



Dédié à T. Nguyen Quang Do

ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

David VAUCLAIR

Sur la dualité et la descente d'Iwasawa

Tome 59, n° 2 (2009), p. 691-767.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2009__59_2_691_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

SUR LA DUALITÉ ET LA DESCENTE D'IWASAWA

par David VAUCLAIR

RÉSUMÉ. — Nous développons – en nous appuyant sur l'exemple concret des unités cyclotomiques et du groupe de classes en théorie d'Iwasawa cyclotomique – de nouveaux outils pour une étude générale de la descente et de la codescente, dans l'optique de comparer ces deux points de vue duaux.

Si $A = (A_n)$ est un « système normique » (i.e. une collection de modules galoisiens avec données supplémentaires), attaché à une extension de Lie p -adique fixée d'algèbre d'Iwasawa Λ , nous montrons principalement qu'il existe un morphisme naturel

$$R\varprojlim A_n \longrightarrow \mathrm{RHom}_\Lambda(\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim A_n, \mathbb{Z}_p), \Lambda)$$

lequel peut être muni d'un cône fonctoriel mesurant à la fois le défaut de descente (pour les A_n) et celui de codescente. Grâce à un raffinement de la dualité de Poincaré, on aboutit à une relation éclairante entre les deux.

Nous détaillons comment les résultats connus du cadre cyclotomique s'intègrent dans cette étude, et donnons des généralisations au cas des \mathbb{Z}_p -extensions multiples.

ABSTRACT. — Guided by the concrete examples of cyclotomic units and the ideal class group in cyclotomic Iwasawa theory, we develop a general tool for studying descent and codescent, with a special interest in relating the two of them.

Given any « normic system » $A = (A_n)$ (that is a collection of Galois modules plus additional data), attached to a fixed p -adic Lie extension with Iwasawa algebra Λ , we mainly show that there is a natural morphism

$$R\varprojlim A_n \longrightarrow \mathrm{RHom}_\Lambda(\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim A_n, \mathbb{Z}_p), \Lambda)$$

which can be given a functorial cone measuring the defect of descent as well as the defect of codescent (for the A_n 's). Thanks to a sharpening of the usual Poincaré duality, this results in an enlightening relation between these two.

We show in great detail how known results in the cyclotomic situation fit into this setting, and give a generalization to multiple \mathbb{Z}_p -extensions.

1. Introduction

Soient F un corps de nombres, p un nombre premier et $F_\infty = \bigcup F_n$ une extension galoisienne dont le groupe de Galois, noté Γ , est un groupe de Lie p -adique de dimension cohomologique finie. Supposons donnée une collection $A = (A_n)$, où A_n est un $\mathbb{Z}_p[\text{Gal}(F_n/F)]$ -module (en pratique d'origine arithmétique, par exemple groupe de classes, unités, groupe de Selmer...), munie à la fois d'une structure de système inductif et de système projectif, ces deux structures vérifiant une condition naturelle de compatibilité normique. À une telle famille de données (appelée système normique dans le texte, cf. 2.1), la théorie d'Iwasawa suggère d'associer deux $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ -modules :

$$A_\infty := \varinjlim A_n \quad \text{et} \quad X_\infty := \varprojlim A_n.$$

Idéalement, on aimerait pouvoir reconstruire la collection des A_n , au moins asymptotiquement (i.e. pour n suffisamment grand) à partir de la seule donnée de X_∞ et/ou A_∞ . Dans cette optique, il est naturel d'étudier les applications

- ▷ de descente $j_n : A_n \rightarrow (A_\infty)^{\Gamma_n}$,
- ▷ codescente $k_n : (X_\infty)_{\Gamma_n} \rightarrow A_n$.

QUESTION 1.1. — *Que peut-on dire des noyaux et conoyaux de j_n et k_n pour n suffisamment grand ? En reste-t-il une trace sur X_∞ (resp. A_∞) ?*

Malheureusement, la seule donnée de A_∞ et X_∞ ne suffit pas à caractériser un système normique, même asymptotiquement. On peut se demander de quelles structures supplémentaires sont munis les couples (X_∞, A_∞) provenant d'un système normique. Dans cette direction :

QUESTION 1.2. — *Quel lien existe-t-il entre X_∞ et A_∞ (ou plutôt son dual) ?*

Malgré l'intérêt pratique évident d'une réponse précise et générale à ces deux questions, seuls peu d'efforts semblent leur avoir été consacrés dans cette généralité. On peut citer [11] pour une étude du noyau et conoyau de k_n (du point de vue des modules de normes universelles) dans le cas $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$, lorsque A vérifie un certain nombre d'hypothèses restrictives, dont celle que les j_n sont des isomorphismes. Dans le même ordre d'idées, citons aussi [21]. Concernant la seconde question, le cas où les k_n sont des isomorphismes est étudié de manière systématique dans [16].

En revanche, l'étude de ces deux questions pour un système normique donné est une activité fréquente en théorie d'Iwasawa, si bien qu'on dispose

de nombreux exemples qui peuvent servir de guide à une théorie générale. Inspiré par les méthodes de [16] et [31], on propose dans cet article un cadre pour une telle théorie, puis on établit quelques résultats pratiques qui permettent l'unification et la généralisation de nombreux résultats connus.

Pour avoir une première idée de ce qu'on peut espérer, on s'inspire essentiellement de deux études parallèles (celle de [27] pour le groupe de classes et celle de [33] pour les unités cyclotomiques) dans le cas où $F_\infty = \bigcup F_n$ est la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique d'un corps de nombres F ($\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$). On peut reformuler quelques résultats connus de la manière suivante (cf. 6.25 et 6.28 pour des énoncés plus exhaustifs) :

PROPOSITION 1.3 (voir [13], [27]). — Si $A_n = \mathcal{C}l(\mathcal{O}_{F_n}[\frac{1}{p}]) \otimes \mathbb{Z}_p$, alors il existe une flèche naturelle

$$X_\infty \xrightarrow{\alpha_j} \text{Ext}_\Lambda^1(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \Lambda)$$

dont le noyau et le conoyau sont pseudo-isomorphes. Si ceux-ci sont finis, alors $\text{Ker } \alpha_j \simeq \varprojlim \text{Ker } j_n$ et $\text{Coker } \alpha_j \simeq \varprojlim \text{Coker } j_n \simeq \varinjlim \text{Ker } k_n$.

