donc *non singulière* <sup>(7)</sup>. L'amplitude  $\lambda_{j*} \langle S_v \rangle$  ne pourra donc être singulière que sur les parties *inefficaces* pour  $\langle S_v \rangle$ , mais *efficaces* pour  $(1 - \lambda_{j*}) \langle S_v \rangle$  : or l'efficacité pour  $(1 - \lambda_{j*}) \langle S_v \rangle$  s'exprime justement par la condition  $\alpha_{i'} \geq 0$  pour toute ligne de  $G'$  (cf. II.2.2). Le Lemme est ainsi démontré.

### III.3.3. Analyticité des intégrales d'absorption : réexamen des théorèmes A, B, C.

Pour trouver les lieux singuliers d'une intégrale d'absorption  $A_G$ , nous devons, comme au Chapitre II, chercher les *contours apparents des lieux singuliers de l'intégrand*. Or, les lieux singuliers de l'intégrand proviennent

(7) Même remarque qu'au Chapitre II, note (5).

de deux sources : d'abord, des contractions  $\kappa' : G' \rightarrow G$  qui ne dominent aucune contraction élastique; ensuite, des diverses « extensions élastiques » de  $\kappa'$ . Mais la « bizarrerie » du paragraphe III.3.1 nous apprend que *les variétés de Landau des contractions  $\kappa'$  ont mêmes contours apparents que les variétés de Landau de leurs extensions élastiques*. De plus, si l'on regarde les « critères d'efficacité » de ces variétés de Landau, on trouve ( $\alpha_i' \geq 0$ ) pour la contraction  $\kappa'$ , et des conditions plus fortes (Lemme III.3.2) pour les extensions élastiques de  $\kappa'$ . Ainsi, les *extensions élastiques de  $\kappa'$  ne fournissent aucun point singulier de l'intégrale d'absorption qui ne soit déjà fourni par  $\kappa'$* .

En conclusion, *le Théorème A, tel qu'il est énoncé au Chapitre II, reste correct pour les graphes à lignes multiples, à condition de ne retenir, dans l'énoncé III.2.2 du critère d'efficacité, que les contractions  $\kappa'$  qui ne dominent aucune contraction élastique*.

Une conclusion analogue vaut pour le Théorème B.

Passons au Théorème C, c'est-à-dire au calcul de la discontinuité de l'intégrale d'absorption. Là il faut faire attention que la singularité de l'intégrale est obtenue comme contour apparent de *plusieurs* variétés singulières de l'intégrand (provenant de la contraction  $\kappa'$  et de ses diverses extensions élastiques), de sorte que la discontinuité n'est pas donnée simplement par une intégrale du type (Disc. 2) de l'Appendice III, mais par une *somme* de telles intégrales <sup>(8)</sup>. Un cas cependant reste simple, celui où le contour apparent  $L(\kappa'_0)$  est un lieu de Landau *efficace pour l'amplitude de diffusion*, c'est-à-dire que non seulement les  $\alpha_i'$ , mais tous les  $\alpha_{i_0}'$ , sont positifs. Il résulte alors du Lemme III.3.2 que l'intégrand  $(\prod_j \lambda_j)_*$   $S(G)$  n'est singulier que sur le lieu de Landau de la contraction  $\kappa'$ , *et pas sur les lieux de Landau de ses extensions élastiques*. La discontinuité est donc donnée, comme au Chapitre II, par une seule intégrale

$$A_G - A_G^{(t'_0)} = \int_{e_{L'}^{\kappa'_0}} \text{Disc}^{(t')} (\prod_j \lambda_j)_* S(G).$$

L'expression de l'intégrand se simplifie si l'on utilise les résultats de II.3.4 sur les doubles discontinuités : écrivant  $1 - \lambda'_*$  au lieu de  $\text{Disc}^{(t')}$ , on voit

<sup>(8)</sup> En fait il semble que ces intégrales puissent se recombinaer en tenant compte de la Conjecture C pour les contractions élastiques, mais je n'ai fait ce calcul en détail que dans des cas particuliers simples.



que  $(1 - \lambda'_*) (1 - \lambda_j)_* S(\mathbf{G}) = 0$  si  $\kappa'$  et  $\kappa_{j_p}$  sont incompatibles (relations de Cutkosky-Steinmann); or, en appliquant le critère d'existence du produit fibré (Proposition 0.4.2), on voit immédiatement que  $\kappa'$  et  $\kappa_{j_p}$  sont incompatibles si et seulement si  $J$  cesse dans  $\mathbf{G}'$  d'être une ligne multiple. On peut donc dans l'intégrand ci-dessus remplacer par 1 tous les  $\lambda_j$  ne correspondant pas à des lignes multiples de  $\mathbf{G}'$ . Quant aux autres, on peut les faire commuter avec  $\text{Disc}^{(\kappa')}$ , ce qui donne pour l'intégrand

$$\left( \prod_{\substack{j' \\ \text{multiple dans } \mathbf{G}'}} \lambda_{j'} \right)_* \text{Disc}^{(\kappa')} S(\mathbf{G}).$$

En remplaçant, comme au Chapitre II,  $\text{Disc}^{(\kappa')} S(\mathbf{G})$  par son expression tirée de la Conjecture C, on aboutit à la conclusion suivante :

THÉORÈME C MODIFIÉ. — *Dans le cas où le lieu de Landau  $L'_0$  est efficace pour l'amplitude de diffusion  $S(\mathbf{G}_0)$ , la modification à apporter à l'intégrand de*

$$\int_{\substack{\kappa'_0 \\ e}} S(\mathbf{G}')$$

*est exactement la même que pour la Conjecture C. Autrement dit, on a toujours l'égalité des discontinuités*

$$A_{\mathbf{G}} - A_{\mathbf{G}}^{(L'_0)} = S(\mathbf{G}_0) - S^{(L'_0)}(\mathbf{G}_0).$$

Rappelons que cette égalité des discontinuités est un phénomène profond, dont on a donné une justification *directe* dans II.3.3. Ainsi, le fait que cette égalité subsiste est un bon test de cohérence pour la Conjecture C *modifiée*.

## APPENDICE I

CONTOURS APPARENTS DE VARIÉTÉS DÉFINIES  
PAR DES INTERSECTIONS

On considère, dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^p$ , une sous-variété différentiable  $S$  de codimension  $m$ , donnée par  $m$  équations  $s_1(y) = s_2(y) = \dots = s_m(y) = 0$ , avec  $ds_1 \wedge ds_2 \wedge \dots \wedge ds_m \neq 0$ . Soit  $\pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  la projection canonique <sup>(1)</sup> de  $\mathbb{R}^p$  sur un sous-espace euclidien  $\mathbb{R}^q$  ( $q < p$ ). On se propose d'étudier localement les singularités de l'application différentiable <sup>(2)</sup>  $\pi|_S : S \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Ce problème ne diffère en rien du problème général étudié par Thom dans [37], et ce qui suit n'est qu'une reformulation des idées de Thom, adaptée à cette façon particulière de poser le problème.

## A.I.1. Points critiques.

Ecrivons

$$\mathbb{R}^p = \underset{y}{\mathbb{R}^n} \times \underset{t}{\mathbb{R}^q}$$

Rappelons qu'un point  $y = (x, t) \in S$  est dit *critique* pour  $\pi|_S$  si l'application tangente à  $\pi|_S$  au point  $y$  n'est pas surjective. Il revient au même de dire que l'application cotangente n'est pas injective, c'est-à-dire qu'il existe au point  $t$  un vecteur  $\theta \neq 0$  cotangent à  $\mathbb{R}^q$  tel que  $(\pi|_S)_y^* \theta = 0$ , c'est-à-dire  $\pi_y^* \theta|_S = 0$ . Le noyau de l'application cotangente, c'est-à-dire l'espace de tous les vecteurs  $\theta$  possibles, est un espace vectoriel dont la dimension est appelée *corang* (au but) du point critique  $y$ .

Pour qu'un vecteur  $\omega$ , cotangent en  $y$  à  $\mathbb{R}^p$ , ait sa restriction à  $S$  nulle, il faut et il suffit qu'il soit de la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^m \alpha_i ds_i(y);$$

d'autre part, pour que  $\omega$  soit de la forme  $\pi_y^* \theta$ , il faut et il suffit qu'il soit « parallèle à  $\mathbb{R}^q$  », c'est-à-dire que sa restriction à la « fibre »  $\mathbb{R}^n$  soit nulle : le point  $y$  sera donc critique si et seulement si l'on peut trouver des paramètres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  non tous nuls tels que

$$(L) \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i ds_i(y) |_{t \text{ constant}} = 0.$$

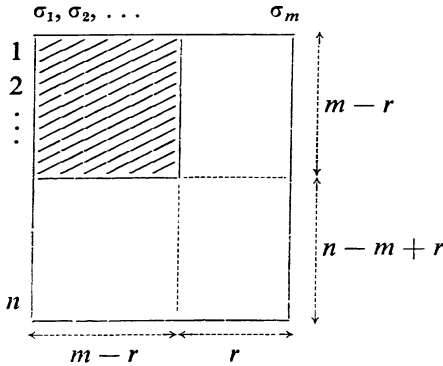
On voit d'autre part que le *corang* du point critique est la dimension de l'espace vectoriel des  $(\alpha_i)$  solutions de l'équation (L).

(1) Vu le caractère *local* de cette étude, on pourrait aussi bien prendre pour  $\pi$  n'importe quelle application fibrée différentiable de variétés.

(2) Tous nos raisonnements n'utiliseront rien d'autre que le *théorème des fonctions implicites* : ils s'appliqueront donc également en remplaçant partout le mot « différentiable » par « analytique ».

A.I.2. Points transversalement critiques.

Soit  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$  une suite de  $m$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , et désignons par  $F_r$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{mn}$  où la matrice  $m \times n$  que définit  $\sigma$  a exactement le rang  $m - r$ . On vérifiera sans peine que  $F_r$  est une *sous-variété*, de codimension  $r(n - m + r)$ .



Considérons d'autre part l'application  $S' : S \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$  définie par

$$(S') \quad \sigma_i(y) = \frac{\partial}{\partial x} s_i(y).$$

Il est clair que les résultats de A.I.1 peuvent s'énoncer ainsi : *le point  $y$  est critique de corang  $r$  si et seulement si  $S'(y) \in F_r$ .*

DÉFINITION (R. Thom)

Un point  $y$ , critique de corang  $r$ , sera dit *transversalement critique* si l'application  $S'$  est transverse sur  $F_r$ , c'est-à-dire si le graphe de  $S'$  coupe  $S \times F_r$  transversalement au point  $S'(y)$  (fig. 36).

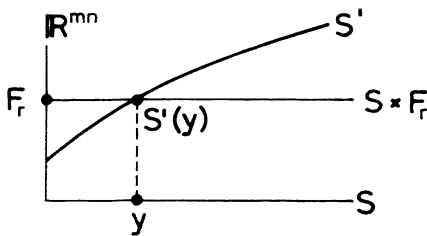


FIG. 36. — Transversalité d'un point critique.

Alors,  $S' \cap (S \times F_r)$  est, près de  $S'(y)$ , une sous-variété de dimension  $\dim S - \text{codim } F_r = p - m - r(n - m + r)$ .

