



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Fanny KASSEL

**Quotients compacts des groupes ultramétriques de rang un**

Tome 60, n° 5 (2010), p. 1741-1786.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2010\\_\\_60\\_5\\_1741\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2010__60_5_1741_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# QUOTIENTS COMPACTS DES GROUPES ULTRAMÉTRIQUES DE RANG UN

par Fanny KASSEL

---

RÉSUMÉ. — Soit  $G$  l'ensemble des points d'un groupe algébrique semi-simple connexe de rang relatif un sur un corps local ultramétrique. Nous décrivons tous les sous-groupes discrets de type fini sans torsion de  $G \times G$  qui agissent proprement et cocompactement sur  $G$  par multiplication à gauche et à droite. Nous montrons qu'après une petite déformation dans  $G \times G$  un tel sous-groupe agit encore librement, proprement discontinûment et cocompactement sur  $G$ .

ABSTRACT. — Let  $G$  be the set of points of a connected semisimple algebraic group of relative rank one over a non-Archimedean local field. We describe all finitely generated torsion-free discrete subgroups of  $G \times G$  acting properly discontinuously and cocompactly on  $G$  by left and right multiplication. We prove that after a small deformation in  $G \times G$  such a subgroup keeps acting freely, properly discontinuously, and cocompactly on  $G$ .

## 1. Introduction

Soient  $\mathbf{k}$  un corps local et  $G$  l'ensemble des  $\mathbf{k}$ -points d'un groupe algébrique semi-simple connexe  $\mathbf{G}$  sur  $\mathbf{k}$ , de  $\mathbf{k}$ -rang un. Nous nous intéressons aux sous-groupes discrets  $\Gamma$  de  $G \times G$  qui agissent librement, proprement et cocompactement sur  $G$  par multiplication à gauche et à droite. De manière équivalente, ce sont les sous-groupes discrets  $\Gamma$  de  $G \times G$  qui agissent librement, proprement et cocompactement sur l'espace homogène  $(G \times G)/\Delta_G$ , où  $\Delta_G$  désigne la diagonale de  $G \times G$ . Pour un tel groupe  $\Gamma$ , on dit que le quotient  $\Gamma \backslash (G \times G)/\Delta_G$  est une *forme de Clifford-Klein compacte*, ou plus simplement un *quotient compact*, de  $(G \times G)/\Delta_G$ .

---

*Mots-clés* : sous-groupes discrets des groupes  $p$ -adiques, actions propres, quotients compacts, isométries d'arbres réels simpliciaux, outre-espace.

*Classification math.* : 20G25, 22E40, 57M15, 57S30.

Pour  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ , par exemple, les quotients compacts de  $(G \times G)/\Delta_G$  ont été largement étudiés par W. M. Goldman [11], R. S. Kulkarni et F. Raymond [17], B. Klingler [13], F. Salein [21], [22]. Ils apparaissent naturellement en géométrie lorentzienne : les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3, c'est-à-dire les variétés lorentziennes compactes de dimension 3 de courbure sectionnelle constante  $< 0$ , sont précisément les revêtements finis des quotients compacts de  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))/\Delta_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$  (à une isométrie et à la renormalisation de la métrique près). Ceci résulte de la complétude de ces variétés [13] et d'un résultat de finitude du niveau [17] (cf. l'introduction de [22]). É. Ghys [10] a étudié les quotients compacts de  $(G \times G)/\Delta_G$  pour  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , en lien avec les déformations de structures complexes sur les variétés compactes homogènes sous  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . Enfin, T. Kobayashi [15], [16] a obtenu des résultats sur les quotients compacts de  $(G \times G)/\Delta_G$  pour des groupes réels semi-simples  $G$  généraux. La description donnée dans [15] a récemment été complétée dans [12].

Dans cet article, nous nous intéressons au cas d'un corps local  $\mathbf{k}$  ultramétrique, c'est-à-dire d'une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  ou du corps  $\mathbb{F}_q((t))$  des séries de Laurent formelles à coefficients dans un corps fini  $\mathbb{F}_q$ . L'une de nos motivations vient de l'étude des quotients compacts de la quadrique

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{k}^4, \quad x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1\},$$

cette quadrique s'identifiant à l'espace homogène  $(\mathrm{SL}_2(\mathbf{k}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{k}))/\Delta_{\mathrm{SL}_2(\mathbf{k})}$  (cf. [12], §5.3).

Pour tout groupe algébrique semi-simple connexe  $\mathbf{G}$  sur  $\mathbf{k}$ , de  $\mathbf{k}$ -rang un, l'espace homogène  $(G \times G)/\Delta_G$  admet un quotient compact. En effet,  $G$  admet un réseau cocompact sans torsion  $\Gamma_0$  [18], et le groupe  $\Gamma_0 \times \{1\}$  agit librement, proprement et cocompactement sur  $(G \times G)/\Delta_G$ . Les questions suivantes se posent alors naturellement :

- (1) décrire tous les quotients compacts  $\Gamma \backslash (G \times G)/\Delta_G$  ;
- (2) comprendre le comportement de ces quotients compacts lorsque l'on déforme légèrement  $\Gamma$  dans  $G$  ; en particulier, déterminer si l'action de  $\Gamma$  reste proprement discontinue et cocompacte ;
- (3) établir l'existence de quotients compacts  $\Gamma \backslash (G \times G)/\Delta_G$  les plus "génériques" possibles, i.e., tels que  $\Gamma$  soit Zariski-dense dans  $G \times G$ .

Dans cet article, nous répondons aux trois questions. Nous obtenons ainsi des analogues ultramétriques de résultats connus pour  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ .

### 1.1. Énoncé des résultats principaux

Rappelons que le groupe  $G$  admet une décomposition de Cartan de la forme  $G = KZ^+K$ , où  $K$  est un sous-groupe compact maximal de  $G$  et  $Z^+$  une chambre de Weyl de l'ensemble des  $\mathbf{k}$ -points du centralisateur d'un tore  $\mathbf{k}$ -déployé maximal de  $\mathbf{G}$  ; à cette décomposition de Cartan est naturellement associée une projection de Cartan  $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  (cf. paragraphe 2.1). Par exemple, si  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ , le théorème de la base adaptée induit la décomposition de Cartan  $G = KZ^+K$  où  $K = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$  est l'ensemble des matrices de déterminant un à coefficients dans l'anneau des entiers de  $\mathbf{k}$  et  $Z^+$  l'ensemble des matrices diagonales  $\mathrm{diag}(a, a^{-1}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$  telles que  $a$  soit de valeur absolue  $\geq 1$  ; la projection de Cartan associée  $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  envoie la matrice  $\mathrm{diag}(a, a^{-1})$  sur  $2|\omega(a)|$ , où  $\omega$  désigne une valuation (additive) fixée de  $\mathbf{k}$ .

Dans [12] nous avons décrit, en fonction de  $\mu$ , les sous-groupes discrets sans torsion  $\Gamma$  de  $G \times G$  qui agissent proprement sur  $(G \times G)/\Delta_G$ . Nous établissons ici un critère pour que le quotient  $\Gamma \backslash (G \times G)/\Delta_G$  soit compact (théorème 3.1). Nous obtenons ainsi une description de tous les quotients compacts de  $(G \times G)/\Delta_G$  par des groupes discrets  $\Gamma$  de type fini sans torsion.

**THÉORÈME 1.1.** — *Soient  $\mathbf{k}$  un corps local ultramétrique,  $G$  l'ensemble des  $\mathbf{k}$ -points d'un  $\mathbf{k}$ -groupe algébrique semi-simple connexe de  $\mathbf{k}$ -rang un,  $\Delta_G$  la diagonale de  $G \times G$  et  $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  une projection de Cartan de  $G$ . À la permutation près des deux facteurs de  $G \times G$ , les sous-groupes discrets de type fini sans torsion de  $G \times G$  agissant proprement et cocompactement sur  $(G \times G)/\Delta_G$  sont les graphes de la forme*

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

où  $\Gamma_0$  est un réseau cocompact sans torsion de  $G$  et  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  un morphisme de groupes qui est admissible, au sens où pour tout  $R > 0$  on a  $\mu(\rho(\gamma)) \leq \mu(\gamma) - R$  pour presque tout  $\gamma \in \Gamma_0$ .

Nous disons ici qu'une propriété est vraie pour *presque tout*  $\gamma \in \Gamma_0$  si elle est vraie pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$  en dehors d'un ensemble fini.

Cette description est spécifique au rang un : au paragraphe 3.4 nous donnons un exemple de quotient compact  $\Gamma \backslash (G \times G)/\Delta_G$  où  $\mathrm{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) \geq 2$  et où  $\Gamma$  est le produit de deux sous-groupes infinis de  $G$ .

Le théorème 1.1 est également valable pour  $\mathbf{k} = \mathbb{R}$  d'après [15], [12] et [14]. Les arguments de [14] utilisent la dimension cohomologique de  $\Gamma$ ,

et ne se transposent pas au cas ultramétrique. Nous les remplaçons ici par des raisonnements géométriques sur l'arbre de Bruhat-Tits de  $G$ .

Nous nous intéressons ensuite à la déformation des actions proprement discontinues sur  $(G \times G)/\Delta_G$  et démontrons le résultat suivant, qui apporte une réponse affirmative à la question (2).

**THÉORÈME 1.2.** — *Soient  $\mathbf{k}$  un corps local ultramétrique,  $G$  l'ensemble des  $\mathbf{k}$ -points d'un  $\mathbf{k}$ -groupe algébrique semi-simple connexe de  $\mathbf{k}$ -rang un et  $\Gamma$  un sous-groupe discret de type fini sans torsion de  $G \times G$ . Si  $\Gamma$  agit proprement (resp. proprement et cocompactement) sur  $(G \times G)/\Delta_G$ , il existe un voisinage  $\mathcal{U} \subset \text{Hom}(\Gamma, G \times G)$  de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout  $\varphi \in \mathcal{U}$ , le groupe  $\varphi(\Gamma)$  soit discret dans  $G \times G$  et agisse proprement (resp. proprement et cocompactement) sur  $(G \times G)/\Delta_G$ .*

On note ici  $\text{Hom}(\Gamma, G \times G)$  l'ensemble des morphismes de groupes de  $\Gamma$  dans  $G \times G$ , muni de la topologie compacte-ouverte. Pour toute partie génératrice finie  $F$  de  $\Gamma$ , une suite  $(\varphi_n) \in \text{Hom}(\Gamma, G \times G)^{\mathbb{N}}$  converge vers un élément  $\varphi \in \text{Hom}(\Gamma, G \times G)$  si et seulement si  $\varphi_n(\gamma) \rightarrow \varphi(\gamma)$  pour tout  $\gamma \in F$ .

Rappelons qu'en caractéristique nulle, tout sous-groupe de type fini de  $G \times G$  est virtuellement sans torsion d'après le lemme de Selberg ([23], lem. 8); l'hypothèse "sans torsion" dans le théorème 1.2 n'est donc pas très contraignante lorsque  $\mathbf{k}$  est un corps  $p$ -adique.

Le théorème 1.2 est également valable, en supposant l'action de  $\Gamma$  cocompacte, pour  $\mathbf{k} = \mathbb{R}$  et  $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$ . En effet, cela résulte de la complétude des variétés anti-de Sitter compactes [13] et d'un principe, dû à Ehresmann, de déformation des holonomies de  $(G, X)$ -structures sur les variétés compactes (cf. [21]).

Notons que pour  $G = \text{SL}_2(\mathbb{C})$ , ou plus généralement pour un groupe réel semi-simple  $G$  de rang réel un non localement isomorphe à  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ , le théorème 1.2 n'est connu que dans le cas très particulier où  $\Gamma$  est un réseau cocompact dans l'un des deux facteurs de  $G \times G$ . Ceci est dû à É. Ghys ([10], lem. 2.1) pour  $G = \text{SL}_2(\mathbb{C})$  et à T. Kobayashi ([16], th. 2.4) pour  $G$  réel semi-simple quelconque de rang réel un.

Enfin nous répondons affirmativement à la question (3).

**PROPOSITION 1.3.** — *Soient  $\mathbf{k}$  un corps local ultramétrique,  $G$  l'ensemble des  $\mathbf{k}$ -points d'un  $\mathbf{k}$ -groupe algébrique semi-simple connexe de  $\mathbf{k}$ -rang un et  $\Delta_G$  la diagonale de  $G \times G$ . Il existe des sous-groupes discrets  $\Gamma$  de  $G \times G$  agissant librement, proprement et cocompactement sur*

$(G \times G)/\Delta_G$  et qui sont Zariski-denses dans  $G \times G$ . On peut de plus choisir  $\Gamma$  de telle sorte qu'aucune de ses deux projections naturelles sur  $G$  ne soit bornée.

### 1.2. Stratégie de démonstration

Soient  $\mathbf{k}$  un corps local ultramétrique et  $G$  l'ensemble des  $\mathbf{k}$ -points d'un  $\mathbf{k}$ -groupe algébrique semi-simple connexe de  $\mathbf{k}$ -rang un. Pour démontrer les théorèmes 1.1 et 1.2, nous étudions l'action de  $G$  sur son arbre de Bruhat-Tits, qui est un arbre simplicial sur lequel  $G$  agit proprement par isométries, avec un domaine fondamental compact. Nous rappelons la construction et les principales propriétés de cet arbre au paragraphe 2.1.

Soit  $G = KZ^+K$  une décomposition de Cartan de  $G$ . Pour démontrer le théorème 1.1, nous associons à tout élément  $g \in G \setminus K$  un point  $\zeta_g^-$  du bord de l'arbre de Bruhat-Tits de  $G$ , obtenu à partir d'une décomposition de Cartan de  $g$ . L'étude des points  $\zeta_g^-$  nous permet de montrer que pour tout sous-groupe discret de type fini sans torsion  $\Gamma_0$  de  $G$  et tout morphisme de groupes admissible  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ , si le groupe  $\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\}$  agit proprement et cocompactement sur  $(G \times G)/\Delta_G$ , alors  $\Gamma_0$  est un réseau cocompact de  $G$ . Il s'agit du point le plus délicat de la démonstration du théorème 1.1, cette démonstration faisant l'objet de la partie 3.

Quant au théorème 1.2, il découle d'un résultat général sur les groupes d'isométries d'arbres réels simpliciaux (proposition 4.1). Plus précisément, pour tout arbre réel simplicial  $X$  et toute isométrie  $g \in \text{Isom}(X)$ , notons

$$(1.1) \quad \lambda(g) = \inf_{x \in X} d(x, g \cdot x) \geq 0$$

la longueur de translation de  $g$ , où  $d$  désigne la distance de  $X$ . L'application  $\lambda : \text{Isom}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$  ainsi définie est continue pour la topologie compacte-ouverte. Par exemple, si  $X$  est l'arbre de Bruhat-Tits de  $G = \text{SL}_2(\mathbf{k})$ , on a  $\lambda(g) = |\omega(a_g) - \omega(a'_g)|$  pour tout  $g \in G$ , où  $a_g$  et  $a'_g$  désignent les deux valeurs propres de  $g$  et  $\omega$  une valuation (additive) fixée sur  $\mathbf{k}$ . Pour tout arbre réel simplicial  $X$  et tout sous-groupe discret sans torsion  $\Gamma_0$  de  $\text{Isom}(X)$ , on a  $\lambda(\gamma) > 0$  pour tout  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ . Quitte à remplacer  $X$  par le sous-arbre formé des axes de translation des éléments non triviaux de  $\Gamma_0$ , on peut supposer que le quotient  $\Gamma_0 \backslash X$  est compact. Dans la partie 4, nous montrons que dans ce cas, pour tout arbre réel simplicial  $X'$  et tout morphisme de groupes  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$ , la borne supérieure des quotients  $\lambda(\rho(\gamma))/\lambda(\gamma)$ , où  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ , est égale à la plus petite constante de

Lipschitz d'une application  $f : X \rightarrow X'$  qui est  $\rho$ -équivariante, au sens où

$$f(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot f(x)$$

pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$  et tout  $x \in X$ . Nous montrons que cette borne supérieure est atteinte sur une partie finie  $F$  de  $\Gamma_0 \setminus \{1\}$  indépendante de  $X'$  et de  $\rho$ , ce qui généralise un résultat non publié de T. White sur l'outre-espace, dont une preuve a été donnée par S. Francaviglia et A. Martino [9]. Nous en déduisons le résultat suivant.

**THÉORÈME 1.4.** — *Soient  $\mathbf{k}$  un corps local ultramétrique,  $G$  l'ensemble des  $\mathbf{k}$ -points d'un  $\mathbf{k}$ -groupe algébrique semi-simple connexe de  $\mathbf{k}$ -rang un et  $\Gamma_0$  un sous-groupe discret de type fini sans torsion de  $G$ . Pour tout morphisme de groupes  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$ , notons  $C_\rho^\mu$  la borne inférieure des réels  $C \geq 0$  tels que l'ensemble  $\{\mu(\rho(\gamma)) - C\mu(\gamma), \gamma \in \Gamma_0\} \subset \mathbb{R}$  soit majoré.*

- (1) *Il existe une partie finie  $F$  de  $\Gamma_0 \setminus \{1\}$  telle que pour tout morphisme  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  on ait*

$$C_\rho^\mu = \sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = \max_{\gamma \in F} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)},$$

où  $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  désigne l'application définie par (1.1) pour l'action de  $G$  sur son arbre de Bruhat-Tits.

- (2) *Un morphisme  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  est admissible si et seulement si  $C_\rho^\mu < 1$ .*

Ainsi, l'admissibilité d'un morphisme  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  est déterminée par un nombre fini de conditions ouvertes, ce qui prouve que l'ensemble des morphismes admissibles est ouvert dans  $\text{Hom}(\Gamma_0, G)$  pour la topologie compacte-ouverte. Ceci implique le théorème 1.2 grâce à une propriété des déformations des sous-groupes discrets de type fini sans torsion de  $G$  (lemme 5.2).

Notons que la condition suffisante du point (2) est immédiate sachant que  $\mu$  est propre et  $\Gamma_0$  discret : le morphisme  $\rho$  est admissible dès que  $C_\rho^\mu < 1$ . Réciproquement, si  $\rho$  est admissible on a l'inégalité large  $C_\rho^\mu \leq 1$ . Toute la difficulté du point (2) tient au fait que nous voulons obtenir une inégalité stricte.

### 1.3. Un résultat complémentaire

Une autre application du théorème 1.4 est la suivante.

**COROLLAIRE 1.5.** — *Soient  $\mathbf{k}$  un corps local ultramétrique,  $G$  l'ensemble des  $\mathbf{k}$ -points d'un  $\mathbf{k}$ -groupe algébrique semi-simple connexe de  $\mathbf{k}$ -rang un et  $\Gamma_0$  un réseau cocompact sans torsion de  $G$ . Il n'existe pas de morphisme de groupes admissible  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  qui soit injectif d'image discrète.*

Le corollaire 1.5 est également valable pour  $\mathbf{k} = \mathbb{R}$  et  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  comme conséquence de l'existence, due à W. Thurston [25], d'une certaine "distance asymétrique" sur l'espace de Teichmüller de  $\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}$ , où  $\mathbb{H}$  désigne le demi-plan de Poincaré (cf. [22], §4.1).

Pour démontrer le corollaire 1.5 pour un corps local  $\mathbf{k}$  ultramétrique, nous remplaçons l'espace de Teichmüller de  $\Gamma_0 \backslash \mathbb{H}$  par l'outre-espace  $\mathrm{OS}_n$  de rang  $n$  égal au rang du groupe libre  $\Gamma_0$  (cf. partie 6).