PROPOSITION 1.4 (voir [33], [23], [3], [2]). — Supposons F réel, abélien sur \mathbb{Q} et soit $A_n = C_n$ le \mathbb{Z}_p -module des unités cyclotomiques à la Sinnott de F_n (cf. [38]). Alors il existe une flèche naturelle, injective et pseudo-surjective :

$$X_\infty \xrightarrow{\alpha_j} \text{Hom}_\Lambda(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p), \Lambda).$$

De plus $\text{Coker } \alpha_j \simeq \varprojlim \text{Coker } j_n \simeq \varinjlim \text{Ker } k_n$.

Ainsi reformulés, ces résultats suggèrent que pour A quelconque, on devrait pouvoir construire une flèche

$$\alpha_j : X_\infty \longrightarrow \text{RHom}_\Lambda(X_\infty^*, \mathbb{Z}_p)$$

avec $X_\infty^* := \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)$, dont « le » cône soit relié à la fois au défaut de descente et de codescente. La première partie de l'article est consacrée à la construction d'une telle flèche.

Expliquons brièvement les idées de la construction. D'abord, il convient de préciser la notion de défaut de (co)descente : si $A = (A_n)$ est un système normique et $A_\infty = \varinjlim A_n$, il est possible de construire un objet de $\text{R}\Gamma(A_\infty) \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$, qui relève la collection des $\text{R}\Gamma(\Gamma_n, A_\infty)$ usuels. Celui-ci est naturellement muni d'une flèche « de descente » $A \rightarrow \text{R}\Gamma(A_\infty)$, dont on construira un cône fonctoriel $C(j_A) \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$. C'est cet objet qui encode le défaut de descente. Concrètement, la cohomologie de $C(j_A)$ est nulle en degrés < -1 , puis vaut ensuite $(\text{Ker } j_n)$, $(\text{Coker } j_n)$, $(H^1(\Gamma_n, A_\infty))$, $(H^2(\Gamma_n, A_\infty))$, ... De manière « duale », on définit (en prenant certaines

précautions, cf. texte) le défaut de codescente $C(k_A) \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$. On procède alors approximativement comme suit :

▷ Si A_n est de la forme $R\Gamma(\Gamma_n, A_\infty)$ (i.e. si $C(j_A) = 0$), on construit un isomorphisme α_j (théorème 3.2).

▷ Dans le cas cas général, la définition de $C(j_A)$ permet de se ramener au cas précédent pour contruire un triangle distingué fonctoriel

$$\alpha_j(A) = (X_\infty \xrightarrow{\alpha_j} R\mathrm{Hom}_\Lambda(X_\infty^*, \Lambda) \rightarrow \Delta_j(A) \rightarrow X_\infty[1])$$

dans lequel $\Delta_j(A)$ est relié explicitement à $C(j_A)$.

▷ On procède de manière analogue pour construire un triangle distingué fonctoriel

$$\alpha_k(A) = (X_\infty^* \xrightarrow{\alpha_k} R\mathrm{Hom}_\Lambda(X_\infty, \Lambda) \rightarrow \Delta_k(A) \rightarrow X_\infty^*[1])$$

dans lequel $\Delta_k(A)$ est relié explicitement à $C(k_A)$.

▷ Sous l'hypothèse de finitude adéquate, on utilise la condition normique de compatibilité entre la structure inductive et projective pour construire un isomorphisme de triangles $\alpha_j(A) \simeq R\mathrm{Hom}_\Lambda(\alpha_k(A), \Lambda)$, fonctoriel en A .

En pratique, ces trois dernières étapes sont menées de front et aboutissent avec l'énoncé et la preuve du théorème principal (4.6). Dans le texte, tout ce qui précède est énoncé dans le cadre plus général où Γ est profini de dimension cohomologie finie, tel que Λ soit noethérien. Lorsque Γ est un groupe de Lie p -adique de dimension cohomologique finie, alors la dualité de Poincaré permet d'exprimer de manière plus éclairante le rapport entre descente et codescente (cf. 4.8).

Dans ce qui précède, on a négligé les questions de finitude. On y apporte une certaine attention dans le texte, notamment pour établir des critères de finitude utiles en pratique.

À ce point, la question du contrôle de $\Delta_j(A)$ s'impose. Ne sachant comment aborder le cas général, on s'intéresse au cas particulier où $A_n = M_{\Gamma_n}$ pour M un Λ -module de type fini et $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^d$, $d \geq 1$. Dans cette situation, on s'attache notamment à établir un critère maniable pour la pseudo-nullité des modules de cohomologie de $\Delta_j(A)$, ce qui sera utile dans les applications. Il serait sans doute utile de pousser plus loin l'étude embryonnaire commencée ici.

Dans le cas particulier où $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$, apparaît un phénomène nouveau : lorsque A est un système normique raisonnable, les systèmes inductifs (resp. projectif) sous-jacents à la cohomologie de $C(k_A)$ (resp. $C(j_A)$) ont tendance à se stabiliser. Lorsque cela se produit (notamment pour les systèmes normiques usuels provenant de l'arithmétique) il est intéressant de noter

que l'on peut reconstruire le système normique (A_n) asymptotiquement à partir de la seule donnée de la flèche

$$\alpha_j : X_\infty \longrightarrow \mathrm{RHom}_\Lambda \left(\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p} (A_\infty, \mathbb{Z}_p), \Lambda \right).$$

En pratique, le phénomène de stabilisation – lorsqu'il se produit – permet surtout de dresser un tableau général des relations entre descente, codescente et structure de X_∞ et A_∞ . À cet égard, la proposition 5.23 devrait être considérée comme un formulaire.