Cette sous-variété se projette sur  $S$  suivant une sous-variété  $S_r$  de même dimension; d'où le résultat :

*l'ensemble des points transversalement critiques de corang  $r$  est une sous-variété  $S_r$ , de dimension  $p - m - r(n - m + r)$  (3).*

Pourvu donc que l'application  $S'$  soit *transverse partout* à tous les  $F_r$ , on obtient ainsi une partition de  $S$  en sous-variétés  $S_r$  ( $r \geq r_0 = \sup \{ m - n, 0 \}$ ). De  $S_{r_0}$  il n'y a plus rien à dire : c'est l'ouvert des points de  $S$  où le rang de  $\pi | S$  est maximum, et on le notera simplement  $S$ . Mais on peut réappliquer à  $S_r$  ( $r > r_0$ ) le raisonnement qui vient d'être fait pour  $S$ , ce qui définit, si l'application  $S'_r : S_r \rightarrow \mathbb{R}^m$  est transverse (4) partout à tous les  $F_{r'}$ , une partition de  $S_r$  en sous-variétés  $S_{r'r} = S_r(S_r)$ . On notera que  $\dim S_r < \dim \text{but}$  (en particulier,  $\dim S_1 = p - m - (n - m + 1) = p - n - 1 = q - 1 = \dim \text{but} - 1$ ), de sorte que seules les  $S_{r'r}$  pour lesquelles  $r' \geq r$  seront non vides. De  $S_{rr}$  il n'y a plus rien à dire : c'est l'ouvert des points de  $S_r$  où  $\pi | S_r$  est de rang maximum, ou « points critiques ordinaires de corang  $r$  »; on le notera simplement  $S_q$ . Mais on peut recommencer avec  $S_{r'r}$  ( $r' > r$ ), etc. Pour des raisons de dimension, l'itération s'arrête après un nombre fini d'étapes, et l'on obtient ainsi une partition finie de  $S$  en sous-variétés de dimensions décroissantes  $S = \text{ouvert de } S, S_r, S_{r'r}, \dots, S_{r'' \dots r'r} (r'' > \dots > r' > r)$ . Pour définir ces sous-variétés, il a fallu que la condition de transversalité soit satisfaite à toutes les étapes. Lorsque c'est bien le cas, on dira qu'on a affaire à une situation *générique*. Les situations génériques sont *stables* : comme une application, transverse à une variété, reste transverse après une petite déformation, une singularité, de type  $S_{21}$  par exemple, reste de type  $S_{21}$  après une petite déformation. Mais le vrai problème est de savoir si le *type topologique* de la singularité reste invariant : car on pourrait imaginer que le « symbole »  $S_{21}$  par exemple couvre une infinité de situations topologiquement différentes, ce qui enlèverait beaucoup d'intérêt à la classification ci-dessus. En

(3) On pourra désigner par  $S_0$  l'ouvert de  $S$  formé des points où  $\text{rang}(\pi | S) = \dim \text{but}$  (« points réguliers » de  $S$ ). Si  $\dim S < \dim \text{but}$  (c'est-à-dire  $m > n$ ), cet ouvert est évidemment vide; le premier  $F_r$  non vide est alors  $F_{m-n}$ , sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , de sorte que l'ensemble  $S' \cap (S \times F_{m-n})$  est ouvert relativement à  $S'$ , et se projette suivant un ouvert  $S_{m-n}$  de  $S$ , ensemble des points où  $\text{rang}(\pi | S) = \dim S$ .

(4) En réalité, cette condition de transversalité doit être modifiée pour tenir compte des renseignements que l'on possède déjà sur l'application  $S'_r$ , à savoir :

1° le fait que l'espace tangent à  $S_r$  est contenu dans l'espace tangent à  $S$ ;

2° les « relations d'intégrabilité » entre coefficients de l'application  $S'_r$  : puisque les équations de  $S_r$  font intervenir les dérivées premières des fonctions  $s_i$ , les coefficients de  $S'_r$  en feront intervenir les dérivées secondes, et l'on vérifiera que les identités  $\partial^2 s_i / \partial x_j \partial x_k = \partial^2 s_i / \partial x_k \partial x_j$  se traduisent pour  $r > 1$  par des relations non triviales entre ces coefficients.

Ainsi, au lieu de considérer  $S'_r$  comme une application de  $S_r$  dans  $\mathbb{R}^m$ , on la considérera comme une *section d'un sous-fibré* de  $S \times \mathbb{R}^m$  défini par les restrictions ci-dessus, et c'est à cette section qu'on demandera d'être transverse aux  $F_{r'}$ .

De même, quand on voudra itérer le processus précédent et définir la condition de transversalité pour les  $S'_{r'}$ , etc., on devra tenir compte de restrictions analogues à 1°, 2° (mais de plus en plus compliquées).

fait, Thom a pu vérifier directement que les plus simples parmi les « symboles » ci-dessus n'ont pas ce genre de pathologie, et fournissent même, pour les petites dimensions de l'espace but, une *classification complète des types topologiquement stables de singularités*.

## EXEMPLES

$q = 1$  Seule singularité générique :  $S_1$ .

On a affaire à une fonction  $t : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Un point critique est un point où le gradient  $\partial t / \partial \xi$  de cette fonction s'annule ( $\xi$  désignant un système de coordonnées locales sur  $S$ ), et évidemment tout point critique est de corang 1. Si le point est transversalement critique, ce sera un *point critique isolé*, et on aura affaire à une situation de type  $S_1$ . Or la condition de transversalité s'exprime ici par la non-nullité du « Hessien » (déterminant des dérivées secondes) de  $t$ . On peut alors toujours choisir les coordonnées  $\xi$  de façon que  $t$  s'écrive

$$t = \pm \xi_1^2 \pm \xi_2^2 \pm \dots \pm \xi_s^2 \quad (s = \dim S)$$

et la seule liberté qui nous reste est le choix des signes  $\pm$ . Par conséquent :

*une situation de type  $S_1$  a un type topologique (et même différentiable) entièrement déterminé par la donnée de « l'indice » du point critique, nombre de valeurs propres négatives de la forme quadratique  $\partial^2 t / \partial \xi_i \partial \xi_j$ .*

$q = 2$  Seules singularités génériques :  $S_1$  et  $S_{21}$  (on suppose  $\dim S \geq 2$ ).

Si la condition de transversalité est satisfaite, l'ensemble critique est une courbe  $S_1$  <sup>(5)</sup>, et la variété  $S_1$  est l'ensemble des points où la tangente à cette courbe n'est pas « verticale » (perpendiculaire au plan de projection). En coupant  $S$  par un hyperplan « vertical » transverse à cette courbe, on retrouve la situation précédente. *La situation  $S_1$  se traduit donc pour  $q = 2$  par le modèle local :*

$$\begin{cases} t_1 = \xi_1 & (= \text{équation de l'hyperplan transverse}) \\ t_2 = \pm \xi_2^2 \pm \dots \pm \xi_s^2 \end{cases}$$

et son type différentiable est entièrement caractérisé par l'*indice transverse* du point critique (nombre de valeurs propres négatives de la forme quadratique restreinte à l'hyperplan transverse).

$S_{21}$  se compose de points isolés (« points critiques exceptionnels »), où la tangente à  $S_1$  est verticale, et « ne reste pas de façon stationnaire dans cette position verticale » (transversalité de  $S'_1$  par rapport à  $F_2$ ). *Le modèle local pour la situation  $S_{21}$  peut s'écrire*

$$\begin{aligned} t_1 &= \xi_1 \\ t_2 &= \xi_2^3 \pm \xi_1 \xi_2 \pm \xi_3^2 \pm \xi_4^2 \pm \dots \pm \xi_s^2 \end{aligned}$$

*et le contour apparent a un point de rebroussement (cf. par exemple, fig. V 9 de [29]).*

$q = 3$  ( $\dim S \geq 3$ ). Seules singularités génériques :  $S_1$ ,  $S_{21}$ ,  $S_{321}$ .

Notons un fait général : si l'on a réussi à représenter un certain « symbole » par un modèle local pour certaines dimensions ( $s$ ,  $q$ ) de la source et du but, le

(5) Exercice : voir pourquoi  $S_2$  est vide.

modèle local pour  $(s + 1, q + 1)$  s'en déduira par « suspension », c'est-à-dire en rajoutant une même variable à la source et au but (cf. la façon dont le cas  $q = 2$  pour  $S_1$  a été déduit du cas  $q = 1$ ). Ainsi, dans la situation  $S_{21}$  pour  $q = 3$ , le contour apparent sera une surface présentant une *arête de rebroussement*. Par contre, la situation  $S_{321}$  apparaît ici pour la première fois. Elle se traduit par l'existence d'un point de rebroussement de l'arête de rebroussement précédente (singularité baptisée « queue d'aronde »).

$$q = 4$$

Ici apparaissent pour la première fois des singularités de type  $S_2$ . Nous renvoyons à Thom [37] pour plus de détails.

### A.I.3. Expression analytique de la transversalité.

Soit  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$  un point de  $F_r$ , et supposons pour fixer les idées que  $\sigma_{r+1} \wedge \sigma_{r+2} \wedge \dots \wedge \sigma_m \neq 0$ .  $F_r$  est alors donné près de  $\sigma$  par les équations

$$\sigma_\rho \wedge \sigma_{r+1} \wedge \sigma_{r+2} \wedge \dots \wedge \sigma_m = 0, \quad \rho = 1, 2, \dots, r$$

de sorte que son espace cotangent en  $\sigma$  est donné par les équations

$$d\sigma_\rho \wedge \sigma_{r+1} \wedge \sigma_{r+2} \wedge \dots \wedge \sigma_m + \sum_{\mu=r+1}^m (-)^{\mu-r} \sigma_\rho \wedge \sigma_{r+1} \wedge \sigma_{r+2} \wedge \dots \wedge d\sigma_\mu \wedge \dots \wedge \sigma_m = 0, \quad \rho = 1, 2, \dots, r,$$

qui, une fois les  $\sigma_\rho$  remplacés par leurs développements

$$\sigma_\rho = \sum_{\mu=r+1}^m \alpha_\mu^\rho \sigma_\mu,$$

se transforment en

$$\left( d\sigma_\rho - \sum_{\mu=r+1}^m \alpha_\mu^\rho d\sigma_\mu \right) \wedge \sigma_{r+1} \wedge \sigma_{r+2} \wedge \dots \wedge \sigma_m = 0,$$

c'est-à-dire

$$(F_r^*) \quad d\sigma_\rho^\perp - \sum_{\mu=r+1}^m \alpha_\mu^\rho d\sigma_\mu^\perp = 0, \quad \rho = 1, 2, \dots, r$$

où  $d\sigma_i^\perp$  désigne la projection du vecteur  $d\sigma_i$  sur l'espace orthogonal au  $(m - r)$ -plan sous-tendu par  $\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_m$ . Ainsi, l'espace cotangent à  $S \times F_r$  est l'espace des  $(dy, d\sigma_i^\perp)$  liés par les relations  $(F_r^*)$  et

$$(S^*) \quad ds_i(y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

On en déduit l'espace cotangent à  $(S \times F_r) \cap S'$  en remplaçant les  $d\sigma_i^\perp$  par leur expression tirée de l'équation  $(S^*)$  :

$$d\sigma_i^\perp = \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 s_i(y)}{\partial y_j \partial x^1} dy_j$$

où  $x^\perp$  symbolise les coordonnées de l'espace orthogonal à  $\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_m$ . L'espace cotangent cherché est donc l'espace des  $dy_j$  liés par les relations

$$(F_r^*)' \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \alpha_i^\rho \frac{\partial^2 s_i(y)}{\partial y_j \partial x^\perp} dy_j = 0, \quad \rho = 1, 2, \dots, r,$$

$$(S^*)' \quad \sum_{j=1}^p \frac{\partial s_i}{\partial y_j} dy_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

où les symboles  $\alpha_i^\rho$  pour  $i \leq r$  sont définis par  $\alpha_i^\rho = -1$  si  $i = \rho$ , 0 autrement. On exprimera donc la transversalité en écrivant que la matrice

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l} r \text{ fois} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^\perp \\ \vdots \\ x^\perp \\ \\ i = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{cases} \end{array} \left[ \begin{array}{c} \overbrace{1, 2, \dots, p}^{j=} \\ \hline \boxed{\sum_{i=1}^m \alpha_i^1 \frac{\partial^2 s_i}{\partial y_j \partial x^\perp}} \\ \vdots \\ \boxed{\sum_{i=1}^m \alpha_i^r \frac{\partial^2 s_i}{\partial y_j \partial x^\perp}} \\ \vdots \\ \boxed{\frac{\partial s_i}{\partial y_j}} \end{array} \right]
 \end{array}$$

est de rang maximum. Autrement dit, compte tenu du fait que cette matrice est plus grande dans le sens horizontal ( $p \geq m + r(n - m + r)$  si l'on veut que  $\dim S_r \geq 0$ ), la non-transversalité pour un point critique de corang  $r$  se traduira par l'existence de  $r$  vecteurs  $V^\rho \in \mathbb{R}^n$  non tous nuls, orthogonaux aux vecteurs  $\sigma_i = \partial s_i / \partial x$ , et de  $m$  nombres  $\beta_i$  tels que

$$(T_r^s)_1 \quad \sum_{i=1}^m \left( \sum_{\rho=1}^r \sum_{k=1}^n \alpha_i^\rho \frac{\partial^2 s_i}{\partial y_j \partial x_k} V_k^\rho + \beta_i \frac{\partial s_i}{\partial y_j} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Récrivons pour mémoire le fait que les  $V^\rho$  sont orthogonaux aux  $\sigma_i$  :

$$(T_r^s)_2 \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial x_k} V_k^\rho = 0, \quad \begin{array}{l} \rho = 1, 2, \dots, r, \\ i = 1, 2, \dots, m, \end{array}$$

et rappelons que les  $\alpha^\rho$  sont une base de l'espace vectoriel des  $\alpha$  solutions de l'équation (L) au point critique.

