



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Nicolas THOLOZAN

Sur la complétude de certaines variétés pseudo-riemanniennes localement symétriques

Tome 65, n° 5 (2015), p. 1921-1952.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2015__65_5_1921_0



© Association des Annales de l'institut Fourier, 2015,

Certains droits réservés.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier »
(<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales
d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>).

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

SUR LA COMPLÉTUDE DE CERTAINES VARIÉTÉS PSEUDO-RIEMANNIENNES LOCALEMENT SYMÉTRIQUES

par Nicolas THOLOZAN (*)

RÉSUMÉ. — Nous prouvons que certains espaces pseudo-riemanniens symétriques n'admettent pas d'ouvert strict divisible par l'action d'un groupe discret d'isométries. Autrement dit, si une variété pseudo-riemannienne compacte est localement isométrique à un tel espace, et si son application développante est injective, alors la variété est géodésiquement complète, et donc isométrique à un quotient de l'espace modèle tout entier. Ces résultats étendent, sous une hypothèse supplémentaire (l'injectivité de l'application développante), les théorèmes de Carrière et Klingler selon lesquels les variétés lorentziennes compactes de courbure constante sont géodésiquement complètes.

ABSTRACT. — We prove that certain pseudo-Riemannian symmetric spaces do not admit a proper domain which is divisible by the action of a discrete group of isometries. In other words, if a closed pseudo-Riemannian manifold is locally isometric to such a model, and if its developing map is injective, then the manifold is actually geodesically complete, and therefore isometric to a quotient of the whole model space. Those results extend, under an additional assumption (the injectivity of the developing map), the theorems of Carrière and Klingler stating that closed Lorentz manifolds of constant curvature are geodesically complete.

Introduction

Soit X une variété lisse munie d'une action fidèle et transitive d'un groupe de Lie G de dimension finie. Une variété M est dite *localement modelée* sur X lorsqu'elle est munie d'un atlas de cartes à valeurs dans X

Mots-clés: Variété pseudo-riemannienne, (G, X) -structure, action proprement discontinue.

Classification math.: 53C50, 53C35, 22E40.

(*) L'auteur tient à remercier son directeur de thèse, Sorin Dumitrescu, ainsi que Fanny Kassel, Yves Benoist et Charles Frances pour les discussions fructueuses sans lesquelles ce travail n'aurait pas vu le jour.

dont les changements de cartes sont des restrictions de transformations de G . On dit aussi que M est munie d'une (G, X) -structure, ou encore que M est une (G, X) -variété, selon la terminologie de Thurston (voir section 1). Certaines (G, X) -variétés apparaissent naturellement lorsque M possède une structure géométrique rigide localement homogène. Par exemple, une variété munie d'une métrique riemannienne plate est localement modélée sur l'espace euclidien. Il existe de même une notion de métrique lorentzienne de courbure nulle (voir par exemple [31], p. 63), et les variétés munies de telles métriques sont localement modélées sur l'espace de Minkovski $\mathbb{R}^{d-1,1}$, c'est-à-dire \mathbb{R}^d muni d'une métrique de signature $(d-1, 1)$ invariante par translations.

Certaines (G, X) -structures s'obtiennent en quotientant un ouvert U du modèle X par un sous-groupe discret de G agissant librement et proprement discontinûment sur U . De telles structures sont dites *kleiniennes* (voir section 1.3). Dans le cas particulier où le domaine U est le modèle X tout entier, la (G, X) -structure est dite *complète*. Lorsque G préserve une métrique riemannienne sur X , il découle du théorème de Hopf-Rinow que toutes les (G, X) -variétés compactes sont complètes (section 1.2). Mais ce résultat n'est plus vrai pour d'autres espaces homogènes non riemanniens. Ainsi, en conséquence du théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe, toute surface de Riemann peut être munie d'une structure projective complexe (i.e. une $(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}), \mathbb{C}\mathbb{P}^1)$ -structure) kleinienne compatible avec sa structure complexe. Toutefois, seule la sphère de Riemann possède une structure complète.

La question de savoir sous quelles hypothèses les (G, X) -variétés compactes sont complètes est une question ouverte. En particulier, dès que G préserve une forme volume sur X , on ne connaît aucun exemple de (G, X) -variété compacte non complète. La conjecture la plus célèbre dans ce domaine est la conjecture de Markus, selon laquelle toute variété affine compacte possédant une forme volume parallèle est complète (voir section 2).

La conjecture de Markus a été prouvée par Carrière dans le cas particulier où la variété affine possède une forme quadratique de signature $(d-1, 1)$ parallèle; autrement dit, pour les variétés lorentziennes plates [4]. Nous l'étendons ici aux variétés lorentz-hermitiennes plates, avec toutefois une hypothèse supplémentaire.

THÉORÈME 1. — *Toutes les $(\mathrm{U}(d-1, 1) \times \mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$ -variétés kleiniennes compactes sont complètes.*

(Le groupe $U(d-1, 1) \times \mathbb{C}^d$ désigne le groupe des transformations affines complexes de \mathbb{C}^d dont la partie linéaire préserve une forme sesquilinéaire de signature réelle $(2d-2, 2)$.)

Le théorème de Carrière a été généralisé dans une autre direction par Klingler dans [21]. Ce dernier prouve que les variétés lorentziennes compactes de courbure constante sont complètes. Pour ces variétés, la complétude de la (G, X) -structure est équivalente à la complétude du flot géodésique de la métrique (voir section 1.2). On peut plus généralement conjecturer que toutes les variétés pseudo-riemanniennes compactes de courbure constante, et même que toutes les variétés pseudo-riemanniennes compactes localement symétriques (au sens de Cartan, voir section 1.2 ou [31], p.57) sont géodésiquement complètes.

Dans [5], Dumitrescu et Zeghib s'intéressent aux variétés complexes compactes de dimension 3 munies de métriques riemanniennes holomorphes (i.e. de sections holomorphes partout non dégénérées du fibré des formes quadratiques complexes sur le fibré tangent). Ils prouvent notamment que de telles variétés possèdent toujours une métrique riemannienne holomorphe de courbure constante, ramenant la classification de ces variétés à l'étude de deux types de structures localement homogènes. Les premières (celles de courbure nulle) sont localement modelées sur \mathbb{C}^3 , muni de l'action affine complexe du groupe $SO(3, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3$. Quant aux secondes (celles de courbure constante non nulle), elles sont localement modelées sur $PSL(2, \mathbb{C})$ muni de l'action de $PSL(2, \mathbb{C}) \times PSL(2, \mathbb{C})$ par translations à gauche et à droite. Il n'existe malheureusement pas d'analogue holomorphe des théorèmes de Carrière et Klingler, ce qui constitue le principal obstacle à une classification topologique des 3-variétés complexes compactes possédant des métriques riemanniennes holomorphes. Nous prouvons toutefois ici deux résultats qui étendent partiellement les théorèmes de Carrière et Klingler au contexte holomorphe.

THÉORÈME 2. — *Toutes les $(SO(3, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ -variétés kleiniennees compactes sont complètes.*

THÉORÈME 3. — *Soit L un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1, muni de l'action de $L \times L$ donnée par*

$$(g, h) \cdot x = gxh^{-1}.$$

Alors toutes les $(L \times L, L)$ -variétés kleiniennees compactes sont complètes.

Le théorème 3 s'applique en particulier à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Dans sa version plus générale, il fait pendant à des résultats récents de Kassel [19], Guéritaud–Kassel [17], et Guéritaud–Guichard–Kassel–Wienhard [16] qui décrivent les quotients compacts de L par un sous-groupe discret de $L \times L$ (voir section 3.2). En particulier, les auteurs prouvent dans [16] que, dans l'espace des $(L \times L, L)$ -structures sur une variété M , le domaine des structures complètes forme un ouvert.⁽¹⁾ Or, notre théorème a pour conséquence que ce domaine est aussi fermé (corollaire 3.1). On en déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4. — *Soit L un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1, et M une variété compacte de même dimension que L . Alors, dans l'espace des $(L \times L, L)$ -structures sur M , le domaine des structures complètes forme une union de composantes connexes.*

Autrement dit, il est impossible de déformer continûment une structure complète en une structure incomplète. C'est cette question qui a initialement motivé nos travaux. Nous ne savons toutefois pas s'il existe des variétés compactes possédant des composantes connexes de structures incomplètes. Il pourrait par exemple exister des variétés compactes possédant des $(L \times L, L)$ -structures, mais ne possédant aucune structure complète.

La preuve des théorèmes 1 et 2 s'inspire des idées du théorème de Carrière. En supposant qu'il existe un ouvert strict U de \mathbb{C}^d muni d'une action proprement discontinue d'un sous-groupe Γ de $U(d-1, 1) \times \mathbb{C}^d$ (ou $\mathrm{SO}(3, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3$), on remarque que le bord de U doit contenir des "ellipsoïdes dégénérés" sous l'action de Γ . La principale différence avec le théorème de Carrière est que cette action est de discompacité 2 : les ellipsoïdes dégèrent non pas sur des hyperplans réels mais sur des hyperplans complexes, de codimension réelle 2. La preuve du théorème 3 repose sur un raisonnement analogue, mais sa transposition à la dynamique de l'action de $L \times L$ sur L nécessite quelques résultats classiques sur la structure des groupes de Lie de rang 1.

Nos théorèmes ne s'affranchissent pas de l'hypothèse que la (G, X) -structure considérée est a priori kleinienne, et la question plus générale de la complétude des (G, X) -structures compactes reste ouverte. La méthode utilisée pourrait en revanche s'adapter à d'autres géométries, comme la géométrie pseudo-riemannienne plate de signature $(d-2, 2)$, toujours sous l'hypothèse que la structure est kleinienne.

⁽¹⁾ La topologie de l'espace des (G, X) -structures sur une variété est présentée sommairement à la section 1.1. On consultera par exemple [13] pour plus de détails.

L'article s'organise comme suit. La section 1 contient uniquement des rappels de la théorie générale des (G, X) -structures. On y précise la notion de complétude et son rapport, dans le cadre pseudo-riemannien, avec la complétude géodésique. Dans la section 2, nous nous focalisons sur la géométrie affine. Nous rappelons la conjecture de Markus et les différents résultats qui la concernent, et nous prouvons les théorèmes 1 et 2. La section 3 s'intéresse aux groupes de Lie semi-simples de rang réel 1. Nous recensons les divers résultats qui décrivent les quotients compacts de L par des sous-groupes de $L \times L$. Nous rappelons ensuite quelques propriétés classiques des groupes de Lie de rang 1, qui nous permettent d'adapter la preuve du théorème 1 et de prouver le théorème 3 et le corollaire 4.

1. Les (G, X) -structures et leur espace de déformation

Dans cette section, nous rappelons quelques principes généraux de la théorie des (G, X) -structures, développée par Thurston dans [30], mais dont l'idée remonte à Ehresmann. Considérons G un groupe de Lie réel (de dimension finie), et H un sous-groupe fermé de G . Le quotient $X = G/H$ est un espace G -homogène (i.e. une variété lisse munie d'une action transitive de G). Soit M une variété topologique de même dimension que X .

DÉFINITION 1.1. — Une (G, X) -structure sur M est la donnée d'un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ où $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de M et φ_i un difféomorphisme de U_i dans un ouvert de X , tels que pour tous i, j , sur chaque composante connexe de $U_i \cap U_j$, il existe $g \in G$ tel que

$$\varphi_j = g \cdot \varphi_i.$$

On dira aussi que M est localement modelée sur X , ou encore que M est une (G, X) -variété.