### 1.4. Plan de l'article

La partie 2 est consacrée à quelques rappels sur les décompositions de Cartan et l'arbre de Bruhat-Tits de  $G$  d'une part, sur les isométries d'arbres réels simpliciaux d'autre part. Dans la partie 3, nous démontrons le théorème 1.1 en étudiant les points  $\zeta_g^-$  du bord de l'arbre de Bruhat-Tits de  $G$  mentionnés précédemment. La partie 4 établit le résultat général sur les groupes d'isométries d'arbres réels simpliciaux que nous avons évoqué ci-dessus (proposition 4.1) ; nous en déduisons les théorèmes 1.4 puis 1.2 dans la partie 5. Dans la partie 6 nous décrivons le lien entre la proposition 4.1 et l'outre-espace et démontrons le corollaire 1.5. Enfin, la partie 7 est consacrée à la démonstration de la proposition 1.3.

**Remerciements.** Je remercie vivement Yves Benoist pour de nombreuses discussions, ainsi que Frédéric Paulin et Mladen Bestvina pour leurs indications sur l'outre-espace.

## 2. Notations et rappels

### 2.1. Arbre de Bruhat-Tits, décompositions et projections de Cartan

Soit  $\mathbf{k}$  un corps local ultramétrique, c'est-à-dire une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  ou le corps  $\mathbb{F}_q((t))$  des séries de Laurent formelles à coefficients dans un corps fini  $\mathbb{F}_q$ . Fixons une valuation (additive)  $\omega$  sur  $\mathbf{k}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .



Nous notons les  $\mathbf{k}$ -groupes algébriques par des lettres majuscules grasses (par exemple  $\mathbf{G}$ ) et leurs  $\mathbf{k}$ -points par la même lettre majuscule non grasse (par exemple  $G$ ).

2.1.1. Centralisateurs de tores et sous-groupes compacts ouverts de  $G$

Soit  $\mathbf{G}$  un  $\mathbf{k}$ -groupe algébrique semi-simple connexe de  $\mathbf{k}$ -rang un. Fixons un  $\mathbf{k}$ -tore  $\mathbf{k}$ -déployé maximal  $\mathbf{A}$  de  $\mathbf{G}$  et notons  $\mathbf{Z}$  (resp.  $\mathbf{N}$ ) son centralisateur (resp. son normalisateur) dans  $\mathbf{G}$ . Soit  $\pi$  un générateur du groupe des  $\mathbf{k}$ -caractères de  $\mathbf{A}$  et soit  $\alpha \in \mathbb{N}\pi$  une racine restreinte de  $\mathbf{A}$  dans  $\mathbf{G}$ , c'est-à-dire un poids non trivial de  $\mathbf{A}$  dans la représentation adjointe de  $\mathbf{G}$ . Quitte à remplacer  $\alpha$  par  $\alpha/2$ , on peut supposer que  $\alpha$  est indivisible, c'est-à-dire que  $\alpha/2$  n'est pas une racine. Pour tout  $\mathbf{k}$ -caractère  $\chi$  de  $\mathbf{Z}$ , la restriction de  $\chi$  à  $\mathbf{A}$  est de la forme  $n_\chi\pi$ , où  $n_\chi \in \mathbb{Z}$ . Pour  $z \in Z$  on note  $\nu(z)$  le réel défini par  $n_\chi\nu(z) = -\omega(\chi(z))$  pour tout  $\chi$ , et l'on pose

$$Z^+ = \{z \in Z, \nu(z) \geq 0\}.$$

Le groupe  $Z$  agit sur  $\mathbb{R}$  par translation selon  $\nu$ , et cette action se prolonge (de manière unique à une translation près) en une action affine de  $N$  sur  $\mathbb{R}$ . Notons  $U_\alpha$  (resp.  $U_{-\alpha}$ ) le  $\mathbf{k}$ -sous-groupe unipotent connexe de  $\mathbf{G}$  normalisé par  $\mathbf{Z}$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$  (resp.  $\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}$ ), où  $\mathfrak{g}_{i\alpha}$  désigne le sous-espace vectoriel de l'algèbre de Lie de  $\mathbf{G}$  formé des éléments  $X$  tels que  $\text{Ad}(a)(X) = \alpha(a)^i X$  pour tout  $a \in A$  ([3], prop. 21.9). Pour tout  $u \in U_\alpha \setminus \{1\}$ , l'ensemble  $N \cap U_{-\alpha} u U_{-\alpha}$  possède un unique élément, qui agit sur  $\mathbb{R}$  par la symétrie de centre  $x_u$  pour un certain  $x_u \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , posons

$$U_{\alpha,x} = \{u \in U_\alpha, u = 1 \text{ ou } x_u \leq x\};$$

d'après [6], c'est un sous-groupe de  $U_\alpha$ . On définit de même un sous-groupe  $U_{-\alpha,x}$  de  $U_{-\alpha}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $N_x = \{n \in N, n \cdot x = x\}$  et notons  $K_x$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $N_x, U_{\alpha,x}$  et  $U_{-\alpha,x}$ . Le groupe  $K_x$  est compact et ouvert dans  $G$ , et maximal pour ces propriétés.

2.1.2. Arbre de Bruhat-Tits de  $G$

On définit une relation d'équivalence sur  $G \times \mathbb{R}$  en posant  $(g, x) \sim (g', x')$  s'il existe un élément  $n \in N$  tel que  $x' = n \cdot x$  et  $g^{-1}g'n \in K_x$ . Notons  $X$  l'ensemble des classes d'équivalence de  $G \times \mathbb{R}$  pour cette relation. D'après [5] l'ensemble  $X$ , muni de la topologie quotient induite par la topologie discrète de  $G$  et la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ , est un arbre simplicial biparti de

valence  $\geq 3$ , appelé *arbre de Bruhat-Tits* de  $G$ . Il ne dépend pas du choix du  $\mathbf{k}$ -tore  $\mathbf{k}$ -déployé maximal  $\mathbf{A}$ . Le groupe  $G$  agit sur  $X$  par

$$g \cdot \overline{(g', x)} = \overline{(gg', x)},$$

où  $\overline{(g, x)}$  désigne l'image de  $(g, x) \in G \times \mathbb{R}$  dans  $X$ . C'est une action propre, cocompacte, par automorphismes d'arbre simplicial. Par construction, pour tout  $g \in G$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , le fixateur de  $\overline{(g, x)}$  dans  $G$  est le sous-groupe compact ouvert  $gK_xg^{-1}$ . D'après [5], si l'on pose  $\mathcal{A}_0 = \{1\} \times \mathbb{R}$ , alors les droites réelles plongées dans  $X$  sont exactement les ensembles  $g \cdot \mathcal{A}_0$ , où  $g \in G$ . On munit  $X$  de la distance  $d$  pour laquelle le plongement naturel de  $\{g\} \times \mathbb{R}$  dans  $X$  est une isométrie pour tout  $g \in G$ . Le groupe  $G$  agit par isométries pour cette distance, toutes les arêtes de  $X$  ont la même longueur et les droites  $g \cdot \mathcal{A}_0$  sont les géodésiques de  $X$ . Nous renvoyons le lecteur aux textes fondateurs [5] et [6] pour plus de détails, ainsi qu'à [20] pour des explications plus élémentaires et à [24], § II.1, pour le cas de  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ .

### 2.1.3. Décompositions et projections de Cartan

Notons  $K = K_{x_0}$  le fixateur dans  $G$  du sommet  $x_0 = \overline{(1, 0)}$  de  $\mathcal{A}_0$ . D'après [5] le groupe  $G$  agit transitivement sur l'ensemble des couples  $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$  où  $\mathcal{A}$  est une droite géodésique de  $X$  et  $\mathcal{C}$  une arête contenue dans  $\mathcal{A}$ . On en déduit la *décomposition de Cartan*  $G = KZ^+K$  : tout élément  $g \in G$  s'écrit  $g = k_1zk_2$ , où  $k_1, k_2 \in K$  et  $z \in Z^+$ . Si  $g = k_1zk_2 = k'_1z'k'_2$ , où  $k'_1, k'_2 \in K$  et  $z' \in Z^+$ , et si  $g \notin K$ , alors  $k_1^{-1}k'_1 \in K \cap Z$  et  $k'_2k_2^{-1} \in K \cap Z$ . Posons  $\mu(g) = \nu(z) \in \mathbb{R}^+$  ; on a

$$(2.1) \quad \mu(g) = d(x_0, g \cdot x_0),$$

donc  $\mu(g)$  ne dépend pas de l'écriture de  $g$  comme produit d'éléments de  $K$ ,  $Z^+$  et  $K$ . L'application  $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  ainsi obtenue est continue, propre, bi- $K$ -invariante ; son image est l'intersection de  $\mathbb{R}^+$  avec un réseau de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $\mu$  est la *projection de Cartan* associée à la décomposition de Cartan  $G = KZ^+K$ . Lorsque  $\mathbf{G}$  est déployé sur  $\mathbf{k}$ , on a  $\nu(Z) = \nu(A)$  et  $G = KA^+K$ , où  $A^+ = A \cap Z^+$ . Ce n'est pas le cas en général, contrairement à la situation des groupes réels.

### 2.1.4. Sous-additivité des projections de Cartan

D'après (2.1), comme  $G$  agit sur  $X$  par isométries, on a

$$(2.2) \quad \mu(gg') \leq \mu(g) + \mu(g')$$

et

$$(2.3) \quad \mu(g^{-1}) = \mu(g)$$

pour tous  $g, g' \in G$ . Rappelons que les  $\mathbf{k}$ -tores  $\mathbf{k}$ -déploysés maximaux de  $\mathbf{G}$  sont tous conjugués sur  $\mathbf{k}$  ([4], th. 4.21). D'après (2.2), si  $\mathbf{A}' = g\mathbf{A}g^{-1}$  (où  $g \in G$ ) est un autre  $\mathbf{k}$ -tore  $\mathbf{k}$ -déploysé maximal de  $\mathbf{G}$  et si  $\mu' : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une projection de Cartan associée à  $\mathbf{A}'$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que  $|\mu(g) - \mu'(g)| \leq C$  pour tout  $g \in G$ . Ainsi, à une constante additive près, l'application  $\mu$  ne dépend pas du choix de  $\mathbf{A}$ .

## 2.2. Isométries d'un arbre réel simplicial

Nous considérons ici des arbres simpliciaux au sens de [24], déf. 6. Rappelons qu'un *arbre réel simplicial*, ou  $\mathbb{R}$ -*arbre simplicial*, est un arbre simplicial muni d'une distance pour laquelle l'image de tout chemin injectif est isométrique à un segment réel. Toutes les arêtes n'ont pas nécessairement la même longueur pour cette distance.

Fixons un arbre réel simplicial  $X$  de valence  $\geq 2$ , notons  $d$  la distance sur  $X$  et  $\text{Isom}(X)$  le groupe des isométries bijectives de  $X$  envoyant sommet sur sommet et arête sur arête. Cette dernière condition est toujours vérifiée si  $X$  est de valence  $\geq 3$ . On munit  $\text{Isom}(X)$  de la topologie pour laquelle les fixateurs (point par point) des parties compactes de  $X$  forment une base de voisinages compacts ouverts de l'identité. Le groupe  $\text{Isom}(X)$  est localement compact pour cette topologie.

### 2.2.1. Isométries hyperboliques et elliptiques

Rappelons qu'un élément  $g \in \text{Isom}(X)$  est sans point fixe dans  $X$  si et seulement s'il existe une droite géodésique  $\mathcal{A}_g$ , stable par  $g$ , sur laquelle  $g$  agit par une translation non triviale ([26], prop. 3.2, ou [24], prop. 25); on note alors  $\lambda(g) > 0$  la longueur de cette translation et l'on dit que  $g$  est *hyperbolique*, d'*axe de translation*  $\mathcal{A}_g$ . La figure 2.1 illustre l'action de  $g$  sur  $X$  dans ce cas. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on a bien sûr

$$(2.4) \quad \lambda(g^n) = |n| \lambda(g).$$

Comme  $X$  est un arbre, pour tout  $x \in X$ , le projeté  $\text{pr}_g(x)$  de  $x$  sur  $\mathcal{A}_g$  est bien défini : c'est l'unique point de  $\mathcal{A}_g$  dont la distance à  $x$  est minimale. On a

$$\text{pr}_g(g \cdot x) = g \cdot \text{pr}_g(x) \quad \text{et} \quad d(g \cdot x, \mathcal{A}_g) = d(x, \mathcal{A}_g).$$

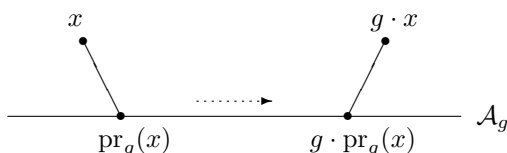


FIGURE 2.1. Action d'un élément hyperbolique

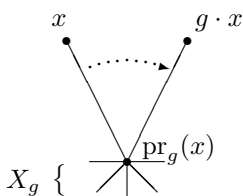


FIGURE 2.2. Action d'un élément elliptique

Les points  $x$ ,  $\text{pr}_g(x)$ ,  $g \cdot \text{pr}_g(x)$  et  $g \cdot x$  sont alignés dans cet ordre sur une même droite géodésique de  $X$ , d'où

$$\begin{aligned}
 d(x, g \cdot x) &= d(x, \text{pr}_g(x)) + d(\text{pr}_g(x), g \cdot \text{pr}_g(x)) + d(g \cdot \text{pr}_g(x), g \cdot x) \\
 (2.5) \qquad &= \lambda(g) + 2d(x, \mathcal{A}_g).
 \end{aligned}$$

En particulier on a

$$\lambda(g) = \min_{x \in X} d(x, g \cdot x) > 0.$$

Un élément  $g \in \text{Isom}(X)$  qui admet un point fixe dans  $X$  est dit *elliptique* ; l'ensemble  $X_g$  de ses points fixes est alors un sous-arbre de  $X$ . La figure 2.2 illustre l'action de  $g$  sur  $X$  dans ce cas. Si pour tout  $x \in X$  on note  $\text{pr}_g(x)$  le projeté de  $x$  sur  $X_g$ , alors  $d(\text{pr}_g(x), x) = d(\text{pr}_g(x), g \cdot x)$ . De plus, l'intersection des segments géodésiques  $[\text{pr}_g(x), x]$  et  $[\text{pr}_g(x), g \cdot x]$  est réduite à  $\{\text{pr}_g(x)\}$ , d'où

$$(2.6) \qquad d(x, g \cdot x) = d(x, \text{pr}_g(x)) + d(\text{pr}_g(x), g \cdot x) = 2d(x, X_g).$$

Par analogie avec le cas hyperbolique, on pose

$$\lambda(g) = \min_{x \in X} d(x, g \cdot x) = 0.$$

2.2.2. Bord de l'arbre  $X$ 

Comme tout espace hyperbolique au sens de Gromov, l'arbre  $X$  admet un bord  $\partial X$ , défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de demi-droites géodésiques de  $X$  pour la relation "être à distance de Hausdorff finie" ou, de manière équivalente ici, "être égales en dehors d'un compact". Si  $\xi \in \partial X$  désigne la classe d'une demi-droite géodésique  $D$ , nous dirons que  $\xi$  est l'*extrémité à l'infini* de  $D$ . Fixons un point  $x_0 \in X$  et un réel  $q > 1$ . Comme  $X$  est un arbre, pour tout  $\xi \in \partial X$  il existe une unique demi-droite géodésique  $D_{x_0}(\xi)$  d'extrémités  $x_0 \in X$  et  $\xi \in \partial X$ . Pour tous  $\xi, \xi' \in \partial X$  on pose  $\underline{d}(\xi, \xi') = q^{-r}$ , où

$$r = \sup \{d(x_0, x), x \in D_{x_0}(\xi) \cap D_{x_0}(\xi')\} \in [0, +\infty].$$

Ceci définit une distance  $\underline{d}$  sur  $\partial X$ . L'action naturelle de  $\text{Isom}(X)$  sur  $\partial X$  est continue pour cette distance. Le fixateur de  $x_0$  agit sur  $\partial X$  par isométries. Un élément  $g \in \text{Isom}(X)$  est hyperbolique si et seulement s'il agit sur  $\partial X$  avec exactement deux points fixes, l'un attractif, noté  $\xi_g^+$ , et l'autre répulsif, noté  $\xi_g^-$ ; ces points fixes sont les deux extrémités de l'axe de translation  $\mathcal{A}_g$ . Si  $g \in \text{Isom}(X)$  est elliptique et fixe  $\xi \in \partial X$ , alors  $g$  fixe (point par point) toute une demi-droite de  $X$  d'extrémité  $\xi$ .

2.2.3. Groupes discrets sans torsion d'isométries de  $X$ 

Un sous-groupe discret  $\Gamma_0$  de  $\text{Isom}(X)$  agit librement sur  $X$  si et seulement s'il est sans torsion. Dans ce cas  $\Gamma_0$  est un groupe libre ([24], th. 4) et tous ses éléments non triviaux sont hyperboliques. Plus précisément, pour tout domaine fondamental connexe  $\mathcal{D}$  de  $X$  pour l'action de  $\Gamma_0$ , si l'on pose

$$\mathcal{F} = \{\gamma \in \Gamma_0, \gamma \cdot \mathcal{D} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset\}$$

et si  $\mathcal{F}'$  désigne une partie de  $\mathcal{F}$  telle que  $\mathcal{F}$  soit l'union disjointe de  $\{1\}$ , de  $\mathcal{F}'$  et de  $\mathcal{F}'^{-1}$ , alors  $\mathcal{F}'$  est une partie génératrice libre de  $\Gamma_0$  ([24], th. 4'). Si  $\Gamma_0$  est de type fini, c'est un groupe de Schottky au sens de [18], déf. 1.4.

L'union  $X_{\Gamma_0}$  des axes de translations  $\mathcal{A}_\gamma$ , où  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ , est un sous-arbre fermé de  $X$ , globalement stable par l'action de  $\Gamma_0$ . On dit que l'action de  $\Gamma_0$  sur  $X$  est *minimale* si  $X_{\Gamma_0} = X$ . Lorsque  $\Gamma_0$  est de type fini, son action sur  $X$  est minimale si et seulement si le quotient  $\Gamma_0 \backslash X$  est un graphe fini ([1], prop. 7.9, et [2], th. 9.7). Nous appellerons  $X_{\Gamma_0}$  le *sous-arbre*  $\Gamma_0$ -*minimal* de  $X$ . Rappelons que l'*ensemble limite* de  $\Gamma_0$  dans  $\partial X$  est par définition l'adhérence dans  $\partial X$  de l'ensemble des points fixes  $\xi_\gamma^+$ , où  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ . Si l'action de  $\Gamma_0$  sur  $X$  n'est pas minimale, l'ensemble limite

de  $\Gamma_0$  dans  $\partial X$  est un fermé strict de  $\partial X$  ; ceci nous sera utile dans la démonstration du lemme 3.5.

### 3. Une condition nécessaire et suffisante de cocompacité

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème 1.1. Dans toute la partie, nous notons  $\mathbf{k}$  un corps local ultramétrique,  $G$  l'ensemble des  $\mathbf{k}$ -points d'un  $\mathbf{k}$ -groupe algébrique semi-simple connexe de  $\mathbf{k}$ -rang un et  $\Delta_G$  la diagonale de  $G \times G$ . Nous fixons une décomposition de Cartan  $G = KZ^+K$  et notons  $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  la projection de Cartan associée.

D'après [12], th. 1.3, les sous-groupes discrets sans torsion de  $G \times G$  agissant proprement sur  $(G \times G)/\Delta_G$  sont, à la permutation près des deux facteurs de  $G \times G$ , les graphes de la forme

$$\Gamma_0^\rho = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

où  $\Gamma_0$  est un sous-groupe discret sans torsion de  $G$  et  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  un morphisme de groupes admissible (au sens du théorème 1.1). Pour démontrer le théorème 1.1, il suffit donc d'établir le résultat suivant.