*Points critiques exceptionnels.*

Les « points critiques exceptionnels » (points où l'application  $\pi|_{S_r}$  n'est pas de rang maximum) peuvent être caractérisés comme les points où l'espace cotangent à  $S_r$ , restreint à la fibre, n'est pas de dimension minimale. Or, se restreindre à la fibre signifie remplacer, dans la matrice ci-dessus,  $\partial/\partial y_j$  par  $\partial/\partial x_k$ ; la matrice ainsi obtenue est plus grande dans le sens vertical [ $n \leq m + r(n - m + r)$ ] de sorte que le caractère *exceptionnel* du point critique se traduira par l'existence d'un vecteur  $V \in \mathbb{R}^n$  non nul tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \alpha_i^\rho \frac{\partial^2 s_i}{\partial x_k \partial x^\perp} V_k = 0 \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial x_k} V_k = 0, \end{array} \right.$$

la première équation devant être vérifiée pour tout  $\rho$ , et pour toute coordonnée  $x^\perp$  telle que  $\partial s_i / \partial x^\perp = 0$ , de sorte qu'on peut encore formuler ainsi la condition ci-dessus :

il existe un vecteur  $V \in \mathbb{R}^n$  non nul, et des paramètres  $\beta_i$ , tels que

$$\begin{array}{l} \text{(Exc)}_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=1}^n \alpha_i^\rho \frac{\partial^2 s_i}{\partial x_k \partial x_j} V_k + \beta_i \frac{\partial s_i}{\partial x_j} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \rho = 1, 2, \dots, r \end{array} \right. \\ \text{(Exc)}_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \frac{\partial s_i}{\partial x_k} V_k = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{array} \right. \end{array}$$

**A.I.3.1. Remarque.**

Dans le cas du corang 1 ( $r = 1$ ), le couple d'équations (Exc.) est identique au couple (Trs), à ceci près qu'au lieu de dériver par rapport aux  $y_j$ , on dérive seulement par rapport aux  $x_j$ . Par conséquent, si les équations (Exc.) ne peuvent être satisfaites, il en sera de même *a fortiori* des équations (Trs), ce qui veut dire qu'on a affaire à un point *transversalement critique, ordinaire, de corang 1*, c'est-à-dire à une singularité de type  $S_1$ .

**A.I.3.2. Remarque.**

Comme les équations (Exc.) ne dépendent pas explicitement des coordonnées de la base, on peut restreindre arbitrairement celle-ci (remplacer  $\mathbb{R}^q$  par un  $\mathbb{R}^{q'} \subset \mathbb{R}^q$ ) sans changer le caractère  $S_1$  de la singularité. A première vue, cela semble paradoxal, car on sent bien que si le  $\mathbb{R}^{q'}$  est choisi tangent au contour apparent un accident doit se produire. En fait, l'accident en question consiste simplement en une violation de la condition  $ds_1 \wedge \dots \wedge ds_m \neq 0$ , c'est-à-dire que  $S$  cesse (en général) d'être une variété, et notre analyse ne s'applique plus. Tout cela est d'ailleurs évident géométriquement, et l'on n'avait pas besoin de recourir aux équations.



## APPENDICE II

## SINGULARITÉS DES APPLICATIONS COMPOSÉES

Etant donné un diagramme commutatif d'applications différentiables

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & \mathbb{R}^q \end{array}$$

il est naturel de se demander comment les singularités de  $f$  et  $g$  « se composent » pour donner les singularités de  $h$ . La théorie générale, dans la ligne des idées de Thom, ne semble jamais avoir été abordée, et serait probablement très compliquée. Elle conduirait à définir, pour l'application  $h$ , de nouveaux types de singularités, qui bien que *stables* pour les petites variations des applications « composantes »  $f$  et  $g$ , sont *instables* si l'on se permet de varier  $h$  librement, en oubliant qu'elle est une application composée (ces singularités ne sont pas « génériques » au sens de l'Appendice I). Nous nous contenterons dans la suite d'introduire, par des arguments pédestres, les « premiers types » de singularités qui se présenteraient dans cette classification (au sens où  $S_1$  est le « premier type » à se présenter dans la classification de Thom).

## RAPPEL DE DÉFINITIONS ET DE NOTATIONS

*Application régulière ou submersion* = application dont l'application tangente est *surjective*.

$\Gamma f$  = *ensemble critique* de  $f$  = ensemble des points où  $f$  n'est pas régulière.

$Lf = f(\Gamma f)$  = *contour apparent* de  $f$  (L pour « Landau »).

Les résultats énoncés dans A.II.1, A.II.2, A.II.3, découlent trivialement de l'application de ces définitions. Il est bien entendu qu'on a choisi une fois pour toutes un trio de points se correspondant par les applications  $f, g, h$ , et que l'examen de la « régularité » de  $f, g, h$ , se fait en ces points.

A.II.1. Si  $h$  est régulière,  $g$  l'est aussi.

COROLLAIRE :  $\Gamma h \supset f^{-1}(\Gamma g)$ .

$Lh \supset Lg$ .

A.II.2. Supposons  $f$  régulière.

Alors, si  $g$  est régulière,  $h$  l'est aussi (et inversement en vertu de A.II.1).

COROLLAIRE :  $\Gamma h = f^{-1}(\Gamma g)$ .

$Lh = Lg$  : les contours apparents coïncident.

On remarquera que si  $n > p$ , la dimension de  $\Gamma h = f^{-1}(\Gamma g)$  sera en général plus grande que celle de  $\Gamma g$ , donc plus grande que celle du contour apparent, ce qui montre que l'ensemble critique  $\Gamma h$  n'est pas transversalement critique (au sens de Thom).

### A.II.3. Supposons $g$ régulière.

Alors, si  $h$  est singulière,  $f$  l'est aussi.

COROLLAIRE :  $\Gamma f \supset \Gamma h$ .

Supposons de plus que  $f$  soit de type  $S_1$ .

Alors,  $\Gamma f$  est une variété qui se projette isomorphiquement sur la variété  $Lf$ , et l'on voit immédiatement que

$$\begin{aligned} \Gamma h &= f^{-1} \Gamma(g | Lf) \\ Lh &= L(g | Lf) \end{aligned}$$

d'où

ce qu'on peut traduire par la phrase sibylline : « le contour apparent de l'application composée est le contour apparent du contour apparent ». De plus,

A.II.3.1.  $g | Lf$  de type  $S_1 \Rightarrow h$  de type  $S_1$ .

En effet, l'application  $f$ , qui a été supposée de type  $S_1$ , peut être représentée par le modèle local

$$f : \begin{cases} y_1 = x_1 \\ \dots \\ y_{p-1} = x_{p-1} \\ y_p = \pm x_p^2 \pm \dots \pm x_n^2 \end{cases}$$

$Lf$  est la variété d'équation  $y_p = 0$ , et l'on voit aisément que les hypothèses :  $g | Lf$  de type  $S_1$ , et  $g$  régulière, se traduisent par le modèle local

$$g : \begin{cases} z_1 = y_1 \\ \dots \\ z_{q-1} = y_{q-1} \\ z_q = \pm y_q^2 \pm \dots \pm y_{p-1}^2 + y_p. \end{cases}$$

La composition de  $f$  et  $g$  donne évidemment le résultat cherché.

A.II.3.2.  $h$  de type  $S_1^+ \Rightarrow g | Lf$  de type  $S_1^+$  (1).

En effet, puisque  $\Gamma f$  se projette isomorphiquement sur  $Lf$ ,  $g | Lf$  est de même type que  $h | \Gamma f$ . Or, nous avons vu au début de A.II.3 que  $\Gamma f$  contient  $\Gamma h$ , de sorte que tout revient à montrer qu'une singularité de type  $S_1^+$ , restreinte à une variété contenant la variété critique, est encore de type  $S_1^+$ , ce qui est bien clair : il suffit de regarder ce qui se passe dans une section transverse à la variété critique, et d'utiliser le fait qu'une forme quadratique définie positive reste définie positive quand on la restreint à un sous-espace.

(1) On désigne par  $S_1^+$  les singularités de type  $S_1$  et d'indice transverse nul.

A.II.4. Singularités composées de type  $S_1 \circ S_1$

Supposons les applications  $f$  et  $g$  singulières de type  $S_1$ . Il peut en résulter pour l'application composée  $h = g \circ f$  des types très divers de singularités, parmi lesquels il conviendra de distinguer les types *stables pour les petites déformations de  $f$  et  $g$* . Nous allons voir qu'il y a *en tout et pour tout deux types stables*, tout au moins lorsque l'application  $g$  est de type  $S_1^-$  : le premier type, pour lequel le corang de l'application composée  $h$  vaut 1, sera noté  $(S_1 \circ S_1)_1$ ; le deuxième provient de la valeur 2 du corang de  $h$ , et sera noté  $(S_1 \circ S_1)_2$ .

Une condition nécessaire de stabilité est évidemment <sup>(2)</sup> que

A.II.4.o.  $Lf$  et  $\Gamma g$  se coupent transversalement.

Soit alors  $V = Lf \cap \Gamma g$ . Puisque  $\Gamma g$  se projette isomorphiquement sur  $Lg$ , la sous-variété  $V \subset \Gamma g$  se projette isomorphiquement sur une sous-variété  $\Lambda \subset Lg$ , de codimension 2 dans  $\mathbb{R}^q$ . Choisissons dans l'espace « but »  $\mathbb{R}^q$  un système de coordonnées  $(z_1, z_2, \dots, z_q)$  tel que  $z_q$  soit une équation locale de  $Lg$  et  $(z_{q-1}, z_q)$  un système d'équations locales de  $\Lambda$ . Dans l'espace « intermédiaire »  $\mathbb{R}^p$ , prenons pour dernière coordonnée  $y_p$  une équation locale de  $Lf$ , pour coordonnées  $(y_{q-1}, y_q, \dots, y_{p-1})$  un système d'équations locales de  $\Gamma g$ , et pour premières coordonnées  $y_1 = z_1, y_2 = z_2, \dots, y_{q-2} = z_{q-2}$  (ce dernier choix est autorisé par le caractère *isomorphe* de  $g|V : V \rightarrow \Lambda$ ). Enfin, dans l'espace « source »  $\mathbb{R}^n$ , choisissons pour coordonnées  $(x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$  un système d'équations locales de  $\Gamma f$ , et pour premières coordonnées  $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{p-1} = y_{p-1}$ . Pour déterminer complètement les applications  $f$  et  $g$ , il reste à se donner les fonctions  $y_p(x), z_q(y), z_{q-1}(y)$ . Les deux premières doivent, en vertu du caractère  $S_1$  des applications  $f$  et  $g$ , commencer par des termes quadratiques

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Q_f(x_p, x_{p+1}, \dots, x_n) + \dots \\ z_q(y) &= Q_g(y_{q-1}, y_q, \dots, y_{p-1}) + \dots \end{aligned}$$

non dégénérés dans leurs arguments. Par contre, la fonction  $z_{q-1}(y)$  reste entachée d'un certain arbitraire, lié au corang de l'application  $h$ . Pour le comprendre en termes *intrinsèques*, introduisons « l'espace cotangent transverse » à  $\Lambda$ , noté  $T^*(\mathbb{R}^q/\Lambda)$  : c'est l'espace à deux dimensions des covecteurs de  $\mathbb{R}^q$  dont la restriction à  $\Lambda$  est nulle (ici l'espace engendré par  $dz_q$  et  $dz_{p-1}$ ). Puisque  $\Lambda \subset Lg$ , cet espace  $T^*(\mathbb{R}^q/\Lambda)$  contient le noyau de l'application cotangente  $g^*$ , noyau qui est à une dimension puisqu'on a affaire à un point critique de corang 1 (ici, ce noyau est l'espace engendré par  $dz_q$ ). Par conséquent,  $g^*T^*(\mathbb{R}^q/\Lambda)$  est un espace vectoriel à *une dimension*, de sorte qu'un covecteur  $\theta \in g^*T^*(\mathbb{R}^q/\Lambda)$  est défini sans ambiguïté à un facteur multiplicatif près (*ici, on peut prendre  $\theta = d[z_{q-1}(y)]$* ). Du covecteur  $\theta$  on sait seulement deux choses : d'abord, sa restriction à  $V$  est nulle (car l'espace cotangent à  $V$  est l'image par  $g^*$  de l'espace cotangent à  $\Lambda$ ) ensuite, sa restriction

<sup>(2)</sup> C'est évident si par « type topologique de l'application composée » on entend non seulement le type topologique de l'application  $h$  considérée isolément, mais le type topologique du diagramme d'applications



à  $\Gamma g$  n'est pas nulle (car l'espace cotangent à  $\Gamma g$  est l'image *isomorphe* par  $g^*$  de l'espace cotangent à  $Lg$ ). Par contre, on ne sait rien sur la restriction de  $\theta$  à  $Lf$ , de sorte qu'il faut distinguer deux cas,  $\theta|Lf \neq 0$  et  $\theta|Lf = 0$ . On voit tout de suite que le premier cas signifie le *corang 1* pour l'application  $g|Lf$  (ou, ce qui revient au même, pour l'application composée  $h$ ), tandis que le deuxième cas signifie le *corang 2*.