Une (G, X) -structure sur M induit naturellement une structure de variété lisse. Plus généralement, si M est localement modelée sur X , toute structure géométrique ⁽²⁾ sur X invariante sous l'action de G induit une structure géométrique sur M qui lui est localement isomorphe. Par exemple, si G préserve une métrique pseudo-riemannienne sur X , une (G, X) -structure sur M induit une métrique pseudo-riemannienne sur M , telle que les cartes locales de l'atlas de la (G, X) -structure sont des isométries locales.

⁽²⁾ La notion de *structure géométrique* a été formalisée par Gromov dans [14]. On peut y penser ici dans un sens vague comme un objet attaché à la variété, tel qu'une forme différentielle ou une métrique pseudo-riemannienne.

Réciproquement, soit X une variété munie d'une métrique pseudo-riemannienne homogène. Supposons de plus que toutes les isométries locales de X dans X se prolongent en des isométries globales. Soit M une variété pseudo-riemannienne localement isométrique à X . Alors un atlas (U_i, φ_i) formé d'isométries locales de M dans X induit naturellement une $(\text{Isom}(X), X)$ -structure sur M . Par exemple, une $(\text{SL}(2, \mathbb{R}), \mathbb{H}^2)$ -variété est une surface munie d'une métrique riemannienne de courbure -1 . Les (G, X) -structures que nous étudierons dans la suite sont des (G, X) -structures pseudo-riemanniennes.

1.1. Espace de déformation des (G, X) -structures sur une variété

Une (G, X) -structure sur M induit une paire (dev, ρ) où ρ est un morphisme de $\pi_1(M)$ dans G et dev un difféomorphisme local du revêtement universel \tilde{M} de M dans X qui est ρ -équivariant, c'est-à-dire tel que pour tout $g \in \pi_1(M)$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\text{dev}} & X \\ g \downarrow & & \downarrow \rho(g) \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\text{dev}} & X \end{array} .$$

L'application dev est appelée une *application développante* et le morphisme ρ un *morphisme d'holonomie* de la (G, X) -variété M . Le couple (dev, ρ) caractérise la (G, X) -structure, et est unique modulo l'action de G donnée par

$$g \cdot (\text{dev}, \rho) = (g \circ \text{dev}, \text{Ad}_g \circ \rho).$$

En outre, il est naturel d'identifier deux (G, X) -structures sur une variété M lorsque l'une est l'image de l'autre par un difféomorphisme de M homotope à l'identité. L'espace de déformation des (G, X) -structures sur M sera donc l'ensemble :

$$\text{Def}_{(G, X)}(M) = G \backslash \{(\text{dev}, \rho), \text{dev} : \tilde{M} \rightarrow X \text{ } \rho\text{-équivariant}\} / \text{Diff}_0(M).$$

L'espace des couples (dev, ρ) peut être muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, qui induit sur $\text{Def}_{(G, X)}(M)$ une structure d'espace topologique séparé. Le théorème d'Ehresmann-Thurston [30] affirme que, pour une variété M compacte, l'application qui à une (G, X) -structure sur M associe son morphisme d'holonomie est un homéomorphisme local de $\text{Def}_{(G, X)}(M)$ dans l'espace des représentations de $\pi_1(M)$

dans G modulo conjugaison. Autrement dit, si (dev, ρ) est une (G, X) -structure sur M , tout morphisme suffisamment proche de ρ est l'holonomie d'une unique (G, X) -structure sur M proche de (dev, ρ) .

En outre, lorsque M est compacte, son groupe fondamental est de présentation finie, et il découle alors du théorème d'Ehresman–Thurston que $\text{Def}_{(G, X)}(M)$ est localement homéomorphe à une variété algébrique de dimension finie.

1.2. Complétude des (G, X) -structures

Notons que l'espace modèle X peut ne pas être simplement connexe. Dans ce cas, notons \tilde{X} son revêtement universel. L'action de G sur X se relève à \tilde{X} en une action fidèle et transitive d'un revêtement \tilde{G} de G . Toute (G, X) -structure sur une variété M induit alors une (\tilde{G}, \tilde{X}) -structure, et on pourra donc supposer sans perte de généralité que le modèle X est simplement connexe.

Une (G, X) -variété M est dite *complète* si son application développante est un revêtement de \tilde{M} sur X . Dans ce cas, et si le modèle X est simplement connexe, l'application développante identifie \tilde{M} à X , sur lequel $\pi_1(M)$ agit librement et proprement discontinûment via l'holonomie. Les (G, X) -variétés complètes sont donc les quotients de la forme $\Gamma \backslash X$, où Γ est un sous-groupe discret de G agissant librement et proprement discontinûment sur X .

Le terme de *complétude* provient de son rapport, dans le cas de (G, X) -structures pseudo-riemanniennes, avec la complétude géodésique. Rappelons qu'à l'instar des métriques riemanniennes, les métriques pseudo-riemanniennes possèdent une unique *connexion de Levi-Civita* ∇ . Les courbes γ solutions de l'équation $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ sont appelées géodésiques de la métrique (même si elles ne minimisent pas une fonction de longueur). Le flot géodésique peut être vu comme le flot d'un champ de vecteur sur l'espace total du fibré tangent à la variété, et la métrique est dite *géodésiquement complète* si le flot de ce champ de vecteur est complet, c'est-à-dire s'il est défini sur tout $TM \times \mathbb{R}$. La proposition suivante, classique, affirme que, sous des hypothèses raisonnables, les notions de complétude et de complétude géodésique sont identiques.

PROPOSITION 1.2. — *Supposons que G agisse transitivement sur une variété X simplement connexe en préservant une métrique pseudo-riemannienne g_X géodésiquement complète. Soit M une (G, X) -variété. Soit g_M*

la métrique pseudo-riemannienne induite sur M par g_X . Alors la (G, X) -structure de M est complète si et seulement si g_M est géodésiquement complète.

Dans le cadre riemannien, le théorème de Hopf-Rinow affirme qu'une métrique est géodésiquement complète si et seulement si la distance qu'elle induit est complète. En particulier, toute variété riemannienne compacte est géodésiquement complète, ainsi que toute variété riemannienne globalement homogène. Il suit que, lorsque G préserve une métrique riemannienne sur X , toute (G, X) -structure compacte est géodésiquement complète, donc complète d'après la proposition 1.2. Ce résultat remonte à Ehresmann [6].

Mais tout ceci tombe en défaut lorsque la métrique n'est plus définie positive. D'une part, une variété pseudo-riemannienne globalement homogène n'est pas nécessairement géodésiquement complète. D'autre part, une variété pseudo-riemannienne compacte peut aussi ne pas être géodésiquement complète. (Des contre-exemples apparaissent dès la dimension 3. Voir par exemple [15].)

Le premier problème ne se pose plus lorsque l'on impose une condition plus forte que l'homogénéité : la symétrie (au sens de Cartan).

DÉFINITION 1.3. — *Une variété pseudo-riemannienne X est symétrique au sens de Cartan si pour tout point $x \in X$, l'application $-\text{Id} : T_x X \rightarrow T_x X$ s'étend via le flot géodésique en une isométrie globale.*

PROPOSITION 1.4. — *Les variétés pseudo-riemanniennes symétriques sont géodésiquement complètes.*

Démonstration. — Si une géodésique d'une variété pseudo-riemannienne symétrique est définie sur un intervalle $I \subsetneq \mathbb{R}$, on peut toujours la prolonger en appliquant une symétrie centrale (i.e. une isométrie induite par $-\text{Id} : T_x X \rightarrow T_x X$) en un point x de cette géodésique. L'intervalle maximal de définition de toute géodésique est donc \mathbb{R} . \square

Dans la suite, nous nous intéresserons à deux familles d'espaces pseudo-riemanniens symétriques. Les premiers sont les espaces pseudo-riemanniens de courbure constante. Ces espaces possèdent un groupe d'isométries globales "maximal" (i.e. de dimension $\frac{1}{2}d(d+1)$, où d est la dimension de l'espace). Il en existe une construction explicite ([31], p. 63) qui généralise celle des espaces riemanniens de courbure constante : \mathbb{R}^d , \mathbb{S}^d et \mathbb{H}^d . En particulier, les espaces pseudo-riemanniens de courbure nulle sont les espaces affines munis d'une métrique pseudo-riemannienne invariante par translation. Leur groupe d'isométries est le groupe des transformations affines dont la partie linéaire préserve la métrique.

Une autre famille d'exemples est obtenue en considérant un groupe de Lie muni d'une métrique invariante par translations à gauche et à droite, et en particulier un groupe de Lie semi-simple muni de sa métrique de Killing (voir section 3). Dans ces cas-là, les géodésiques partant de l'élément neutre sont les sous-groupes à 1 paramètre.

On ne connaît aucun exemple de variété pseudo-riemannienne compacte localement modelée sur un de ces espaces, dont le flot géodésique soit incomplet.

1.3. (G, X) –structures kleinienne et domaines divisibles

Un obstacle important à la compréhension de la topologie des (G, X) –variétés est la potentielle complexité de l'application développante. En dehors des situations où l'on sait qu'elle est nécessairement un difféomorphisme global, elle n'est en général ni surjective, ni injective, ni même un revêtement sur son image. Par exemple, étant donnée une surface S de genre supérieur à 2, le théorème de Gallo–Kapovich–Marden [9] affirme que presque toutes les représentations de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ qui se relèvent à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ sont l'holonomie d'une structure projective complexe sur S . Pourtant, beaucoup de ces représentations ne sont pas d'image discrète, et n'agissent donc proprement discontinûment sur aucun ouvert non vide de \mathbb{CP}^1 .

Kulkarni et Pinkall introduisent dans [25] la terminologie de *structure kleinienne*, que nous reprenons ici.

DÉFINITION 1.5. — Une (G, X) –variété M est dite kleinienne si M est isomorphe à un quotient d'un ouvert U de X par un sous-groupe discret de G préservant U et agissant librement et proprement discontinûment sur U .

Lorsque l'application développante est injective, la (G, X) –structure est kleinienne. En particulier, si X est simplement connexe, les (G, X) –variétés complètes sont keniennes. Lorsqu'une (G, X) –variété compacte est kleinienne, l'ouvert image de l'application développante est un *ouvert divisible* de X , c'est-à-dire un ouvert préservé par un sous-groupe discret de G agissant proprement et cocompactement.

Kozul, puis Benoist ont étudié les convexes de \mathbb{R}^d divisibles par des sous-groupes de $\mathrm{PGL}(d + 1, \mathbb{R})$, donnant ainsi des exemples de structures projectives réelles exotiques sur les variétés compactes (voir par exemple [1]). Toutefois, pour de nombreuses autres géométries, on ne sait pas s'il existe

des ouverts divisibles non triviaux.

Nos théorèmes peuvent donc s'interpréter de trois façons différentes : comme des résultats de complétude de certaines (G, X) -structures, comme des résultats de complétude géodésique de certaines variétés pseudo-riemanniennes localement homogènes, ou encore comme des résultats d'inexistence d'ouverts divisibles non triviaux dans certains espaces homogènes.