Donnons deux applications pour illustrer nos méthodes :

1) *Étude du groupe des (p) -classes, noté \mathcal{C}' , dans une \mathbb{Z}_p^d -extension.* Outre une preuve unifiée de nombreux résultats connus, on obtient notamment (cf 6.7) :

▷ L'existence d'un morphisme $\varprojlim \mathcal{C}'_n \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p} (\varinjlim \mathcal{C}'_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ dont le noyau et le conoyau sont pseudo-isomorphes.

Ce résultat fait suite aux tentatives précédentes de [28], [25], [34] (cf. 6.17) et complète [31], 9.4.1. Sa preuve dépend de l'étude de $\Delta_j(A)$ mentionnée plus haut ainsi que d'un résultat de [31].

▷ Une nouvelle description du sous-module pseudo-nul maximal de la limite projective $\varprojlim \mathcal{C}'_n$, sous (Dec_2) (cf. texte).

L'intérêt de ce résultat tient à sa relation à la conjecture de Greenberg généralisée (cf. [41] ou [34]).

2) *Théorie d'Iwasawa cyclotomique d'un corps de nombres abélien.* On retrouve 1.3 et 1.4 dans ce cadre comme cas particuliers de la situation générale 5.23. Cette approche permet notamment de répondre à une question de [33]. Cette partie est rédigée de manière à ce que la lecture des énoncés soit indépendante du reste du texte.

L'un des objectifs recherchés dans ces deux applications est une meilleure compréhension de la nature (arithmétique ou algébrique) des résultats connus, ainsi que les hypothèses minimales nécessaires à leur validité. Pour cette raison, mais aussi pour faire apparaître plus clairement la ligne conductrice de notre étude, on s'abstiendra d'invoquer les résultats préexistants dont la preuve relève des méthodes de ce travail.

En appendice, on donne une construction directe du complexe dualisant, laquelle permet notamment son utilisation dans le contexte des systèmes normiques.

Cet article puise visiblement sa motivation et son inspiration dans les méthodes développées par T. Nguyen Quang Do. Ce travail lui est dédié. Le paragraphe 6.2, reprend et améliore les résultats d'une version antérieure, grâce aux suggestions de J. Nekovář. En particulier, le théorème 6.7

et ses corollaires lui sont partiellement dûs, et je le remercie de m'avoir permis de reproduire ici ses arguments. Je remercie aussi B. Angles, J.-R. Belliard et R. Sharifi pour leurs encouragements à rédiger ce travail, ainsi que F. Nuccio pour quelques discussions intéressantes. Enfin, je remercie le rapporteur anonyme pour les nombreuses corrections qu'il m'a suggérées.

2. Préliminaires

La présente étude requiert un cadre dans lequel on puisse à la fois utiliser le formalisme des catégories dérivées, et effectuer facilement les passages à la limite habituels de la théorie d'Iwasawa. À cet effet, on introduit la catégorie des « systèmes normiques » le long de la tour d'Iwasawa. On fixe d'abord quelques notations, puis on explique rapidement comment fonctionnent l'algèbre homologique et les passages à la limite dans cette catégorie.

2.1. Λ -modules, systèmes normiques

Fixons un groupe profini Γ et indexons la famille des sous-groupes ouverts distingués de Γ par un ensemble N . Pour $n \in N$, on note Γ_n le sous-groupe de Γ correspondant et $G_n := \Gamma/\Gamma_n$. L'anti-inclusion des sous-groupes confère à N une structure d'ensemble ordonné filtrant ($n \leq m$ signifiant $\Gamma_n \supset \Gamma_m$), suivant laquelle $\Gamma = \varprojlim G_n$.

On fixe une fois pour toutes un nombre premier p et $\Lambda := \varprojlim \mathbb{Z}_p[G_n]$ désigne l'algèbre d'Iwasawa de Γ . Notons ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ (resp. ${}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}$) la catégorie des Λ -modules à gauche (resp. \mathbb{Z}_p -modules). On considère aussi ${}_{\Gamma}\mathcal{C}$ (resp. ${}_{G_n}\mathcal{C}$) la sous-catégorie pleine de ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$, formée par les modules sur lesquels Γ agit discrètement (resp. Γ_n agit trivialement), i.e. M appartient à ${}_{\Gamma}\mathcal{C}$ si, et seulement si, $M = \bigcup M^{\Gamma_n}$. On adopte des notations analogues pour les catégories de modules à droite correspondantes. Si $*_1$ et $*_2$ sont deux listes de symboles choisis parmi $\Lambda, \mathbb{Z}_p, \Gamma, G_n$, on note ${}_{*_1}\mathcal{C}_{*_2}$ la catégorie de multi-modules correspondante (les différentes structures doivent être compatibles entre elles). Ainsi, ${}_{\Gamma}\mathcal{C}_{\Lambda}$ désigne par exemple la catégorie des Λ -bimodules sur lesquels l'action de Γ à gauche est discrète.

DÉFINITION 2.1. — *Soit ${}_{*_1}\mathcal{C}_{*_2}$ une catégorie de multi-modules comme ci-dessus. La catégorie des « systèmes normiques », notée ${}_{\Gamma, *_1}\mathcal{C}_{*_2}$ est définie comme suit :*

▷ un objet A de $\Gamma, *1\mathcal{C}_{*2}$ consiste en la donnée, pour tout couple $n \leq m$, de flèches de $\Gamma, *1\mathcal{C}_{*2} : j_{n,m} : A_n \rightarrow A_m$ et $k_{m,n} : A_m \rightarrow A_n$ vérifiant :

(Norm1) $A_n \in G_n, *1\mathcal{C}_{*2}$.

(Norm2) Si $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, alors

$$j_{n_2, n_3} \circ j_{n_1, n_2} = j_{n_1, n_3} \quad \text{et} \quad k_{n_2, n_1} \circ k_{n_3, n_2} = k_{n_3, n_1}.$$

(Norm3) Pour $n \leq m$, $j_{n,m} \circ k_{m,n} : A_m \rightarrow A_m$ est la multiplication à gauche par l'élément $\sum_{g \in \Gamma_n / \Gamma_m} g \in \mathbb{Z}_p[G_m]$.