#### A.II.4.1. Cas du corang 1.

Les trois conditions  $\theta|V = 0$ ,  $\theta|\Gamma g \neq 0$ ,  $\theta|Lf \neq 0$  nous apprennent que la fonction  $z_{q-1}(y)$  commence par un terme linéaire en  $y_p$  plus un terme linéaire en  $(y_{q-1}, y_q, \dots, y_{p-1})$ . Si l'application  $g$  n'est pas de type  $S_1^+$ , il faut encore préciser comment ce dernier terme linéaire se situe par rapport au *cône isotrope* de la forme quadratique  $Q_g$  <sup>(3)</sup>. Mais si l'application  $g$  est de type  $S_1^+$ , c'est-à-dire si la forme quadratique  $Q_g$  est *définie positive*, tout est terminé : avec un choix convenable des coordonnées  $y_{q-1}, y_q, \dots, y_{p-1}$ , on aura  $Q_g = y_{q-1}^2 + y_q^2 + \dots + y_{p-1}^2$  et  $\theta|Lf = dy_{p-1}$ , et le diagramme d'applications

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & \searrow & \downarrow g \\ & h & \end{array}$$

pourra être donné par le modèle local

$$f : \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \dots \\ y_{p-1} = x_{p-1} \\ y_p = \pm x_p^2 \pm \dots \pm x_n^2 \end{cases} \quad g : \begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 \\ \dots \\ z_{q-2} = y_{q-2} \\ z_{q-1} = y_{p-1} + y_p \\ z_q = y_{q-1}^2 + y_q^2 + \dots + y_{p-1}^2 \end{cases}$$

$$h = g \circ f : \begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 \\ \dots \\ z_{q-2} = x_{q-2} \\ z_{q-1} = x_{p-1} \pm x_p^2 \pm \dots \pm x_n^2 \\ z_q = x_{q-1}^2 + x_q^2 + \dots + x_{p-1}^2 \end{cases}$$

<sup>(3)</sup> Ou plutôt de la forme quadratique inverse, définie sur l'espace dual : plus précisément, la matrice des dérivées secondes

$$\left\| \frac{\partial^2 z_q}{\partial y_i \partial y_j} \right\|$$

définit une *forme quadratique non dégénérée*  $Q_g$  sur l'espace tangent transverse à  $\Gamma g$ ; on en déduit, par restriction à  $Lf$ , une forme quadratique non dégénérée  $Q_g|Lf$ , définie sur l'espace  $T_*(Lf/V)$  des vecteurs tangents à  $Lf$  transverses à  $V$ ; la forme quadratique inverse  $(Q_g|Lf)^{-1}$  est définie sur l'espace dual  $T^*(Lf/V)$ , espace auquel appartient le covecteur  $\theta|Lf$  (puisque  $\theta|V = 0$ ). Le *cône isotrope* est défini par la condition  $(Q_g|Lf)^{-1}(\theta|Lf) = 0$ .

On s'amusera à calculer l'ensemble critique  $\Gamma h$  : c'est l'union des deux variétés

$$f^{-1}(\Gamma g) = \{ x_{q-1} = x_q = \dots = x_{p-2} = x_{p-1} = 0 \}$$

et

$$\{ x_{q-1} = x_q = \dots = x_{p-2} = x_p = x_{p+1} = \dots = x_n = 0 \}.$$

Dans l'espace but  $\mathbb{R}^q$ , la première se projette suivant  $Lg = \{ z_q = 0 \}$  la deuxième suivant une variété tangente à  $Lg$ , soit  $\{ z_q = z_{q-1} \}$  (fig. 37). Sur la figure 37, on a représenté non seulement le « cas général »  $n \geq p$ , mais aussi le « cas particulier »  $n = p - 1$  (dire que l'application  $f : \mathbb{R}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}^p$  est de type  $S_1$ , c'est simplement dire que son rang est  $p - 1$ , donc que c'est une « immersion »).

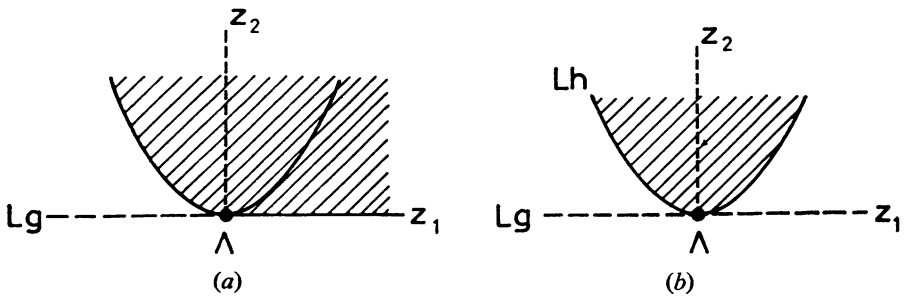


FIG. 37. — Contour apparent d'une application composée  $(S_1^+ \circ S_2^+)_1$ .

Zone hachurée : image de l'application composée  $h$ .

Courbe pleine : contour apparent de  $h$ .

$a$  : cas général  $n \geq p$ .

$b$  : cas particulier  $n = p - 1$ .

#### A.II.4.2. Cas du corang 2.

Dans le cas du corang 2, c'est-à-dire le cas où  $\theta | Lf$  s'annule, on est obligé, si l'on veut définir une situation *stable*, d'imposer une nouvelle *condition de transversalité* qui peut s'énoncer ainsi :

soit  $[\theta | Lf] : V \rightarrow T^*(Lf/V)$  l'application qui à tout point de  $V$  associe le vecteur cotangent  $\theta | Lf$  défini en ce point; on suppose cette application transverse sur la valeur 0.

Comme l'espace  $T^*(Lf/V)$  est de dimension  $p - q + 1$ , et  $V$  de dimension  $q - 2$ , on voit que la situation « stable de corang 2 », définie par la condition de transversalité ci-dessus, n'est possible que si  $p - q + 1 \leq q - 2$ , c'est-à-dire  $p \leq 2q - 3$ . L'ensemble des points de corang 2 est alors une *variété* (la variété  $[\theta | Lf]^{-1}(0)$  de dimension  $2q - 3 - p$ ).

Le modèle local pour cette situation ne diffère du cas A.II.4.1 que par l'expression de la fonction  $z_{q-1}(y)$  : on peut choisir les coordonnées locales sur  $V$  de façon que l'application  $[\theta | Lf]$  s'écrive

$$[\theta | Lf](y_1, y_2, \dots, y_{q-2}) = y_1 dy_{p-1} + y_2 dy_{p-2} + \dots + y_{p-q+1} dy_{q-1}$$

de sorte que la fonction  $z_{q-1}(y)$  peut prendre la forme

$$z_{q-1}(y) = y_p + y_1 y_{p-1} + y_2 y_{p-2} + \dots + y_{p-q+1} y_{q-1}.$$

Le modèle local pour l'application composée s'écrit alors

$$h : \begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 \\ \dots \\ z_{q-2} = x_{q-2} \\ z_{q-1} = \pm x_p^2 \pm \dots \pm x_n^2 + x_1 x_{p-1} + x_2 x_{p-2} + \dots + x_{p-q+1} x_{q-1} \\ z_q = \pm x_{q-1}^2 \pm x_q^2 \pm \dots \pm x_{p-1}^2 \end{cases}$$

(il n'est plus utile de supposer  $g$  de type  $S_1^+$ ). L'ensemble critique  $\Gamma h$  est l'union des deux variétés

$$f^{-1}(\Gamma g) = \{ x_{q-1} = x_q = \dots = x_{p-1} = 0 \}$$

et

$$\left\{ x_p = \dots = x_n = 0 ; \frac{x_{p-1}}{x_1} = \frac{x_{p-2}}{x_2} = \dots = \frac{x_{q-1}}{x_{p-q+1}} \right\}$$

qui se projettent respectivement sur

$$Lg = \{ z_q = 0 \}$$

et sur

$$\left\{ \frac{z_q}{z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{q-2}^2} = \left( \frac{z_{q-1}}{z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{p-q+1}^2} \right)^2 \right\}.$$

En particulier, si  $p = q = 3$ , ce dernier ensemble s'écrit  $\{ z_1^2 z_3 = z_2^2 \}$ , et présente à l'origine une singularité dite « cuspidale » (fig. 38).

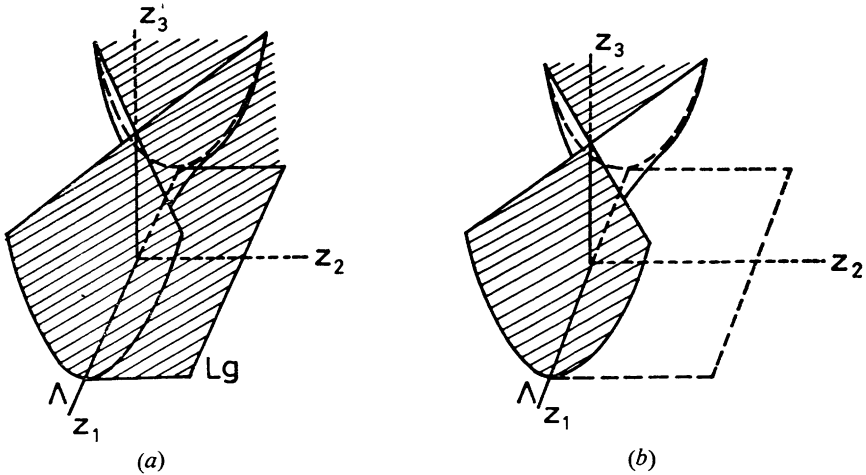


FIG. 38. — Contour apparent d'une application composée  $(S_1^+ \circ S_1^+)_2$  ( $p = q = 3$ ).

Volume hachuré : image de l'application composée  $h$ .

Surface opaque : contour apparent de  $h$ .

$a$  : cas général  $n \geq p$ .

$b$  : cas particulier  $n = p - 1$ .

## APPENDICE III

## DÉTOURNEMENTS COMPLEXES DE VARIÉTÉS RÉELLES

Soient  $Y$  une sous-variété fermée d'une variété différentiable  $Y$ ,  $S$  un fermé de  $Y$  rencontrant  $Y$ . *Détourner*  $Y$  du fermé  $S$ , ce sera se donner un *plongement* de  $Y$  dans  $Y - S$ , dont la classe d'homotopie (comme *plongement* de  $Y$  dans  $Y - S$ ) puisse être réalisée par un plongement *arbitrairement voisin* de l'inclusion  $Y \subset Y$ . Une telle classe d'homotopie sera appelée *classe de détournement*.

Nous supposerons dans la suite que  $Y$  est un *voisinage tubulaire* de  $Y$  (on peut toujours se ramener à ce cas si  $Y$  est compacte, ou si l'expression « arbitrairement voisin » est prise au sens d'une « convergence uniforme » convenable), et nous choisirons une *rétraction*  $\rho : Y \rightarrow Y$ .

**LEMME FONDAMENTAL :** On ne restreint pas la généralité en remplaçant, dans la définition des classes de détournement, l'espace des plongements de  $Y$  dans  $Y$  par l'espace des sections (différentiables) de la rétraction  $\rho$ .