2. Autour de la conjecture de Markus

Soit $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ le groupe des transformations affines de \mathbb{R}^d . Une *structure affine* sur une variété M de dimension d est simplement une $(\text{Aff}(\mathbb{R}^d), \mathbb{R}^d)$ -structure. Comme le groupe affine préserve une connexion linéaire plate et sans torsion sur \mathbb{R}^d (celle pour laquelle les champs invariants par translation sont parallèles), toute variété affine hérite d'une connexion plate et sans torsion. Réciproquement, une connexion plate et sans torsion sur une variété M induit une structure affine. De plus, la structure affine est complète si et seulement si la connexion qu'elle induit est géodésiquement complète.

Il existe de nombreux exemples de variétés affines compactes non complètes. Les plus simples sont les variétés de Hopf, quotients de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par un sous-groupe monogène d'homothéties linéaires. Le problème de la caractérisation des structures affines compactes complètes a été formulé par Markus.

CONJECTURE (Markus, [27]). — *Soit M une variété compacte munie d'une structure affine. Si M possède une forme volume parallèle, alors M est complète. Autrement dit, les $(\text{SL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ -variétés compactes sont complètes.*

Cette conjecture a été attaquée sous plusieurs angles. La première voie, empruntée par Smillie puis Fried, Goldman et Hirsch, consiste à ajouter des hypothèses sur la structure du groupe fondamental de M .

THÉORÈME (Fried, Goldman, Hirsch, [8]). — *Soit M une variété compacte munie d'une structure affine et possédant une forme volume parallèle. Si le groupe fondamental de M est nilpotent, alors M est complète.*

Ce théorème généralise un théorème de Smillie [29] qui supposait le groupe fondamental de M abélien.

L'autre angle d'attaque consiste à supposer l'existence d'une structure géométrique parallèle plus contraignante qu'une forme volume. Rappelons que les variétés pseudo-riemanniennes plates sont localement modelées sur \mathbb{R}^d muni de l'action affine de $O(p, d-p) \ltimes \mathbb{R}^d$, où $(p, d-p)$ est la signature de la métrique. À revêtement double près, elles sont orientables, et possèdent alors une forme volume parallèle (car tous les éléments de $O(p, d-p)$ sont de déterminant ± 1). Par conséquent la conjecture de Markus impliquerait que toutes les variétés pseudo-riemanniennes plates sont géodésiquement complètes. C'est ce que Carrière a prouvé dans le cadre lorentzien.

THÉORÈME (Carrière, [4]). — *Soit M une variété compacte munie d'une métrique lorentzienne plate. Alors M est géodésiquement complète (et donc un quotient de \mathbb{R}^d par un sous-groupe de transformations affines lorentziennes). Autrement dit, les $(O(d-1, 1) \ltimes \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ -structures sont complètes.*

Citons enfin un théorème de Jo–Kim concernant les ouverts divisibles :

THÉORÈME (Jo, Kim, [18]). — *Soit M une variété affine compacte de la forme $\Gamma \backslash \Omega$, où Ω est un ouvert convexe strictement inclus dans \mathbb{R}^d et Γ un groupe discret de transformations affines. Soit Ω' un ouvert convexe propre de \mathbb{R}^{d-k} tel que $\Omega \simeq \mathbb{R}^k \times \Omega'$. Supposons que $\text{Aut}_{proj}(\Omega')$ est irréductible. Alors M ne possède pas de forme volume parallèle.*

Ce théorème est, à notre connaissance, le seul qui traite de la conjecture de Markus dans le cas particulier d'une structure kleinienne.

La preuve du théorème de Carrière repose sur l'idée que le groupe des transformations lorentziennes est de *discompacité 1*, c'est-à-dire que les ellipsoïdes ne peuvent dégénérer sous l'action de ce groupe qu'en des hyperplans. Nous allons nous intéresser dans la suite à l'exemple le plus simple d'action affine de discompacité 2.

2.1. Métriques lorentz-hermitiennes plates

Convenons d'appeler forme lorentz-hermitienne sur \mathbb{C}^d une forme sesquilinéaire de signature réelle $(2d-2, 2)$. Une métrique lorentz-hermitienne sur une variété complexe M de dimension d est alors une section lisse de la fibration des formes lorentz-hermitiennes sur le fibré tangent.

Dans toute cette section, X désignera \mathbb{C}^d muni de la métrique lorentz-hermitienne invariante par translation qui s'écrit dans la base canonique

$$dz_1 d\bar{z}_1 + \dots + dz_{d-1} d\bar{z}_{d-1} - dz_d d\bar{z}_d,$$

et $G = U(d-1, 1) \times \mathbb{C}^d$ le groupe des transformations affines complexes préservant cette métrique. On notera (e_1, \dots, e_d) la base canonique de \mathbb{C}^d .

Le théorème de Carrière ne s'applique pas à cette géométrie. En effet, le groupe $U(d-1, 1)$ est, au sens de Carrière, de discompacité 2 : son action contracte une direction complexe, et les ellipsoïdes dégèrent donc sur des hyperplans complexes, qui sont de codimension réelle 2.

Le théorème 1 constitue donc une avancée par rapport au théorème de Carrière. Il est toutefois moins satisfaisant puisqu'il ne prouve pas que toutes les variétés lorentz-hermitiennes plates compactes sont complètes, ce qui serait une conséquence de la conjecture de Markus (puisque $U(d-1, 1)$ est inclus dans $SL(2d, \mathbb{R})$). Son intérêt est surtout de présenter dans un cadre plus simple la technique qui nous servira dans la section 3.

2.2. Preuve du théorème 1

Considérons un ouvert U de \mathbb{C}^d et un sous-groupe Γ de $U(d-1, 1) \times \mathbb{C}^d$ agissant proprement discontinûment et cocompactement sur U . Soit

$$l : U(d-1, 1) \times \mathbb{C}^d \rightarrow U(d-1, 1)$$

le morphisme qui à une transformation affine de \mathbb{C}^d associe sa partie linéaire, et notons Γ_0 l'image de Γ par l .

Nous voulons montrer que $U = \mathbb{C}^d$. Supposons par l'absurde que U est strictement inclus dans \mathbb{C}^d . L'ouvert U possède alors un bord, et le point de départ de notre preuve sera d'observer la dynamique de Γ près du bord. Fixons sur \mathbb{C}^d une métrique euclidienne préservée par $U(d-1) \times U(1)$. Pour tout $y \in \mathbb{C}^d$ et tout $\varepsilon > 0$, on notera $B(y, \varepsilon)$ la boule fermée centrée en y de rayon ε .

PROPOSITION 2.1. — *Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y \in \partial U$, il existe une suite y_n dans U convergeant vers y et une suite H_n d'hyperplans affines complexes convergeant vers un hyperplan complexe H , tels que $y_n \in H_n$, $y \in H$ et*

$$B(y_n, \varepsilon) \cap H_n \subset U,$$

$$B(y, \varepsilon) \cap H \subset \partial U.$$

Démonstration. — Soit F un domaine compact de U tel que $\Gamma \cdot F$ recouvre U . Alors pour tout point y dans le bord de U , il existe une suite (γ_n) dans Γ et une suite (x_n) dans F telles que la suite $(y_n) = (\gamma_n \cdot x_n)$

converge vers y . En particulier, la suite (γ_n) tend vers l'infini dans Γ . La propriété de l'action de Γ sur U implique alors que pour n'importe quelle suite (x'_n) dans F , toute valeur d'adhérence de $(\gamma_n \cdot x'_n)$ est dans ∂U .

Bien sûr, en général, l'adhérence de $\gamma_n \cdot F$ pourrait se limiter à un point. Mais ce n'est pas le cas ici, où l'action de $U(d - 1, 1)$ ne contracte qu'une direction complexe. Pour préciser cela, écrivons la décomposition de Cartan de $l(\gamma_n)$. On peut écrire $l(\gamma_n)$ sous la forme $k_n a_n k'_n$, où k_n et k'_n sont dans $U(d - 1) \times U(1)$ et où a_n s'écrit dans la base $(e_1 + e_n, e_2, \dots, e_{n-1}, e_1 - e_n)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_n & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

avec λ_n réel supérieur à 1.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que l' ε -voisinage de F est relativement compact dans U . Notons B_ε la boule fermée de centre 0 de rayon ε . On sait que $x_n + B_\varepsilon \subset U$, et donc que $\gamma_n \cdot (x_n + B_\varepsilon) \subset U$. Or

$$\gamma_n \cdot (x_n + B_\varepsilon) = y_n + l(\gamma_n)B_\varepsilon.$$

Soit H_0 l'hyperplan $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(e_1 + e_n, e_2, \dots, e_{n-1})$. La matrice diagonale a_n préserve l'hyperplan complexe H_0 et le dilate. D'autre part, k_n et k'_n préservent la boule B_ε . On en déduit que $l(\gamma_n)B_\varepsilon$ contient $(k_n H_0) \cap B_\varepsilon$. Posons $H_n = y_n + k_n H_0$. Puisque (y_n) converge vers y , on peut, quitte à extraire, supposer que H_n converge vers un hyperplan affine H contenant y . Alors U contient $H_n \cap B(y_n, \varepsilon)$, et l'adhérence de U contient $H \cap B(y, \varepsilon)$. Enfin, $H \cap B(y, \varepsilon)$ est inclus dans ∂U , par propriété de l'action de Γ sur U . □

PROPOSITION 2.2. — *Soit $y \in \partial U$. Alors il existe un unique hyperplan affine complexe H tel que $H \cap \partial U$ contient un voisinage de y dans H .*

Démonstration. — D'après la proposition 2.1, un tel H existe. Pour prouver l'unicité, considérons H un hyperplan affine complexe contenant y tel que $H \cap B(y, \varepsilon') \subset \partial U$ pour $\varepsilon' > 0$, et montrons que H est la limite de n'importe quelle suite H_n fournie par la proposition 2.1.

Considérons donc une suite (y_n) d'éléments de U convergeant vers y , une suite (H_n) d'hyperplans affines complexes contenant y_n tels que $H_n \cap B(y_n, \varepsilon) \subset U$, et tels que (H_n) converge vers H' , qui contient donc y (les suites (y_n) et (H_n) nous sont données par la proposition 2.1). Supposons que H' est différent de H . Alors H' et H sont transverses en y (ce sont

deux hyperplans complexes), et pour n assez grand, $H_n \cap B(y_n, \varepsilon)$ intersecte $H \cap B(y, \varepsilon')$, ce qui est absurde puisque $H \cap B(y, \varepsilon') \subset \partial U$ alors que $H_n \cap B(y_n, \varepsilon) \subset U$. Donc $H = H'$. Par conséquent, H est unique. \square

PROPOSITION 2.3. — *L'ouvert U est feuilleté par des copies parallèles d'un même hyperplan complexe, et Γ_0 préserve l'hyperplan vectoriel sous-jacent.*

Démonstration. — Soit $y \in \partial U$, et H l'unique hyperplan complexe contenant y tel que $H \cap B(y, \varepsilon) \subset \partial U$. Commençons par montrer que tout H est inclus dans ∂U . Soit A l'ensemble des $z \in H$ tels que $H \cap B(z, \varepsilon) \subset \partial U$. L'ensemble A est fermé puisque U est fermé, et contient y . Soit $z \in A$ et $z' \in H \cap B(z, \varepsilon/2)$. Alors $H \cap B(z', \varepsilon/2) \subset \partial U$. D'après la proposition 2.2, l'hyperplan H est l'unique hyperplan complexe tel que $H \cap \partial U$ contient un voisinage de z' dans H , et par 2.1, on a $H \cap B(z', \varepsilon) \subset \partial U$. D'où $B(z, \varepsilon/2) \subset A$. L'ensemble A est ouvert et fermé dans H , donc $A = H$ et $H \subset \partial U$.