**THÉORÈME 3.1.** — *Soient  $\Gamma_0$  un sous-groupe discret de type fini sans torsion de  $G$  et  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  un morphisme de groupes admissible. Le quotient  $\Gamma_0^\rho \backslash (G \times G)/\Delta_G$  est compact si et seulement si le quotient  $\Gamma_0 \backslash G$  l'est.*

Pour établir le théorème 3.1, nous utilisons l'existence d'un isomorphisme

$$\begin{aligned} (\mathbf{G} \times \mathbf{G})/\Delta_{\mathbf{G}} &\longrightarrow \mathbf{G} \\ (g, h) \Delta_{\mathbf{G}} &\longmapsto gh^{-1} \end{aligned}$$

de  $(\mathbf{G} \times \mathbf{G})$ -variétés algébriques sur  $\mathbf{k}$ , où  $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$  agit sur  $(\mathbf{G} \times \mathbf{G})/\Delta_{\mathbf{G}}$  par multiplication à gauche et sur  $\mathbf{G}$  par

$$(g_1, g_2) \cdot g = g_1 g g_2^{-1}.$$

Cet isomorphisme induit un isomorphisme de  $(G \times G)$ -ensembles sur les  $\mathbf{k}$ -points.

Notons  $X$  l'arbre de Bruhat-Tits de  $G$ , muni de la distance  $d$  définie au paragraphe 2.1.2, et  $x_0 \in X$  le point donné par (2.1). Notons également  $\partial X$  le bord de  $X$ , muni de la distance  $\underline{d}$  définie au paragraphe 2.2.2. Pour démontrer l'implication directe du théorème 3.1, nous introduisons certains points  $\zeta_g^- \in \partial X$  obtenus à partir de la décomposition de Cartan  $G = KZ^+K$ .

**3.1. Points de  $\partial X$  associés à la décomposition de Cartan  $G = KZ^+K$**

Pour tout élément hyperbolique  $g \in G$ , notons  $\xi_g^+$  (resp.  $\xi_g^-$ ) son point fixe attractif (resp. répulsif) dans  $\partial X$ . Notons  $\xi_{Z^+}^-$  le point fixe répulsif commun à tous les éléments hyperboliques de  $Z^+$ .

Soit  $g \in G$  de décomposition de Cartan  $g = k_1 z k_2$ , où  $k_1, k_2 \in K$  et  $z \in Z^+$ . Si  $g \notin K$ , le point

$$(3.1) \quad \zeta_g^- = k_2^{-1} \cdot \xi_{Z^+}^- \in \partial X$$

est bien défini, car si  $g = k'_1 z' k'_2$  est une autre décomposition de Cartan de  $g$ , où  $k'_1, k'_2 \in K$  et  $z' \in Z^+$ , alors  $k'^{-1}_2 \in k^{-1}_2 Z$  (cf. paragraphe 2.1.3). Le lemme suivant montre que lorsque  $g$  est hyperbolique et  $\mu(g)$  grand, le point  $\zeta_g^-$  est proche du point fixe répulsif  $\xi_g^-$ .

LEMME 3.2. — *Pour tout élément hyperbolique  $g \in G$ , on a*

$$d(\xi_g^-, \zeta_g^-) \leq q^{-\mu(g)/2}.$$

*Démonstration.* — Soit  $g \in G$  un élément hyperbolique; écrivons  $g = k_1 z k_2$ , où  $k_1, k_2 \in K$  et  $z \in Z^+$ . Les points  $x_0, \text{pr}_{g^{-1}}(x_0), g^{-1} \cdot \text{pr}_{g^{-1}}(x_0)$  et  $g^{-1} \cdot x_0$  sont alignés dans cet ordre, donc  $g^{-1} \cdot \text{pr}_{g^{-1}}(x_0) \in D_{x_0}(\xi_g^-)$ . D'autre part, comme  $K$  fixe  $x_0$ , on a

$$g^{-1} \cdot x_0 = k_2^{-1} z^{-1} \cdot x_0 \in k_2^{-1} \cdot D_{x_0}(\xi_{Z^+}^-) = D_{x_0}(\zeta_g^-),$$

donc  $g^{-1} \cdot \text{pr}_{g^{-1}}(x_0) \in D_{x_0}(\zeta_g^-)$  car  $X$  est un arbre. On en déduit

$$d(\xi_g^-, \zeta_g^-) \leq q^{-d(x_0, g^{-1} \cdot \text{pr}_{g^{-1}}(x_0))}.$$

Or, d'après (2.1), (2.3) et (2.5) on a

$$\begin{aligned} d(x_0, g^{-1} \cdot \text{pr}_{g^{-1}}(x_0)) &= d(x_0, g^{-1} \cdot x_0) - d(g^{-1} \cdot x_0, g^{-1} \cdot \text{pr}_{g^{-1}}(x_0)) \\ &= \mu(g) - d(x_0, \mathcal{A}_g) \geq \frac{\mu(g)}{2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

L'intérêt d'introduire les points  $\zeta_g^-$  est de contrôler la projection de Cartan de certains éléments de  $G$ , comme dans le lemme suivant.

LEMME 3.3. — *Pour tout élément hyperbolique  $g \in G$  et tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe des constantes  $C, N \geq 0$  telles que pour tout  $\gamma \in G \setminus K$  vérifiant  $d(\xi_g^+, \zeta_\gamma^-) \geq \varepsilon$  on ait*

$$\mu(\gamma g^n) \geq \mu(\gamma) + \mu(g^n) - C$$

pour tout entier  $n > N$ .

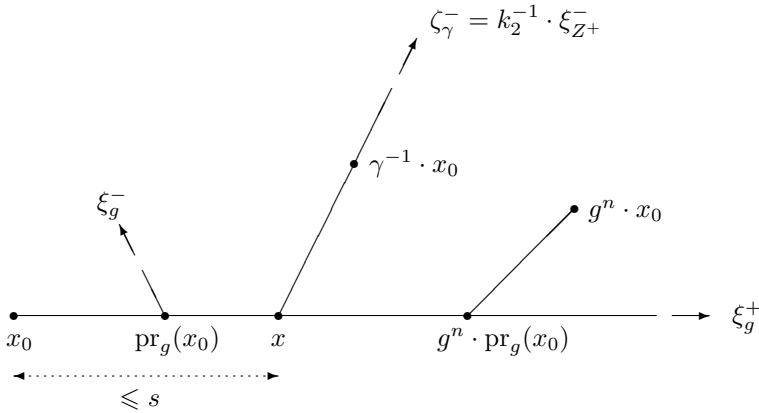


FIGURE 3.1. Illustration du lemme 3.3

*Démonstration.* — Soient  $\varepsilon \in ]0, 1]$  un réel et  $g \in G$  un élément hyperbolique. Posons

$$s = -\log_q \varepsilon \geq 0$$

et montrons que  $C = 2s$  et  $N = s/\lambda(g)$  conviennent. La figure 3.1 illustre notre raisonnement. Pour tout  $n \geq 1$ , les points  $x_0, \text{pr}_g(x_0)$  et  $g^n \cdot \text{pr}_g(x_0)$  sont alignés dans cet ordre sur la demi-droite géodésique  $D_{x_0}(\xi_g^+)$ , d'où

$$(3.2) \quad d(x_0, g^n \cdot \text{pr}_g(x_0)) \geq d(\text{pr}_g(x_0), g^n \cdot \text{pr}_g(x_0)) = n \lambda(g).$$

Soit  $\gamma \in G \setminus K$  tel que  $d(\xi_g^+, \zeta_\gamma^-) \geq \varepsilon$ . Écrivons  $\gamma = k_1 z k_2$ , où  $k_1, k_2 \in K$  et  $z \in Z^+$ . L'intersection  $D_{x_0}(\xi_g^+) \cap D_{x_0}(\zeta_\gamma^-)$  est un segment géodésique dont l'une des extrémités est  $x_0$ ; notons  $x \in X$  son autre extrémité. On a  $d(x_0, x) \leq s$  par hypothèse. Soit  $n > s/\lambda(g)$  un entier. D'après (3.2) on a

$$d(x_0, g^n \cdot \text{pr}_g(x_0)) > d(x_0, x),$$

donc les points  $x_0, x$  et  $g^n \cdot x_0$  sont alignés dans cet ordre et par (2.1) on a

$$(3.3) \quad d(x, g^n \cdot x_0) = \mu(g^n) - d(x_0, x).$$

Comme  $K$  fixe  $x_0$ , on a  $\gamma^{-1} \cdot x_0 = k_2^{-1} z^{-1} \cdot x_0$ , et ce point appartient à  $k_2^{-1} \cdot D_{x_0}(\xi_{Z^+}^-) = D_{x_0}(\zeta_\gamma^-)$ . Le point  $x$  appartient lui aussi à  $D_{x_0}(\zeta_\gamma^-)$ , donc

$$d(\gamma^{-1} \cdot x_0, x) = |d(x_0, \gamma^{-1} \cdot x_0) - d(x_0, x)|.$$

En utilisant (2.1) et (2.3), on obtient

$$(3.4) \quad d(\gamma^{-1} \cdot x_0, x) \geq \mu(\gamma) - d(x_0, x).$$



Or,  $x$  est le projeté de  $g^n \cdot x_0$  sur  $D_{x_0}(\zeta_\gamma^-)$ , donc les points  $\gamma^{-1} \cdot x_0, x$  et  $g^n \cdot x_0$  sont alignés dans cet ordre, d'où

$$(3.5) \quad d(\gamma^{-1} \cdot x_0, g^n \cdot x_0) = d(\gamma^{-1} \cdot x_0, x) + d(x, g^n \cdot x_0).$$

En utilisant (2.1), (3.3), (3.4), (3.5) et le fait que  $G$  agit sur  $X$  par isométries, on trouve

$$\begin{aligned} \mu(\gamma g^n) &= d(x_0, \gamma g^n \cdot x_0) \\ &= d(\gamma^{-1} \cdot x_0, g^n \cdot x_0) \\ &\geq \mu(\gamma) + \mu(g^n) - 2d(x_0, x), \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque  $d(x_0, x) \leq s$ . □

### 3.2. Démonstration de l'implication directe du théorème 3.1

Pour obtenir l'implication directe du théorème 3.1, nous raisonnons par contraposition : il suffit de démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 3.4. — *Soient  $\Gamma_0$  un sous-groupe discret de type fini sans torsion de  $G$  et  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  un morphisme de groupes admissible. Si  $\Gamma_0$  n'est pas cocompact dans  $G$ , alors pour tout  $R > 0$  il existe un élément  $g_R \in G$  tel que  $\mu(\gamma g_R \rho(\gamma)^{-1}) \geq R$  pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$ .*

Pour démontrer la proposition 3.4, nous établissons l'existence d'un élément hyperbolique  $g \in G$  tel que pour presque tout  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ , le point  $\zeta_\gamma^- \in \partial X$  donné par (3.1) soit suffisamment éloigné du point fixe attractif  $\xi_g^+$  (lemme 3.5). Nous utilisons ensuite le lemme 3.3.

LEMME 3.5. — *Soit  $\Gamma_0$  un sous-groupe discret de type fini sans torsion de  $G$ , non cocompact dans  $G$ . Il existe un élément hyperbolique  $g \in G$  et un réel  $\varepsilon > 0$  tels que  $\underline{d}(\xi_g^+, \zeta_\gamma^-) \geq \varepsilon$  pour presque tout  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ .*

*Démonstration.* — Comme  $\Gamma_0$  est discret, sans torsion, de type fini et non cocompact dans  $G$ , son ensemble limite dans  $\partial X$  est un fermé strict de  $\partial X$  (cf. paragraphe 2.2.3). Notons  $\mathcal{U}$  le complémentaire dans  $\partial X$  de cet ensemble limite. Soit  $g \in G$  un élément hyperbolique tel que  $\xi_g^+ \in \mathcal{U}$ . Il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\{\xi \in \partial X, \underline{d}(\xi_g^+, \xi) < 2\varepsilon\} \subset \mathcal{U}.$$

Par définition on a alors  $\underline{d}(\xi_g^+, \xi_\gamma^-) \geq 2\varepsilon$  pour tout  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ . Le lemme 3.2 implique

$$\underline{d}(\xi_g^+, \zeta_\gamma^-) \geq \underline{d}(\xi_g^+, \xi_\gamma^-) - \underline{d}(\xi_\gamma^-, \zeta_\gamma^-) \geq 2\varepsilon - q^{-\mu(\gamma)/2}$$

pour tout  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ . Or, l'application  $\mu$  est propre et le groupe  $\Gamma_0$  discret dans  $G$ , donc  $q^{-\mu(\gamma)/2} \leq \varepsilon$  pour presque tout  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ .  $\square$

Nous pouvons à présent démontrer la proposition 3.4.

*Démonstration de la proposition 3.4.* — Supposons  $\Gamma_0$  non cocompact dans  $G$ . D'après les lemmes 3.3 et 3.5, il existe un élément hyperbolique  $g \in G$  et des réels  $C, N \geq 0$  tels que pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$  en dehors d'un certain ensemble fini  $F$ , on ait

$$(3.6) \quad \mu(\gamma g^n) \geq \mu(\gamma) + \mu(g^n) - C$$

pour tout entier  $n > N$ . Soit  $R > 0$ . Comme  $\rho$  est admissible, on a

$$(3.7) \quad \mu(\rho(\gamma)) \leq \mu(\gamma) - R - C$$

pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$  en dehors d'un certain ensemble fini  $F'$ . Posons

$$R' = \max_{\gamma \in F \cup F'} (\mu(\gamma^{-1}) + \mu(\rho(\gamma))).$$

Comme  $g$  est hyperbolique, la suite  $(\mu(g^n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini avec  $n$  d'après (2.1), (2.4) et (2.5). En particulier, il existe un entier  $n > N$  tel que  $\mu(g^n) \geq R + R'$ . Fixons un tel  $n > N$  et montrons que l'élément  $g_R = g^n$  convient. D'après (2.2), (3.6) et (3.7), pour tout  $\gamma \notin (F \cup F')$  on a

$$\begin{aligned} \mu(\gamma g^n \rho(\gamma)^{-1}) &\geq \mu(\gamma g^n) - \mu(\rho(\gamma)) \\ &\geq (\mu(\gamma) + \mu(g^n) - C) - (\mu(\gamma) - R - C) \\ &\geq R \end{aligned}$$

et pour tout  $\gamma \in F \cup F'$  on a

$$\begin{aligned} \mu(\gamma g^n \rho(\gamma)^{-1}) &\geq \mu(g^n) - \mu(\gamma^{-1}) - \mu(\rho(\gamma)) \\ &\geq \mu(g^n) - R' \geq R. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 3.4.  $\square$

### 3.3. Démonstration de l'implication réciproque du théorème 3.1

Pour terminer la démonstration du théorème 3.1 (et donc du théorème 1.1), il suffit d'établir le résultat suivant.

PROPOSITION 3.6. — Soient  $\Gamma_0$  un réseau cocompact sans torsion de  $G$  et  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  un morphisme de groupes admissible. Il existe une partie compacte  $\mathcal{C}$  de  $G$  telle que

$$G = \{ \gamma g \rho(\gamma)^{-1}, \gamma \in \Gamma_0, g \in \mathcal{C} \}.$$

*Démonstration.* — Par cocompacité de  $\Gamma_0$  dans  $G$  et continuité de  $\mu$ , il existe un réel  $R > 0$  tel que

$$G = \Gamma_0 \cdot \{g \in G, \mu(g) \leq R\}.$$

Comme  $\rho$  est admissible, on a

$$\mu(\rho(\gamma)) \leq \mu(\gamma) - 2R - 1$$

pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$  en dehors d'un certain ensemble fini  $F$ . Posons  $R' = \max_{\gamma \in F} \mu(\gamma)$  et montrons que la partie

$$\mathcal{C} = \{g \in G, \mu(g) \leq R + R'\}$$

(qui est compacte par propriété de  $\mu$ ) convient. Pour cela, il suffit d'établir que pour tout élément  $g \in G$  vérifiant  $\mu(g) > R + R'$  il existe  $\gamma \in \Gamma_0$  tel que  $\mu(\gamma g \rho(\gamma)^{-1}) \leq \mu(g) - 1$ ; on peut alors conclure par récurrence.

Soit  $g \in G$  tel que  $\mu(g) > R + R'$ . D'après ce qui précède, il existe  $\gamma \in \Gamma_0$  tel que  $\mu(\gamma g) \leq R$ . Montrons que  $\mu(\gamma g \rho(\gamma)^{-1}) \leq \mu(g) - 1$ . D'après (2.2) on a

$$\mu(\gamma^{-1}) \geq \mu(g) - \mu(\gamma g) > R',$$

donc  $\gamma^{-1} \notin F$ , ce qui implique  $\mu(\rho(\gamma)^{-1}) \leq \mu(\gamma^{-1}) - 2R - 1$ . En utilisant (2.2) et (2.3), on trouve

$$\mu(\gamma^{-1}) \leq \mu(g) + \mu(g^{-1}\gamma^{-1}) \leq \mu(g) + R$$

et

$$\mu(\gamma g \rho(\gamma)^{-1}) \leq \mu(\gamma g) + \mu(\rho(\gamma)^{-1}) \leq \mu(\gamma^{-1}) - R - 1 \leq \mu(g) - 1.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 3.6. □

### 3.4. Le cas de rang supérieur

La description donnée par le théorème 1.1 est spécifique au rang un. En effet, voici un exemple de quotient compact  $\Gamma \backslash (G \times G) / \Delta_G$  où  $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) \geq 2$  et où  $\Gamma$  est le produit de deux sous-groupes infinis de  $G$ . Fixons un élément non carré  $\beta \in \mathbf{k} \setminus \mathbf{k}^2$ . Soient  $Q$  la forme quadratique sur  $\mathbf{k}^4$  donnée par

$$Q(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1^2 - \beta y_1^2) - (x_2^2 - \beta y_2^2)$$

et  $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(Q)$  le groupe spécial orthogonal de  $Q$ . Notons  $Q_1$  la restriction de  $Q$  à  $\mathbf{k}^3 \times \{0\}$  et soit  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{SO}(Q_1)$  le groupe spécial orthogonal de  $Q_1$ , vu comme sous-groupe de  $\mathbf{G}$ . Choisissons une racine carrée  $\sqrt{\beta}$  de  $\beta$  dans une clôture algébrique de  $\mathbf{k}$  et notons  $\sigma$  l'élément non trivial du groupe de

Galois de l'extension quadratique  $\mathbf{k}(\sqrt{\beta})/\mathbf{k}$ . Soient  $h$  la forme hermitienne sur  $\mathbf{k}(\sqrt{\beta})^2$  donnée par

$$h(z_1, z_2) = z_1 \sigma(z_1) - z_2 \sigma(z_2)$$

et  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{U}(h)$  le groupe unitaire de  $h$ . En identifiant  $\mathbf{k}(\sqrt{\beta})$  à  $\mathbf{k}^2$  par l'application qui à tout  $x + \sqrt{\beta}y$  associe  $(x, y)$ , on voit  $\mathbf{H}_2$  comme un sous-groupe de  $\mathbf{G}$ . Par un analogue ultramétrique de [14], prop. 4.9, le groupe  $H_1$  agit proprement et cocompactement sur  $G/H_2$ , donc  $H_1 \times H_2$  agit proprement et cocompactement sur  $(G \times G)/\Delta_G$ . Or, pour  $i \in \{1, 2\}$  le groupe  $H_i$  admet un réseau cocompact sans torsion  $\Gamma_i$  d'après [18], th. A. Le groupe  $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$  agit alors librement, proprement et cocompactement sur  $(G \times G)/\Delta_G$ .

#### 4. Longueurs de translation et constantes de Lipschitz

Reprenons les notations du paragraphe 2.2. Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant.