**PREUVE :** Pour tout plongement  $\varphi : Y \rightarrow Y$  suffisamment voisin de l'inclusion, l'application  $\rho \circ \varphi : Y \rightarrow Y$  sera suffisamment proche de l'identité pour être une *difféotopie*. Ainsi,  $\rho \circ \varphi(Y)$  sera un isomorphisme; soit  $\sigma : Y \rightarrow \varphi(Y)$  l'isomorphisme inverse. De la difféotopie  $\rho \circ \varphi \simeq \text{id}_Y$ , on déduit  $\varphi \simeq \sigma : Y \rightarrow \varphi(Y)$  ce qui veut dire que le plongement  $\varphi$  peut être déformé en la section  $\sigma$ , *sans changer son image*, donc *a fortiori* en évitant le fermé  $S$  si  $\varphi$  l'évitait.

Nous nous autoriserons désormais de ce Lemme pour construire nos détournements comme *sections* d'une telle rétraction  $\rho$ , qui sera choisie chaque fois « la plus commode » pour le problème particulier envisagé.

Dans toute la suite,  $Y$  sera une *variété analytique réelle* à  $p$  dimensions, et  $Y$  un « voisinage complexe » de  $Y$ , fibré par la rétraction  $\rho$  en boules  $E^p$ ;  $S$  sera un ensemble analytique complexe. Ce cas se présente naturellement quand on veut définir la distribution « valeur au bord » sur  $Y$  d'une fonction analytique complexe ayant  $S$  comme lieu singulier : pourvu que cette fonction ne croisse pas trop vite quand on s'approche de  $S$ , on s'attend à ce que chaque classe de détournement définisse une telle « valeur au bord ».

Les considérations purement topologiques développées dans les sections A.III.1 et A.III.2 seront utilisées dans la section A.III.3 pour étudier les propriétés d'analyticité d'une intégrale sur un cycle « presque réel », c'est-à-dire un cycle défini par un détournement de variété réelle. Ce problème ressemble beaucoup à celui étudié par Leray dans [23], Chapitre II <sup>(1)</sup> (en particulier les résultats de Leray devraient permettre de préciser les considérations de la Remarque A.III.3.2 ci-après).

## A.III.1. Détournements évitant des sous-variétés.

## A.III.1.1.

Soit  $S$  une *sous-variété analytique fermée* de  $Y$ , de codimension 1, admettant dans  $Y$  une « complexifiée »  $S$ . Si le « voisinage complexe »  $Y$  est assez petit, on peut choisir la rétraction  $\rho$  de façon à laisser stable  $S$ , et à en faire un *sous-fibré*

<sup>(1)</sup> Attention : le mot « détournement » chez Leray n'a pas tout à fait le même sens qu'ici.

de  $Y \mid S$  (de base  $S$ ), ayant pour fibre « l'hyperplan équatorial »  $E^{p-1}$  de la boule  $E^p$ . L'espace  $Y - S$  est donc, au-dessus de  $S$ , un fibré de fibre  $E^p - E^{p-1}$ , de même type d'homotopie que le fibré des vecteurs unitaires normaux à  $S$  dans  $Y$  (double revêtement de  $S$ ); on supposera le plongement  $S \subset Y$  orientable, de façon que ce dernier fibré soit trivial; alors, ses deux sections <sup>(2)</sup> définiront (à une homotopie près) deux sections du fibré  $(Y - S) \mid S$ ; mais comme  $Y$  est fibré en boules, ces deux sections, définies au-dessus du fermé  $S$ , se prolongent au-dessus de tout  $Y$ , et définissent deux classes de détournement de  $Y$  évitant la sous-variété  $S$  (il est évident que ces sections peuvent être choisies arbitrairement proches de la section nulle : il s'agit donc bien de détournements).

### A.III.1.2.

Les arguments de A.III.1.1 peuvent être repris lorsque  $S$ , au lieu d'être une sous-variété, est une union de sous-variétés fermées  $S_1, S_2, \dots, S_m$  orientables, de codimension 1, en position générale. Il suffit de considérer la partition de  $Y$  en « strates »

$$A^I = \bigcap_{i \in I} S_i - \bigcup_{i \notin I} S_i \quad , \quad I \subset \{1, 2, \dots, m\}.$$

On choisit la rétraction  $\rho$  de façon à laisser stable chaque  $S^i$ , et à faire de  $Y - S$  un « multifibré » ayant pour fibre, au-dessus de  $A^I$ , la boule  $E^p$  moins les hyperplans  $E_i^{p-1}$ ,  $i \in I$  (en position générale); au-dessus de la strate minimale

$$A^M = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m,$$

le fibré  $(Y - S) \mid A^M$  admet  $2^m$  sections, qui s'étendent de proche en proche à toutes les autres strates. On a donc  $2^m$  classes de détournement. Si les  $S_i$  admettent des équations globales  $s_i$ , d'extension complexe  $s_i$ , chacune de ces classes de détournement pourra être caractérisée par le système de signes

$$(\varepsilon_i = \text{sgn Im } s_i)_{i=1,2,\dots,m}$$

(ces signes sont en effet constants sur tout l'ensemble  $\sigma(Y)$ ).

### A.III.1.3.

Quand  $S$  est un ensemble analytique avec singularités, il est souvent impossible de détourner  $Y$ , même localement. Par exemple, prenons pour  $S$  la « parabole semi-cubique »

$$S = \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2 \mid y_1^3 - y_2^2 = 0 \}.$$

Soit  $\rho$  la rétraction évidente de  $\mathbb{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , qui identifie  $\mathbb{C}^2$  au fibré tangent à  $\mathbb{R}^2$ . Dans ce fibré tangent, l'ensemble  $S$  a l'allure représentée par le champ de vecteurs de la figure 39, et comprend donc, dans un voisinage arbitrairement petit de l'origine, des vecteurs arbitrairement petits de direction quelconque, ce qui montre clairement l'impossibilité de réaliser, au voisinage de l'origine, un champ de vecteurs arbitrairement petit évitant  $S$ .

<sup>(2)</sup> En réalité, il y a  $2^k$  sections, où  $k$  est le nombre des composantes connexes de  $S$ . On fera toujours implicitement les hypothèses de connexité propres à alléger les énoncés.



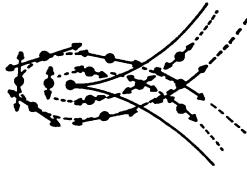


FIG. 39. — Points complexes d'une « parabole semi-cubique ».

A.III.2. Détournements compatibles avec une projection.

A.III.2.1.

En plus des données de A.III.1.2, donnons-nous sur  $Y$  une *fonction analytique réelle*

$$\pi : Y \rightarrow \mathbb{R}$$

de rang partout égal à 1 <sup>(3)</sup>, admettant une extension analytique complexe

$$\pi : Y \rightarrow \mathbb{C}.$$

Cette extension  $\pi$  aura donc un rang (complexe) égal à 1 sur tout  $Y$  (pour  $Y$  assez petit), donc un rang réel égal à 2; donc si  $r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  est la rétraction évidente, l'application  $r \circ \pi$  est de rang 1, de sorte que ses hypersurfaces de niveau

$$Y'_t = (r \circ \pi)^{-1}(t)$$

définissent un « feuilletage » de  $Y$ , et comme ce feuilletage est évidemment transverse à  $Y$  on pourra imposer à la rétraction  $\rho$  de laisser stable chaque « feuille »  $Y'_t$ , c'est-à-dire de rendre commutatif le diagramme <sup>(4)</sup>

$$(R) \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\rho} & Y \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{r} & \mathbb{R} \end{array}$$

Par « *détournement compatible avec la projection  $\pi$*  » on entendra un détournement  $\sigma$  de  $Y$  qui se projette suivant un détournement  $s$  de  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire la donnée d'un diagramme commutatif

$$(S) \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\sigma} & Y - S \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{s} & \mathbb{C} \end{array}$$

<sup>(3)</sup> Si de plus  $\pi$  est *propre*, ceci entraîne que  $Y$  est un fibré de base  $\mathbb{R}$  (donc un fibré trivial, au moins topologiquement, sinon analytiquement).

<sup>(4)</sup> Mais alors il faudra renoncer à laisser stables les variétés  $S_i$ , à moins qu'elles aussi ne soient transverses au feuilletage (ce sera le cas si la restriction de  $\pi$  à chaque strate  $A'$  est aussi de rang 1).

avec  $\rho \circ \sigma = \mathbf{r}_Y$  et  $r \circ s = \mathbf{r}_{\mathbb{R}}$ . Remarquons que grâce à ces deux dernières conditions, et à la commutativité du diagramme (R), le diagramme (S) sera commutatif si et seulement si la section  $\sigma$  prend ses valeurs dans  $Y_{s(\mathbb{R})} - S$  où

$$Y_{s(\mathbb{R})} = \pi^{-1}(s(\mathbb{R})).$$

LEMME : Si la restriction de  $\pi$  à chaque strate  $A^i$  est de rang 1, le détournement  $\sigma$  peut être réalisé de façon compatible avec la projection  $\pi$ , « sans détourner  $\mathbb{R}$  » (c'est-à-dire en prenant pour  $s$  l'inclusion de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ ). Si de plus la projection  $\pi$  est propre, on peut prendre pour  $s$  n'importe quel détournement suffisamment voisin de l'inclusion de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

PREUVE : Il suffit de montrer que la section  $\sigma$  peut prendre ses valeurs dans  $Y_{\mathbb{R}} - S$  [resp.  $Y_{s(\mathbb{R})} - S$ ]. On choisit  $Y$  assez petit pour que la restriction de  $\pi$  à chaque strate complexifiée  $A^i$  soit de rang 1. Alors les variétés  $S_i$  sont transverses aux « feuilles »  $Y'_i$ , de sorte qu'on peut imposer à la rétraction  $\rho$  de laisser stables également ces variétés  $S_i$ , comme dans A.III.1.2. Or l'espace  $Y_{\mathbb{R}}$  est lui aussi stable par  $\rho$  (vu la commutativité du diagramme (R)), et il coupe les  $S_i$  transversalement : c'est donc un sous-fibré de  $Y$ , obtenu en coupant la fibre  $S^p$  par un hyperplan équatorial  $E_{\mathbb{R}}^{p-1}$  en position générale avec les  $E_i^{p-1}$ ; donc  $Y_{\mathbb{R}} - E$  est un multifibré analogue au multifibré  $Y - S$  de A.III.1.2, n'en différant que par une dimension en moins dans la fibre, et l'on peut lui appliquer le raisonnement de A.III.1.2. Si maintenant on remplace  $Y_{\mathbb{R}}$  par  $Y_{s(\mathbb{R})}$ , cela revient à déformer l'hyperplan  $E_{\mathbb{R}}^{p-1}$  ci-dessus, et le raisonnement précédent s'applique encore *pourvu que la déformation soit assez petite* (il ne faudrait pas que l'hyperplan  $E_{\mathbb{R}}^{p-1}$  déformé cesse de rencontrer la boule  $E^p$ ) : or, si la projection  $\pi$  est propre, on peut choisir le détournement  $s$  assez proche de l'inclusion  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  pour que ce soit partout le cas.

#### A.III.2.2. Détournement au voisinage d'un point critique isolé <sup>(5)</sup>.

Le raisonnement du Lemme A.III.2.1 cesse d'être applicable au voisinage des points critiques de  $\pi | A^i$ . Mais on remarque que si l'on sait construire le détournement au voisinage de ces points critiques, celui-ci s'étendra automatiquement à tout  $Y$  par le raisonnement du Lemme A.III.2.1 (propriété d'extension des sections). Tout le problème est donc ramené à un voisinage  $V$  des points critiques. Nous nous limiterons au cas d'un point critique isolé <sup>(6)</sup> de l'application  $\pi | A^i$ . Plaçons ce point critique à l'origine d'un système de coordonnées locales  $y_1, y_2, \dots, y_p$  ( $y_j = y'_j + iy'_j$ ) telles que  $\pi$  soit la projection sur la dernière coordonnée  $y_p = t$ , et que  $\rho : V \rightarrow V$  soit la rétraction évidente

$$\rho(y_1, y_2, \dots, y_p) = (y'_1, y'_2, \dots, y'_p).$$

<sup>(5)</sup> Ce paragraphe prolonge une idée de Landshoff et Olive [19], elle-même version améliorée d'une idée de Stapp [34].