Par chaque point de ∂U passe donc un unique hyperplan affine complexe contenu dans ∂U . Montrons que tous ces hyperplans sont parallèles. Soient H et H' deux hyperplans affines contenus dans ∂U . S'ils ne sont pas parallèles, ils s'intersectent transversalement en un point $y \in \partial U$, ce qui contredit l'unicité de l'hyperplan contenu dans ∂U et passant par y . Donc H et H' sont parallèles.

Tous les hyperplans contenus dans le bord de U sont donc parallèles à un même hyperplan vectoriel H_0 . Comme Γ préserve U , il est clair que Γ_0 préserve H_0 . Soit maintenant $x \in U$. Supposons que $H_0 + x$ n'est pas inclus dans U . Alors il existe $y \in (H_0 + x) \cap \partial U$. Mais alors $(H_0 + y) \in \partial U$, et en particulier $x \in \partial U$, ce qui est absurde. Donc U est feuilleté par des copies parallèles de H_0 . \square

L'ouvert U fibre donc au dessus d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n / H_0 \simeq \mathbb{C}$, et l'action de Γ sur \mathbb{C}^n induit une action sur \mathbb{C} par transformations affines complexes, qui préserve Ω . Il nous reste à prouver que $\Omega = \mathbb{C}$. Notons $\bar{\rho}$ la représentation de Γ dans $\text{Aff}(\mathbb{C})$ induite par passage au quotient par H_0 . Remarquons d'abord le fait suivant :

LEMME 2.4. — *Si l'image de Γ par $\bar{\rho}$ est discrète dans $\text{Aff}(\mathbb{C})$, alors elle est virtuellement abélienne.*

Démonstration. — Cela est vrai de tous les sous-groupes de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ mais, par commodité, nous le prouvons uniquement pour des sous-groupes de type fini. Remarquons que $\bar{\rho}(\Gamma)$ est de type fini, puisque c'est l'image du groupe fondamental d'une variété compacte.

Soit N un sous-groupe de type fini de $\text{Aff}(\mathbb{C})$. Supposons que N n'est pas virtuellement abélien. Alors N n'est pas virtuellement inclus dans le sous-groupe des translations. La partie linéaire N_0 de N est donc infinie. Si N_0 est inclus dans le sous-groupe des rotations, comme N_0 est de type fini, il est monogène. Il existe donc une rotation affine dans N d'angle irrationnel, et N n'est donc pas discret. Si N_0 n'est pas inclus dans le sous-groupe des rotations, il existe un élément n de N de la forme $z \mapsto az + b$, avec $|a| < 1$. Quitte à conjuguer le groupe N , on peut supposer que le point fixe de n est 0 (autrement dit, que $b = 0$). Comme N n'est pas abélien, N contient un élément n' qui n'a pas 0 comme point fixe (i.e. $n' : z \mapsto a'z + b'$, $b' \neq 0$). Alors $n^k n' n^{-k}$ envoie z sur $a'z + a^k b$. La suite $n^k n' n^{-k}$ converge sans être stationnaire, et Γ n'est donc pas discret. \square

Montrons que $\Omega = \mathbb{C}$. Supposons d'abord que $\bar{\rho}(\Gamma)$ est discret. Alors $\bar{\rho}(\Gamma)$ est virtuellement abélien. S'il est virtuellement inclus dans le sous-groupe des translations, $\Omega/\bar{\rho}(\Gamma)$ est, à revêtement fini près, un ouvert d'un tore. Comme $\Omega/\bar{\rho}(\Gamma)$ doit être compact, $\Omega = \mathbb{C}$. Sinon, $\bar{\rho}(\Gamma)$ est virtuellement inclus dans le stabilisateur d'un point, et stabilise donc une orbite finie. Mais alors, Γ stabilise une famille finie d'hyperplans affines complexes de \mathbb{C}^n , et fixe donc virtuellement un hyperplan affine complexe. Cela est impossible d'après le théorème suivant :

THÉORÈME (Goldman, Hirsch, [11]). — *Soit M une variété compacte munie d'une structure affine dont l'holonomie préserve un sous-espace affine strict. Alors M ne possède pas de forme volume parallèle.*

Supposons maintenant que $\bar{\rho}(\Gamma)$ n'est pas discret. Alors son adhérence dans $\text{Aff}(\mathbb{C})$ contient un sous-groupe à 1 paramètre. Supposons par l'absurde que $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$. Ce sous-groupe à 1 paramètre stabilise alors le bord de Ω , qui se compose donc d'une réunion d'orbites de ce sous-groupe. Les sous-groupes à 1 paramètre du groupe affine sont de la forme $z \mapsto e^{ta}z + b$ ou $z \mapsto z + tb$. Le bord de Ω est donc soit un point, soit une réunion de cercles concentriques, de droites parallèles, de demi-droites ayant même origine, ou de spirales logarithmiques s'enroulant autour d'un même point. Sachant que $\bar{\rho}(\Gamma)$ doit agir cocompactement sur l'une des composantes connexes du complémentaire de $\partial\Omega$, on se convainc facilement que $\partial\Omega$ ne peut être qu'un point ou une droite (dans tous les autres cas, le stabilisateur du bord de Ω est exactement le sous-groupe à 1 paramètre, et il n'agit pas cocompactement). Mais alors Γ stabilise soit un hyperplan complexe, soit un hyperplan réel de \mathbb{C}^n , ce qui, encore une fois, contredit le théorème de Goldman et Hirsch. On conclut donc que $\Omega = \mathbb{C}$, et que $U = \mathbb{C}^n$.

Remarque. — La preuve ne repose que sur le fait que $U(n-1, 1)$ est en quelque sorte de *discompacité complexe* 1, dans le sens où son action fait dégénérer les ellipsoïdes sur des hyperplans complexes. La même preuve permet donc d'obtenir le théorème 2. En effet, tous les éléments de $SO(3, \mathbb{C})$ se décomposent sous la forme kak' , où $k, k' \in SO(3, \mathbb{R})$ et où a est de la forme

$$P \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} P^{-1},$$

où λ est un réel supérieur ou égal à 1, et P désigne la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Groupes de Lie de rang 1 et leur métrique de Killing

Nous nous intéressons dans cette section à une autre famille de géométries. Considérons un groupe de Lie semi-simple L (sans centre) connexe, d'algèbre de Lie \mathfrak{l} . La forme de Killing est la forme quadratique définie sur \mathfrak{l} par

$$\kappa_{\mathfrak{l}}(u, v) = \text{Tr}(\text{ad}_u \text{ad}_v).$$

La forme de Killing est non dégénérée, de signature $(\dim L - \dim K, \dim K)$ où K est un sous-groupe compact maximal de L , et préservée par l'action adjointe de L . On appelle *métrique de Killing* sur L (et on note κ_L) la métrique pseudo-riemannienne obtenue en étendant $\kappa_{\mathfrak{l}}$ à L par invariance à gauche. Comme $\kappa_{\mathfrak{l}}$ est invariante par l'action adjointe, la métrique de Killing est aussi invariante à droite. Par conséquent, l'application $g \mapsto g^{-1}$ préserve κ_L . On en déduit aisément que (L, κ_L) est un espace pseudo-riemannien symétrique au sens de Cartan. La composante connexe de l'identité dans son groupe d'isométries s'identifie à $L \times L$, dont l'action sur L est donnée par

$$(g, h) \cdot x = gxh^{-1}$$

pour tout $(g, h) \in L \times L$ et tout $x \in L$.

Une variété M munie d'une métrique pseudo-riemannienne localement isométrique à la métrique de Killing de L possèdera donc (à revêtement fini près) une $(L \times L, L)$ -structure, et le théorème 3 concerne ces variétés pseudo-riemanniennes. Notons que L peut ne pas être simplement connexe (en particulier, si $L = \text{PSU}(n, 1)$, le groupe fondamental de L est isomorphe

à \mathbb{Z}). On notera \tilde{L} le revêtement universel de L . C'est une extension centrale de L , de centre $Z(\tilde{L})$. On notera encore abusivement $Z(\tilde{L})$ le plongement diagonal de $Z(\tilde{L})$ dans $\tilde{L} \times \tilde{L}$. L'action de $L \times L$ sur L se relève en une action fidèle et transitive de $(\tilde{L} \times \tilde{L}) / Z(\tilde{L})$ sur \tilde{L} . Pour être le plus général possible, nous allons donc prouver la version suivante du théorème 3, légèrement plus fine :

THÉORÈME 3'. — *Toutes les $((\tilde{L} \times \tilde{L}) / Z(\tilde{L}), \tilde{L})$ -structures kleiniennes sont compactes.*

Dans la suite, pour éviter les terminologies trop lourdes, on notera parfois $G = L \times L$ et $\tilde{G} = (\tilde{L} \times \tilde{L}) / Z(\tilde{L})$. Notons que \tilde{G} est une extension centrale de G , de centre

$$(Z(\tilde{L}) \times Z(\tilde{L})) / Z(\tilde{L}) \simeq Z(\tilde{L}).$$

3.1. Exemples

Le plus petit groupe de Lie simple non compact est $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, de dimension 3. Sa métrique de Killing est lorentzienne, et, comme son groupe d'isométries est de dimension 6, elle est de courbure constante. L'espace $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ muni de sa métrique de Killing est appelé *espace anti-de Sitter* de dimension 3 (analogue lorentzien de l'espace hyperbolique de dimension 3). Dans ce cas, le problème de la complétude est résolu par le théorème de Klingler, qui généralise le théorème de Carrière.

THÉORÈME (Klingler, [21]). — *Soit M une variété compacte munie d'une métrique lorentzienne de courbure constante. Alors M est géodésiquement complète.*

Les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 sont donc des quotients du revêtement universel $\widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}$ par un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}$ agissant proprement discontinûment et cocompactement sur $\widetilde{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}$. D'après un théorème de Kulkarni et Raymond [26], ce sont en fait des quotients d'un revêtement fini de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ est également un groupe de Lie simple de rang réel 1. Vu comme groupe de Lie réel, il est isomorphe à la composante neutre de $\mathrm{PSO}(3, 1)$, de dimension 6, et sa métrique de Killing est de signature $(3, 3)$. Mais on peut aussi définir sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ une métrique de Killing complexe, donnée dans l'algèbre de Lie tangente par

$$\kappa^{\mathbb{C}}(u, v) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}}(\mathrm{ad}_u \mathrm{ad}_v).$$

Cette métrique est une *métrique riemannienne holomorphe* (i.e. une section holomorphe partout non-dégénérée du fibré $\text{Sym}^2 T^* \text{PSL}(2, \mathbb{C})$). La notion de courbure se généralise pour de telles métriques, et celle-ci est de courbure constante non nulle. $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ muni de sa métrique de Killing est donc un analogue complexe de l'espace anti-de Sitter de dimension 3. Toutefois, la preuve de Klingler ne se généralise pas dans ce cas-là. Elle repose en effet, comme le théorème de Carrière, sur le fait que les isométries lorentziennes sont de discompacité 1. Or, l'action adjointe de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ sur lui-même est de discompacité réelle 2.

3.2. (G, L) -structures complètes standard et non standard

Dans toute la suite, L désigne un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1. On sait, depuis les travaux de Borel [2], qu'un tel groupe admet toujours un réseau cocompact Γ . Le quotient de L par l'action de Γ à droite fournit donc un exemple de (G, L) -variété compacte et complète. Une telle structure est parfois appelée spéciale standard [32].