PROPOSITION 4.1. — *Soient  $X$  et  $X'$  deux arbres réels simpliciaux de valence  $\geq 2$ , soit  $\Gamma_0$  un sous-groupe discret sans torsion de  $\text{Isom}(X)$  tel que le quotient  $\Gamma_0 \backslash X$  soit un graphe fini, et soit  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$  un morphisme de groupes.*

- (1) *Il existe une application lipschitzienne  $\rho$ -équivariante de  $X$  dans  $X'$ .*
- (2) *La borne inférieure  $C_\rho \geq 0$  des constantes de Lipschitz de telles applications est atteinte.*
- (3) *Fixons un point  $x_0 \in X$  et soit  $F$  le sous-ensemble fini de  $\Gamma_0 \setminus \{1\}$  formé des éléments  $\gamma$  tels que  $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq 4L_0$ , où  $L_0$  désigne la somme des longueurs des arêtes de  $\Gamma_0 \backslash X$ . On a*

$$\sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = \max_{\gamma \in F} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = C_\rho.$$

On dit ici que  $f : X \rightarrow X'$  est  $\rho$ -équivariante si  $f(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot f(x)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$  et tout  $x \in X$ . On note  $d$  la distance sur  $X$  ou  $X'$ .

Remarquons que l'hypothèse que  $\Gamma_0$  est un sous-groupe discret sans torsion de  $\text{Isom}(X)$  tel que  $\Gamma_0 \backslash X$  soit un graphe fini est équivalente à l'hypothèse que  $\Gamma_0$  est un groupe libre de type fini agissant sur  $X$  librement, minimalement, par isométries (cf. paragraphe 2.2.3).

Notons que pour tout élément  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ , tout point  $x \in X$  sur l'axe de translation  $\mathcal{A}_\gamma$  et toute application  $\rho$ -équivariante et  $C$ -lipschitzienne  $f : X \rightarrow X'$ , on a

$$\lambda(\rho(\gamma)) \leq d(f(x), \rho(\gamma) \cdot f(x)) = d(f(x), f(\gamma \cdot x)) \leq C d(x, \gamma \cdot x) = C\lambda(\gamma).$$

L'inégalité

$$(4.1) \quad \sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} \leq C_\rho$$

en résulte immédiatement. Le point (3) de la proposition 4.1 affirme que cette inégalité est une égalité et que la borne supérieure dans le terme de gauche est atteinte sur un sous-ensemble fini  $F$  indépendant de  $\rho$ .

Dans le cas particulier où  $\rho$  est injectif d'image discrète et cocompacte, ce résultat est équivalent à un résultat de T. White obtenu en étudiant une certaine "distance asymétrique" sur l'outre-espace ([9], prop. 3.15) : nous renvoyons à la partie 6 pour plus de détails. Nous nous inspirons de la preuve de White, qui nous a été aimablement communiquée par Mladen Bestvina.

#### 4.1. Applications $\rho$ -équivariantes affines par morceaux

Pour démontrer la proposition 4.1, il nous suffira de considérer des applications  $\rho$ -équivariantes  $f : X \rightarrow X'$  qui sont *affines par morceaux*, au sens où pour toute arête  $e$  de  $X$  il existe une constante  $C_e \geq 0$  telle que

$$(4.2) \quad d(f(x_1), f(x_2)) = C_e d(x_1, x_2)$$

pour tous  $x_1, x_2 \in e$ .

*Remarque 4.2.* — Une application  $f : X \rightarrow X'$  affine par morceaux est entièrement déterminée par les images par  $f$  des sommets de  $X$ .

Le point (1) de la proposition 4.1 est facile.

*Démonstration du point (1) de la proposition 4.1.* — Montrons tout d'abord qu'il existe une application  $\rho$ -équivariante et affine par morceaux de  $X$  dans  $X'$ . Comme  $\Gamma_0 \backslash X$  est un graphe fini, il existe un système fini  $S$  de représentants de l'ensemble des sommets de  $X$  modulo l'action de  $\Gamma_0$ . Pour tout  $s \in S$ , choisissons un point  $x'_s \in X'$ . D'après la remarque 4.2, il existe une unique application affine par morceaux  $f : X \rightarrow X'$  telle que  $f(\gamma \cdot s) = \rho(\gamma) \cdot x'_s$  pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$  et tout  $s \in S$ . Cette application est  $\rho$ -équivariante.

D'autre part, toute application  $\rho$ -équivariante et affine par morceaux  $f : X \rightarrow X'$  est lipschitzienne. En effet, comme  $\Gamma_0 \backslash X$  est un graphe fini, il existe un système fini  $E$  de représentants de l'ensemble des arêtes de  $X$  modulo l'action de  $\Gamma_0$ . L'application  $f$  est lipschitzienne de constante  $\max_{e \in E} C_e$ , où  $C_e$  est donnée par (4.2). □

### 4.2. Une constante de Lipschitz minimale

Dans le cas particulier où  $\rho$  est injectif d'image discrète et cocompacte, le quotient  $\rho(\Gamma_0) \backslash X'$  est un graphe fini. Toute application  $\rho$ -équivariante et lipschitzienne de  $X$  dans  $X'$  induit une application lipschitzienne de  $\Gamma_0 \backslash X$  dans  $\rho(\Gamma_0) \backslash X'$ , et réciproquement toute application lipschitzienne de  $\Gamma_0 \backslash X$  dans  $\rho(\Gamma_0) \backslash X'$  se relève en une application  $\rho$ -équivariante et lipschitzienne de  $X$  dans  $X'$ ; les constantes de Lipschitz sont préservées. Le point (2) de la proposition 4.1 est alors une conséquence immédiate du théorème d'Ascoli.

Le cas général est plus compliqué : un argument supplémentaire est nécessaire pour montrer que l'on peut se ramener à des applications à valeurs dans un compact de  $X'$  et appliquer le théorème d'Ascoli. Nous allons distinguer plusieurs cas selon le nombre de points fixes du groupe  $\rho(\Gamma_0)$  dans  $\partial X'$ . Commençons par un lemme.

LEMME 4.3. — *Soient  $X'$  un arbre réel simplicial,  $g_1, \dots, g_n \in \text{Isom}(X')$  des isométries sans point fixe commun dans  $X'$  et  $R' \geq 0$  un réel. Posons*

$$\mathcal{C} = \{x' \in X', \quad d(x', g_i \cdot x') \leq R' \quad \forall i\}.$$

- Si les isométries  $g_i$  n'admettent pas de point fixe commun dans  $\partial X'$ , alors  $\mathcal{C}$  est compact.
- Si les isométries  $g_i$  admettent un unique point fixe commun  $\xi'$  dans  $\partial X'$ , il existe un entier  $1 \leq i_0 \leq n$  tel que  $g_{i_0}$  soit hyperbolique ainsi qu'une sous-demi-droite géodésique  $D$  de l'axe de translation  $\mathcal{A}_{g_{i_0}}$ , d'extrémité  $\xi'$ , telle que  $d(x', D) \leq R'/2$  pour tout  $x' \in \mathcal{C}$ .
- Si les isométries  $g_i$  admettent deux points fixes communs dans  $\partial X'$ , il existe un entier  $1 \leq i_0 \leq n$  tel que  $g_{i_0}$  soit hyperbolique et l'on a  $d(x', \mathcal{A}_{g_{i_0}}) \leq R'/2$  pour tout  $x' \in \mathcal{C}$ .

*Démonstration.* — Pour tout  $i$ , si  $g_i$  est hyperbolique, notons  $X'_i$  l'axe de translation de  $g_i$  dans  $X'$ . Si  $g_i$  est elliptique, notons  $X'_i$  l'ensemble des points fixes de  $g_i$  dans  $X'$ ; c'est un sous-arbre de  $X'$  et les points fixes de  $g_i$  dans  $\partial X'$  sont exactement les extrémités à l'infini des demi-droites

géodésiques incluses dans  $X'_i$ . D'après (2.5) et (2.6), on a  $d(x', X'_i) \leq R'/2$  pour tout  $x' \in \mathcal{C}$  et tout  $1 \leq i \leq n$ .

Supposons que les  $g_i$  n'admettent pas de point fixe commun dans  $\partial X'$  et qu'ils soient tous elliptiques. Alors l'intersection des  $X'_i$  est vide car les  $g_i$  n'admettent pas de point fixe commun dans  $X'$  par hypothèse. Comme  $X'$  est un arbre, il existe deux entiers  $i_1$  et  $i_2$  tels que  $X'_{i_1} \cap X'_{i_2} = \emptyset$ . Pour tout  $x' \in \mathcal{C}$ , nous avons vu que  $d(x', X'_i) \leq R'/2$  pour tout  $i$ . On en déduit facilement que  $d(x', x'') \leq R'/2$  pour tout  $x' \in \mathcal{C}$ , où  $x''$  désigne le projeté de  $X'_{i_1}$  sur  $X'_{i_2}$ . Ainsi, le fermé  $\mathcal{C}$  est borné, donc compact.

Supposons que les  $g_i$  n'admettent pas de point fixe commun dans  $\partial X'$  et qu'il existe un entier  $1 \leq i_0 \leq n$  tel que  $g_{i_0}$  soit hyperbolique. Alors l'intersection des  $X'_i$  est un sous-ensemble convexe fermé de la droite géodésique  $X'_{i_0}$ . Il ne contient pas de demi-droite géodésique par hypothèse, donc c'est un segment géodésique  $I$ , défini comme l'intersection de deux sous-demi-droites géodésiques  $D_1$  et  $D_2$  de  $X'_{i_0}$ . Comme  $X'$  est un arbre, il existe deux entiers  $i_1$  et  $i_2$  tels que  $X'_{i_0} \cap X'_{i_1} \subset D_1$  et  $X'_{i_0} \cap X'_{i_2} \subset D_2$ . Pour tout  $x' \in \mathcal{C}$ , nous avons vu que  $d(x', X'_i) \leq R'/2$  pour tout  $i$ . Si l'on avait  $d(x', D_1) > R'/2$ , le projeté de  $x'$  sur  $X'_{i_1}$  serait l'extrémité dans  $X'$  de la demi-droite  $D_1$  et l'on aurait  $d(x', X'_{i_1}) = d(x', D_1) > R'/2$ , d'où une contradiction. Par conséquent, on a  $d(x', D_1) \leq R'/2$  pour tout  $x' \in \mathcal{C}$ , et de même  $d(x', D_2) \leq R'/2$  pour tout  $x' \in \mathcal{C}$ . Comme  $X'$  est un arbre, on en déduit  $d(x', I) \leq R'/2$  pour tout  $x' \in \mathcal{C}$ . Ainsi, le fermé  $\mathcal{C}$  est borné, donc compact.

Supposons que les  $g_i$  admettent un unique point fixe commun  $\xi'$  dans  $\partial X'$ . Si tous les  $g_i$  étaient elliptiques, il existerait une demi-droite géodésique d'extrémité  $\xi'$  fixée (point par point) par tous les  $g_i$ , ce qui contredirait le fait que les  $g_i$  n'ont pas de point fixe commun dans  $X'$ . Par conséquent, il existe un entier  $1 \leq i_0 \leq n$  tel que  $g_{i_0}$  soit hyperbolique. L'intersection des  $X'_i$  est un sous-ensemble convexe de la droite géodésique  $X'_{i_0}$ ; comme les  $g_i$  admettent  $\xi'$  comme unique point fixe commun dans  $\partial X'$ , cette intersection est une sous-demi-droite géodésique  $D$  de  $X'_{i_0}$  d'extrémité  $\xi'$ . Considérons un entier  $1 \leq i_1 \leq n$  tel que  $X'_{i_0} \cap X'_{i_1} = D$ . Pour tout  $x' \in \mathcal{C}$ , nous avons vu que  $d(x', X'_i) \leq R'/2$  pour tout  $i$ . Si l'on avait  $d(x', D) > R'/2$ , le projeté de  $x'$  sur  $X'_{i_1}$  serait l'extrémité dans  $X'$  de la demi-droite  $D$  et l'on aurait  $d(x', X'_{i_1}) = d(x', D) > R'/2$ , d'où une contradiction. Ainsi, on a  $d(x', D) \leq R'/2$  pour tout  $x' \in \mathcal{C}$ .

Supposons que les  $g_i$  admettent deux points fixes communs dans  $\partial X'$ . Par le même argument que ci-dessus, il existe un entier  $1 \leq i_0 \leq n$  tel

que  $g_{i_0}$  soit hyperbolique. D'après ce qui précède, on a  $d(x', X'_{i_0}) \leq R'/2$  pour tout  $x' \in \mathcal{C}$ . □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le point (2) de la proposition 4.1.

*Démonstration du point (2) de la proposition 4.1.* — Si le groupe  $\rho(\Gamma_0)$  admet un point fixe  $x'$  dans  $X'$ , alors l'application constante  $f : X \rightarrow X'$  d'image  $\{x'\}$  est  $\rho$ -équivariante, de constante de Lipschitz nulle donc minimale. Dans tout le reste de la démonstration, nous supposons donc  $\rho(\Gamma_0)$  sans point fixe dans  $X'$ . Soit  $\mathcal{D}$  un domaine fondamental connexe pour l'action de  $\Gamma_0$  sur  $X$ . L'ensemble

$$\mathcal{F} = \{ \gamma \in \Gamma_0, \gamma \cdot \mathcal{D} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset \}$$

est un système générateur fini de  $\Gamma_0$ . Comme  $X$  est un arbre, pour tout  $\gamma \in \mathcal{F} \setminus \{1\}$  il existe un unique couple  $(x_\gamma, y_\gamma)$  de points de  $\mathcal{D}$  tels que  $\gamma \cdot x_\gamma = y_\gamma$ . Fixons un réel  $C > C_\rho$ . La restriction de  $X$  à  $\mathcal{D}$  induit une bijection entre l'ensemble  $\mathcal{S}$  des applications  $\rho$ -équivariantes et  $C$ -lipschitziennes  $f : X \rightarrow X'$  et l'ensemble  $\mathcal{S}_\mathcal{D}$  des applications  $C$ -lipschitziennes  $f' : \mathcal{D} \rightarrow X'$  telles que  $f'(y_\gamma) = \rho(\gamma) \cdot f'(x_\gamma)$  pour tout  $\gamma \in \mathcal{F} \setminus \{1\}$ . Cette bijection préserve les constantes de Lipschitz. Notons que  $\mathcal{S}_\mathcal{D}$  est fermé dans l'ensemble des applications continues de  $\mathcal{D}$  dans  $X'$  et uniformément équicontinu pour la topologie de la convergence uniforme. Pour pouvoir appliquer le théorème d'Ascoli, nous allons nous ramener à un sous-ensemble de  $\mathcal{S}_\mathcal{D}$  formé d'applications à valeurs dans un compact fixé de  $X'$ , en distinguant plusieurs cas selon le nombre de points fixes de  $\rho(\Gamma_0)$  dans  $\partial X'$ . Commençons par remarquer que si l'on pose

$$R = \max \{ d(x, \gamma \cdot x), x \in \mathcal{D}, \gamma \in \mathcal{F} \} > 0,$$

alors pour tout  $f' \in \mathcal{S}_\mathcal{D}$  l'image  $f'(\mathcal{D})$  est incluse dans le fermé

$$\mathcal{C} = \{ x' \in X', d(x', \rho(\gamma) \cdot x') \leq CR \quad \forall \gamma \in \mathcal{F} \}.$$

Si  $\rho(\Gamma_0)$  n'a pas de point fixe dans  $\partial X'$ , alors  $\mathcal{C}$  est compact d'après le lemme 4.3. On peut donc appliquer directement le théorème d'Ascoli, qui affirme que l'ensemble  $\mathcal{S}_\mathcal{D}$  est compact pour la topologie de la convergence uniforme. On en déduit l'existence d'un élément  $f' \in \mathcal{S}_\mathcal{D}$ , et donc d'un élément  $f \in \mathcal{S}$ , de constante de Lipschitz  $C_\rho$  minimale.

Supposons que  $\rho(\Gamma_0)$  admette un unique point fixe  $\xi'$  dans  $\partial X'$ . D'après le lemme 4.3, il existe une isométrie hyperbolique  $g \in \rho(\mathcal{F})$  et une sous-demi-droite géodésique  $D$  de l'axe de translation  $\mathcal{A}_g$ , d'extrémité  $\xi'$ , telle que  $d(f'(x), D) \leq CR/2$  pour tout  $f' \in \mathcal{S}_\mathcal{D}$  et tout  $x \in \mathcal{D}$ . Quitte à remplacer  $g$  par  $g^{-1}$ , on peut supposer que  $\xi'$  est le point fixe répulsif de  $g$



dans  $\partial X'$ . Soit  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  dont la constante de Lipschitz tend vers  $C_\rho$ . Si l'on note  $x'_0$  l'extrémité de  $D$  dans  $X'$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe un entier  $m_n \in \mathbb{N}$  tel que  $g^{m_n} \cdot f'_n(D)$  soit inclus dans le compact

$$\mathcal{C}' = \left\{ x' \in X', \quad d(x', x'_0) \leq \lambda(g) + \frac{CR}{2} \right\}.$$

Pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$ , la suite  $(g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée : en effet, comme  $\rho(\gamma)$  fixe  $\xi' \in \partial X'$  par hypothèse, il existe une demi-droite  $D_\gamma$  incluse dans  $D$  telle que  $\rho(\gamma) \cdot D_\gamma \subset D$  ; pour tout  $x' \in D_\gamma$  on a  $g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n} \cdot x' = \rho(\gamma) \cdot x'$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $(g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée par définition de la topologie sur  $\text{Isom}(X')$  (cf. paragraphe 2.2). Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que pour tout  $\gamma \in \mathcal{F}$  la suite  $(g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge. En particulier, il existe un entier  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  et tout  $\gamma \in \mathcal{F}$ , les isométries  $g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n}$  et  $g^{m_N} \rho(\gamma) g^{-m_N}$  coïncident sur le compact  $\mathcal{C}'$ . Par conséquent, pour tout  $n \geq N$  et tout  $\gamma \in \mathcal{F} \setminus \{1\}$  on a

$$\begin{aligned} (g^{m_n - m_N} \cdot f'_n)(y_\gamma) &= g^{m_n - m_N} \rho(\gamma) \cdot f'_n(x_\gamma) \\ &= g^{-m_N} (g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n}) \cdot (g^{m_n} \cdot f'_n(x_\gamma)) \\ &= g^{-m_N} (g^{m_N} \rho(\gamma) g^{-m_N}) \cdot (g^{m_n} \cdot f'_n(x_\gamma)) \\ &= \rho(\gamma) \cdot (g^{m_n - m_N} \cdot f'_n)(x_\gamma). \end{aligned}$$

Comme de plus  $g$  est une isométrie de  $X'$ , l'application  $g^{m_n - m_N} \cdot f'_n$  a même constante de Lipschitz que  $f'_n$  ; elle appartient donc à  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  pour tout  $n \geq N$ . L'image de  $g^{m_n - m_N} \cdot f'_n$  étant incluse dans le compact  $g^{-m_N} \cdot \mathcal{C}'$ , on peut appliquer le théorème d'Ascoli, qui affirme que la suite  $(g^{m_n - m_N} \cdot f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est d'adhérence compacte dans le fermé  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  pour la topologie de la convergence uniforme. En particulier, cette suite admet une sous-suite qui converge vers un certain  $f' \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ . Comme la constante de Lipschitz de  $f'_n$  tend vers  $C_\rho$ , celle de  $g^{m_n - m_N} \cdot f'_n$  aussi, et  $f'$  est de constante de Lipschitz  $C_\rho$  minimale.