<sup>(6)</sup> On sait (M. Morse) que toute fonction n'a génériquement que des points critiques *quadratiques non dégénérés (donc isolés)*. Le caractère quadratique ne jouera pas de rôle ici.

Une section de cette rétraction s'identifie alors à un champ de vecteurs sur le voisinage  $V$ . Choisissons à l'origine un vecteur  $v$  transverse aux variétés  $S_i$  : si  $v$  est assez petit, le point complexe qu'il représente est en dehors de  $S$ , et cette propriété se conserve par transport parallèle de  $v$  dans un voisinage  $V$  assez petit (\*) : autrement dit, le champ de vecteurs constant égal à  $v$  définit un détournement, évidemment compatible (de par le choix de coordonnées) avec la projection  $\pi$  (fig. 40). Si  $s_i(y')$ ,  $i \in I$  sont les équations locales des  $S_i$ , les  $2^{|I|}$  classes de détournement définies au paragraphe A.III.1.2 pourront être caractérisées par les signes  $\varepsilon_i$  des différentielles  $ds_i(v)$ ,  $i \in I$ . Or, un point critique est caractérisé par  $dt | A^1 = 0$ , c'est-à-dire

$$(\alpha) \quad dt = \sum_{i \in I} \alpha_i ds_i.$$

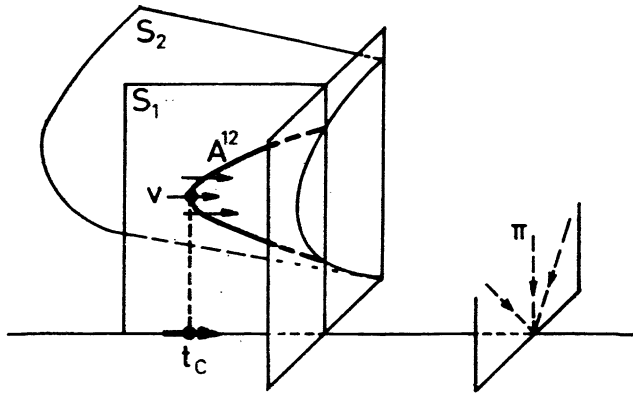


FIG. 40. — Détournement compatible avec une projection.

La condition pour que le vecteur  $v$  soit parallèle à la fibre s'écrit donc

$$dt(v) \equiv \sum_{i \in I} \alpha_i ds_i(v) = 0$$

et l'on voit facilement qu'on peut toujours choisir un tel vecteur  $v$ , sauf si  $\varepsilon_i \alpha_i \geq 0 \forall i \in I$  [resp.  $\leq 0 \forall i \in I$ ]; dans ce dernier cas,  $dt(v) > 0$  [resp.  $< 0$ ].

Bref, dans un voisinage  $V$  d'un point critique isolé de  $\pi | A^1$ , les  $2^{|I|}$  classes de détournements sont compatibles avec la projection  $\pi$ . Toutes peuvent être réalisées « sans détourner  $\mathbb{R}$  », sauf les deux caractérisées par  $\varepsilon_i \alpha_i \geq 0 \forall i \in I$  [resp.  $\varepsilon_i \alpha_i \leq 0 \forall i \in I$ ] lesquelles peuvent être réalisées « en détournant  $\mathbb{R}$  dans le demi-plan supérieur [resp. inférieur] ».

Tous les résultats de cette section peuvent donc être résumés ainsi :

PROPOSITION : Supposons que l'application analytique  $\pi : Y \rightarrow \mathbb{R}$  soit propre et de rang 1 (donc une fibration), et que sa restriction à chaque strate  $A^1$  n'ait que

(\*) Cette affirmation est vraie parce que  $S$  est une union de sous-variétés fermées : sinon, cf. le contre-exemple du paragraphe A.III.1.3.

des points critiques *isolés*, se projetant en des points *distincts* de  $\mathbb{R}$ . Alors, chaque classe de détournement peut être réalisée de façon compatible avec la projection  $\pi$ . De plus, les seuls points d'où l'on devra détourner  $\mathbb{R}$  seront les valeurs critiques de  $\pi|A^1$  provenant de points critiques où les signes  $\varepsilon_i$  ( $i \in I$ ) caractérisant la classe de détournement sont tous égaux [resp. tous opposés] aux signes de paramètres  $\alpha_i$  de l'équation ( $\alpha$ ) : près de ces valeurs critiques, on devra détourner  $\mathbb{R}$  dans le demi-plan supérieur [resp. inférieur].

### A.III.3. Analyticité d'une intégrale sur un cycle « presque réel ».

#### A.III.3.1.

Nous allons appliquer les résultats de la section A.III.2 à l'étude des propriétés analytiques, en fonction du paramètre  $t$ , de l'intégrale d'une forme différentielle  $\varphi_t$  de degré  $n = p - 1$ , régulière et fermée dans la « fibre »  $Y_t - S_t$ , dépendant analytiquement du paramètre  $t$ . On sait que moyennant quelques précautions <sup>(8)</sup> une telle intégrale reste une fonction analytique de  $t$  tant que le cycle d'intégration (supposé *compact*) peut varier continûment avec  $t$  dans  $Y_t - S_t$ . Or, à chaque *détournement compatible avec la projection*  $\pi$  (supposée *propre*) est évidemment associé un tel cycle « presque réel », variant continûment quand  $t$  parcourt « l'axe réel détourné »  $s(\mathbb{R})$  : plus exactement, à chaque *classe de détournement* est associée, quand  $t$  parcourt  $s(\mathbb{R})$ , la *classe d'homologie*  $h_t^1 \in H_n(Y_t - S_t)$ , image par le détournement  $\sigma$  de la classe fondamentale de la variété compacte, orientée,  $Y_{t'}$  ( $t' = r(t)$ ). On pourrait supposer, plus généralement, que l'intégrand  $\varphi_t$  est *multivalué*, c'est-à-dire qu'il est défini en fait sur un *revêtement*  $\widetilde{Y} - S$  de  $Y - S$ . Il faut alors, pour donner un sens à l'intégrale, choisir continûment sur la fibre détournée une « détermination » de  $\varphi_t$ , ce qui revient à choisir une façon de « remonter » de  $Y_t - S_t$  dans  $\widetilde{Y}_t - S_t$  le cycle d'intégration : c'est toujours possible si la fibre réelle  $Y_t$  est simplement connexe, car le détournement, étant un homéomorphisme, conserve la simple connexité.

Ainsi, la Proposition A.III.2.2 nous conduit immédiatement à énoncer la

PROPOSITION : L'intégrale  $J(t) = \int_{h_t} \varphi_t$  est une *fonction analytique du paramètre*

*réel*  $t$ , sauf pour les valeurs critiques mentionnées dans la Proposition A.III.2.2; de plus, les deux fonctions  $J(t)$  définies de part et d'autre d'une telle valeur critique sont *prolongement analytique l'une de l'autre* quand on franchit la valeur critique par un petit détour dans le demi-plan complexe supérieur (cas des  $\varepsilon_i \alpha_i \geq 0$ ) ou inférieur (cas des  $\varepsilon_i \alpha_i \leq 0$ ).

<sup>(8)</sup> Il suffira par exemple de faire l'une des deux hypothèses suivantes :

1°  $Y$  est un *produit de variétés analytiques*  $Y = X \times C$ ,  $\pi$  étant la projection canonique;

2°  $Y$  est une *sous-variété analytique fermée* d'un tel produit, de codimension 1 [resp. une intersection de telles sous-variétés en position générale],  $\pi$  étant la restriction de la projection canonique; de plus,  $\varphi_t$  est le *résidu* [resp. le *résidu itéré*] d'une forme différentielle fermée dépendant analytiquement de  $t$ .

Pour plus de détails, cf. [22], ou [29], Chap. VI.

## A.III.3.2. Remarque.

La Proposition A.III.2.2 supposait que la projection  $\pi$  était de rang 1, et nous oblige donc à *exclure les valeurs critiques que pourrait avoir cette projection  $\pi$  elle-même*. Ces valeurs critiques ont ceci de particulier que les fibres réelles  $Y_t$ , définies de part et d'autre ont des « types d'homotopie » différents (théorie de Morse [25]). On ne sera donc pas très étonné si ces valeurs critiques sont *infranchissables* du point de vue des intégrales « presque réelles », c'est-à-dire si les fibres réelles définies de part et d'autre ne sont reliées par aucun détour complexe (fig. 41). Pour préciser cette idée, considérons un point critique quadratique non dégénéré,

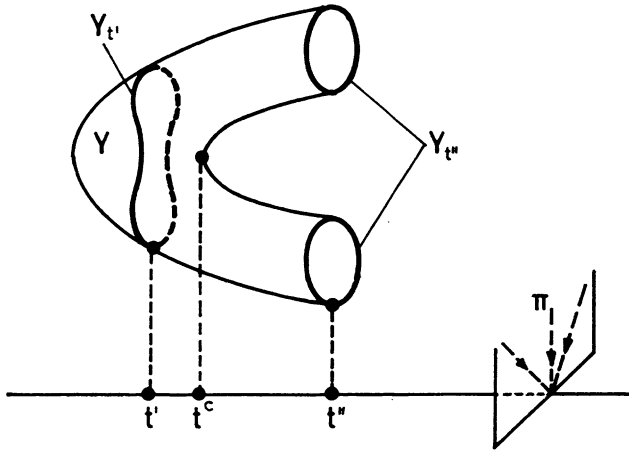


FIG. 41. — Point critique d'indice impair :  
les fibres réelles  $Y_{t'}$  et  $Y_{t''}$  ne sont reliées par aucun détour complexe.

d'indice  $k$ . Oubliant la présence des sous-variétés  $S_i$ , on peut se poser le problème de relier par un petit détour complexe les classes d'homologie  $h_t \in H_n(Y_t)$  définies par les fibres réelles de part et d'autre de la valeur critique. Ce problème est évidemment invariant par conjugaison complexe : si un tel détour existe, le détour complexe conjugué fait également l'affaire. Par conséquent, les classes d'homologie  $h_t$  doivent être *invariantes par un tour complet autour de la valeur critique*, ce qui n'est possible (Théorème de Picard-Lefschetz) que si leur « indice d'intersection » avec le « cycle évanouissant » est nul. Cet indice d'intersection est facile à calculer puisqu'on a un modèle local explicite pour  $Y_t$  au voisinage du point critique : on trouve que pour  $t > t_c$  (la valeur critique), cet indice d'intersection vaut 0 ou  $\pm 2$  suivant que le « co-indice »  $p - k$  du point critique est pair ou impair ; pour  $t < t_c$ , il suffit évidemment de remplacer le co-indice par l'indice. Par conséquent, si *l'un au moins* des deux nombres  $k$ ,  $p - k$  est *impair*, on est *certain* que les deux classes d'homologie  $h_t$  ( $t > t_c$  et  $t < t_c$ ) ne sont pas reliées par un petit détour complexe. Si les deux nombres  $k$  et  $p - k$  sont pairs, ce n'est plus certain, et je pense qu'on ne peut rien conclure sans une étude *globale* de l'homologie.

### A.III.3.3. Discontinuités de l'intégrale.

Nous nous proposons d'étudier le type de singularité de l'intégrale en un point  $t_c$ , projection d'un *point critique quadratique non dégénéré* de la strate  $A^I$ , non critique pour les autres variétés  $\bar{A}^J = \bigcap_{i \in J} S_i$ ,  $J \neq I$  : c'est la situation étudiée

dans [29] sous le nom de *pincement simple*. Rappelons quelques conclusions de [29] : la fonction  $J(t)$  se prolonge analytiquement le long de tout chemin voisin de la valeur critique  $t_c$  et évitant celle-ci; de plus, si l'intégrand n'a que des *singularités polaires*, le point  $t_c$  est une singularité de type

*logarithmique* si  $\dim A_t^I$  est impaire,

*algébrique d'ordre 2* si  $\dim A_t^I$  est paire,

*polaire* si  $\dim A_t^I = -1$ ,

où  $\dim A_t^I$  désigne la dimension de la strate-fibre « générique », c'est-à-dire ici où nous avons choisi un espace de paramètres à une dimension :

$$\dim A_t^I = \dim A^I - 1.$$

Les *formules de discontinuité* de [29] deviennent particulièrement simples dans le cas du *point critique d'indice zéro* <sup>(9)</sup>, c'est-à-dire le cas où la forme quadratique représentant la fonction  $\pi|_{A^I}$  près du point critique est *définie positive*. Pour  $t > t_c$ , désignons par  $J^+(t)$  [resp.  $J^-(t)$ ] la fonction obtenue par prolongement analytique dans le demi-plan supérieur [resp. inférieur] de  $J(t)$ ,  $t < t_c$  (fig. 42).