(Norm4) Pour $n \leq m$, $k_{m,n} \circ j_{n,m} : A_n \rightarrow A_n$ est la multiplication par $(\Gamma_n : \Gamma_m)$.

▷ une flèche $A \rightarrow B$ est la donnée pour chaque n d'une flèche $A_n \rightarrow B_n$ de $*1\mathcal{C}_{*2}$, qui commute avec les $j_{n,m}$ et les $k_{m,n}$.

On définit une catégorie $*1\mathcal{C}_{*2, \Gamma}$ de façon analogue.

L'exemple fondamental, noté $\underline{\Lambda}$, est défini comme suit :

▷ $j_{n,m} : \mathbb{Z}_p[G_n] \rightarrow \mathbb{Z}_p[G_m]$, $x \mapsto \sum_{g \in \Gamma_n / \Gamma_m} gx = x \sum_{g \in \Gamma_n / \Gamma_m} g$
 (Γ_n / Γ_m est distingué dans G_m),

▷ $k_{m,n} : \mathbb{Z}_p[G_m] \rightarrow \mathbb{Z}_p[G_n]$ la projection naturelle.

$\underline{\Lambda}$ est au choix un objet de $\Gamma\mathcal{C}_\Lambda$, ${}_\Lambda\mathcal{C}_\Gamma$ (ou encore, par oubli de structure, de $\Gamma\mathcal{C}$ ou \mathcal{C}_Γ).

Lorsque les flèches de transition d'un objet $A \in \Gamma\mathcal{C}$ sont évidentes, on désignera simplement l'objet $A \in \Gamma\mathcal{C}$ par la collection (A_n) (par exemple, $\underline{\Lambda} = (\mathbb{Z}_p[G_n])$). On remarque que $\Gamma, *1\mathcal{C}_{*2}$ est une catégorie abélienne, munie pour chaque n d'un foncteur de projection exact :

$$\pi_n : \Gamma, *1\mathcal{C}_{*2} \longrightarrow G_n, *1\mathcal{C}_{*2}, \quad A \longmapsto A_n.$$

DÉFINITION 2.2. — (i) Si $(A, B) \in \Lambda, *1\mathcal{C}_{*2} \times \Lambda, *3\mathcal{C}_{*4}$ ou $*1\mathcal{C}_{*2, \Lambda} \times *3\mathcal{C}_{*4, \Lambda}$, on note $\underline{\text{Hom}}(A, B)$ le système normique formé de la collection des G_n -modules $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(A, B)$ (action par conjugaison), munie des applications de transition évidentes. C'est un objet de $\Gamma, *2, *3\mathcal{C}_{*1, *4}$ ou $*2, *3\mathcal{C}_{*1, *4, \Gamma}$, suivant qu'on considère l'action de G_n par conjugaison à gauche ou à droite.

(ii) Si $(A, B) \in *1\mathcal{C}_{*2, \Lambda} \times \Lambda, *3\mathcal{C}_{*4}$, on note $A \otimes B$ le système normique formé de la collection des G_n -modules $A \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} B$ (action par conjugaison), munie de ses applications de transition naturelles. C'est un objet de $\Gamma, *1, *3\mathcal{C}_{*2, *4}$ ou $*1, *3\mathcal{C}_{*2, *4, \Gamma}$, suivant qu'on considère l'action de G_n par conjugaison à gauche ou à droite.

Si $A \in \Gamma, *1\mathcal{C}_{*2}$, on note simplement

$$\varinjlim A \in \Gamma, *1\mathcal{C}_{*2} \quad (\text{resp.} \quad \varprojlim A \in \Lambda, *1\mathcal{C}_{*2})$$

la limite inductive (resp. projective) prise suivant les $j_{n,m}$ (resp. $k_{n,m}$). De même pour les modules à droite.

L'axiome (Norm1) donne lieu pour chaque $n \in N$ à une flèche de descente $A_n \rightarrow (\varinjlim A)^{\Gamma^n}$, ainsi qu'à une flèche de codescente $(\varinjlim A)_{\Gamma_n} \rightarrow A_n$. L'axiome (Norm3) assure que ces deux collections de flèches commutent aux applications de transition $j_{n,m}$ et $k_{m,n}$. On a donc une flèche de descente $A \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathbb{Z}_p, \varinjlim A)$, ainsi qu'une flèche de codescente $\mathbb{Z}_p \otimes \varinjlim A \rightarrow A$ dans $\Gamma_{*,*1}\mathcal{C}_{*2}$. Pour des raisons d'algèbre homologique évidentes, on préférera noter $\Gamma(\varinjlim A)$ au lieu de $\underline{\text{Hom}}(\mathbb{Z}_p, \varinjlim A)$ (voir prochain paragraphe). On notera que, grâce à l'axiome (Norm4), le noyau et le conoyau de l'application de descente $A \rightarrow \Gamma(\varinjlim A)$ sont de \mathbb{Z}_p -torsion (au sens où chaque composante est de \mathbb{Z}_p -torsion). C'est la seule utilité de cet axiome, dont la totalité du présent texte est en fait indépendante.

D'après la discussion précédente, le foncteur

$$\mathbb{Z}_p \otimes - : \Lambda_{*,*1}\mathcal{C}_{*2} \longrightarrow \Gamma_{*,*1}\mathcal{C}_{*2}$$

(resp. $\Gamma : \Gamma_{*,*1}\mathcal{C}_{*2} \rightarrow \Gamma_{*,*1}\mathcal{C}_{*2}$) est adjoint à gauche au foncteur

$$\varprojlim : \Gamma_{*,*1}\mathcal{C}_{*2} \longrightarrow \Lambda_{*,*1}\mathcal{C}_{*2}$$

(resp. adjoint à droite au foncteur $\varinjlim : \Gamma_{*,*1}\mathcal{C}_{*2} \rightarrow \Gamma_{*,*1}\mathcal{C}_{*2}$). En particulier, $\Gamma(-)$ conserve les injectifs (car \varinjlim est exact à gauche). Pour $\mathbb{Z}_p \otimes -$ et les projectifs, voir 2.12.