Le cas où  $\rho(\Gamma_0)$  admet deux points fixes  $\xi'_1$  et  $\xi'_2$  dans  $\partial X'$  se traite de manière analogue. Plus précisément, d'après le lemme 4.3, il existe une isométrie hyperbolique  $g \in \rho(\mathcal{F})$  telle que  $d(f'(x), \mathcal{A}_g) \leq CR/2$  pour tout  $f' \in \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  et tout  $x \in \mathcal{D}$ . Soit  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  dont la constante de Lipschitz tend vers  $C_\rho$ . Si  $x'_0$  désigne un point quelconque fixé de  $\mathcal{A}_g$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe un entier  $m_n \in \mathbb{Z}$  tel que  $g^{m_n} \cdot f'_n(D)$  soit inclus dans le compact

$$\mathcal{C}' = \left\{ x' \in X', \quad d(x', x'_0) \leq \lambda(g) + \frac{CR}{2} \right\}.$$

Pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$ , la suite  $(g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée : en effet, la droite  $\mathcal{A}_g$  est (globalement) stable par  $\rho(\gamma)$  car  $\rho(\gamma)$  fixe ses extrémités  $\xi'_1, \xi'_2 \in \partial X'$  par hypothèse ; pour tout  $x' \in \mathcal{A}_g$  on a  $g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n} \cdot x' = \rho(\gamma) \cdot x'$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $(g^{m_n} \rho(\gamma) g^{-m_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée par définition de la topologie sur  $\text{Isom}(X')$  (cf. paragraphe 2.2). On conclut comme dans le cas où  $\rho(\Gamma_0)$  n'admet qu'un seul point fixe dans  $\partial X'$ .  $\square$

*Remarque 4.4.* — La constante de Lipschitz minimale  $C_\rho$  est atteinte par une application affine par morceaux.

En effet, si  $f : X \rightarrow X'$  est une application  $\rho$ -équivariante et  $C_\rho$ -lipschitzienne, alors l'application affine par morceaux  $f_a : X \rightarrow X'$  telle que  $f_a(s) = f(s)$  pour tout sommet  $s$  de  $X$  (donnée par la remarque 4.2) est encore  $\rho$ -équivariante et  $C_\rho$ -lipschitzienne.

### 4.3. Arêtes $f$ -maximales

Fixons désormais deux arbres réels simpliciaux  $X$  et  $X'$  de valence  $\geq 2$ , un sous-groupe discret sans torsion  $\Gamma_0$  de  $\text{Isom}(X)$  tel que le quotient  $\Gamma_0 \backslash X$  soit un graphe fini et un morphisme de groupes  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$ . Soit  $C_\rho \geq 0$  la constante de Lipschitz minimale donnée par le point (2) de la proposition 4.1. Fixons une application  $\rho$ -équivariante, affine par morceaux et  $C_\rho$ -lipschitzienne  $f : X \rightarrow X'$ .

Nous dirons qu'une arête  $e$  de  $X$  est  $f$ -maximale si la restriction de  $f$  à  $e$  est affine de constante  $C_\rho$ . Comme  $f$  est  $\rho$ -équivariante et comme  $\Gamma_0$  et  $\rho(\Gamma_0)$  sont des groupes d'isométries, une arête  $e$  de  $X$  est  $f$ -maximale si et seulement si l'arête  $\gamma \cdot e$  est  $f$ -maximale pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$ . En particulier, la notion d'arête  $f$ -maximale passe au quotient  $\Gamma_0 \backslash X$ .

Pour toutes arêtes  $e_1$  et  $e_2$  de  $X$  incidentes en un sommet  $s$ , notons  $e_1 \sim_f e_2$  si  $f(e_1) \cap f(e_2)$  est d'intérieur non vide dans  $X'$ . Ceci définit une relation d'équivalence  $\sim_f$  sur l'ensemble des arêtes de  $X$  d'extrémité  $s$ . Comme précédemment, cette relation induit une relation d'équivalence  $\sim_f$  sur l'ensemble des arêtes de  $\Gamma_0 \backslash X$  incidentes en  $\bar{s}$ , où  $\bar{s}$  désigne l'image de  $s$  dans  $\Gamma_0 \backslash X$ .

Pour démontrer le point (3) de la proposition 4.1, nous aimerions prouver l'existence d'un élément  $\gamma \in F$  tel que  $f$  soit affine de constante  $C_\rho$  sur l'axe de translation  $\mathcal{A}_\gamma$ . Pour cela, nous verrons qu'il suffit de prouver l'existence d'un lacet de  $\Gamma_0 \backslash X$  passant au plus deux fois par chaque sommet de  $\Gamma_0 \backslash X$ , entièrement formé d'arêtes  $f$ -maximales et dont deux arêtes consécutives

appartiennent toujours à des classes d'équivalence différentes pour la relation  $\sim_f$ . L'existence d'un tel lacet sera assurée si  $f$  vérifie une certaine condition de minimalité : il suffira que le nombre d'arêtes  $f$ -maximales dans le graphe fini  $\Gamma_0 \backslash X$  soit minimal (au sens où pour toute application  $\rho$ -équivariante, affine par morceaux et  $C_\rho$ -lipschitzienne  $g : X \rightarrow X'$ , le nombre d'arêtes  $g$ -maximales de  $\Gamma_0 \backslash X$  est supérieur au nombre d'arêtes  $f$ -maximales). Avant de démontrer l'existence d'un tel lacet (lemme 4.6), commençons par établir qu'une condition nécessaire est vérifiée.

LEMME 4.5. — *Supposons le nombre d'arêtes  $f$ -maximales de  $\Gamma_0 \backslash X$  minimal. En tout sommet de  $X$  qui est extrémité d'une arête  $f$ -maximale, il existe au moins deux classes d'équivalence d'arêtes  $f$ -maximales pour la relation  $\sim_f$ .*

*Démonstration.* — Soit  $s_0$  un sommet de  $X$ . Supposons par l'absurde que toutes les arêtes  $f$ -maximales d'extrémité  $s_0$  appartiennent à la même classe d'équivalence pour la relation  $\sim_f$  : cela signifie qu'il existe un segment géodésique  $I$  d'intérieur non vide dans  $X'$ , d'extrémité  $f(s_0)$ , qui est contenu dans l'image  $f(e)$  de toute arête  $f$ -maximale  $e$  d'extrémité  $s_0$ . D'après la remarque 4.2, pour tout  $x' \in I$  il existe une unique application affine par morceaux  $f_{x'} : X \rightarrow X'$  telle que  $f_{x'}(\gamma \cdot s_0) = \rho(\gamma) \cdot x'$  pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$  et  $f_{x'}(s) = f(s)$  pour tout sommet  $s \notin \Gamma_0 \cdot s_0$  ; elle est  $\rho$ -équivariante. Montrons que pour  $x' \in I \setminus \{f(s_0)\}$  suffisamment proche de  $f(s_0)$ , l'application  $f_{x'}$  est  $C_\rho$ -lipschitzienne et l'ensemble des arêtes  $f_{x'}$ -maximales est strictement inclus dans l'ensemble des arêtes  $f$ -maximales, ce qui contredira la minimalité de  $C_\rho$  et du nombre d'arêtes  $f$ -maximales de  $\Gamma_0 \backslash X$ .

Si  $e$  est une arête de  $X$  dont les extrémités n'appartiennent pas à l'orbite  $\Gamma_0 \cdot s_0$ , alors la restriction de  $f_{x'}$  à  $e$  est égale à la restriction de  $f$  à  $e$ . En particulier,  $e$  est  $f_{x'}$ -maximale si et seulement si elle est  $f$ -maximale.

Soit  $e$  une arête de  $X$  d'extrémités  $s_0$  et  $s \notin \Gamma_0 \cdot s_0$ . La restriction de  $f$  (resp. de  $f_{x'}$ ) à  $e$  est affine de constante

$$\frac{d(f(s_0), f(s))}{d(s_0, s)} \quad \left( \text{resp.} \quad \frac{d(x', f(s))}{d(s_0, s)} \right).$$

Si  $e$  n'est pas  $f$ -maximale, alors  $e$  n'est pas  $f_{x'}$ -maximale pour  $x'$  suffisamment proche de  $f(s_0)$ , par continuité de l'application  $x' \mapsto d(x', f(s))$ . Si  $e$  est  $f$ -maximale, alors pour  $x' \in I \setminus \{f(s_0)\}$  on a  $d(x', f(s)) < d(f(s_0), f(s))$  donc  $e$  n'est pas  $f_{x'}$ -maximale.

Soit  $e$  une arête de  $X$  d'extrémités  $s_0$  et  $\gamma \cdot s_0$ , où  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ . La restriction de  $f$  (resp. de  $f_{x'}$ ) à  $e$  est affine de constante

$$\frac{d(f(s_0), \rho(\gamma) \cdot f(s_0))}{d(s_0, \gamma \cdot s_0)} \quad \left( \text{resp.} \quad \frac{d(x', \rho(\gamma) \cdot x')}{d(s_0, \gamma \cdot s_0)} \right).$$

Si  $e$  n'est pas  $f$ -maximale, alors  $e$  n'est pas  $f_{x'}$ -maximale pour  $x'$  suffisamment proche de  $f(s_0)$ , par continuité de l'application  $x' \mapsto d(x', \rho(\gamma) \cdot x')$ . Supposons que  $e$  est  $f$ -maximale et montrons que  $e$  n'est pas  $f_{x'}$ -maximale pour  $x' \in I \setminus \{f(s_0)\}$ . Comme  $e$  est  $f$ -maximale,  $\gamma^{-1} \cdot e$  l'est aussi, donc l'intersection  $f(\gamma^{-1} \cdot e) \cap f(e)$  contient  $I$ . Or,

$$f(\gamma^{-1} \cdot e) \cap f(e) = [\rho(\gamma)^{-1} \cdot f(s_0), f(s_0)] \cap [f(s_0), \rho(\gamma) \cdot f(s_0)]$$

est le plus court chemin entre  $f(s_0)$  et  $X'_{\rho(\gamma)}$ , où  $X'_{\rho(\gamma)}$  désigne soit l'axe de translation, soit l'ensemble des points fixes de  $\rho(\gamma)$  dans  $X'$ , selon que  $\rho(\gamma)$  est hyperbolique ou elliptique (cf. paragraphe 2.2). Pour tout  $x' \in I \setminus \{f(s_0)\}$  on a donc  $d(x', X'_{\rho(\gamma)}) < d(f(s_0), X'_{\rho(\gamma)})$ . D'après (2.5) et (2.6), ceci implique

$$\begin{aligned} d(x', \rho(\gamma) \cdot x') &= \lambda(\rho(\gamma)) + 2d(x', X'_{\rho(\gamma)}) \\ &< \lambda(\rho(\gamma)) + 2d(f(s_0), X'_{\rho(\gamma)}) \\ &= d(f(s_0), \rho(\gamma) \cdot f(s_0)). \end{aligned}$$

Ainsi,  $e$  n'est pas  $f_{x'}$ -maximale, ce qui termine la démonstration. □

#### 4.4. Un lacet d'étirement maximal

Démontrons à présent, sous l'hypothèse de minimalité précédente, l'existence d'un élément  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$  tel que  $f$  soit affine de constante  $C_\rho$  sur l'axe de translation  $\mathcal{A}_\gamma$  et tel que le lacet image de  $\mathcal{A}_\gamma$  dans  $\Gamma_0 \setminus X$  passe au plus deux fois par chaque sommet.

LEMME 4.6. — *Supposons le nombre d'arêtes  $f$ -maximales de  $\Gamma_0 \setminus X$  minimal. Il existe un élément  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$  dont l'image dans  $\Gamma_0 \setminus X$  de l'axe de translation  $\mathcal{A}_\gamma$  est un lacet passant au plus deux fois par chaque sommet de  $\Gamma_0 \setminus X$ , dont toutes les arêtes sont  $f$ -maximales et dont deux arêtes consécutives appartiennent toujours à des classes d'équivalence différentes pour la relation  $\sim_f$ .*

*Démonstration.* — Notons  $\mathcal{L}_f$  l'ensemble des lacets de  $\Gamma_0 \setminus X$  dont toutes les arêtes sont  $f$ -maximales et dont deux arêtes consécutives appartiennent toujours à des classes d'équivalence différentes pour la relation  $\sim_f$ . Pour

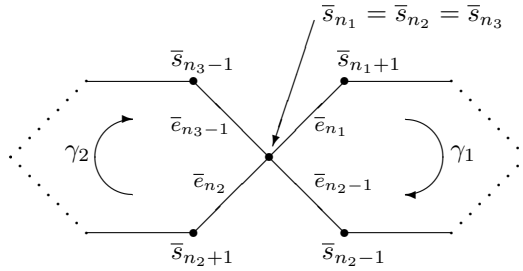


FIGURE 4.1. Illustration du lemme 4.6, dans  $\Gamma_0 \backslash X$

toute arête  $e$  (resp. pour tout sommet  $s$ ) de  $X$ , notons  $\bar{e}$  (resp.  $\bar{s}$ ) son image dans  $\Gamma_0 \backslash X$ .

Commençons par montrer que  $\mathcal{L}_f$  admet un élément non trivial. Soit  $e_0$  une arête  $f$ -maximale de  $X$ , d'extrémités  $s_0$  et  $s_1$ . Le lemme 4.5 permet de construire par récurrence une suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sommets de  $X$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les sommets  $s_n$  et  $s_{n+1}$  soient les deux extrémités d'une même arête  $f$ -maximale  $e_n$ , et les arêtes  $e_n$  et  $e_{n+1}$  appartiennent à des classes d'équivalence différentes pour la relation  $\sim_f$ . Comme  $\Gamma_0 \backslash X$  est un graphe fini, il existe trois entiers  $n_1 < n_2 < n_3$  tels que les sommets  $s_{n_1}$ ,  $s_{n_2}$  et  $s_{n_3}$  appartiennent à la même orbite de  $\Gamma_0$ . La figure 4.1 illustre la situation. Si  $\bar{e}_{n_1} \not\sim_f \bar{e}_{n_2-1}$ , l'union pour  $n_1 \leq i \leq n_2 - 1$  des arêtes  $\bar{e}_i$  appartient à  $\mathcal{L}_f$ . Si  $\bar{e}_{n_2} \not\sim_f \bar{e}_{n_3-1}$ , l'union pour  $n_2 \leq i \leq n_3 - 1$  des arêtes  $\bar{e}_i$  appartient à  $\mathcal{L}_f$ . Si  $\bar{e}_{n_1} \sim_f \bar{e}_{n_2-1}$  et  $\bar{e}_{n_2} \sim_f \bar{e}_{n_3-1}$ , alors  $\bar{e}_{n_1} \not\sim_f \bar{e}_{n_3-1}$  car  $\bar{e}_{n_2-1} \not\sim_f \bar{e}_{n_2}$ ; dans ce cas l'union pour  $n_1 \leq i \leq n_3 - 1$  des arêtes  $\bar{e}_i$  appartient à  $\mathcal{L}_f$ .

Considérons un lacet  $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_f$  qui est de longueur minimale parmi les éléments de  $\mathcal{L}_f$  (un tel lacet existe car l'ensemble des longueurs possibles de lacets de  $\Gamma_0 \backslash X$  est discret), et montrons que  $\mathcal{C}$  passe au plus deux fois par chaque sommet de  $\Gamma_0 \backslash X$ . Soit  $\bar{s}$  un sommet de  $\Gamma_0 \backslash X$  par lequel passe  $\mathcal{C}$ . Relevons  $\mathcal{C}$  en un segment géodésique  $I$  de  $X$ , de même longueur que  $\mathcal{C}$ , dont les extrémités ont pour image  $\bar{s}$  dans  $\Gamma_0 \backslash X$ . Notons  $e_0, \dots, e_N$  les arêtes de  $I$  et  $s_0, \dots, s_{N+1}$  ses sommets, numérotés de telle sorte que pour tout  $i$  l'arête  $e_i$  ait pour extrémités  $s_i$  et  $s_{i+1}$ . Soient  $0 = n_1 < \dots < n_r < n_{r+1} = N + 1$  les indices  $i$  tels que  $\bar{s}_i = \bar{s}$ . Si  $r \geq 2$ , le raisonnement ci-dessus montre que soit l'union pour  $n_1 \leq i \leq n_2 - 1$  des  $\bar{e}_i$ , soit l'union pour  $n_2 \leq i \leq n_3 - 1$  des  $\bar{e}_i$ , soit l'union pour  $n_1 \leq i \leq n_3 - 1$  des  $\bar{e}_i$  appartient à  $\mathcal{L}_f$ . Le lacet  $\mathcal{C}$  étant de longueur minimale parmi les éléments de  $\mathcal{L}_f$ , on en déduit que  $r \leq 2$ , ce qui signifie que  $\mathcal{C}$  passe au plus deux fois par  $\bar{s}$ .

Enfin, remarquons que tout lacet non trivial  $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_f$  est l'image dans  $\Gamma_0 \backslash X$  de l'axe de translation  $\mathcal{A}_\gamma$  d'un certain élément  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ . En effet, on peut relever  $\mathcal{C}$  en un segment géodésique  $I$  de  $X$  dont les extrémités sont deux sommets  $s$  et  $\gamma \cdot s$ , où  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ . Notons  $e$  (resp.  $e'$ ) l'arête de  $I$  adjacente à  $s$  (resp. à  $\gamma \cdot s$ ) ; comme  $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_f$ , on a  $\gamma^{-1} \cdot e' \not\sim_f e$ . Le projeté de  $s$  sur  $\mathcal{A}_\gamma$  appartient à la fois au segment géodésique  $[s, \gamma^{-1} \cdot s]$  et au segment géodésique  $[s, \gamma \cdot s]$ . Comme  $\gamma^{-1} \cdot e' \not\sim_f e$ , on a  $s \in \mathcal{A}_\gamma$ , d'où  $I = [s, \gamma \cdot s] \subset \mathcal{A}_\gamma$ . Ceci achève la démonstration du lemme 4.6.  $\square$

*Remarque 4.7.* — Pour  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ , l'application  $f$  est affine de constante  $C_\rho$  sur l'axe de translation  $\mathcal{A}_\gamma$  si et seulement si le lacet image de  $\mathcal{A}_\gamma$  dans  $\Gamma_0 \backslash X$  est entièrement formé d'arêtes  $f$ -maximales et deux arêtes successives de ce lacet appartiennent toujours à des classes d'équivalence différentes pour la relation  $\sim_f$ .

En effet, il suffit de voir que pour tous points  $x_1, x_2, x_3 \in X$  alignés dans cet ordre, si  $f$  est affine de constante  $C_\rho$  sur chacun des segments géodésiques  $[x_1, x_2]$  et  $[x_2, x_3]$  et si  $f([x_1, x_2]) \cap f([x_2, x_3]) = \{f(x_2)\}$ , alors  $f$  est affine de constante  $C_\rho$  sur le segment géodésique  $[x_1, x_3]$ . Ceci résulte du fait que pour tout  $x \in [x_1, x_2]$  et tout  $x' \in [x_2, x_3]$ , le triangle géodésique de sommets  $f(x), f(x_2), f(x')$  est un tripode, c'est-à-dire l'union de trois segments d'extrémité commune. La condition  $f([x_1, x_2]) \cap f([x_2, x_3]) = \{f(x_2)\}$  implique donc  $d(f(x), f(x')) = d(f(x), f(x_2)) + d(f(x_2), f(x'))$ . En particulier, si  $f$  est affine de constante  $C_\rho$  sur  $[x_1, x_2]$  et sur  $[x_2, x_3]$ , alors  $d(f(x), f(x')) = C_\rho d(x, x')$ .

Le point (3) de la proposition 4.1 est une conséquence facile du lemme 4.6 et de la remarque 4.7.