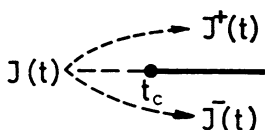


FIG. 42. — Prolongements analytiques de la fonction  $J(t)$ .

Il s'agit de calculer  $J^+(t) - J^-(t)$ . Ce qui fait l'intérêt du cas de « l'indice zéro », c'est que la *cellule évanouissante*  $e_{it}$  de [29] peut être prise simplement comme la cellule *réelle* bordée par les variétés  $S_{it} \subset Y_i$ ,  $i \in I$  ([29], fig. V.2); on la munira de l'orientation choisie pour  $Y_i$ . D'autre part, pour *sphère évanouissante*  $e_t^I$  on peut prendre la sphère réelle  $A_t^I = \bigcap_{i \in I} S_{it}$ , avec une convention d'orientation

qui sera précisée plus loin.

Ceci posé, la discontinuité de l'intégrale, lorsque l'intégrand est *monovalué*, est donnée par les formules

(Disc. 1)<sup>+</sup>

$$J^+(t) - J^-(t) = (2\pi i)^\mu \int_{e_t^I} \text{Res}^I \varphi_t$$

<sup>(9)</sup> C'est justement le cas qui nous intéresse le plus en pratique : cf. I.2.5.

valable dans le cas  $\varepsilon_i \alpha_i \geq 0$ , et

$$(Disc. 1) \quad J^+(t) - J^-(t) = (-)^{\mu-1} (2\pi i)^\mu \int_{e_t^1} \text{Res}^1 \varphi_t$$

valable dans le cas  $\varepsilon_i \alpha_i \leq 0$ .

Dans ces formules,  $\text{Res}^1 \varphi_t = \text{Res}_{i_1} \text{Res}_{i_2} \dots \text{Res}_{i_\mu} \varphi_t$  est le *résidu itéré* de la forme  $\varphi_t$  par rapport aux variétés  $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_\mu}$ ,  $\{i_1, i_2, \dots, i_\mu\} = I$ . L'orientation de la *sphère évanouissante*  $e_t^1$  se déduit de celle de la cellule évanouissante (donnée plus haut) par la formule de « bord itéré » :

$$e_t^1 = \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_\mu} e_{1t}$$

(en faisant agir les opérateurs « bord » dans l'ordre choisi pour les opérateurs « résidu »).

PREUVE de (Disc. 1) : Il suffit, comme dans [29], d'appliquer la formule de Picard-Lefschetz et la formule des résidus de Leray. La classe  $h_t$  peut être représentée localement (avec les conventions de A.III.2.2) par un champ de vecteurs transverse aux  $S_{it}$ , donc transverse au bord de la cellule  $e_{1t}$ , et l'on voit facilement que cette cellule constitue une *puits* ou une *source* du champ de vecteurs selon que  $\varepsilon_i \alpha_i \geq 0 \forall i$  ou  $\leq 0 \forall i$  (ce n'est ni un puits ni une source si les  $\varepsilon_i \alpha_i$  n'ont pas tous le même signe). On trouve donc pour l'indice d'intersection  $\langle e_{1t} | h_t \rangle$  (par un raisonnement analogue à celui de [29], Chap. II, Exemple 7.4) les valeurs suivantes :

$$\langle e_{1t} | h_t \rangle = \begin{cases} (-)^{\frac{n(n-1)}{2}} & \text{si } \varepsilon_i \alpha_i \geq 0 \quad \forall i \in I \\ (-)^{\frac{n(n+1)}{2}} & \text{si } \varepsilon_i \alpha_i \leq 0 \quad \forall i \in I \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à reporter ces valeurs dans la formule de Picard-Lefschetz. Dans le cas  $\varepsilon_i \alpha_i \leq 0 \forall i$ , il faut bien prendre garde que l'on « part » de l'intégrale  $J^-(t)$  (c'est en effet elle qui est définie sur le cycle « presque réel »  $h_t$ ), et que  $J^+(t)$  s'en déduit par un tour dans le sens *négalif* autour de  $t_c$  : il faut donc appliquer la formule de Picard-Lefschetz « à l'envers ».

REMARQUE : Lorsqu'on a affaire à *une seule* sous-variété  $S$  (cas  $\mu = 1$ ),  $S_t$  est *vide* pour  $t < t_c$  (tout au moins dans la partie de la fibre voisine du point critique);  $J(t)$  est donc définie pour  $t < t_c$  par l'intégrale sur la fibre  $Y_t$  non détournée, tandis que  $J^+(t)$  et  $J^-(t)$  (pour  $t > t_c$ ) sont définies par les deux détournements possibles de cette fibre; la formule (Disc. 1) est alors facile à démontrer directement, en comparant ces deux détournements. La situation n'est pas si simple quand  $\mu > 1$ , car seule *l'une* des deux fonctions  $J^\pm(t)$  est définie par un détournement de  $Y_t$  (cf. Proposition A.III.3.1). La formule (Disc. 1) nous fournit alors des renseignements intéressants sur *l'autre* fonction : en effet, comme le cycle d'intégration  $e_t^1$  est une variété *réelle*, on peut répéter sur le prolongement analytique de l'intégrale figurant dans (Disc. 1) les raisonnements faits pour l'intégrale  $J(t)$ .

Lorsque l'intégrand est multivalué, on doit se placer dans un « revêtement »  $\widetilde{Y - S}$  de  $Y - S$ . Si ce revêtement est « régulier » (exemple : le revêtement universel), on sait que le groupe fondamental  $\pi_1(Y - S)$  agit sur lui comme un *groupe d'opérateurs à droite*. On notera  $\tilde{y} \cdot \omega$  le point de  $\widetilde{Y - S}$  transformé du point  $\tilde{y}$  par l'action du lacet  $\omega \in \pi_1(Y - S)$ . Si  $\varphi$  est une fonction sur  $\widetilde{Y - S}$ , on notera  $\omega_* \varphi$  la fonction transformée, définie par

$$(\omega_* \varphi)(\tilde{y}) = \varphi(\tilde{y} \cdot \omega) \quad (10)$$

Puisque les variétés  $S_i$  se coupent en position générale, le groupe fondamental local au voisinage du point critique est simplement le *groupe libre commutatif* à  $\mu$  générateurs  $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_\mu}$  où  $\omega_i$  désigne la classe d'un « petit lacet positif » autour de  $S_i$ . Ceci posé, la discontinuité de l'intégrale, lorsque l'intégrand n'est « pas trop singulier » <sup>(11)</sup> sur  $S_{i_1}, \dots, S_{i_\mu}$ , est donnée par les formules

(Disc. 2)<sup>+</sup>

$$J^+(t) - J^-(t) = \int_{e_{1t}} \text{Disc}^1 \varphi_t$$

valable dans le cas  $\varepsilon_i \alpha_i \geq 0$ , et

(Disc. 2)<sup>-</sup>

$$J^+(t) - J^-(t) = (-)^{\mu-1} \int_{e_{1t}} (\omega_{i_1}^{-1} \omega_{i_2}^{-1} \dots \omega_{i_\mu}^{-1})_* \text{Disc}^1 \varphi_t$$

valable dans le cas  $\varepsilon_i \alpha_i \leq 0$ .

Dans ces formules,  $\text{Disc}^1 \varphi_t$  est la *discontinuité itérée* de la forme  $\varphi_t$  par rapport aux sous-variétés  $S_i, i \in I$ , définie par

$$\text{Disc}^1 \varphi_t = \left( \prod_{i \in I} (1 - \omega_{i*}) \right) \varphi_t.$$

$e_{1t}$  est la « cellule évanouissante » réelle de tout à l'heure, « remontée » dans  $\widetilde{Y_t - S_t}$  de la façon suivante : en dehors d'un voisinage de son bord, cette cellule peut être considérée comme un morceau de la fibre détournée; puisqu'il a fallu « remonter » dans  $\widetilde{Y_t - S_t}$  la fibre détournée pour définir  $h_t$ , on peut convenir de remonter la cellule évanouissante *de la même façon*.

<sup>(10)</sup> Dans [28] et [29], l'opérateur « à droite »  $\cdot \omega$  était considéré comme un opérateur à gauche, tandis que l'opérateur  $\omega_*$  était noté  $\omega^*$ . Bien que tout cela n'ait pas d'importance ici où le groupe étudié est commutatif, notre nouvelle notation est plus logique. En particulier, la notation  $\omega^*$  était fâcheuse, pouvant faire croire au caractère « contravariant » du « foncteur »  $\omega \rightsquigarrow \omega^*$ .

<sup>(11)</sup> Pour plus de détails, cf. [28] [29]. L'idée est de permettre au cycle d'intégration de toucher  $S_{i_1}, \dots, S_{i_\mu}$  sans que la convergence de l'intégrale en soit affectée.



**PREUVE de (Disc. 2) :** La « convention de remontée » précédente peut être caractérisée comme *la seule* qui donne dans  $\widetilde{Y}_t - S_t$  un indice d'intersection  $\langle e_{it} | h_t \rangle$  non nul. Les valeurs de cet indice d'intersection sont alors les mêmes que dans le cas non ramifié. Il ne reste plus qu'à appliquer la formule (Disc. 2) de [29] (Chap. VII).

**REMARQUE :** Exactement comme les formules (Disc. 1), les formules (Disc. 2) sont faciles à démontrer directement *dans le cas*  $\mu = 1$ , en comparant les deux détournements qui définissent  $J^+(t)$  et  $J^-(t)$ . Il faut alors prendre garde que la « convention de remontée » précédente donne un résultat différent suivant qu'on se réfère à l'un ou l'autre de ces détournements. Cela explique pourquoi les formules (Disc. 2)<sup>+</sup> et (Disc. 2)<sup>-</sup>, qui devraient évidemment donner le même résultat, diffèrent *formellement* par  $\omega_*^{-1}$ .

#### A.III.3.4. Remarque : discontinuités « au sens des distributions ».

Au lieu de définir les discontinuités comme nous venons de le faire au paragraphe A.III.3.3, nous aurions pu les définir comme *distributions* : ainsi par exemple  $\text{Disc } J(t) = J^+(t) - J^-(t)$  peut être considérée comme une *distribution* sur l'axe réel, en définissant  $J^\pm(t)$  comme la distribution « valeur au bord » de la fonction analytique  $J(t)$  suivant un détournement convenable. Avec cette convention, une singularité *polaire* de la fonction analytique  $J(t)$  se traduit par une discontinuité concentrée au point singulier  $t_c$ , pouvant s'écrire (dans le cas d'un pôle simple)

$$\text{Disc } J(t) = \delta(t - t_c) \text{ Res } J(t).$$

De même, la discontinuité  $\text{Disc}_i \varphi_t$  apparaissant dans la formule (Disc. 2) peut être définie comme distribution, et si  $\varphi_t$  a une singularité polaire sur  $S_i$ , la distribution  $\text{Disc}_i \varphi_t$  est concentrée sur  $S_i$  et égale au résidu de  $\varphi_t$ . *Ce point de vue a l'avantage de faire de la formule (Disc. 1) un simple cas particulier de (Disc. 2).*

---

## APPENDICE IV

REMARQUE SUR LE GROUPE FONDAMENTAL  
D'UN COMPLÉMENT D'ENSEMBLE ALGÈBRE (1)

THÉORÈME : Soit  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$  une union d'ensembles algébriques irréductibles de codimension 1, donnés dans  $\mathbb{C}^n$  par l'annulation de polynômes irréductibles  $s_1, s_2, \dots, s_m$ . Supposons remplie la condition suivante : en dehors d'un sous-ensemble algébrique de codimension  $\geq 3$ , les compactifiés dans  $\mathbb{C}P^n$  de  $S_1, S_2, \dots, S_m$  sont des variétés en position générale les unes par rapport aux autres et par rapport à « l'hyperplan de l'infini ». Alors le groupe fondamental  $\pi_1(\mathbb{C}^n - S)$  est libre commutatif à  $m$  générateurs.