Un foncteur additif $F : \Gamma_{*,*1}\mathcal{C}_{*2} \rightarrow \Gamma_{*,*3}\mathcal{C}_{*4}$ est dit Γ -linéaire s'il vérifie $F(gm) = {}_g m$ pour tout $g \in \Gamma$, ${}_g m$ désignant la multiplication à gauche par g . Un tel foncteur possède alors une extension évidente

$$F : \Gamma_{*,*1}\mathcal{C}_{*2} \longrightarrow \Gamma_{*,*3}\mathcal{C}_{*4}$$

définie par $F(j_{n,m}) = j_{n,m}$ et $F(k_{m,n}) = k_{m,n}$. De même, un foncteur additif contravariant Γ -linéaire $F : \Gamma_{*,*1}\mathcal{C}_{*2} \rightarrow {}_{*3}\mathcal{C}_{*4,\Gamma}$ possède une extension

$$F : \Gamma_{*,*1}\mathcal{C}_{*2} \longrightarrow {}_{*3}\mathcal{C}_{*4,\Gamma},$$

définie par $F(j_{n,m}) = k_{m,n}$ et $F(k_{m,n}) = j_{n,m}$. Il y a bien sûr une discussion similaire pour les foncteurs covariants ${}_{*1}\mathcal{C}_{*2,\Gamma} \rightarrow {}_{*3}\mathcal{C}_{*4,\Gamma}$ et les foncteurs contravariants ${}_{*1}\mathcal{C}_{*2,\Gamma} \rightarrow \Gamma_{*,*3}\mathcal{C}_{*4}$.

De cette manière, on obtient par exemple un foncteur

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Z}_p) : \Gamma\mathcal{C}_\Lambda \longrightarrow \Lambda\mathcal{C}_\Gamma.$$

On relève l'isomorphisme important (cas particulier de 2.4) :

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\Lambda}, \mathbb{Z}_p) \simeq \underline{\Lambda}$$

où le premier $\underline{\Lambda}$ est un objet de $\Gamma\mathcal{C}_\Lambda$ et le second un objet de $\Lambda\mathcal{C}_\Gamma$.

Induction normique

DÉFINITION 2.3. — On définit quatre foncteurs (induction et co-induction)

$$\underline{\text{Ind}}, \underline{\text{Coind}} : {}_{\Lambda}\mathcal{C} \longrightarrow {}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\Gamma}, \quad \underline{\text{Ind}}, \underline{\text{Coind}} : \mathcal{C}_{\Lambda} \longrightarrow {}_{\Gamma}\mathcal{C}_{\Lambda}$$

de la manière suivante (cf. def. 2.2)

▷ $\underline{\text{Ind}} A := \Lambda \otimes A$ (resp. $A \otimes \Lambda$) muni de la conjugaison à droite (resp. à gauche) si $A \in {}_{\Lambda}\mathcal{C}$ (resp. $A \in \mathcal{C}_{\Lambda}$). C'est un Λ -module à gauche (resp. à droite) via le facteur Λ .

▷ $\underline{\text{Coind}} A := \underline{\text{Hom}}(\Lambda, A)$ muni de la conjugaison à droite (resp. à gauche) si $A \in {}_{\Lambda}\mathcal{C}$ (resp. $A \in \mathcal{C}_{\Lambda}$). C'est un Λ -module à gauche (resp. à droite) via la structure à droite (resp. à gauche) de Λ .

Ont alors lieu les isomorphismes bifonctoriels suivants :

▷ Si $(A, B) \in {}_{\Lambda}\mathcal{C} \times {}_{\Lambda}\mathcal{C}$, dans ${}_{\Gamma}\mathcal{C}$ (resp. \mathcal{C}_{Γ}) :

$$\underline{\text{Hom}}(A, B) \simeq \text{Hom}_{\Lambda}(\underline{\text{Ind}} A, B),$$

$$\text{(resp. } \underline{\text{Hom}}(A, B) \simeq \text{Hom}_{\Lambda}(A, \underline{\text{Coind}} B)\text{)}.$$

▷ Si $(A, B) \in \mathcal{C}_{\Lambda} \times \mathcal{C}_{\Lambda}$, le même isomorphisme a lieu, mais cette fois dans \mathcal{C}_{Γ} (resp. ${}_{\Gamma}\mathcal{C}$).

▷ Si $(A, B) \in \mathcal{C}_{\Lambda} \times {}_{\Lambda}\mathcal{C}$, on a dans ${}_{\Gamma}\mathcal{C}$ (resp. \mathcal{C}_{Γ}) :

$$\underline{\text{Ind}}(A) \otimes_{\Lambda} B \simeq A \otimes B, \quad \text{(resp. } A \otimes_{\Lambda} \underline{\text{Ind}} B \simeq A \otimes B\text{)}.$$

Regarder \mathbb{Z}_p comme un Λ -module à gauche provoque dans ${}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\Gamma}$ les isomorphismes suivants

$$\underline{\text{Ind}}(\mathbb{Z}_p) \simeq \underline{\Lambda} \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\Lambda}, \mathbb{Z}_p) \simeq \underline{\text{Coind}}(\mathbb{Z}_p).$$

Plus généralement :

PROPOSITION 2.4. — Les foncteurs $\underline{\text{Ind}}, \underline{\text{Coind}} : {}_{\Lambda}\mathcal{C} \rightarrow {}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\Gamma}$ sont naturellement isomorphes. De même pour les foncteurs $\mathcal{C}_{\Lambda} \rightarrow {}_{\Gamma}\mathcal{C}_{\Lambda}$.