*Démonstration du point (3) de la proposition 4.1.* — Fixons un domaine fondamental connexe  $\mathcal{D}$  de  $X$  pour l'action de  $\Gamma_0$ , contenant  $x_0$ . Notons que le diamètre de  $\mathcal{D}$  est inférieur à  $L_0$ . Soit  $f : X \rightarrow X'$  une application  $\rho$ -équivariante, affine par morceaux et  $C_\rho$ -lipschitzienne telle que le nombre d'arêtes  $f$ -maximales de  $\Gamma_0 \backslash X$  soit minimal. D'après le lemme 4.6 et la remarque 4.7, il existe un élément  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$  tel que  $f$  soit affine de constante  $C_\rho$  sur l'axe de translation  $\mathcal{A}_\gamma$  et tel que le lacet image de  $\mathcal{A}_\gamma$  dans  $\Gamma_0 \backslash X$  passe au plus deux fois par chaque sommet. Quitte à remplacer  $\gamma$  par un conjugué dans  $\Gamma_0$ , on peut supposer que  $\mathcal{A}_\gamma$  rencontre  $\mathcal{D}$  ; d'après (2.5) on a alors

$$d(x_0, \gamma \cdot x_0) = \lambda(\gamma) + 2d(x_0, \mathcal{A}_\gamma) \leq 4L_0,$$

c'est-à-dire  $\gamma \in F$ . Montrons que

$$\frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = C_\rho,$$

ce qui suffira, d'après (4.1), à établir le point (3) de la proposition 4.1. Notons  $X'_{\rho(\gamma)}$  l'axe de translation ou l'ensemble des points fixes de  $\rho(\gamma)$  dans  $X'$ , selon que  $\rho(\gamma)$  est hyperbolique ou elliptique. Soit  $s$  un sommet de  $\mathcal{A}_\gamma$ . Le projeté de  $f(s)$  sur  $X'_{\rho(\gamma)}$  appartient à la fois au segment géodésique  $[f(s), \rho(\gamma)^{-1} \cdot f(s)] = [f(s), f(\gamma^{-1} \cdot s)]$  et au segment géodésique  $[f(s), \rho(\gamma) \cdot f(s)] = [f(s), f(\gamma \cdot s)]$ . Comme deux arêtes consécutives de  $\mathcal{A}_\gamma$  appartiennent toujours à des classes d'équivalence différentes pour la relation  $\sim_f$ , on en déduit  $f(s) \in X'_{\rho(\gamma)}$ . En particulier, on a  $d(f(s), \rho(\gamma) \cdot f(s)) = \lambda(\rho(\gamma))$ . Ainsi,

$$\frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = \frac{d(f(s), \rho(\gamma) \cdot f(s))}{d(s, \gamma \cdot s)} = \frac{d(f(s), f(\gamma \cdot s))}{d(s, \gamma \cdot s)} = C_\rho,$$

ce qui termine la démonstration.  $\square$

## 5. Déformation des quotients compacts de $(G \times G)/\Delta_G$

Dans cette partie, nous déduisons les théorèmes 1.4 puis 1.2 de la proposition 4.1 et d'une propriété des déformations des sous-groupes discrets de type fini sans torsion de  $G$  (lemme 5.2).

### 5.1. Démonstration du théorème 1.4

Soient  $X$  et  $X'$  deux arbres réels simpliciaux de valence  $\geq 2$  et  $\Gamma_0$  un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(X)$ . Fixons des points  $x_0 \in X$  et  $x'_0 \in X'$ . Nous dirons qu'un morphisme de groupes  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$  est *admissible* si pour tout  $R > 0$  on a  $d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) \leq d(x_0, \gamma \cdot x_0) - R$  pour presque tout  $\gamma \in \Gamma_0$ . Cette condition ne dépend pas du choix de  $x_0$  et  $x'_0$ . La proposition 4.1 implique le résultat suivant, dont le théorème 1.4 est un cas particulier.

**THÉORÈME 5.1.** — *Soient  $X$  et  $X'$  deux arbres réels simpliciaux de valence  $\geq 2$ , soit  $\Gamma_0$  un sous-groupe discret de type fini sans torsion de  $\text{Isom}(X)$  et soit  $X_{\Gamma_0}$  le sous-arbre  $\Gamma_0$ -minimal de  $X$ . Fixons des points  $x_0 \in X_{\Gamma_0}$  et  $x'_0 \in X'$ . Pour tout morphisme de groupes  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$ , notons  $C_\rho^\mu \geq 0$  la borne inférieure des réels  $C \geq 0$  tels que l'ensemble  $\{d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) - Cd(x_0, \gamma \cdot x_0), \gamma \in \Gamma_0\} \subset \mathbb{R}$  soit majoré.*

- (1) Soit  $F$  le sous-ensemble fini de  $\Gamma_0 \setminus \{1\}$  formé des éléments  $\gamma$  tels que  $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq 4L_0$ , où  $L_0$  désigne la somme des longueurs des arêtes du graphe fini  $\Gamma_0 \setminus X_{\Gamma_0}$ . Pour tout morphisme  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$  on a

$$C_\rho^\mu = \sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = \max_{\gamma \in F} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)}.$$

- (2) Un morphisme  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$  est admissible si et seulement si  $C_\rho^\mu < 1$ .

Rappelons que le sous-arbre  $\Gamma_0$ -minimal  $X_{\Gamma_0}$  de  $X$  est l'union des axes de translation des éléments non triviaux de  $\Gamma_0$ . Il est stable par  $\Gamma_0$ , et l'action de  $\Gamma_0$  sur  $X_{\Gamma_0}$  est libre, propre et cocompacte (cf. paragraphe 2.2.3).

*Démonstration.* — Soit  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$  un morphisme de groupes. Commençons par remarquer que pour tout  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$  on a

$$\frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} \leq C_\rho^\mu.$$

En effet, c'est évident si  $\rho(\gamma)$  est elliptique, et si  $\rho(\gamma)$  est hyperbolique cela résulte du fait que la suite

$$(5.1) \quad \left( d(x'_0, \rho(\gamma)^n \cdot x'_0) - \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} d(x_0, \gamma^n \cdot x_0) \right)_{n \geq 1}$$

est constante d'après (2.4) et (2.5). D'après la proposition 4.1, il existe une application  $\rho$ -équivariante  $f : X_{\Gamma_0} \rightarrow X'$  qui est lipschitzienne de constante  $C_\rho$  minimale. Pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$  on a

$$\begin{aligned} d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) &\leq d(x'_0, f(x_0)) + d(f(x_0), \rho(\gamma) \cdot f(x_0)) \\ &\quad + d(\rho(\gamma) \cdot f(x_0), \rho(\gamma) \cdot x'_0) \\ &= d(f(x_0), f(\gamma \cdot x_0)) + 2d(x'_0, f(x_0)) \\ &\leq C_\rho d(x_0, \gamma \cdot x_0) + 2d(x'_0, f(x_0)), \end{aligned}$$

donc  $C_\rho^\mu \leq C_\rho$ . Ainsi, on a

$$\sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} \leq C_\rho^\mu \leq C_\rho.$$

D'après la proposition 4.1, il existe un élément  $\gamma' \in F$  tel que

$$(5.2) \quad \frac{\lambda(\rho(\gamma'))}{\lambda(\gamma')} = \sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)} = C_\rho^\mu = C_\rho,$$

ce qui prouve le point (1) du théorème 5.1. Si  $C_\rho^\mu < 1$  alors  $\rho$  est admissible, car  $\Gamma_0$  est discret dans  $\text{Isom}(X)$  et l'action de  $\text{Isom}(X)$  sur  $X$  est propre par



définition de la topologie sur  $\text{Isom}(X)$ . Réciproquement, si  $\rho$  est admissible alors  $C_\rho^\mu \leq 1$ . D'après (5.2), si  $C_\rho^\mu = 1$  alors  $\lambda(\rho(\gamma')) = \lambda(\gamma')$ ; comme la suite donnée par (5.1) pour  $\gamma = \gamma'$  est constante, le morphisme  $\rho$  n'est pas admissible. Ceci achève la démonstration du point (2) du théorème 5.1.  $\square$

Le théorème 1.4 s'obtient à partir du théorème 5.1 en prenant pour  $X$  et  $X'$  l'arbre de Bruhat-Tits de  $G$  et en utilisant (2.1).

## 5.2. Déformation de groupes discrets d'isométries d'arbres

Soient  $\mathbf{k}$  un corps local ultramétrique et  $G$  l'ensemble des  $\mathbf{k}$ -points d'un  $\mathbf{k}$ -groupe algébrique semi-simple connexe de  $\mathbf{k}$ -rang un. Il est bien connu que pour tout réseau cocompact sans torsion  $\Gamma_0$  de  $G$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}_0 \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$  de l'inclusion naturelle tel que pour tout  $\sigma \in \mathcal{V}_0$ , le groupe  $\sigma(\Gamma_0)$  soit un réseau cocompact sans torsion de  $G$  ([18], prop. 1.7 et th. 2.1). De plus, comme les applications  $\lambda$  et  $\mu$  sont continues à valeurs discrètes, pour toute partie finie  $F$  de  $\Gamma_0$  il existe un voisinage  $\mathcal{V}_F \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$  de l'inclusion naturelle tel que pour tout  $\sigma \in \mathcal{V}_F$  on ait  $\lambda(\sigma(\gamma)) = \lambda(\gamma)$  et  $\mu(\sigma(\gamma)) = \mu(\gamma)$  pour tout  $\gamma \in F$ .

Dans ce paragraphe, nous remarquons qu'il existe un voisinage  $\mathcal{V} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$  de l'inclusion naturelle tel que pour tout  $\sigma \in \mathcal{V}$  on ait  $\lambda(\sigma(\gamma)) = \lambda(\gamma)$  et  $\mu(\sigma(\gamma)) = \mu(\gamma)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$ , sans restriction à une partie finie  $F$ . Nous nous plaçons dans le cadre plus général des groupes discrets de type fini sans torsion d'isométries d'arbres réels simpliciaux; pour démontrer le théorème 1.2 et la proposition 1.3 nous prendrons pour  $X$  l'arbre de Bruhat-Tits de  $G$ .

LEMME 5.2. — *Soit  $X$  un arbre réel simplicial de valence  $\geq 2$ , soit  $\Gamma_0$  un sous-groupe discret de type fini sans torsion de  $\text{Isom}(X)$  et soit  $X_{\Gamma_0}$  le sous-arbre  $\Gamma_0$ -minimal de  $X$ . Pour tout domaine fondamental connexe  $\mathcal{D}$  de  $X_{\Gamma_0}$  pour l'action de  $\Gamma_0$ , et pour tout point  $x_0 \in \mathcal{D}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$  de l'inclusion naturelle tel que pour tout  $\sigma \in \mathcal{V}$ ,*

- *le morphisme  $\sigma$  soit injectif,*
- *le groupe  $\sigma(\Gamma_0)$  soit discret dans  $\text{Isom}(X)$ ,*
- *l'action de  $\sigma(\Gamma_0)$  sur  $X$  soit cocompacte si celle de  $\Gamma_0$  l'est, avec  $\mathcal{D}$  comme domaine fondamental,*
- *on ait  $\lambda(\sigma(\gamma)) = \lambda(\gamma)$  et  $d(x_0, \sigma(\gamma) \cdot x_0) = d(x_0, \gamma \cdot x_0)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$ .*

Rappelons que le sous-arbre  $\Gamma_0$ -minimal  $X_{\Gamma_0}$  est l'union des axes de translation des éléments non triviaux de  $\Gamma_0$ . Il est stable par  $\Gamma_0$ , et l'action de  $\Gamma_0$  sur  $X_{\Gamma_0}$  est libre, propre et cocompacte. On a  $X_{\Gamma_0} = X$  si et seulement si l'action de  $\Gamma_0$  sur  $X$  est cocompacte (cf. paragraphe 2.2.3).

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{D}$  un domaine fondamental connexe (donc compact) de  $X_{\Gamma_0}$  pour l'action de  $\Gamma_0$  et soit  $x_0 \in \mathcal{D}$ . L'ensemble  $\mathcal{F}$  des éléments  $\gamma \in \Gamma_0$  tels que  $\gamma \cdot \mathcal{D} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$  est fini, donc

$$\mathcal{D}_1 = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{F}} \gamma \cdot \mathcal{D}$$

est un compact de  $X$ . Le fixateur (point par point)  $K_{\mathcal{D}_1}$  de  $\mathcal{D}_1$  dans  $\text{Isom}(X)$  est un voisinage de l'identité dans  $\text{Isom}(X)$ , en tant qu'intersection des fixateurs des extrémités des arêtes de  $X$  rencontrant  $\mathcal{D}_1$ . Par conséquent, l'ensemble

$$\mathcal{V} = \{ \sigma \in \text{Hom}(\Gamma_0, \text{Isom}(X)), \quad \sigma(\gamma) \in \gamma K_{\mathcal{D}_1} \quad \forall \gamma \in \mathcal{F} \}$$

est un voisinage de l'inclusion naturelle dans  $\text{Hom}(\Gamma_0, \text{Isom}(X))$ .

Pour voir que  $\mathcal{V}$  vérifie les propriétés du lemme 5.2, il suffit de montrer que pour tout  $\sigma \in \mathcal{V}$  il existe une isométrie  $\sigma$ -équivariante  $f_\sigma : X_{\Gamma_0} \rightarrow X$  fixant  $x_0$ , qui soit de plus surjective si l'action de  $\Gamma_0$  sur  $X$  est cocompacte. En effet, si une telle isométrie  $f_\sigma$  existe, alors  $\sigma$  est injectif, et  $\sigma(\Gamma_0)$  est discret dans  $\text{Isom}(X)$  et agit librement, proprement et cocompactement sur  $f_\sigma(X_{\Gamma_0})$ , avec  $f_\sigma(\mathcal{D})$  comme domaine fondamental. Pour tout  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ , l'image par  $f_\sigma$  de l'axe de translation  $\mathcal{A}_\gamma$  de  $\gamma$  est l'axe de translation  $\mathcal{A}_{\sigma(\gamma)}$  de  $\sigma(\gamma)$ , et  $\lambda(\sigma(\gamma)) = \lambda(\gamma)$ . En particulier, le sous-arbre  $\sigma(\Gamma_0)$ -minimal  $X_{\sigma(\Gamma_0)}$  de  $X$  est  $f_\sigma(X_{\Gamma_0})$ . Enfin, comme  $f_\sigma$  est une isométrie  $\sigma$ -équivariante fixant  $x_0$ , on a

$$d(x_0, \sigma(\gamma) \cdot x_0) = d(f_\sigma(x_0), f_\sigma(\gamma \cdot x_0)) = d(x_0, \gamma \cdot x_0)$$

pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$ . Si l'action de  $\Gamma_0$  sur  $X$  est cocompacte, on a  $X_{\Gamma_0} = X$ , et si de plus  $f_\sigma$  est surjective, on a  $X_{\sigma(\Gamma_0)} = f_\sigma(X_{\Gamma_0}) = X$ , donc l'action de  $\sigma(\Gamma_0)$  sur  $X$  est cocompacte.

Fixons donc un morphisme  $\sigma \in \mathcal{V}$  et établissons l'existence d'une isométrie  $\sigma$ -équivariante  $f_\sigma : X_{\Gamma_0} \rightarrow X$  fixant  $x_0$ , qui soit de plus surjective si l'action de  $\Gamma_0$  sur  $X$  est cocompacte. Pour tout  $x \in \mathcal{D}$  et tout  $\gamma \in \Gamma_0$  tels que  $\gamma \cdot x \in \mathcal{D}$ , on a  $\sigma(\gamma) \cdot x = \gamma \cdot x$ ; on peut donc définir une application  $f_\sigma : X_{\Gamma_0} \rightarrow X$  en posant  $f_\sigma(\gamma \cdot x) = \sigma(\gamma) \cdot x$  pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$  et tout  $x \in \mathcal{D}$ . Par construction,  $f_\sigma$  est  $\sigma$ -équivariante et fixe  $x_0$ . Montrons que c'est une isométrie. Comme la restriction de  $f_\sigma$  à  $\mathcal{D}_1$  est l'identité, comme  $f_\sigma$  est  $\sigma$ -équivariante et comme  $\Gamma_0$  et  $\sigma(\Gamma_0)$  sont des groupes d'isométries, la restriction de  $f_\sigma$  à tout translaté  $\gamma \cdot \mathcal{D}_1$ , où  $\gamma \in \Gamma_0$ , est une isométrie. Comme les translatés par  $\Gamma_0$  de l'intérieur de  $\mathcal{D}_1$  recouvrent  $X_{\Gamma_0}$ , on en déduit que  $f_\sigma$  est une isométrie locale. Comme  $X_{\Gamma_0}$  est un arbre, c'est une isométrie globale (cf. remarque 4.7). Supposons l'action de  $\Gamma_0$  sur  $X$  cocompacte, c'est-à-dire  $X_{\Gamma_0} = X$ , et montrons que  $f_\sigma$  est surjective. La réunion  $X_{\mathcal{D}}$

des translatés par  $\sigma(\Gamma_0)$  de  $\mathcal{D}$  est ouverte dans  $X$ , en tant que réunion des translatés par  $\sigma(\Gamma_0)$  de l'intérieur de  $\mathcal{D}_1$ . Elle est également fermée car toute suite de points de  $X_{\mathcal{D}}$  qui converge dans  $X$  est contenue à partir d'un certain rang dans une boule de  $X$  de diamètre  $\leq r$ , où  $r > 0$  désigne la distance de  $\mathcal{D}$  à  $X \setminus \mathcal{D}_1$ , donc dans un translaté par  $\sigma(\Gamma_0)$  de  $\mathcal{D}_1$  (car  $\sigma(\Gamma_0)$  est un groupe d'isométries). Par connexité de  $X$ , on a  $X_{\mathcal{D}} = X$ , et donc

$$f_{\sigma}(X) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} f_{\sigma}(\gamma \cdot \mathcal{D}) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} \sigma(\gamma) \cdot f_{\sigma}(\mathcal{D}) = X_{\mathcal{D}} = X.$$

Ainsi,  $f_{\sigma} : X \rightarrow X$  est bien surjective dans ce cas. Ceci termine la démonstration du lemme 5.2. □

Soient  $\mathbf{k}$  un corps local et  $G$  l'ensemble des  $\mathbf{k}$ -points d'un  $\mathbf{k}$ -groupe algébrique semi-simple connexe  $\mathbf{G}$ . Si  $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) = 1$ , le lemme 5.2 s'applique aux déformations des réseaux cocompacts sans torsion de  $G$  en prenant pour  $X$  l'arbre de Bruhat-Tits de  $G$ . Notons que pour  $\mathbf{k}$  de caractéristique nulle, l'existence de telles déformations non triviales est spécifique au rang un : si  $\text{rang}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) \geq 2$ , le théorème de super-rigidité de Margulis implique la rigidité locale des réseaux cocompacts irréductibles de  $G$  ([19], chap. VII, th. 5.25.A).