D'après le théorème de rigidité de Mostow, si L n'a pas de facteur isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, toute déformation de Γ dans L est obtenue par conjugaison, et ne modifie pas la (G, L) -structure. En revanche, lorsque L est $\text{PSO}(n, 1)$ ou $\text{PSU}(n, 1)$, on peut parfois déformer Γ de façon non triviale dans $L \times L$ [24]. Plus précisément, tout morphisme $u : \Gamma \rightarrow L$ fournit un plongement $\rho_u : \Gamma \rightarrow L \times L$ défini par

$$\rho_u : \gamma \mapsto (u(\gamma), \gamma).$$

D'après le théorème d'Ehresman-Thurston, pour u suffisamment proche du morphisme trivial, ρ_u est l'holonomie d'une (G, L) -structure sur la variété M . Si u est à valeurs dans un sous-groupe compact de L , il est clair que l'action de $\rho_u(\Gamma)$ sur L reste propre. La (G, L) -structure quotient est encore une structure complète, appelée standard. Goldman, dans le cas de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ [12], Ghys, pour $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ [10], et Kobayashi dans le cas général [24] ont remarqué que $\rho_u(\Gamma)$ continue d'agir proprement discontinûment et cocompactement sur L même lorsque u n'est pas à valeurs dans un sous-groupe compact, pour peu que les images d'un système de générateurs de Γ restent assez proches de l'élément neutre. Autrement dit, lorsqu'on déforme un peu une (G, L) -structure spéciale standard, on obtient toujours une (G, L) -structure complète, qui peut parfois être non standard.

Dans la lignée des travaux de Ghys [10], Kulkarni et Raymond [26], Kobayashi [23], [24], Salein [28], les travaux de Kassel, Guéritaud, Guichard et Wienhard décrivent très précisément les (G, L) -structures complètes.

THÉORÈME (Kassel, [19]). — Soit L un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1, et Γ un sous-groupe sans torsion de $L \times L$ agissant proprement discontinûment et cocompactement sur L . Notons ρ_1 et ρ_2 les projections de Γ sur chaque coordonnée. Alors il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que ρ_i est injective et $\rho_i(\Gamma)$ est un réseau cocompact de L .

Autrement dit, tous les quotients compacts de L par un sous-groupe de $L \times L$ sont de la forme $\rho_u(\Gamma) \backslash L$, où Γ est un réseau de L et ρ_u est un morphisme comme décrit précédemment. Ce théorème précise un résultat de Kobayashi [23] qui affirmait que l'une des projections était injective.

De plus, Kassel donne dans [20], pour le cas particulier de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, un critère pour que la représentation ρ_u agisse proprement discontinûment. Ce critère est étendu par Guéritaud et Kassel aux groupes $\mathrm{PSO}(n, 1)$ [17], puis par Guéritaud, Kassel, Guichard et Wienhard à tous les groupes de Lie semi-simples de rang réel 1 [16].

THÉORÈME (Guéritaud, Guichard, Kassel, Wienhard). — Soit L un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1, et K un sous-groupe compact maximal. Notons d la distance sur l'espace symétrique L/K associée à la métrique riemannienne symétrique préservée par L . Soit Γ un réseau dans L et u un morphisme de Γ dans L . Alors $\rho_u(\Gamma)$ agit proprement discontinûment sur L si et seulement s'il existe un point $x \in L/K$ et deux constantes λ et C , avec $\lambda < 1$, telles que pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$d(x, u(\gamma) \cdot x) \leq \lambda d(x, \gamma \cdot x) + C.$$

COROLLAIRE (Guéritaud, Guichard, Kassel, Wienhard). — Soit L un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1, et M une variété compacte de même dimension que L . Alors, dans l'espace $\mathrm{Def}_{(G,L)}(M)$, le domaine des (G, L) -structures complètes forme un ouvert.

Ces théorèmes fournissent une relativement bonne description des (G, L) -structures complètes. En revanche, hormis dans le cas de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, on ne sait pas s'il existe des (G, L) -variétés compactes non complètes. Le théorème 3', que nous démontrons à la section 3.3, donne une réponse qui, bien que partielle, permet de compléter la description des (G, L) -structures complètes. Le théorème 3' a en effet pour conséquence :

COROLLAIRE 3.1. — Soit L un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1, et M une variété compacte de même dimension que L . Alors, dans l'espace $\mathrm{Def}_{(G,L)}(M)$, le domaine des (G, L) -structures complètes forme un fermé.

Démonstration. — D'après le théorème 3', il suffit de prouver qu'une limite de (\tilde{G}, \tilde{L}) -structures complètes est kleinienne. Pour cela, considérons une suite d'applications développantes dev_n convergeant uniformément sur tout compact vers une application développante dev , et supposons que dev_n est un difféomorphisme de \tilde{M} dans \tilde{L} pour tout n . Alors en particulier dev_n est injective. Montrons que cette propriété passe à la limite.

Supposons par l'absurde qu'il existe x_1 et x_2 deux points distincts de \tilde{M} tels que $\text{dev}(x_1) = \text{dev}(x_2) = y$. Alors, comme dev est un difféomorphisme local, il existe un voisinage V de y relativement compact, et deux voisinages relativement compacts U_1 et U_2 de x_1 et x_2 disjoints tels que $\text{dev}(U_1) = \text{dev}(U_2) = V$. Pour n assez grand, dev_n est très proche de dev sur U_1 et U_2 , et $\text{dev}_n(U_1)$ et $\text{dev}_n(U_2)$ continuent à s'intersecter, ce qui contredit l'injectivité de dev_n . L'application développante à la limite est donc injective, et la (\tilde{G}, \tilde{L}) -structure correspondante est kleinienne. D'après le théorème 3', elle est donc complète. \square

D'après le corollaire du théorème de Guéritaud–Guichard–Kassel–Wienhard, l'ensemble des (G, L) -structures complètes est un ouvert. D'après le corollaire 3.1, c'est aussi un fermé. On en déduit le corollaire 4.

Remarque. — Nos théorèmes, ainsi que le corollaire 3.1, sont indépendants des résultats de Kassel et co-auteurs. Seul le corollaire 4 utilise conjointement le théorème 3 et la caractérisation des structures complètes.

3.3. Preuve du théorème 3

La stratégie de la preuve du théorème 3 est similaire à celle du théorème 1. On raisonne par l'absurde et on considère U un ouvert strict de \tilde{L} , muni d'une action libre, proprement discontinue et cocompacte d'un sous-groupe Γ de \tilde{G} . Ce domaine U possède un bord non vide ∂U , où l'action de Γ n'est plus propre.

Comme dans la preuve du théorème 1, on commence par observer que le bord de U contient des compacts dégénérés sous l'action de Γ . Le recours à la décomposition de Cartan de L permet de prouver que ces compacts dégénèrent sur des morceaux de sous-espaces paraboliques, qui joueront le rôle que jouaient précédemment les hyperplans complexes.

Nous prouverons ensuite que ces sous-espaces paraboliques contenus dans le bord sont en fait des translations à droite (ou à gauche) d'un même sous-groupe parabolique minimal, et nous en déduirons que l'ouvert U fibre au-dessus d'un domaine de L/P . Le point clé sera de remarquer qu'à l'instar

de deux hyperplans complexes dans \mathbb{C}^n , deux sous-espaces paraboliques qui ne sont pas parallèles s'intersectent toujours transversalement. Nous aurons besoin pour cela de rappeler quelques résultats classiques sur la structure des sous-groupes paraboliques minimaux d'un groupe de Lie de rang réel 1.

Pour finir, nous montrerons que le complémentaire de ce domaine de L/P doit contenir au moins deux points, puis que le groupe Γ ne peut pas être discret dans \tilde{G} , ce qui contredira le fait qu'il agisse proprement discontinuement sur un ouvert de \tilde{L} .

3.3.1. Décomposition de Cartan

Rappelons que tout sous-groupe compact maximal K de L est l'ensemble des points fixes d'une unique involution de Cartan θ de G . La forme bilinéaire $B_\theta(\cdot, \cdot) = \kappa_\mathfrak{l}(\cdot, -\theta \cdot)$ est définie positive, et s'étend donc en une métrique riemannienne invariante à droite sur \tilde{L} , qui est également préservée par l'action à gauche de \tilde{K} , image réciproque de K par l'application de revêtement $\pi : \tilde{L} \rightarrow L$. Dans toute la suite, lorsque nous utiliserons des notions métriques sur L , \tilde{L} ou \mathfrak{l} , nous nous référerons implicitement à la métrique associée à une involution de Cartan fixée, préservée par un sous-groupe compact maximal K fixé. Bien qu'il ne soit pas toujours nécessaire d'avoir recours à une métrique aussi spécifique, cela simplifiera grandement les énoncés.

Notons \mathfrak{k} l'algèbre de Lie de K . Comme L est de rang réel 1, il existe un élément $a \in \mathfrak{k}^\perp$ dont l'action adjointe sur \mathfrak{l} est diagonalisable, et tel que tout élément g de \tilde{L} se décompose sous la forme

$$g = k_1 \exp(ta)k_2,$$

avec $t \geq 0$ et $k_1, k_2 \in \tilde{K}$. De plus, un tel t est unique. Il s'agit, dans le cas particulier du rang 1, de la décomposition de Cartan de g . (Pour plus de précisions sur la structure des groupes de Lie semi-simples, on consultera par exemple [22].)

En outre, la diagonalisation de ad_a donne une décomposition de \mathfrak{l} sous la forme

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-,$$

où \mathfrak{n}^+ (resp. \mathfrak{n}^-) est la somme des sous-espaces propres de ad_a correspondant à des valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives), et où \mathfrak{m} est le centralisateur de a dans \mathfrak{k} .

Notons $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathfrak{n}^+$. C'est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{l} , et les sous-algèbres de Lie conjuguées à \mathfrak{p}_0 par l'action adjointe sont les sous-algèbres

de Lie paraboliques minimales de \mathfrak{l} . (Rappelons qu'en rang 1, toutes les sous-algèbres paraboliques strictes sont minimales et conjuguées.) Le normalisateur dans L (resp. dans \tilde{L}) d'une sous-algèbre de Lie parabolique minimale \mathfrak{p} est un sous-groupe de Lie fermé $P \subset L$ (resp. $\tilde{P} \subset \tilde{L}$), d'algèbre de Lie tangente \mathfrak{p} , appelé sous-groupe parabolique minimal. Notons que \tilde{P} est simplement l'image réciproque de P par l'application de revêtement.

Nous appellerons *sous-espace parabolique* de L (resp. \tilde{L}) une sous-variété de L (resp. \tilde{L}) de la forme Pb (resp. $\tilde{P}b$), où P (resp. \tilde{P}) est un sous-groupe parabolique minimal de L (resp. \tilde{L}) et b un point de L (resp. \tilde{L}). Enfin, nous appellerons *disque parabolique centré en y de rayon ε* une sous-variété de la forme

$$D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon) = \exp(\mathfrak{p} \cap B_{\varepsilon})y$$

où \mathfrak{p} une sous-algèbre de Lie parabolique minimale, y est un point de L ou de \tilde{L} , et B_{ε} désigne la boule fermée de centre 0 de rayon ε dans \mathfrak{l} (pour le produit scalaire B_{θ}).