Démonstration. — On laisse au lecteur le soin de vérifier que la collection d'applications naturelles $\phi_n : \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(\Lambda, A) \rightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} B$ définies par $f \mapsto \sum_{g \in \Gamma_n \setminus \Gamma} g^{-1} \otimes f(g)$ respecte la structure de système normique à droite, ainsi que la structure de Λ -module à gauche, et que c'est un isomorphisme. □

Induction discrète (inutile, sauf pour l'appendice)

On voit facilement que $\underline{\text{Ind}} : {}_{\Lambda}\mathcal{C} \rightarrow {}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\Gamma}$ transforme les objets de ${}_{\Gamma}\mathcal{C}$ en objets de ${}_{\Gamma}\mathcal{C}_{\Gamma}$; de même pour les trois variantes. À partir de là, on peut

définir par limite inductive des foncteurs d'induction discrète à partir des précédents :

$$\begin{aligned} \text{Ind}_\Gamma, \text{Coind}_\Gamma : {}_\Gamma\mathcal{C} &\rightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}_\Gamma, & \text{Ind}_\Gamma, \text{Coind}_\Gamma : \mathcal{C}_\Gamma &\rightarrow {}_\Gamma\mathcal{C}_\Gamma, \\ \text{Ind}_\Gamma(A) &:= \varinjlim \text{Ind}(A), & \text{Coind}_\Gamma(A) &:= \varinjlim \text{Coind}(A). \end{aligned}$$

Un processus de double limite permet d'écrire des isomorphismes bifonctoriels à partir des précédents (se ramener au cas où A est finiment engendré). Par exemple, si $(A, B) \in {}_\Gamma\mathcal{C} \times {}_\Gamma\mathcal{C}$, on a dans ${}_\Lambda\mathcal{C}$ (resp. \mathcal{C}_Λ) :

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, B) \simeq \text{Hom}_\Lambda(\text{Ind}_\Gamma(A), B)$$

(resp. $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, B) \simeq \text{Hom}_\Lambda(A, \text{Coind}_\Gamma(A))$). La structure de Λ -module de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, B)$ est ici induite par l'action de Γ par conjugaison. On prendra garde au fait que celle-ci n'est pas discrète en général. Cette structure de Λ -module peu naturelle (et contraire aux conventions générales de cet article, expliquées plus haut), ne sera utilisée en pratique que dans la situation où l'action de Γ sur B est triviale (voir notamment 7.2).

2.2. (Bi-)foncteurs dérivés

Soit F un bifoncteur additif exact à gauche. Si l'une des deux catégories de départ possède suffisamment d'objets F -acycliques (ou déployants), on peut définir le foncteur dérivé droit RF . Nous appliquons ce principe pour dériver certains des foncteurs définis au paragraphe précédent. On indique ensuite comment s'écrivent quelques unes des compatibilités habituelles entre Hom et \otimes dans ce cadre. Pour une catégorie abélienne \mathcal{C} ,

$$\text{Kom}^a(\mathcal{C}), \quad a \geq 1, \quad \text{Kom}_{\text{naifs}}^a(\mathcal{C}), \quad \text{Kom}^*(\mathcal{C}), \quad K^*(\mathcal{C}), \quad D^*(\mathcal{C}),$$

(avec $*$ = $\emptyset, +, -, b$) désignent respectivement la catégorie des complexes a -uples, des complexes a -uples naïfs, des complexes simples, des complexes simples à homotopie près, la catégorie dérivée. Un objet de $\text{Kom}(\mathcal{C}) = \text{Kom}^1(\mathcal{C})$ sera le plus souvent symbolisé par A , et par A^\bullet seulement lorsque la clarté l'exige.

Comme notre étude est restreinte au cas où Γ est de dimension cohomologique finie et qu'en pratique on travaillera toujours dans D^b , on ne cherche pas à étendre au maximum le domaine de définition des foncteurs dérivés.

PROPOSITION 2.5. — 1) Soient $*_1, *_2, *_3, *_4$ quatre listes de symboles choisis parmi \mathbb{Z}_p et Λ . Si $*_1 = *_2 = \emptyset$ ou $*_3 = *_4 = \emptyset$, alors :

(i) Le bifoncteur $\underline{\text{Hom}} : {}_{\Lambda, *1} \mathcal{C}_{*2} \times {}_{\Lambda, *3} \mathcal{C}_{*4} \rightarrow {}_{\Gamma, *2, *3} \mathcal{C}_{*1, *4}$ est dérivable à droite, ainsi que ses trois variantes obtenues en changeant Λ ou $\underline{\Gamma}$ de côté. On note :

$$\text{R}\underline{\text{Hom}} : D^- \times D^+ \longrightarrow D^+.$$

(ii) Le bifoncteur $\underline{\otimes} : {}_{*1} \mathcal{C}_{*2, \Lambda} \times {}_{\Lambda, *3} \mathcal{C}_{*4} \rightarrow {}_{\underline{\Gamma}, *1, *2} \mathcal{C}_{*3, *4}$ (ou ${}_{*1, *2} \mathcal{C}_{*3, *4, \underline{\Gamma}}$) est dérivable à gauche. On note :

$$\overset{L}{\underline{\otimes}} : D^- \times D^- \longrightarrow D^-$$

2) Soient $*$ = Λ ou \mathbb{Z}_p et $*_1, *_2, *_3, *_4$ quatre listes de symboles choisis parmi $\mathbb{Z}_p, \Lambda, \underline{\Gamma}$ de façon à ce que $\underline{\Gamma}$ apparaisse au plus dans une seule liste. Si $*_1 = *_2 = \emptyset$ ou $*_3 = *_4 = \emptyset$, alors :

(i) Le bifoncteur $\text{Hom}_* : {}_{*, *1} \mathcal{C}_{*2} \times {}_{*, *3} \mathcal{C}_{*4} \rightarrow {}_{*, *3} \mathcal{C}_{*1, *4}$ est dérivable à droite. On note :

$$\text{R}\text{Hom}_* : D^- \times D^+ \longrightarrow D^+.$$

Idem si l'on change $*$ de côté.