### 5.3. Démonstration du théorème 1.2

Le théorème 1.2 est une conséquence de [12], du théorème 1.4, du lemme 5.2 et du théorème 3.1. En effet, soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de type fini sans torsion de  $G \times G$  agissant proprement sur  $(G \times G)/\Delta_G$ . D'après [12], th. 1.3, il existe un sous-groupe discret de type fini sans torsion  $\Gamma_0$  de  $G$  et un morphisme admissible  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  tels que

$$\Gamma = \Gamma_0^{\rho} = \{(\gamma, \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\},$$

à la permutation près des deux facteurs de  $G \times G$ . Soient  $X$  l'arbre de Bruhat-Tits de  $G$  et  $X_{\Gamma_0}$  le sous-arbre  $\Gamma_0$ -minimal de  $X$ . Le groupe  $G$  admet une décomposition de Cartan  $G = KZ^+K$  telle que  $K$  soit le stabilisateur d'un sommet  $x_0$  de  $X_{\Gamma_0}$ ; notons  $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  la projection de Cartan correspondante. Soient  $L_0$  la somme des longueurs des arêtes du graphe fini  $\Gamma_0 \setminus X_{\Gamma_0}$  et  $F$  le sous-ensemble fini de  $\Gamma_0 \setminus \{1\}$  formé des éléments  $\gamma$  tels que  $\mu(\gamma) \leq 4L_0$ . Choisissons un domaine fondamental connexe  $\mathcal{D}$  de  $X_{\Gamma_0}$  pour l'action de  $\Gamma_0$  qui contient  $x_0$  : on peut prendre par exemple le domaine de Dirichlet

$$\mathcal{D} = \{x \in X_{\Gamma_0}, \quad d(x, x_0) \leq d(x, \gamma \cdot x_0) \quad \forall \gamma \in \Gamma_0\}.$$

Soient  $\mathcal{V} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$  le voisinage de l'inclusion naturelle donné par le lemme 5.2 et  $\mathcal{W} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$  le voisinage du morphisme constant défini par

$$\mathcal{W} = \{ \tau \in \text{Hom}(\Gamma_0, G), \quad \lambda(\tau(\gamma)) < \lambda(\gamma) \quad \forall \gamma \in F \}.$$

On a  $\rho \in \mathcal{W}$  par le théorème 1.4, donc  $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset \text{Hom}(\Gamma, G \times G)$  est un voisinage de l'inclusion naturelle de  $\Gamma$  dans  $G \times G$ . Soit  $\varphi = (\sigma, \tau) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ . Le groupe

$$\varphi(\Gamma) = \{ (\sigma(\gamma), \tau(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0 \}$$

est un graphe par injectivité de  $\sigma$ , et  $\sigma(\Gamma_0)$  est un sous-groupe discret de type fini sans torsion de  $G$ ; notons  $X_{\sigma(\Gamma_0)}$  le sous-arbre  $\sigma(\Gamma_0)$ -minimal de  $X$ . Par définition de  $\mathcal{V}$  et de  $\mathcal{W}$ , la somme des longueurs des arêtes du graphe fini  $\sigma(\Gamma_0) \setminus X_{\sigma(\Gamma_0)}$  est  $L_0$ , l'ensemble  $F$  est formé des éléments  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$  tels que  $\mu(\sigma(\gamma)) \leq 4L_0$ , et l'on a  $\lambda(\tau(\gamma)) < \lambda(\sigma(\gamma))$  pour tout  $\gamma \in F$ . D'après le théorème 1.4, le morphisme  $\tau \circ \sigma^{-1} : \sigma(\Gamma_0) \rightarrow G$  est admissible. D'après [12], th. 1.3, le groupe  $\varphi(\Gamma)$  agit proprement sur  $(G \times G)/\Delta_G$ .

Si l'action de  $\Gamma$  sur  $(G \times G)/\Delta_G$  est de plus cocompacte, alors  $\Gamma_0$  est un réseau cocompact de  $G$  d'après le théorème 3.1, et  $\sigma(\Gamma_0)$  aussi d'après le lemme 5.2. Le groupe  $\varphi(\Gamma)$  agit donc cocompactement sur  $(G \times G)/\Delta_G$  d'après le théorème 3.1.

### 6. Lien avec l'outre-espace

Dans le cas particulier où  $\rho$  est injectif d'image discrète et cocompacte, la proposition 4.1 implique l'existence et l'équivalence de deux définitions différentes d'une même "distance asymétrique" sur l'outre-espace, comme nous le précisons dans cette partie.

Cette distance asymétrique sur l'outre-espace est un analogue de la distance asymétrique de Thurston sur l'espace de Teichmüller, introduite et étudiée en détail dans [25] : les classes d'équivalence de structures hyperboliques complètes sur une surface compacte  $S$  de caractéristique d'Euler  $\chi(S) < 0$  sont remplacées par des classes d'équivalence de graphes métriques finis munis d'un marquage par un groupe libre de type fini fixé (cf. paragraphe 6.4).

Sur l'outre-espace, cette distance asymétrique a d'abord été étudiée par T. White dans un texte non publié, puis récemment par S. Francaviglia et A. Martino [9] qui se sont intéressés à une symétrisation de cette distance et à la géométrie correspondante sur l'outre-espace.

### 6.1. Rappels

Soient  $n \geq 2$  un entier et  $\mathcal{R}_n$  un bouquet de  $n$  cercles d'intersection  $\{c\}$ ; le groupe fondamental  $\pi_1(\mathcal{R}_n, c)$  est un groupe libre à  $n$  générateurs que nous noterons  $\mathbb{F}_n$ . Appelons *graphe normalisé marqué de rang  $n$*  tout couple  $(Y, \varphi)$  où  $Y$  est un graphe métrique connexe fini de valence  $\geq 2$  dont la somme des longueurs des arêtes vaut un, et où  $\varphi : \mathcal{R}_n \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie. L'équivalence d'homotopie  $\varphi$  induit un isomorphisme de groupes

$$\varphi_* : \mathbb{F}_n \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, \varphi(c)).$$

Pour tous graphes normalisés  $(Y, \varphi)$  et  $(Y', \varphi')$  marqués de rang  $n$ , nous dirons qu'une application continue  $\bar{f} : Y \rightarrow Y'$  respecte les marquages  $\varphi$  et  $\varphi'$  si  $\bar{f} \circ \varphi$  est homotope à  $\varphi'$ . Notons  $(Y, \varphi) \sim (Y', \varphi')$  s'il existe une isométrie bijective  $i : Y \rightarrow Y'$  respectant les marquages  $\varphi$  et  $\varphi'$ . Ceci définit une relation d'équivalence  $\sim$  sur l'ensemble des graphes normalisés marqués de rang  $n$ . On appelle *outre-espace* de rang  $n$  l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation. Cet ensemble a été introduit par M. Culler et K. Vogtmann dans l'article fondateur [7]; nous le notons ici  $\text{OS}_n$ . Pour tout graphe normalisé  $(Y, \varphi)$  marqué de rang  $n$ , nous notons  $[Y, \varphi]$  la classe de  $(Y, \varphi)$  dans  $\text{OS}_n$ .

### 6.2. Une distance asymétrique sur l'outre-espace

Soient  $(Y, \varphi)$  et  $(Y', \varphi')$  deux graphes normalisés marqués de rang  $n$ . Notons  $X$  (resp.  $X'$ ) un revêtement universel de  $Y$  (resp. de  $Y'$ ) : c'est un arbre réel simplicial de valence  $\geq 2$ . Le groupe fondamental  $\pi_1(Y, \varphi(c))$  (resp.  $\pi_1(Y', \varphi'(c))$ ) agit librement, proprement et cocompactement sur  $X$  (resp. sur  $X'$ ), par isométries. Posons  $\Gamma_0 = \pi_1(Y, \varphi(c))$  et

$$\rho = \varphi'_* \circ \varphi_*^{-1} : \Gamma_0 \longrightarrow \text{Isom}(X').$$

Toute application continue  $\bar{f} : Y \rightarrow Y'$  respectant les marquages  $\varphi$  et  $\varphi'$  se relève en une application continue  $\rho$ -équivariante  $f : X \rightarrow X'$ , et réciproquement toute application continue  $\rho$ -équivariante  $f : X \rightarrow X'$  induit une application continue  $\bar{f} : Y \rightarrow Y'$  respectant les marquages  $\varphi$  et  $\varphi'$ . De plus,  $f$  est lipschitzienne si et seulement si  $\bar{f}$  l'est, et dans ce cas les constantes de Lipschitz sont les mêmes.

Par la proposition 4.1, il existe une application lipschitzienne  $\bar{f} : Y \rightarrow Y'$  respectant les marquages  $\varphi$  et  $\varphi'$ , et la borne inférieure des constantes de Lipschitz de telles applications est atteinte. Cette borne inférieure ne

dépend que des classes  $[Y, \varphi]$  et  $[Y', \varphi']$  dans  $OS_n$  ; notons  $L([Y, \varphi], [Y', \varphi'])$  son logarithme.

LEMME 6.1. — *L'application  $L : OS_n \times OS_n \rightarrow \mathbb{R}$  est une distance asymétrique sur  $OS_n$ , au sens où*

(1) *pour tous  $[Y, \varphi], [Y', \varphi'] \in OS_n$  on a*

$$L([Y, \varphi], [Y', \varphi']) \geq 0,$$

*avec égalité si et seulement si  $[Y, \varphi] = [Y', \varphi']$  ;*

(2) *pour tous  $[Y, \varphi], [Y', \varphi'], [Y'', \varphi''] \in OS_n$  on a*

$$L([Y, \varphi], [Y'', \varphi'']) \leq L([Y, \varphi], [Y', \varphi']) + L([Y', \varphi'], [Y'', \varphi'']).$$

En général on a  $L([Y, \varphi], [Y', \varphi']) \neq L([Y', \varphi'], [Y, \varphi])$ , comme nous le verrons ci-dessous.

*Démonstration du lemme 6.1.* — Le point (2) est clair. Prouvons le point (1). Soient  $(Y, \varphi)$  et  $(Y', \varphi')$  deux graphes normalisés marqués de rang  $n$  et  $\bar{f} : Y \rightarrow Y'$  une application lipschitzienne respectant les marquages  $\varphi$  et  $\varphi'$ , de constante de Lipschitz  $C$  minimale.

Remarquons que  $\bar{f}$  est surjective. En effet, notons comme ci-dessus  $X$  (resp.  $X'$ ) un revêtement universel de  $Y$  (resp. de  $Y'$ ) et soit  $f : X \rightarrow X'$  un relevé de  $\bar{f}$  ; montrons que  $f$  est surjective. Fixons un sommet  $s$  de  $X$ . Pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$ , l'image par  $f$  du segment géodésique  $[s, \gamma \cdot s]$  de  $X$  contient le segment géodésique  $[f(s), \rho(\gamma) \cdot f(s)]$  de  $X'$ . Il suffit donc de montrer que les segments géodésiques  $[f(s), \rho(\gamma) \cdot f(s)]$ , où  $\gamma \in \Gamma_0$ , recouvrent  $X'$ . Mais s'il existait un point  $x' \in X'$  n'appartenant à aucun segment géodésique  $[f(s), \rho(\gamma) \cdot f(s)]$ , alors toute composante connexe de  $X' \setminus \{x'\}$  ne contenant pas  $f(s)$  serait un sous-arbre infini de  $X$  ne rencontrant pas l'orbite  $\rho(\Gamma_0) \cdot f(s)$ , ce qui contredirait le fait que  $\rho(\Gamma_0)$  agit cocompactement sur  $X'$ .

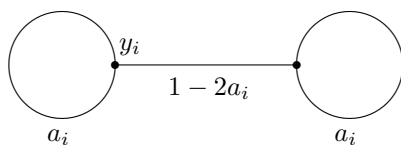
Notons  $E$  (resp.  $E'$ ) l'ensemble des arêtes de  $Y$  (resp. de  $Y'$ ). Pour toute arête  $e \in E$  (resp.  $e' \in E'$ ), notons  $\ell(e) \in [0, 1]$  (resp.  $\ell'(e') \in [0, 1]$ ) sa longueur dans  $Y$  (resp. dans  $Y'$ ). Notons enfin  $C_e$  la constante de Lipschitz de la restriction de  $\bar{f}$  à  $e$  pour tout  $e \in E$ . Comme  $\bar{f}$  est surjective on a

$$(6.1) \quad 1 = \sum_{e' \in E'} \ell'(e') \leq \sum_{e \in E} \ell'(\bar{f}(e)) \leq \sum_{e \in E} C_e \ell(e) \leq C \sum_{e \in E} \ell(e) = C.$$

On en déduit

$$(6.2) \quad L([Y, \varphi], [Y', \varphi']) = \log C \geq 0.$$

De plus, si  $L([Y, \varphi], [Y', \varphi']) = 0$ , alors toutes les inégalités dans (6.1) sont des égalités ; on en déduit aisément que  $\bar{f}$  est une isométrie bijective, et

FIGURE 6.1. Le graphe  $Y_i$ 

donc que  $[Y, \varphi] = [Y', \varphi']$ . Enfin, en considérant l'identité de  $Y$ , on voit que  $L([Y, \varphi], [Y, \varphi]) \leq 0$ , donc  $L([Y, \varphi], [Y, \varphi]) = 0$  par (6.2).  $\square$

Montrons l'asymétrie sur un exemple pour  $n = 2$ . Comme précédemment, soit  $\mathcal{R}_2$  un bouquet de deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  d'intersection  $\{c\}$ . Pour  $i \in \{1, 2\}$ , soit  $Y_i$  le graphe donné par la figure 6.1, où les deux boucles sont de longueur  $a_i \in ]0, 1[$  et où l'arête du milieu est de longueur  $1 - 2a_i$ . Soit  $\varphi_i : \mathcal{R}_2 \rightarrow Y_i$  une équivalence d'homotopie envoyant  $c$  sur  $y_i$ , établissant un homéomorphisme entre  $\mathcal{C}$  et le cercle de gauche de  $Y_i$  et envoyant  $\mathcal{C}'$  sur l'union du segment transverse et du cercle de droite de  $Y_i$ . Pour  $a_1 \leq a_2$ , un calcul donne

$$L([Y_1, \varphi_1], [Y_2, \varphi_2]) = \log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \quad \text{et} \quad L([Y_2, \varphi_2], [Y_1, \varphi_1]) = \log\left(\frac{1 - a_1}{1 - a_2}\right).$$

Ces réels sont différents dès que  $a_2 \notin \{a_1, 1 - a_1\}$ .

### 6.3. Quotients de longueurs de lacets

Pour tout graphe normalisé  $(Y, \varphi)$  marqué de rang  $n$  et tout  $\gamma \in \mathbb{F}_n \setminus \{1\}$ , la longueur minimale d'un lacet dans la classe d'homotopie libre de  $\varphi_*(\gamma) \in \pi_1(Y, \varphi(c))$  ne dépend que de la classe  $[Y, \varphi]$  de  $(Y, \varphi)$  dans  $\text{OS}_n$ ; notons-la  $\text{long}_{[Y, \varphi]}(\gamma)$ . Si  $X$  désigne comme précédemment un revêtement universel de  $Y$ , alors  $\text{long}_{[Y, \varphi]}(\gamma) = \lambda(\varphi_*(\gamma))$  est la longueur de translation de  $\varphi_*(\gamma)$  vu comme isométrie de  $X$ .

Pour tous  $[Y, \varphi], [Y', \varphi'] \in \text{OS}_n$ , tout  $\gamma \in \mathbb{F}_n \setminus \{1\}$  et toute application continue  $\bar{f} : Y \rightarrow Y'$  respectant les marquages  $\varphi$  et  $\varphi'$ , lipschitzienne de constante  $C$  minimale, on a

$$(6.3) \quad \frac{\text{long}_{[Y', \varphi']}(\gamma)}{\text{long}_{[Y, \varphi]}(\gamma)} \leq C.$$

Posons

$$K([Y, \varphi], [Y', \varphi']) = \log \sup_{\gamma \in \mathbb{F}_n \setminus \{1\}} \left( \frac{\text{long}_{[Y', \varphi']}(\gamma)}{\text{long}_{[Y, \varphi]}(\gamma)} \right).$$

Les inégalités (6.3) impliquent

$$K([Y, \varphi], [Y', \varphi']) \leq L([Y, \varphi], [Y', \varphi']).$$

D'après la proposition 4.1, cette inégalité est en fait une égalité et la borne supérieure  $K([Y, \varphi], [Y', \varphi'])$  est atteinte.

**COROLLAIRE 6.2** (*T. White, cf. [9], prop. 3.11*). — *Pour tous  $[Y, \varphi], [Y', \varphi'] \in \text{OS}_n$  il existe un élément  $\gamma \in \mathbb{F}_n \setminus \{1\}$  tel que*

$$e^{K([Y, \varphi], [Y', \varphi'])} = \frac{\text{long}_{[Y', \varphi']}(\gamma)}{\text{long}_{[Y, \varphi]}(\gamma)} = \frac{\lambda(\varphi'_*(\gamma))}{\lambda(\varphi_*(\gamma))} = e^{L([Y, \varphi], [Y', \varphi'])} \geq 1.$$

En particulier on a  $K = L$ .

### 6.4. Lien avec la distance asymétrique de Thurston sur l'espace de Teichmüller

On a une analogie très forte entre la distance asymétrique  $K = L$  sur l'outre-espace et la distance asymétrique de Thurston sur l'espace de Teichmüller. En effet, soit  $S$  une surface compacte de caractéristique d'Euler  $\chi(S) < 0$  et soit  $\mathcal{T}(S)$  son espace de Teichmüller, défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de structures hyperboliques complètes sur  $S$  pour la relation "être tirée en arrière par un homéomorphisme de  $S$  isotope à l'identité".

Pour toutes structures hyperboliques complètes  $g$  et  $h$  sur  $S$ , la borne inférieure des constantes de Lipschitz d'homéomorphismes  $\bar{f}: (S, g) \rightarrow (S, h)$  isotopes à l'identité ne dépend que des classes de  $g$  et  $h$  dans  $\mathcal{T}(S)$ . Notons  $L([g], [h])$  le logarithme de cette borne inférieure. D'après [25], prop. 2.1, l'application  $L$  est une distance asymétrique sur  $\mathcal{T}(S)$ , au sens du lemme 6.1.

Soit  $x_0 \in S$  un point-base. Pour toute structure hyperbolique complète  $g$  sur  $S$  et tout élément  $\gamma \in \pi_1(S, x_0)$  non trivial, notons  $\text{long}_g(\gamma) > 0$  la plus petite longueur d'un lacet dans la classe d'homotopie libre de  $\gamma$ ; elle est atteinte par l'unique géodésique fermée pour  $g$  dans cette classe d'homotopie libre. Ceci définit une application  $\text{long}_g$  qui ne dépend que de la classe de  $g$  dans  $\mathcal{T}(S)$ . D'après [25], th. 3.1, l'application  $K : \mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$K([g], [h]) = \log \sup_{\gamma \in \pi_1(S, x_0) \setminus \{1\}} \left( \frac{\text{long}_h(\gamma)}{\text{long}_g(\gamma)} \right)$$

pour tous  $[g], [h] \in \mathcal{T}(S)$  est une distance asymétrique sur  $\mathcal{T}(S)$ .



Comme sur l'outre-espace, on a  $K = L$  d'après [25], th. 8.5. En revanche, dans le cas de l'espace de Teichmüller la borne supérieure  $K([g], [h])$  n'est en général pas atteinte par une géodésique fermée, mais par une lamination géodésique mesurée.

### 6.5. Absence de morphisme admissible injectif d'image discrète

Dans ce paragraphe, nous déduisons du corollaire 6.2 le résultat suivant, dont le corollaire 1.5 est un cas particulier.

**COROLLAIRE 6.3.** — *Soit  $X$  un arbre réel simplicial, biparti de valences  $n_1 \geq 2$  et  $n_2 \geq 2$ , dont toutes les arêtes ont même longueur, et soit  $\Gamma_0$  un sous-groupe discret sans torsion de  $\text{Isom}(X)$  tel que le quotient  $\Gamma_0 \backslash X$  soit un graphe fini. Il n'existe pas de morphisme de groupes admissible  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X)$  qui soit injectif d'image discrète.*

Soient  $x_0, x'_0 \in X$ . Rappelons qu'un morphisme  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X)$  est dit *admissible* si pour tout  $R > 0$  on a  $d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) \leq d(x_0, \gamma \cdot x_0) - R$  pour presque tout  $\gamma \in \Gamma_0$  (cf. paragraphe 5.1). Cette condition ne dépend pas du choix de  $x_0$  et  $x'_0$ .