PROPOSITION 3.2. — *Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y \in \partial U$, il existe une suite (y_n) dans U convergeant vers y et une suite (\mathfrak{p}_n) de sous-algèbres paraboliques minimales convergeant vers une sous-algèbre parabolique minimale \mathfrak{p} , tels que*

$$D_{\mathfrak{p}_n}(y_n, \varepsilon) \subset U,$$

$$D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon) \subset \partial U.$$

Démonstration. — La preuve de cette proposition est analogue à celle de la proposition 2.1. Fixons F un compact de U tel que $\Gamma \cdot F$ recouvre U , et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\exp(B_{\varepsilon})F$ est encore un compact de U . Soit y un point du bord de U . Considérons une suite (y_n) dans U convergeant vers y , et deux suites (x_n) dans F et (γ_n) dans Γ telles que $\gamma_n \cdot x_n = y_n$.

Par hypothèse sur ε , on a $\exp(B_{\varepsilon})x_n \subset U$ et donc $\gamma_n \cdot \exp(B_{\varepsilon})x_n \subset U$, puisque U est stable par l'action de Γ . Montrons que $\gamma_n \cdot \exp(B_{\varepsilon})x_n$ contient un disque parabolique de rayon ε centré en y_n .

Soit $(\gamma_{1,n}, \gamma_{2,n})$ un relèvement de γ_n à $\tilde{L} \times \tilde{L}$. On vérifie aisément que

$$\gamma_n \cdot (\exp(B_{\varepsilon})x_n) = \exp(\text{Ad}_{\gamma_{1,n}} B_{\varepsilon}) y_n.$$

Écrivons maintenant la décomposition de Cartan de $\gamma_{1,n}$:

$$\gamma_{1,n} = k_n \exp(t_n a) k'_n,$$

avec $t_n \geq 0$, $k_n, k'_n \in \tilde{K}$.

Tout d'abord l'action de $\text{Ad}_{k'_n}$ stabilise B_ε . Donc

$$\text{Ad}_{\gamma_{1,n}} B_\varepsilon = \text{Ad}_{k_n} \text{Ad}_{\exp(t_n a)} B_\varepsilon.$$

Notons comme précédemment $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathfrak{n}^+$. L'algèbre de Lie \mathfrak{p}_0 est la somme des espaces propres de ad_a associés aux valeurs propres positives. Par conséquent, $\text{Ad}_{\exp(t_n a)}$ stabilise et dilate \mathfrak{p}_0 , et on a donc

$$\text{Ad}_{\exp(t_n a)} B_\varepsilon \supset \text{Ad}_{\exp(t_n a)} (B_\varepsilon \cap \mathfrak{p}_0) \supset B_\varepsilon \cap \mathfrak{p}_0.$$

Enfin, $\text{Ad}_{k_n} (B_\varepsilon \cap \mathfrak{p}_0) = B_\varepsilon \cap \text{Ad}_{k_n} \mathfrak{p}_0$, car Ad_{k_n} préserve la norme que nous avons mise sur \mathfrak{l} . En définitive, si l'on note $\mathfrak{p}_n = \text{Ad}_{k_n} \mathfrak{p}_0$, on a bien

$$D_{\mathfrak{p}_n}(y_n, \varepsilon) \subset \gamma_n \cdot (\exp(B_\varepsilon)x_n) \subset U.$$

Comme tous les \mathfrak{p}_n sont conjugués par des éléments de K , on peut, quitte à extraire, supposer que \mathfrak{p}_n converge dans la grassmannienne de \mathfrak{l} vers une sous-algèbre parabolique minimale \mathfrak{p} . Enfin, tels que nous les avons construits, chaque disque parabolique $D_{\mathfrak{p}_n}(y_n, \varepsilon)$ est dans l'image par γ_n du domaine compact $\exp(B_\varepsilon)F$. Comme l'action de Γ sur U est propre, on a donc $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon) \subset \partial U$. □

Nous avons vu que par tout point du bord passe un disque parabolique. Nous allons ensuite prouver que ce disque est unique et en déduire que l'ouvert U est feuilleté par des sous-espaces paraboliques parallèles. Rappelons d'abord quelques propriétés des sous-groupes et sous-algèbres paraboliques.

3.3.2. Sous-algèbres paraboliques et sous-groupes paraboliques

Soit \mathfrak{p} une sous-algèbre parabolique minimale de \mathfrak{l} . Notons P (resp. \tilde{P}) le normalisateur de \mathfrak{p} dans L (resp. \tilde{L}). Rappelons que \mathfrak{p} est l'algèbre de Lie tangente à P et à \tilde{P} . Commençons par établir la proposition suivante :

PROPOSITION 3.3. — *Si le facteur non compact de \mathfrak{l} n'est pas isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, alors \tilde{P} est connexe.*

Démonstration. — Soit \tilde{P}_0 la composante connexe de l'élément neutre dans \tilde{P} . Alors \tilde{P}_0 est un sous-groupe distingué de \tilde{P} , et la projection $\pi : \tilde{L}/\tilde{P}_0 \rightarrow \tilde{L}/\tilde{P}$ est un revêtement galoisien de groupe de Galois \tilde{P}/\tilde{P}_0 . Or il est connu que, lorsque L est de rang réel 1, la variété $\tilde{L}/\tilde{P} \simeq L/P$ est simplement connexe, sauf si le facteur non compact de \mathfrak{l} est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. En effet, L/P est le bord de l'espace symétrique L/K . Il est par conséquent homéomorphe à une sphère, de dimension ≥ 2 sauf lorsque le facteur non compact de L est un revêtement de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Par conséquent, le groupe \tilde{P}/\tilde{P}_0 est trivial, et \tilde{P} est donc connexe. □

Puisque le cas de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est résolu par Klingler, nous excluons désormais ce cas-là, et nous supposons dorénavant que les sous-groupes paraboliques minimaux sont connexes.

Rappelons que deux sous-variétés N_1 et N_2 s'intersectent *transversalement* en x si $x \in N_1 \cap N_2$ et si on a

$$T_x N_1 + T_x N_2 = T_x M.$$

Le lemme suivant est une conséquence facile du fait qu'en rang réel 1, deux sous-groupes paraboliques minimaux distincts sont toujours opposés (voir [3]).

LEMME 3.4. — Soient \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' deux sous-algèbres paraboliques minimales, et \tilde{P} et \tilde{P}' les sous-groupes paraboliques minimaux engendrés.

- Soient $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ et $y \in \tilde{L}$. Si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, alors les disques paraboliques $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon)$ et $D_{\mathfrak{p}'}(y, \varepsilon')$ sont transverses en y .
- Soient $x, x' \in \tilde{L}$. Alors les sous-espaces paraboliques $x\tilde{P}$ et $x'\tilde{P}'$ s'intersectent transversalement, sauf si l'un est l'image de l'autre par une multiplication à gauche ou à droite.

On dira que deux sous-espaces paraboliques sont parallèles à gauche (resp. à droite) lorsque l'un est l'image de l'autre par une multiplication à gauche (resp. à droite). Notons que deux sous-espaces paraboliques parallèles à la fois à gauche et à droite sont identiques.

Preuve du lemme 3.4. — Comme, en rang réel 1, le groupe de Weil n'a que deux éléments, il découle de la *décomposition de Bruhat* (voir par exemple [22]) que l'action adjointe est 2-transitive sur les sous-algèbres paraboliques minimales. En particulier, si \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' sont distinctes, le couple $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ est conjugué à $(\mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathfrak{n}^+, \mathfrak{m} \oplus Ra \oplus \mathfrak{n}^-)$. On a donc $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = \mathfrak{l}$, d'où l'on déduit le premier point.

Soient maintenant $x, x' \in \tilde{L}$. Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$, alors les sous-espaces paraboliques $x\tilde{P}$ et $x'\tilde{P}'$ sont parallèles à gauche. Sinon, \tilde{P} et \tilde{P}' sont transverses en l'élément neutre, et la décomposition de Bruhat peut se reformuler de la façon suivante :

$$\tilde{L} = \tilde{P}'\tilde{P} \sqcup w\tilde{P},$$

où w est tel que $\mathfrak{p}' = \mathrm{Ad}_w \mathfrak{p}$. Considérons l'élément $x'^{-1}x$. Si $x'^{-1}x \in w^{-1}\tilde{P}$, on obtient $x\tilde{P}x^{-1} = x'\tilde{P}'x'^{-1}$, et $x\tilde{P}$ et $x'\tilde{P}'$ sont alors parallèles à droite. Sinon, il existe $p \in \tilde{P}$ et $p' \in \tilde{P}'$ tels que $x'^{-1}x = p'p^{-1}$. On a donc $xp = x'p'$ et $x\tilde{P}$ et $x'\tilde{P}'$ s'intersectent. De plus, cette intersection est transverse, puisque $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$. Cela prouve le deuxième point. \square

De ces remarques, et d'après la proposition 3.2, on peut déduire le résultat suivant :

PROPOSITION 3.5. — Il existe un unique sous-groupe parabolique minimal $\tilde{P}y$ de \tilde{L} tel que

- soit $\tilde{P}y \subset \partial U$ pour tout $y \in \partial U$,
- soit $y\tilde{P} \subset \partial U$ pour tout $y \in \partial U$.

Démonstration. — La preuve est essentiellement identique à celle de la proposition 2.2. Montrons d’abord que pour tout $y \in \partial U$, la sous-algèbre parabolique minimale \mathfrak{p} pour laquelle il existe $\varepsilon' > 0$ telle que $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon') \subset \partial U$ est unique.

Fixons $y \in \partial U$. Supposons qu’il existe $\varepsilon' > 0$ et \mathfrak{p} sous-algèbre de Lie parabolique minimale telle que $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon') \subset \partial U$. Considérons d’autre part une suite (y_n) convergeant vers y et une suite (\mathfrak{p}_n) convergeant vers \mathfrak{p}' telle que $D_{\mathfrak{p}_n}(y_n, \varepsilon) \subset U$ et $D_{\mathfrak{p}'}(y, \varepsilon) \subset \partial U$ (les suites (y_n) , (\mathfrak{p}_n) et ε sont donnés par la proposition 3.2). Supposons que $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$. Alors, d’après le lemme 3.4, $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon')$ et $D_{\mathfrak{p}'}(y, \varepsilon)$ sont transverses. Par conséquent, pour n assez grand, $D_{\mathfrak{p}_n}(y_n, \varepsilon)$ intersecte $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon')$, ce qui est absurde puisque $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon') \subset \partial U$. On a donc $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$, et on en déduit l’unicité de \mathfrak{p} .

Soit $y \in \partial U$ et \mathfrak{p} l’unique sous-algèbre parabolique minimale telle que $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon) \subset \partial U$. Montrons que ∂U contient en réalité tout $\tilde{P}y$. Pour cela, considérons l’ensemble A des $z \in \tilde{P}y$ tels que $D_{\mathfrak{p}}(z, \varepsilon) \subset \partial U$, et montrons que cet ensemble est ouvert et fermé dans $\tilde{P}y$. Comme, d’après le lemme 3.3, $\tilde{P}y$ est connexe, et puisque A contient y , cela impliquera le résultat.

Le fait que A est fermé vient simplement du fait que ∂U est fermé. Montrons que A est ouvert. Soit $z \in A$ et $z' \in D_{\mathfrak{p}}(z, \varepsilon/2) \subset \partial U$. Alors il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $D_{\mathfrak{p}}(z', \varepsilon') \subset \partial U$. D’autre part, la proposition 3.2 assure l’existence de \mathfrak{p}' telle que $D_{\mathfrak{p}'}(z', \varepsilon) \subset \partial U$. Par unicité de \mathfrak{p} , on a $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ et $z' \in A$. L’ensemble A est donc ouvert et fermé, d’où $A = \tilde{P}y$ et $\tilde{P}y \subset \partial U$.