(ii) Le bifoncteur $\otimes_* : {}_{*1} \mathcal{C}_{*2, *} \times {}_{*, *3} \mathcal{C}_{*4} \rightarrow {}_{*1, *3} \mathcal{C}_{*2, *4}$ est dérivable à gauche. On note :

$$\overset{L}{\otimes}_* : D^- \times D^- \longrightarrow D^-.$$

Démonstration. — 1) (i) Supposons que l'on a $*_3 = *_4 = \emptyset$. La catégorie ${}_{\Lambda, *3} \mathcal{C}_{*4} = {}_{\Lambda} \mathcal{C}$ possède alors suffisamment d'injectifs. Comme la catégorie des injectifs de ${}_{\Lambda} \mathcal{C}$ vérifie les deux conditions de [19], 13.4.5, cela permet de conclure. Bien sûr, la flèche naturelle

$$D^+({}_{\underline{\Gamma}, *2} \mathcal{C}_{*1}) : \underline{\text{Hom}}(A, I) \longrightarrow \text{R}\underline{\text{Hom}}(A, I)$$

est un isomorphisme dès que I est injectif. Un objet $I \in \text{Kom}({}_{\Lambda} \mathcal{C})$ possédant cette propriété pour tout $A \in \text{Kom}({}_{\Lambda, *1} \mathcal{C}_{*2})$ sera dit déployant (et les couples (A, I) déployés) pour le foncteur $\text{R}\underline{\text{Hom}}$. On emploie une terminologie analogue pour tous les bifoncteurs dérivés.

Les autres points se traitent de façon analogue. □

Remarque 2.6. — Les foncteurs de projection étant exacts, ils passent aux catégories dérivées :

$$\pi_n : D^*({}_{\underline{\Gamma}, *2, *3} \mathcal{C}_{*1, *4}) \longrightarrow D^*({}_{G_n, *2, *3} \mathcal{C}_{*1, *4}).$$

En composant π_n avec $\text{R}\underline{\text{Hom}}$ défini ci-dessus, on retrouve les bifoncteurs usuels $\text{R}\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}$. De même

$$\pi_n \circ \overset{L}{\underline{\otimes}} = \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}.$$

Il est utile de noter que la famille (π_n) est conservative.

Les compatibilités habituelles entre Hom et \otimes (adjonction, évaluation) s'étendent naturellement à ce cadre. Détaillons quelques cas utiles.

PROPOSITION 2.7. — Soit $*$ = Λ ou \mathbb{Z}_p .

1) Pour $(A, B, C) \in D^-(\mathcal{C}_\Lambda) \times D^-(\Lambda\mathcal{C}_*) \times D^+(\mathcal{C}_*)$, il y a dans $D^+(\Gamma\mathcal{C})$ et $D^+(\mathcal{C}_\Gamma)$ un isomorphisme d'adjonction tri-fonctoriel

$$\text{adj} : \text{RHom}_*(A \otimes^L B, C) \simeq \text{RHom}(A, \text{RHom}_*(B, C)).$$

2) (i) Pour $(A, B, C) \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda) \times D^b(*\mathcal{C}_\Lambda) \times D^b(*\mathcal{C})$, il y a dans $D^b(\Gamma\mathcal{C})$ et $D^b(\mathcal{C}_\Gamma)$ un morphisme d'évaluation trifonctoriel

$$\text{ev} : A \otimes^L \text{RHom}_*(B, C) \longrightarrow \text{RHom}_*(\text{RHom}(A, B), C).$$

(ii) Pour $(A, B, C) \in D^b(\Lambda\mathcal{C}) \times D^b(\Lambda\mathcal{C}_*) \times D^b(\mathcal{C}_*)$, il y a dans $D^b(\Gamma\mathcal{C})$ et $D^b(\mathcal{C}_\Gamma)$ un morphisme d'évaluation trifonctoriel

$$\text{ev} : \text{RHom}_*(B, C) \otimes^L A \longrightarrow \text{RHom}_*(\text{RHom}(A, B), C).$$

(iii) Les morphismes (i) et (ii) sont des isomorphismes lorsque A est isomorphe (dans D^b) à un complexe parfait.

Démonstration. — 1) (i) Pour chaque $n \in N$, il y a un isomorphisme naturel entre les trifoncteurs

$$\mathcal{C}_\Lambda \times \Lambda\mathcal{C}_* \times \mathcal{C}_* \longrightarrow {}_{G_n}\mathcal{C}, \quad (A, B, C) \longmapsto \text{Hom}_*(A \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} B, C)$$

et $(A, B, C) \longmapsto \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(A, \text{Hom}_*(B, C))$. Il est facile de voir que cet isomorphisme est compatible à la structure de système normique, au sens où il identifie $\text{Hom}_*(k_{m,n}, C)$ avec $j_{n,m}$ et $\text{Hom}_*(j_{n,m}, C)$ avec $k_{m,n}$. On obtient ainsi un isomorphisme entre les trifoncteurs $\mathcal{C}_\Lambda \times \Lambda\mathcal{C}_* \times \mathcal{C}_* \longrightarrow \Gamma\mathcal{C}$,

$$(A, B, C) \longmapsto \text{Hom}_*(A \otimes B, C) \text{ et } (A, B, C) \longmapsto \underline{\text{Hom}}(A, \text{Hom}_*(B, C)),$$

d'où immédiatement un isomorphisme de trifoncteurs

$$K^-(\mathcal{C}_\Lambda) \times K^-(\Lambda\mathcal{C}_*) \times K^+(\mathcal{C}_*) \longrightarrow K^+(\Gamma\mathcal{C})$$

par extension des trifoncteurs aux complexes. Mais alors, l'extension au complexes du trifoncteur $(A, B, C) \longmapsto \text{Hom}_*(A \otimes B, C)$ est isomorphe (avec les conventions de signes adéquates, cf. [5], 1.1.8) :

▷ d'une part au trifoncteur obtenu en composant l'extension aux complexes du bifoncteur $(D, C) \longmapsto \text{Hom}_*(D, C)$ avec l'extension aux complexes du bifoncteur $(A, B) \longmapsto A \otimes B$,

▷ d'autre part au trifoncteur obtenu en composant l'extension aux complexes du bifoncteur $(A, D) \longmapsto \underline{\text{Hom}}(A, D)$ avec l'extension aux complexes du bifoncteur $(B, C) \longmapsto \text{Hom}_*(B, C)$.