Notons que l'hypothèse de cocompacité sur  $\Gamma_0$  est indispensable dans les corollaires 6.3 et 1.5. En effet, sans cette hypothèse on construit facilement des exemples de morphismes admissibles injectifs d'image discrète à l'aide du lemme 7.1 ci-dessous.

Pour démontrer le corollaire 6.3 nous utilisons le lemme suivant.

**LEMME 6.4.** — *Le nombre d'arêtes d'un graphe connexe fini dont le groupe fondamental est libre de rang  $n \geq 2$  fixé est une fonction décroissante de la valence moyenne des sommets.*

*Démonstration.* — Soit  $Y$  un graphe connexe fini dont le groupe fondamental est libre de rang  $n \geq 2$ . Si  $a$  désigne le nombre d'arêtes,  $s$  le nombre de sommets et  $v$  la valence moyenne des sommets de  $Y$ , alors  $2a = vs$ . De plus, d'après [8], th. 1.9.6, on a  $n = a - s + 1$ , d'où

$$a = \frac{n-1}{1-\frac{2}{v}},$$

ce qui implique le lemme. □

Nous pouvons à présent démontrer le corollaire 6.3.

*Démonstration du corollaire 6.3.* — Soit  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X)$  un morphisme de groupes injectif d'image discrète. Montrons que  $\rho$  n'est pas admissible.

Notons  $X_{\rho(\Gamma_0)}$  le sous-arbre  $\rho(\Gamma_0)$ -minimal de  $X$ , c'est-à-dire l'union des axes de translation des éléments non triviaux de  $\rho(\Gamma_0)$ . Les quotients  $\Gamma_0 \backslash X$  et  $\rho(\Gamma_0) \backslash X_{\rho(\Gamma_0)}$  sont des graphes finis connexes, de valence  $\geq 2$  (cf. paragraphe 2.2.3). Leurs groupes fondamentaux, qui s'identifient respectivement à  $\Gamma_0$  et  $\rho(\Gamma_0)$ , sont libres de même rang. Notons  $n_1$  et  $n_2$  les valences des sommets de l'arbre biparti  $X$ . La valence moyenne des graphes  $\Gamma_0 \backslash X$  et  $\rho(\Gamma_0) \backslash X$  est égale à  $(n_1 + n_2)/2$ . Celle du graphe  $\rho(\Gamma_0) \backslash X_{\rho(\Gamma_0)}$  est inférieure à  $(n_1 + n_2)/2$  : en effet, si l'on note  $S_i$  l'ensemble des sommets de  $\rho(\Gamma_0) \backslash X_{\rho(\Gamma_0)}$  qui sont de valence  $n_i$  dans  $\rho(\Gamma_0) \backslash X$ , alors  $S_1$  et  $S_2$  ont même cardinal, et pour tout  $s \in S_i$  la valence de  $s$  dans  $\rho(\Gamma_0) \backslash X_{\rho(\Gamma_0)}$  est inférieure à  $n_i$ .

Notons  $m$  (resp.  $m'$ ) le nombre d'arêtes de  $\Gamma_0 \backslash X$  (resp. de  $\rho(\Gamma_0) \backslash X_{\rho(\Gamma_0)}$ ). D'après le lemme 6.4 on a  $m \leq m'$ . Or, toutes les arêtes de  $X$  ont même longueur par hypothèse. Si l'on note  $\ell > 0$  cette longueur et si l'on munit  $\Gamma_0 \backslash X$  (resp.  $\rho(\Gamma_0) \backslash X_{\rho(\Gamma_0)}$ ) de la distance induite par celle de  $X$  divisée par  $m\ell$  (resp. par  $m'\ell$ ), alors la somme des longueurs des arêtes de  $\Gamma_0 \backslash X$  (resp. de  $\rho(\Gamma_0) \backslash X_{\rho(\Gamma_0)}$ ) vaut un. D'après le corollaire 6.2, il existe un élément  $\gamma \in \Gamma_0$  non trivial tel que

$$\frac{1}{m'\ell} \lambda(\rho(\gamma)) \geq \frac{1}{m\ell} \lambda(\gamma).$$

Comme  $m \leq m'$ , on en déduit  $\lambda(\rho(\gamma)) \geq \lambda(\gamma)$ . D'après le théorème 5.1, le morphisme  $\rho$  n'est pas admissible. □

Le corollaire 1.5 s'obtient à partir du corollaire 6.3 en prenant pour  $X$  l'arbre de Bruhat-Tits de  $G$ .

Notons que la démonstration du corollaire 6.3 ne nécessite pas l'existence d'un élément  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$  tel que le quotient  $\lambda(\rho(\gamma))/\lambda(\gamma)$  soit maximal : il nous suffit de connaître l'existence d'un élément  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$  tel que  $\lambda(\rho(\gamma)) \geq \lambda(\gamma)$ , ce qui résulte de la positivité de la distance asymétrique  $K = L$  sur l'outre-espace et de la condition d'égalité. De même, la positivité de la distance asymétrique de Thurston sur l'espace de Teichmüller et la condition d'égalité impliquent l'absence de morphisme admissible injectif d'image discrète pour les réseaux cocompacts sans torsion  $\Gamma_0$  de  $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$  (cf. [22], §4.1).

## 7. Existence de quotients compacts par des sous-groupes discrets Zariski-denses

Pour démontrer la proposition 1.3, nous utilisons le résultat suivant en prenant pour  $X$  et  $X'$  l'arbre de Bruhat-Tits de  $G$ .

LEMME 7.1. — Soient  $X$  et  $X'$  deux arbres réels simpliciaux de valence  $\geq 2$  et  $\Gamma_0$  un sous-groupe discret de type fini sans torsion de  $\text{Isom}(X)$ . Fixons un domaine fondamental connexe  $\mathcal{D}$  de  $X$  pour l'action de  $\Gamma_0$ , posons

$$\mathcal{F} = \{\gamma \in \Gamma_0, \gamma \cdot \mathcal{D} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset\}$$

et notons  $\delta > 0$  la distance de  $\mathcal{D}$  au complémentaire de  $\bigcup_{\gamma \in \mathcal{F}} \gamma \cdot \mathcal{D}$  dans  $X$ . Pour qu'un morphisme de groupes  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$  soit admissible, il suffit qu'il existe  $x'_0 \in X'$  tel que  $d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) < \delta$  pour tout  $\gamma \in \mathcal{F}$ .

Le lemme 7.1 transpose dans le cadre des arbres réels simpliciaux un raisonnement de T. Kobayashi sur les espaces riemanniens symétriques ([16], th. 2.4), que nous reproduisons ici pour la commodité du lecteur.

*Démonstration.* — Fixons un point  $x_0 \in X$  dans l'intérieur de  $\mathcal{D}$ . Soit  $\gamma \in \Gamma_0$ . Notons  $n$  la partie entière de  $d(x_0, \gamma \cdot x_0)/\delta$  et choisissons une suite  $(x_i)_{i=1, \dots, n+1}$  de points du segment géodésique  $[x_0, \gamma \cdot x_0]$  telle que  $x_{n+1} = \gamma \cdot x_0$  et telle que pour tout  $0 \leq i \leq n$  on ait  $d(x_i, x_{i+1}) < \delta$ . Par récurrence, on construit une suite  $(\gamma_i)_{i=0, \dots, n}$  d'éléments de  $\Gamma_0$  telle que  $x_{i+1} \in \gamma_0 \dots \gamma_i \cdot \mathcal{D}$  pour tout  $0 \leq i \leq n$ ; par définition de  $\delta$  et comme  $d(x_i, x_{i+1}) < \delta$ , on a  $\gamma_i \in \mathcal{F}$  pour tout  $i$ . D'autre part, on a  $x_{n+1} = \gamma \cdot x_0 \in \gamma_0 \dots \gamma_n \cdot \mathcal{D}$ , donc  $x_0$  appartient à la fois à l'intérieur de  $\mathcal{D}$  et à  $(\gamma^{-1}\gamma_0 \dots \gamma_n) \cdot \mathcal{D}$ . Comme  $\mathcal{D}$  est un domaine fondamental de  $X$  pour  $\Gamma_0$ , on a  $\gamma^{-1}\gamma_0 \dots \gamma_n = 1$ , c'est-à-dire  $\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_n$ . Si  $\ell_{\mathcal{F}} : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{N}$  désigne la longueur des mots associée à  $\mathcal{F}$ , on a

$$(7.1) \quad \ell_{\mathcal{F}}(\gamma) \leq n + 1 \leq \frac{d(x_0, \gamma \cdot x_0)}{\delta} + 1.$$

Soit  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow \text{Isom}(X')$  un morphisme de groupes. Supposons qu'il existe  $x'_0 \in X'$  tel que

$$M := \max \{d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0), \gamma \in \mathcal{F}\} < \delta$$

et montrons que  $\rho$  est admissible. Pour tout  $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ , on peut écrire  $\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_n$ , où  $\gamma_i \in \mathcal{F}$  pour tout  $i$  et où  $\ell_{\mathcal{F}}(\gamma) = n + 1$ ; on a alors

$$\begin{aligned} d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) &= d(x'_0, \rho(\gamma_0 \dots \gamma_n) \cdot x'_0) \\ &\leq \sum_{i=0}^n d(\rho(\gamma_0 \dots \gamma_{i-1}) \cdot x'_0, \rho(\gamma_0 \dots \gamma_i) \cdot x'_0) \\ &= \sum_{i=0}^n d(x'_0, \rho(\gamma_i) \cdot x'_0), \end{aligned}$$

où l'on a posé  $\gamma_{-1} = 1$  et utilisé le fait que les éléments de  $\rho(\Gamma_0)$  sont des isométries de  $X'$ . Avec (7.1), on obtient

$$d(x'_0, \rho(\gamma) \cdot x'_0) \leq M \cdot \ell_{\mathcal{F}}(\gamma) \leq \frac{M}{\delta} d(x_0, \gamma \cdot x_0) + M$$

pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$ . Or, pour tout  $R > 0$  on a  $\frac{M}{\delta} d(x_0, \gamma \cdot x_0) + M > d(x_0, \gamma \cdot x_0) - R$  si et seulement si  $d(x_0, \gamma \cdot x_0) < \frac{M+R}{1-M/\delta}$ . L'ensemble des éléments  $\gamma \in \Gamma_0$  vérifiant cette inégalité est fini car  $\Gamma_0$  est discret dans  $\text{Isom}(X)$  et l'action de  $\text{Isom}(X)$  sur  $X$  est propre par définition de la topologie sur  $\text{Isom}(X)$ . Ainsi,  $\rho$  est admissible.  $\square$

Nous pouvons à présent démontrer la proposition 1.3.

*Démonstration de la proposition 1.3.* — Soient  $X$  l'arbre de Bruhat-Tits de  $G$  et  $\ell > 0$  la longueur commune des arêtes de  $X$ . Fixons une projection de Cartan  $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  et notons  $x_0$  le point de  $X$  donné par (2.1). En s'inspirant de la démonstration du théorème 2.1 de [18], par exemple, on construit facilement un réseau cocompact sans torsion  $\Gamma_0$  de  $G$  admettant un domaine fondamental connexe  $\mathcal{D}$  dans  $X$  qui contient  $x_0$  dans son intérieur et tel que, en posant

$$\mathcal{F} = \{ \gamma \in \Gamma_0, \gamma \cdot \mathcal{D} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset \},$$

la distance  $\delta$  de  $\mathcal{D}$  au complémentaire de  $\bigcup_{\gamma \in \mathcal{F}} \gamma \cdot \mathcal{D}$  dans  $X$  soit supérieure à  $2\ell$ . Soit  $\mathcal{F}'$  une partie de  $\mathcal{F}$  telle que  $\mathcal{F}$  soit l'union disjointe de  $\{1\}$ , de  $\mathcal{F}'$  et de  $\mathcal{F}'^{-1}$ . Le groupe  $\Gamma_0$  est libre, librement engendré par  $\mathcal{F}'$ , donc tout morphisme de  $\Gamma_0$  dans  $G$  est entièrement déterminé par son image sur  $\mathcal{F}'$ .

Soient  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  deux éléments de  $\mathcal{F}'$ . Rappelons qu'un élément de  $G$  est dit régulier si la composante neutre de son centralisateur dans  $\mathbf{G}$  est un tore maximal de  $\mathbf{G}$ . L'ensemble des éléments réguliers de  $G$  contient un ouvert de Zariski de  $G$  ([3], th. 12.3). Par conséquent, si l'on note  $\mathcal{V} \subset \text{Hom}(\Gamma_0, G)$  le voisinage de l'inclusion naturelle donné par le lemme 5.2, alors  $\mathcal{V} \cdot \gamma_1$  contient un élément régulier  $\gamma'_1$ . Comme  $\delta \geq 2\ell$ , l'ensemble des éléments  $g \in G$  tels que  $0 < \lambda(g) \leq \mu(g) < \delta$  est un ouvert non vide de  $G$ ; il contient

donc un élément régulier  $\gamma_1''$ . Par un résultat de Tits ([27], prop. 4.4), la réunion des sous-groupes stricts de  $G \times G$  qui contiennent  $(\gamma_1', \gamma_1'')$  et qui sont Zariski-fermés et Zariski-connexes est incluse dans un fermé de Zariski strict  $F_1$  de  $G \times G$ . Comme précédemment, l'ouvert de Zariski  $(G \times G) \setminus F_1$  contient un élément régulier  $(\gamma_2', \gamma_2'')$  tel que  $\gamma_2' \in \mathcal{V} \cdot \gamma_2$  et  $0 < \lambda(\gamma_2'') \leq \mu(\gamma_2'') < \delta$ . Par construction, le groupe engendré par  $(\gamma_1', \gamma_1'')$  et  $(\gamma_2', \gamma_2'')$  est Zariski-dense dans  $G \times G$  et sa projection sur chacun des facteurs de  $G \times G$  est non bornée.

Soit  $\sigma : \Gamma_0 \rightarrow G$  le morphisme de groupes défini par  $\sigma(\gamma_i) = \gamma_i'$  pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $\sigma(\gamma) = \gamma$  pour  $\gamma \in \mathcal{F}' \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$ . Par construction, on a  $\sigma \in \mathcal{V}$ . Pour tout  $\gamma \in \mathcal{F}' \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$ , choisissons un élément  $g_\gamma \in G$  tel que  $\mu(g_\gamma) < \delta$ . Soit  $\rho : \Gamma_0 \rightarrow G$  le morphisme de groupes défini par  $\rho(\gamma_i) = \gamma_i''$  pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $\rho(\gamma) = g_\gamma$  pour  $\gamma \in \mathcal{F}' \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$ . Le groupe

$$\Gamma = \{(\sigma(\gamma), \rho(\gamma)), \gamma \in \Gamma_0\}$$

est Zariski-dense dans  $G \times G$  et sa projection sur chacun des facteurs de  $G \times G$  est non bornée. Comme  $\sigma \in \mathcal{V}$ , le morphisme  $\sigma$  est injectif, le groupe  $\sigma(\Gamma_0)$  est un réseau cocompact sans torsion de  $G$  de domaine fondamental  $\mathcal{D}$  dans  $X$  et  $\delta$  est la distance de  $\mathcal{D}$  au complémentaire de  $\bigcup_{\gamma \in \mathcal{F}'} \sigma(\gamma) \cdot \mathcal{D}$  dans  $X$ . Par construction on a  $\mu(\rho(\gamma)) < \delta$  pour tout  $\gamma \in \mathcal{F}'$ , donc le morphisme  $\rho \circ \sigma^{-1} : \sigma(\Gamma_0) \rightarrow G$  est admissible d'après le lemme 7.1 et les égalités (2.1) et (2.3). Le théorème 1.1 assure que le groupe  $\Gamma$  agit librement, proprement et cocompactement sur  $(G \times G)/\Delta_G$ , ce qui termine la démonstration de la proposition 1.3.  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. BASS, « Covering theory for graphs of groups », *J. Pure Appl. Algebra* **89** (1993), p. 3-47.
- [2] H. BASS & A. LUBOTZKY, *Tree lattices*, Progress in Mathematics, vol. 176, Birkhäuser, Boston, MA, 2001.
- [3] A. BOREL, *Linear algebraic groups*, deuxième édition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [4] A. BOREL & J. TITS, « Groupes réductifs », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **27** (1965), p. 55-150.

- [5] F. BRUHAT & J. TITS, « Groupes réductifs sur un corps local : I. Données radicielles valuées », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **41** (1972), p. 5-251.
- [6] ———, « Groupes réductifs sur un corps local : II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **60** (1984), p. 5-184.
- [7] M. CULLER & K. VOGTMANN, « Moduli of graphs and automorphisms of free groups », *Invent. Math.* **84** (1986), p. 91-119.
- [8] R. DIESTEL, *Graph theory*, troisième édition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 173, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [9] S. FRANCAVIGLIA & A. MARTINO, « Metric properties of outer space », arXiv 0803.0640.
- [10] E. GHYS, « Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de  $SL_2(\mathbb{C})$  », *J. Reine Angew. Math.* **468** (1995), p. 113-138.
- [11] W. M. GOLDMAN, « Nonstandard Lorentz space forms », *J. Differ. Geom.* **21** (1985), p. 301-308.
- [12] F. KASSEL, « Proper actions on corank-one reductive homogeneous spaces », *J. Lie Theory* **18** (2008), p. 961-978.
- [13] B. KLINGLER, « Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante », *Math. Ann.* **306** (1996), p. 353-370.
- [14] T. KOBAYASHI, « Proper action on a homogeneous space of reductive type », *Math. Ann.* **285** (1989), p. 249-263.
- [15] ———, « On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with noncompact isotropy subgroups », *J. Geom. Phys.* **12** (1993), p. 133-144.
- [16] ———, « Deformation of compact Clifford-Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds », *Math. Ann.* **310** (1998), p. 394-408.
- [17] R. S. KULKARNI & F. RAYMOND, « 3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces », *J. Differ. Geom.* **21** (1985), p. 231-268.
- [18] A. LUBOTZKY, « Lattices in rank-one Lie groups over local fields », *Geom. Funct. Anal.* **1** (1991), p. 405-432.
- [19] G. A. MARGULIS, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, sér. 3, vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [20] G. ROUSSEAU, « Euclidean buildings », in *Nonpositive curvature geometry, discrete groups and rigidity*, notes de l'école d'été de l'Institut Joseph Fourier de Grenoble en 2004, Séminaires et Congrès, vol. 18, Société Mathématique de France, Paris, 2008.
- [21] F. SALEIN, « Variétés anti-de Sitter de dimension 3 possédant un champ de Killing non trivial », *C. R. Acad. Sci. Paris* **324** (1997), n° 5, p. 525-530.
- [22] ———, « Variétés anti-de Sitter de dimension 3 exotiques », *Ann. Inst. Fourier* **50** (2000), p. 257-284.
- [23] A. SELBERG, « On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces », in *Collected papers*, vol. 1, p. 475-492, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [24] J.-P. SERRE, *Arbres, amalgames,  $SL(2)$* , Astérisque, vol. 46, Société Mathématique de France, Paris, 1977.
- [25] W. P. THURSTON, « Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces », 1986, arXiv 9801039.
- [26] J. TITS, « Sur le groupe des automorphismes d'un arbre », in *Essays on topology and related topics, Mémoires dédiés à Georges de Rham*, p. 188-211, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

- [27] ———, « Free subgroups in linear groups », *J. Algebra* **20** (1972), p. 250-270.

Manuscrit reçu le 5 mai 2009,  
accepté le 25 août 2009.

Fanny KASSEL  
Université Paris-Sud 11  
Faculté des sciences d'Orsay  
Département de mathématiques  
Bâtiment 425  
91405 Orsay Cedex (France)  
fanny.kassel@math.u-psud.fr