Résumons. Pour tout point $y \in \partial U$, il existe un unique sous-espace parabolique contenant y et inclus dans ∂U . Considérons deux sous-espaces paraboliques inclus dans le bord de U . S’ils ne sont pas parallèles, d’après le lemme 3.4, ils s’intersectent transversalement en un point $y \in \partial U$, ce qui contredit l’unicité du sous-espace parabolique passant par y . Donc tous les sous-espaces paraboliques contenus dans le bord de U sont deux à deux parallèles.

Soient maintenant trois sous-espaces paraboliques distincts inclus dans ∂U . Si le premier et le deuxième sont parallèles à gauche, et le deuxième et le troisième sont parallèles à droite, alors le premier et le troisième ne sont pas parallèles, ce qui est absurde. On en déduit donc que les sous-espaces

paraboliques contenus dans le bord de U sont soit tous parallèles à gauche, soit tous parallèles à droite. \square

PROPOSITION 3.6. — *Quitte à intervertir l'action à gauche et l'action à droite, supposons que tous les sous-espaces paraboliques contenus dans le bord de U sont les translations à gauche d'un même sous-groupe parabolique \tilde{P} . Alors :*

- U est stable par multiplication à droite par \tilde{P} ,
- $\Gamma \subset (\tilde{L} \times \tilde{P}) / Z(\tilde{L})$.

Cette proposition est analogue à la proposition 2.3.

Démonstration. — Soit $x \in U$. Supposons que $x\tilde{P} \not\subset U$. Alors il existe $p \in \tilde{P}$ tel que $xp \in \partial U$. Mais alors $xp\tilde{P} \subset \partial U$ et en particulier $x \in \partial U$, ce qui est absurde. Donc $x\tilde{P} \subset U$. Cela prouve le premier point.

Soient maintenant $y \in \partial U$, $\gamma \in \Gamma$, et notons (γ_1, γ_2) un relèvement de γ à $\tilde{L} \times \tilde{L}$. On a $y\tilde{P} \subset \partial U$. Comme le bord de U est stable sous l'action de γ ,

$$\gamma \cdot (y\tilde{P}) = (\gamma \cdot y)\gamma_2\tilde{P}\gamma_2^{-1} \subset \partial U.$$

Or l'unique sous-espace parabolique inclus dans ∂U et contenant $\gamma \cdot y$ est $(\gamma \cdot y)\tilde{P}$. Donc $\gamma_2\tilde{P}\gamma_2^{-1} = \tilde{P}$ et $\gamma_2 \in \tilde{P}$ (\tilde{P} est en effet son propre normalisateur dans L). Cela prouve le second point. \square

3.3.3. Fin de la preuve

Nous venons de prouver que le domaine U fibre au dessus d'un ouvert Ω de $\tilde{L}/\tilde{P} = L/P$. De plus, l'action de Γ sur U préserve cette fibration. Notons $\bar{\Gamma}$ la projection de Γ dans $L \times L$, et ρ_1 et ρ_2 les projections de $\bar{\Gamma}$ sur chacun des facteurs. D'après la proposition 3.6, on a $\rho_2(\bar{\Gamma}) \subset P$, et l'action à gauche de $\rho_1(\bar{\Gamma})$ sur L/P préserve Ω . Il nous reste à prouver que $\Omega = L/P$.

Prouvons pour commencer que Ω n'est pas L/P privé d'un point. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in L$ tel que $U = \tilde{L} - x\tilde{P}$. Alors l'action de Γ préserve $x\tilde{P}$, et on a donc $\Gamma \subset (x\tilde{P}x^{-1} \times \tilde{P}) / Z(\tilde{L})$. D'après la décomposition de Bruhat, l'action de $x\tilde{P}x^{-1} \times \tilde{P}$ sur $U = \tilde{L} - x\tilde{P}$ est transitive.

La contradiction proviendra donc du résultat suivant :

THÉORÈME 5. — *Soit L un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1. Soit \tilde{P} un sous-groupe parabolique minimal de \tilde{L} et $x \in \tilde{L}$. Alors aucune variété compacte ne peut posséder une $(x\tilde{P}x^{-1} \times \tilde{P}, \tilde{L} - x\tilde{P})$ -structure. (Le facteur $x\tilde{P}x^{-1}$ agissant sur $\tilde{L} - x\tilde{P}$ par multiplication à gauche et le facteur \tilde{P} par multiplication à droite.)*

Démonstration. — Quitte à conjuguer par un élément de $\tilde{L} \times \{1\}$, on peut supposer que $x \notin \tilde{P}$. Par conséquent, $1 \in \tilde{L} - x\tilde{P}$. Posons $\tilde{P}' = x\tilde{P}x^{-1}$, et notons \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' les algèbres de Lie respectives de \tilde{P} et \tilde{P}' . Comme l'action adjointe de \tilde{L} est 2-transitive sur les sous-algèbres paraboliques minimales, on peut, quitte à conjuguer, supposer que $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathfrak{n}^+$ et $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathfrak{n}^-$.

Le stabilisateur de 1 dans $\tilde{P}' \times \tilde{P}$ est le plongement diagonal de $\tilde{P} \cap \tilde{P}'$. Son algèbre de Lie tangente est $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a$, et le vecteur a est donc invariant par l'action de ce stabilisateur. Par conséquent, a s'étend en un champ de vecteur X_a défini sur $\tilde{L} - x\tilde{P}$ et préservé par $\tilde{P}' \times \tilde{P}$. Ce champ de vecteur descendra sur toute variété munie d'une $(\tilde{P}' \times \tilde{P}, \tilde{L} - x\tilde{P})$ -structure.

D'autre part, $\tilde{L} - x\tilde{P}$ possède une forme volume ω invariante sous l'action de $\tilde{P}' \times \tilde{P}$ (restriction d'une forme volume bi-invariante sur \tilde{L}). Nous allons montrer que le champ de vecteur X_a dilate le volume ω .

Par homogénéité, il existe une constante C telle que $X_a \cdot \omega = C\omega$, et il suffit de calculer C au point 1 . Considérons e_1, \dots, e_n une base de diagonalisation de \mathfrak{l} sous l'action de ad_a . Soit λ_i la valeur propre associée à e_i . Soient E_i les champs invariants à droite prolongeant les e_i . Le volume ω étant invariant à droite, il s'écrit (à une constante près) $E_1^* \wedge \dots \wedge E_n^*$. Comme il est également invariant à gauche, il est préservé par les champs E_i .

Posons $X_a = \sum \alpha_i E_i$, où les α_i sont des fonctions de $\tilde{L} - x\tilde{P}$ dans \mathbb{R} . On a alors

$$X_a \cdot \omega = \text{div}(X_a)\omega$$

où

$$\text{div}(X_a) = \sum_i d\alpha_i(E_i).$$

Calculons cette divergence au point 1 . Notons L_g (resp. R_g) la différentielle de la multiplication à gauche (resp. à droite) par un élément g de \tilde{L} . Soit d'abord i tel que $\lambda_i \leq 0$. Alors $\exp(te_i) \subset \tilde{P}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a donc $X_a(\exp(te_i)) = R_{\exp(te_i)}a$. Comme le champ X_a est invariant à droite le long de \tilde{P} , les fonctions α_j sont constantes le long de \tilde{P} , et en particulier $d\alpha_i(e_i) = 0$ lorsque $\lambda_i \leq 0$.

Soit maintenant i tel que $\lambda_i > 0$. Alors $\exp(te_i) \subset \tilde{P}'$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned} X_a(\exp(te_i)) &= L_{\exp(te_i)}a \\ &= R_{\exp(te_i)}\text{Ad}_{\exp(te_i)}a \\ &= R_{\exp(te_i)}(a + \lambda_i te_i), \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha_i(\exp(te_i)) = \lambda_i t.$$

En prenant la dérivée en $t = 0$, on obtient finalement : $d\alpha_i(e_i) = \lambda_i$.

En conclusion, $\text{div}(X_a)$ est la somme des valeurs propres strictement positives de a . Cette divergence est donc non nulle. Or, si M est une variété compacte, ω une forme volume sur M et X un champ de vecteur, de flot Φ_t , on a

$$\int_M \Phi_t^* \omega = \int_M \omega$$

pour tout t . En particulier, le champ X ne peut pas dilater uniformément le volume ω . Par conséquent, Il n'existe pas de variété compacte localement modelée sur $(\tilde{P}' \times \tilde{P}, \tilde{L} - x\tilde{P})$. □

Nous avons donc prouvé que Ω ne peut pas être L/P privé d'un seul point. Montrons maintenant que Ω ne peut pas non plus être L/P privé de 2 points ou plus. Commençons par la remarque suivante :

PROPOSITION 3.7. — *Soit Δ un sous-groupe de L préservant un ouvert Ω de L/P dont le complémentaire contient au moins deux points. Alors l'action de Δ sur Ω est propre.*

Pour prouver cette proposition, rappelons que l'action de L sur L/P possède une dynamique "nord-sud", dans le sens suivant :

LEMME 3.8 (voir par exemple [7], lemme 4). — *Soit γ_n une suite de L sortant de tout compact. Alors il existe deux pôles x_- et $x_+ \in L/P$ (éventuellement égaux), une suite extraite γ_{n_k} , une suite de voisinages U_k de x_- et une suite de voisinages V_k de x_+ tels que*

- *Pour tout k , l'action à gauche de γ_{n_k} envoie le complémentaire de U_k dans V_k et $\gamma_{n_k}^{-1}$ envoie le complémentaire de V_k dans U_k ,*
- $\bigcap_k U_k = \{x_-\}$ et $\bigcap_k V_k = \{x_+\}$.

Ce résultat est une propriété classique des espaces L/P où L est de rang réel 1. Le point x_- (resp. x_+) est appelé *pôle répulsif* (resp. *pôle attractif*) de la suite γ_{n_k} .

Preuve de la proposition 3.7. — Considérons un sous-groupe Δ de L préservant un domaine Ω de L/P dont le complémentaire contient au moins deux points.

Montrons tout d'abord que les pôles d'une suite possédant une dynamique nord-sud sont dans le bord de Ω . Soit γ_n une suite de Δ possédant une dynamique nord-sud de pôles x_- et x_+ . Alors :

- Soit Ω^c est inclus dans $\{x_-, x_+\}$; dans ce cas, comme Ω^c contient au moins deux points, on a $\Omega^c = \{x_-, x_+\}$

— Soit il existe $x \in \Omega^c$ différent de x_- et x_+ . La dynamique nord-sud nous dit alors que $\gamma_n \cdot x$ converge vers x_+ et $\gamma_n^{-1} \cdot x$ converge vers x_- . Comme Ω^c est un fermé Δ -invariant, x_- et x_+ appartiennent à Ω^c .