PREUVE : Coupons  $S$  par un  $p$ -plan générique  $\mathbb{C}^p \subset \mathbb{C}^n$  ( $1 \leq p < n$ ). L'inclusion  $j^p : \mathbb{C}^p - S \rightarrow \mathbb{C}^n - S$  induit un homomorphisme

$$j_*^p : \pi_1(\mathbb{C}^p - S) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^n - S).$$

1<sup>er</sup> pas : surjectivité de  $j_*^p$ , pour tout  $p \geq 1$ .

Il s'agit de montrer que tout lacet  $\lambda$  de  $\mathbb{C}^n - S$  est homotope à un lacet de  $\mathbb{C}^p - S$ . Dans  $\mathbb{C}^n$ ,  $\lambda$  est homotope à zéro, par une homotopie linéaire évidente. Soit  $\Lambda : \square \rightarrow \mathbb{C}^n$  l'application du carré dans  $\mathbb{C}^n$  que définit cette homotopie. En déformant un peu  $\lambda$ , on peut toujours se ramener au cas où  $\Lambda$  est transverse sur  $S$ .  $\Lambda^{-1}(S)$  consiste alors en un nombre fini de points intérieurs au carré, images réciproques de points « ordinaires » de  $S$ . En remplaçant le pourtour du carré par une succession de « lacets rectilignes » entourant chaque point de  $\Lambda^{-1}(S)$  (fig. 43), et en envoyant tout cela dans  $\mathbb{C}^n$  par l'application  $\Lambda$ , on voit que  $\lambda$  est homotope dans  $\mathbb{C}^n - S$  à une succession de lacets rectilignes entourant des points ordinaires de  $S$  (2). Or chacun des segments de droites correspondants est contenu dans un  $\mathbb{C}^1$ , qu'on peut supposer transverse à  $S$  (en le bougeant légèrement s'il y a lieu). Et comme toutes les sections génériques sont isotopes, tous ces lacets peuvent être amenés dans une même section générique  $\mathbb{C}^1$ , ce qui prouve la surjectivité pour  $p = 1$ , donc *a fortiori* pour  $p$  quelconque.

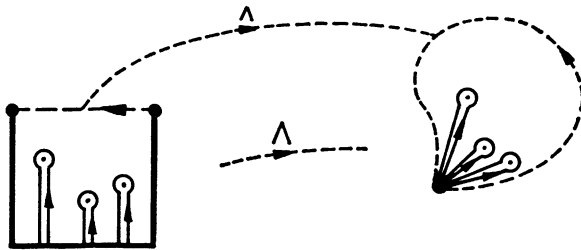


FIG. 43. — Décomposition d'un lacet en « lacets rectilignes ».

(1) L'idée de cet Appendice, ainsi que la référence à Zariski, m'ont été communiquées par le Professeur R. Thom.

(2) Comparer à [29], Chap. V, Proposition 1.2.

2<sup>e</sup> pas :  $\pi_1(\mathbb{C}^2 - S) = \mathbb{Z}^m$  (Zariski).

Considérons une section générique par un  $\mathbb{C}^2$ . Dans cette section, les  $S_i$  sont des courbes irréductibles sans singularités, en position générale les unes par rapport aux autres et par rapport à la droite de l'infini. Il résulte alors d'un théorème de Zariski [40] (cité par Serre [33]) que le groupe  $\pi_1(\mathbb{C}^2 - S)$  est libre commutatif à  $m$  générateurs. On en a une base canonique en considérant  $m$  lacets rectilignes tournant autour d'un point de  $S_1, S_2, \dots, S_m$  respectivement dans des sections génériques  $\mathbb{C}^1$ .

3<sup>e</sup> pas : injectivité de  $j_*^2$ , dans les conditions du Théorème.

Cette injectivité se démontre en fabriquant un homomorphisme  $s_*$  qui composé avec  $j_*^2$  soit un isomorphisme. En fait,  $s_*$  est simplement l'homomorphisme induit par l'application  $s : \mathbb{C}^n - S \rightarrow \mathbb{C}^{*m}$  qui associe à tout point  $x \in \mathbb{C}^n - S$  les  $m$  nombres complexes différents de zéro  $s_1(x), s_2(x), \dots, s_m(x)$ . Le fait que l'homomorphisme composé

$$s_* \circ j_*^2 : \pi_1(\mathbb{C}^2 - S) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^{*m})$$

$$\begin{array}{ccc} & \parallel & \parallel \\ & \mathbb{Z}^m & \mathbb{Z}^m \end{array}$$

soit un isomorphisme résulte simplement de la description donnée ci-dessus de la base canonique de  $\pi_1(\mathbb{C}^2 - S)$ , et du fait que les fonctions  $s_i$  sont des équations *irréductibles* des  $S_i$  non seulement dans  $\mathbb{C}^n$ , mais aussi, localement, dans toute section générique.

## REMERCIEMENTS

Ce travail sera présenté comme thèse de doctorat, et je remercie le Commissariat à l'Énergie Atomique, ainsi que l'Organisation Européenne pour la Recherche Nucléaire (C. E. R. N.), qui m'ont fourni les moyens de le réaliser. M. le Professeur J. Yvon a bien voulu patronner cette thèse, et je lui en suis vivement reconnaissant, ainsi que pour ses précieux conseils qui ont profondément orienté ma rédaction. Je remercie les Professeurs L. Van Hove et J. Prentki pour leur hospitalité au C. E. R. N., où toutes facilités m'ont été accordées pour terminer ce travail et en assurer la diffusion; je remercie d'autre part les Professeurs C. Bloch et A. Messiah pour l'atmosphère stimulante du Service de Physique Théorique de Saclay, où ce travail a été commencé : c'est là en particulier que le sujet m'en a été suggéré, lors d'une discussion avec MM. M. Froissart, D. Iagolnitzer et D. Zwanziger.

Pour tous les développements mathématiques, j'ai bénéficié de l'aide irremplaçable du Professeur R. Thom qui, non content de me fournir les idées essentielles, m'a souvent tiré d'embarras pour maintes questions de

détail. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude, ainsi qu'à MM. D. Fotiadi et J. Lascoux dont les nombreuses suggestions et l'intérêt constant ont été une aide inappréciable.

Je ne saurais oublier, tant pour leur soutien moral que pour des remarques utiles, les Professeurs R. Hermann, V. Glaser, F. Lurçat, A. Martin, ainsi que MM. D. Bessis, J. Bros, R. Stora, D. Williams. Je remercie également le Professeur J. C. Polkinghorne et ses collaborateurs pour une agréable visite à Cambridge, amorce d'un fructueux échange de correspondance avec le Dr. D. I. Olive. Enfin, je remercie le Professeur A. Haeffliger pour l'accueil sympathique que j'ai toujours trouvé à l'Institut de Mathématiques de l'Université de Genève.

## RÉFÉRENCES

- [1] C. BERGE, *Théorie des Graphes*, Paris, Dunod, 1958 (Collection Universitaire de Mathématiques).
- [2] M. J. W. BLOXHAM, On certain physical-region singularities in S matrix theory (Cambridge preprint, 1965).
- [3] S. COLEMAN and R. E. NORTON, *Nuovo Cimento*, t. 38, 1965, p. 438.
- [4] R. E. CUTKOSKY, *J. Math. Phys.*, t. 1, 1960, p. 429.
- [5] C. EHRESMANN, *Catégories et Structures* (Travaux et recherches mathématiques), Paris, Dunod, 1965.
- [6] R. P. FEYNMAN, *Revs. Modern Phys.*, t. 20, 1948, p. 367.
- [7] D. FOTIADI, M. FROISSART, J. LASCoux and F. PHAM, *Topology*, t. 4, 1965, p. 159.
- [8] M. L. GOLDBERGER and K. M. WATSON, *Phys. Rev.*, t. 127, 1962, p. 2284.
- [9] J. GUNSON, *J. Math. Phys.*, t. 6, 1965, p. 827, 845, 852.
- [10] R. HAAG, *Phys. Rev.*, t. 112, 1958, p. 669.
- [11] W. HEISENBERG, *Zeit. für Physik*, t. 120, 1943, p. 513.
- [12] K. HEPP, *Helv. Phys. Acta*, t. 37, 1964, p. 659.
- [13] K. HEPP, *Commun. Math. Phys.*, t. 1, 1965, p. 95.
- [14] K. HEPP, *J. Math. Phys.*, t. 6, 1965, p. 1762.
- [15] D. IAGOLNITZER, *J. Math. Phys.*, t. 6, 1965, p. 1576.
- [16] D. IAGOLNITZER, S matrix theory and phenomenological space-time description (Saclay preprint, 1965).
- [17] RES JOST, *The general theory of quantized fields*. *Am. Math. Society*, 1965.
- [18] L. D. LANDAU, *Nuclear Physics*, t. 13, 1959, p. 181.
- [19] P. V. LANDSHOFF and D. I. OLIVE, *J. Math. Phys.*, t. 7, 1966, p. 1464.
- [20] P. V. LANDSHOFF, D. I. OLIVE and J. C. POLKINGHORNE, *J. Math. phys.*, t. 7, 1966, p. 1600.
- [21] P. V. LANDSHOFF, D. I. OLIVE and J. C. POLKINGHORNE, *The hierarchical principle in perturbation theory* (Cambridge preprint, 1965).
- [22] J. LERAY, *Bull. Soc. Math. France*, t. 87, 1959, p. 81.
- [23] J. LERAY, *Bull. Soc. Math. France*, t. 90, 1962, p. 39.

- [24] S. MACLANE, *Homology*. Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 114).
- [25] J. MILNOR, *Morse theory (Ann. of Math. Studies, n° 51)*, Princeton Univ. Press, 1963.
- [26] D. I. OLIVE, *Phys. Rev.*, t. 135B, 1964, p. 745.
- [27] D. I. OLIVE, *Nuovo Cimento*, t. 37, 1965, p. 1422.
- [28] F. PHAM, *Bull. Soc. Math. France*, t. 93, 1965, p. 333.
- [29] F. PHAM, *Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau* (Mémoire des Sciences Mathématiques), Gauthier-Villars (*à paraître*).
- [30] J. C. POLKINGHORNE, *Nuovo Cimento*, t. 23, 1962, p. 360; t. 25, 1962, p. 901.
- [31] D. RUELLE, *Helv. Phys. Acta*, t. 35, 1962, p. 147.
- [32] A. SARD, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 48, 1942, p. 883.
- [33] J. P. SERRE, *In Séminaire Bourbaki*, t. 12, 1959-1960, Exposé 204.
- [34] H. P. STAPP, *Phys. Rev.*, t. 125, 1962, p. 2139.
- [35] H. P. STAPP, *Lectures on Analytic S matrix theory*. Matscience Report 26, The Institute of Mathematical Sciences, Madras, 1964.
- [36] R. F. STREATER and A. S. WIGHTMAN, *PCT, Spin and statistics, and all that*, Benjamin, 1964.
- [37] R. THOM, *Ann. Inst. Fourier*, t. 6, 1956, p. 43.
- [38] G. WANDERS, *Helv. Phys. Acta*, t. 38, 1965, p. 142.
- [39] E. H. WICHMANN and J. H. CRICHTON, *Phys. Rev.*, t. 132, 1963, p. 2788.
- [40] O. ZARISKI, *Algebraic Surfaces*, New York, Chelsea publishing company, 1948 (*Ergebnisse der Mathematik*, Band 3, 5).

1) — Page 160, dans la « *Remarque sur la discordance* », l'affirmation que la branche inefficace du lieu de Landau est de type  $S_1^+$  n'est exacte que dans le cas correspondant à la fig. 15 b. Dans le cas général (fig. 15 a), on a affaire à une situation de type  $S_1$  avec un indice transverse égal à  $n - p + 1$  : pour le voir, il suffit d'examiner le modèle local donné dans A. II. 4.1. (avec  $f$  de type  $S_1^+$ ).

2) — *A propos de l'Appendice IV*, j'ai appris ultérieurement du Professeur O. Zariski que le caractère d'isomorphisme de  $j_*^2$  était un phénomène tout à fait général, vrai pour tout ensemble algébrique  $S$  : cf. O. ZARISKI, *Ann. of Math.*, t. 38, 1937, p. 131.

Directeur de la publication : P. GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL Éd. n° 1491a.

IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, n° 5429. 4-1967.