Supposons que l'action de Δ sur Ω ne soit pas propre. Il existe alors un compact $F \subset \Omega$ et une suite γ_n sortant de tout compact de L telle que $\gamma_n \cdot F$ intersecte F pour tout n . Considérons n_k une extraction, et x_-, x_+, U_k, V_k comme dans le lemme 3.8. D'après la remarque précédente, x_- et x_+ sont dans $\partial\Omega$. En particulier, F ne contient aucun des deux pôles. Par conséquent, pour k assez grand, F est inclus dans le complémentaire de U_k et donc $\gamma_{n_k} \cdot F \subset V_k$. Mais pour k assez grand, F est aussi inclus dans le complémentaire de V_k . Donc pour k assez grand, $\gamma_{n_k} \cdot F$ n'intersecte pas F . Cela contredit l'hypothèse. Donc l'action est propre. \square

Revenons à notre ouvert U de \tilde{L} qui fibre au dessus de $\Omega \subset L/P$, et sur lequel $\Gamma \subset (\tilde{L} \times \tilde{P})/Z(\tilde{L})$ agit proprement discontinûment et cocompactement. Nous avons prouvé que le complémentaire de Ω contient au moins deux points. D'après la proposition 3.7, l'action de $\rho_1(\Gamma)$ sur Ω est donc propre. Nous allons montrer que $\bar{\Gamma}$ ne peut pas être discret dans $L \times P$.

P se décompose sous la forme $M \exp(\mathbb{R}a)N^+$, où $N^+ = \exp(\mathfrak{n}^+)$ est le radical nilpotent de P , où a est un élément de \mathfrak{p} dont l'action adjointe sur \mathfrak{n}^+ est diagonalisable à valeurs propres strictement positives, et où M désigne le centralisateur de a dans K . Remarquons que le sous-groupe de P engendré par $\exp(a)$ et par un élément $b \in N^+ \setminus \{1\}$ n'est pas discret. En effet, l'action adjointe de $\exp(a)$ dilate \mathfrak{n}^+ , et par conséquent, $(\exp(-na)b \exp(na))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ sans être stationnaire. L'idée de la preuve qui va suivre est d'utiliser la cocompacité de l'action de Γ sur U pour trouver des éléments de $\bar{\Gamma}$ "assez proches" de $(1, \exp(na))$ et de $(1, b)$, et conclure que $\bar{\Gamma}$ non plus n'est pas discret.

Munissons L d'une métrique invariante à droite. Soit $x \in L$ tel que $x\tilde{P}$ est inclus dans U . En particulier, $x \exp(na) \in \bar{U}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par cocompacité de l'action de Γ , il existe donc une suite $g_n = (\alpha_n, \beta_n) \in \bar{\Gamma}$ telle que $y_n = \alpha_n x \exp(na) \beta_n^{-1}$ reste dans un domaine compact de la projection U_0 de U dans L . D'après la proposition 3.5, la suite (β_n) est dans P . En projetant dans L/P , on observe que $\alpha_n x P$ reste dans un compact de Ω . Comme l'action de $\rho_1(\Gamma)$ sur Ω est propre, on en déduit que la suite α_n est bornée dans L . Posons $c_n = y_n^{-1} \alpha_n x$. La suite $\beta_n = c_n \exp(na)$ reste donc à distance bornée de $\exp(na)$.

De même, il existe une suite $h_k = (\gamma_k, \delta_k) \in \bar{\Gamma}$ telle que $z_k = \gamma_k x \times \exp(kb) \delta_k^{-1}$ reste dans un domaine compact de U_0 . Par propriété de l'action

de $\rho_1(\Gamma)$ sur L/P , la suite γ_k est bornée dans L , et la suite δ_k s'écrit alors $\delta_k = d_k \exp(kb)$, où $d_k = z_k^{-1} \gamma_k x$ est bornée.

Notons B un domaine compact exponentiellement convexe de P tel que les suites c_n et d_k restent dans B . On notera B^r l'ensemble des éléments qui s'écrivent comme produit de r éléments de B . Pour tout n positif, l'action adjointe de $\exp(-na)$ fixe $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a$ et contracte \mathfrak{n}^+ , et on a donc $\exp(-na)B \exp(na) \subset B$. De plus, pour tout élément ν de N^+ , la suite $\exp(-na)\nu \exp(na)$ converge vers $\mathbf{1}$ et est donc contenue dans B pour n suffisamment grand. On en déduit aisément que la suite $\beta_n^{-1} \delta_k \beta_n$ reste bornée lorsque n tend vers $+\infty$, quelle que soit la valeur de k . Supposons que cette suite ne prenne qu'un nombre fini de valeurs. Alors il existe des entiers n et m arbitrairement grands tels que

$$\beta_n^{-1} \delta_k \beta_n = \beta_{n+m}^{-1} \delta_k \beta_{m+n}.$$

On a alors

$$\exp(kb) = d_k^{-1} c_n \exp(-ma) c_{n+m}^{-1} \delta_k c_{n+m} \exp(ma) c_n^{-1},$$

d'où

$$\exp(kb) \in B^4 \exp(-ma) \exp(kb) \exp(ma) B^3.$$

En choisissant m assez grand, on obtient

$$\exp(kb) \in B^8.$$

Or B^8 est compact, et cela est donc impossible pour k suffisamment grand. Pour un bon choix de k , la suite $\beta_n^{-1} \delta_k \beta_n$ est donc bornée et prend une infinité de valeurs. D'autre part, la suite $\alpha_n^{-1} \gamma_k \alpha_n$ est également bornée car α_n est bornée. Par conséquent, la suite $g_n^{-1} h_k g_n \in \bar{\Gamma}$ est bornée et prend une infinité de valeurs. $\bar{\Gamma}$ n'est donc pas discret dans $L \times P$.

On prouverait par le même raisonnement que Γ n'est pas discret dans $(\tilde{L} \times \tilde{P}) / Z(\tilde{L})$. (Il suffit pour cela d'écrire les suites (α_n) et (γ_k) sous la forme $\alpha_n = \bar{\alpha}_n + t_n$ et $\gamma_k = \bar{\gamma}_k + t'_k$, où $\bar{\alpha}_n$ et $\bar{\gamma}_k$ sont bornées et t_n et t'_k sont dans le centre de $(\tilde{L} \times \tilde{P}) / Z(\tilde{L})$.) Or ceci contredit le fait que Γ agisse proprement discontinûment sur un ouvert de \tilde{L} .

Ceci achève de prouver que le complémentaire de Ω ne contient pas plus de deux points. Par conséquent, $\Omega = L/P$, $U = \tilde{L}$, et le théorème est prouvé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. BENOIST, « Convexes divisibles. IV. Structure du bord en dimension 3 », *Invent. Math.* **164** (2006), n° 2, p. 249-278.

- [2] A. BOREL, « Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces », *Topology* **2** (1963), p. 111-122.
- [3] A. BOREL & J. TITS, « Groupes réductifs », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **27** (1965), p. 55-150.
- [4] Y. CARRIÈRE, « Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines », *Invent. Math.* **95** (1989), n° 3, p. 615-628.
- [5] S. DUMITRESCU & A. ZEGHIB, « Global rigidity of holomorphic Riemannian metrics on compact complex 3-manifolds », *Math. Ann.* **345** (2009), n° 1, p. 53-81.
- [6] C. EHRESMANN, « Sur les Espaces localement homogènes », *Enseign. Math.* **35** (1936), p. 317-333.
- [7] C. FRANCES, « Sur le groupe d'automorphismes des géométries paraboliques de rang 1 », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **40** (2007), n° 5, p. 741-764.
- [8] D. FRIED, W. GOLDMAN & M. W. HIRSCH, « Affine manifolds with nilpotent holonomy », *Comment. Math. Helv.* **56** (1981), n° 4, p. 487-523.
- [9] D. GALLO, M. KAPOVICH & A. MARDEN, « The monodromy groups of Schwarzian equations on closed Riemann surfaces », *Ann. of Math. (2)* **151** (2000), n° 2, p. 625-704.
- [10] É. GHYS, « Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $SL(2, \mathbb{C})$ », *J. Reine Angew. Math.* **468** (1995), p. 113-138.
- [11] W. GOLDMAN & M. W. HIRSCH, « The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds », *Trans. Amer. Math. Soc.* **286** (1984), n° 2, p. 629-649.
- [12] W. M. GOLDMAN, « Nonstandard Lorentz space forms », *J. Differential Geom.* **21** (1985), n° 2, p. 301-308.
- [13] ———, « Locally homogeneous geometric manifolds », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II* (New Delhi), Hindustan Book Agency, 2010, p. 717-744.
- [14] M. GROMOV, « Rigid transformation groups », in *Géométrie différentielle (Paris, 1986)*, Travaux en Cours, vol. 33, Hermann, Paris, 1988, p. 65-139.
- [15] M. GUÉDIRI & J. LAFONTAINE, « Sur la complétude des variétés pseudo-riemanniennes », *J. Geom. Phys.* **15** (1995), n° 2, p. 150-158.
- [16] F. GUÉRITAUD, O. GUICHARD, F. KASSEL & A. WIENHARD, « Anosov representations and proper actions », <http://arxiv.org/abs/1502.03811>.
- [17] F. GUÉRITAUD & F. KASSEL, « Maximally stretched laminations on geometrically finite hyperbolic manifolds », <http://arxiv.org/abs/1307.0250>, à paraître à *Geometry & Topology*.
- [18] K. JO & I. KIM, « Convex affine domains and Markus conjecture », *Math. Z.* **248** (2004), n° 1, p. 173-182.
- [19] F. KASSEL, « Proper actions on corank-one reductive homogeneous spaces », *J. Lie Theory* **18** (2008), n° 4, p. 961-978.
- [20] ———, « Quotients compacts d'espaces homogènes réels ou p -adiques », Thèse, Université de Paris-Sud 11, 2009.
- [21] B. KLINGLER, « Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante », *Math. Ann.* **306** (1996), n° 2, p. 353-370.
- [22] A. W. KNAPP, *Lie groups beyond an introduction*, second éd., Progress in Mathematics, vol. 140, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002, xviii+812 pages.
- [23] T. KOBAYASHI, « On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with non-compact isotropy subgroups », *J. Geom. Phys.* **12** (1993), n° 2, p. 133-144.

- [24] ———, « Deformation of compact Clifford-Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds », *Math. Ann.* **310** (1998), p. 394-408.
- [25] R. S. KULKARNI & U. PINKALL, « Uniformization of geometric structures with applications to conformal geometry », in *Differential geometry, Peñíscola 1985*, Lecture Notes in Math., vol. 1209, Springer, Berlin, 1986, p. 190-209.
- [26] R. S. KULKARNI & F. RAYMOND, « 3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces », *J. Differential Geom.* **21** (1985), n° 2, p. 231-268.
- [27] L. MARKUS, *Cosmological models in differential geometry*, University of Minnesota Press, 1963.
- [28] F. SALEIN, « Variétés anti-de Sitter de dimension 3 exotiques », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), n° 1, p. 257-284.
- [29] J. D. SMILLIE, *Affinely flat manifolds*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1977, PhD Thesis—University of Chicago.
- [30] W. THURSTON, *The Geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University Press, 1980.
- [31] J. A. WOLF, *Spaces of constant curvature*, third éd., Publish or Perish Inc., Boston, Mass., 1974, xv+408 pages.
- [32] A. ZEGHIB, « On closed anti-de Sitter spacetimes », *Math. Ann.* **310** (1998), n° 4, p. 695-716.

Manuscrit reçu le 12 juillet 2013,
révisé le 6 mars 2014,
accepté le 13 juin 2014.

Nicolas THOLOZAN
University of Luxembourg
Campus Kirchberg
Mathematics Research Unit, BLG
6, rue Richard Coudenhove-Kalergi
L-1359 Luxembourg (Luxembourg)
nicolas.tholozan@uni.lu.