Aussi les deux derniers trifoncteurs sont-ils isomorphes. Il suffit de choisir A à objets projectifs et C à objets injectifs pour obtenir l'isomorphisme de l'énoncé.

2) Le cas (i) se traite de façon analogue, à partir du morphisme fonctoriel d'évaluation entre les trifoncteurs ${}_{\Lambda}\mathcal{C} \times {}_{\Lambda}\mathcal{C}_* \times \mathcal{C}_* \rightarrow \underline{\Gamma}\mathcal{C}$. Idem pour (ii).

Le cas (iii) est une conséquence directe du fait suivant : si $A \in \mathcal{C}_{\Lambda}$ (resp. ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$) est projectif de type fini, alors la flèche d'évaluation

$$A \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} \text{Hom}_*(B, C) \longrightarrow \text{Hom}_*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(A, B), C)$$

$$(\text{resp. } \text{Hom}_*(B, C) \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} A \longrightarrow \text{Hom}_*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(A, B), C))$$

est un isomorphisme pour tout $(B, C) \in {}_*\mathcal{C}_{\Lambda} \times {}_*\mathcal{C}$ (resp. ${}_{\Lambda}\mathcal{C}_* \times \mathcal{C}_*$). \square

Soit \mathcal{C}' une sous-catégorie d'une catégorie \mathcal{C} . Si $F : D^+(\mathcal{C}) \rightarrow D^+(\mathcal{C}')$ est un foncteur, on notera encore $F : D^+(\mathcal{C}') \rightarrow D^+(\mathcal{C}'')$ le foncteur obtenu en composant F avec le foncteur évident $D^+(\mathcal{C}') \rightarrow D^+(\mathcal{C})$, et on parlera de la « restriction de F à $D^+(\mathcal{C}')$ ». Il s'agit d'un abus de langage puisqu'en général le foncteur évident n'est pas fidèle.

PROPOSITION 2.8. — Notons $\underline{\Gamma} : \Gamma\mathcal{C} \rightarrow \underline{\Gamma}\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_{\Gamma} \rightarrow \underline{\mathcal{C}}_{\Gamma}$) la restriction à $\Gamma\mathcal{C} \subset {}_{\Lambda}\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_{\Gamma} \subset \mathcal{C}_{\Lambda}$) du foncteur $\underline{\text{Hom}}(\mathbb{Z}_p, -)$. Alors :

(i) Le foncteur $\underline{\Gamma}$ est dérivable à droite et donne donc

$$R\underline{\Gamma} : D^+(\Gamma\mathcal{C}) \longrightarrow D^+(\underline{\Gamma}\mathcal{C}).$$

On a de même $R\underline{\Gamma} : D^+(\mathcal{C}_{\Gamma}) \longrightarrow D^+(\underline{\mathcal{C}}_{\Gamma})$.

(ii) Il y a une flèche naturelle de $R\underline{\Gamma}$ vers la restriction à $D^+(\Gamma\mathcal{C})$ du foncteur

$$R\underline{\text{Hom}}(\mathbb{Z}_p, -) : D^+(\mathcal{C}_{\Lambda}) \longrightarrow D^+(\underline{\Gamma}\mathcal{C}).$$

Idem en remplaçant $\Gamma\mathcal{C}$ par \mathcal{C}_{Γ} .

(iii) Si Λ est noethérien et si les objets de cohomologie de $A \in D^+(\Gamma\mathcal{C})$ (resp. $D^+(\mathcal{C}_{\Gamma})$) sont tous des \mathbb{Z}_p -modules de torsion, alors la flèche précédente induit un isomorphisme $R\underline{\Gamma}(A) = R\underline{\text{Hom}}(\mathbb{Z}_p, A)$.

Démonstration. — (i) $\Gamma\mathcal{C}$ et \mathcal{C}_{Γ} possèdent suffisamment d'injectifs.

(ii) résulte de la propriété universelle du foncteur dérivé droit $R\underline{\Gamma}$.

(iii) Par troncature, on se ramène tout de suite au cas où A est concentré en degré 0. Dans ce cas, A possède une résolution $A \rightarrow I$ dans laquelle les objets de I sont de \mathbb{Z}_p -torsion, injectifs dans $\Gamma\mathcal{C}$. Le résultat suit, d'après le lemme 7.1 (appendice). \square

DÉFINITION 2.9. — Soient $*$ = Λ ou \mathbb{Z}_p et $*_1, *_2$ deux listes de symboles choisis parmi $\mathbb{Z}_p, \Lambda, \underline{\Gamma}$, dont l'une au moins contient $*$. On définit le morphisme $\text{Bid}_* : D^b(*_1 \mathcal{C}_{*_2}) \rightarrow D^b(*_1 \mathcal{C}_{*_2})$ par

$$\text{Bid}_*(A) := \text{RHom}_*(\text{RHom}_*(A, *), *)$$

et l'on note $\text{bid}_* : A \rightarrow \text{Bid}_*(A)$ le morphisme naturel de bidualité.

Si $*$ est noethérien de dimension homologique finie, bid_* est un isomorphisme dès que A est d'amplitude bornée, à objets de cohomologie de type fini sur $*$ (dualité de Grothendieck). Pour $*$ = \mathbb{Z}_p , on décrira un peu plus loin l'effet de $\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}$ sur une classe plus large d'objets ; le cas significatif est celui où A un module divisible de cotype fini : $\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A)$ est alors le module de Tate de A placé en degré -1 (cf. 2.13).

2.3. Limites

Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ (resp. \mathcal{C}') deux catégories abéliennes dans lesquelles les produits infinis existent et sont exacts (resp. une catégorie abélienne avec sommes infinies exactes). On pourra par exemple prendre $\mathcal{C}_1 = {}_*\mathcal{C}$ avec $*$ = \mathbb{Z}_p, Λ ou $\underline{\Gamma}$ (resp. $\mathcal{C}' = {}_*\mathcal{C}$ avec $*$ = $\mathbb{Z}_p, \Lambda, \Gamma$ ou $\underline{\Gamma}$). Soit I un ensemble ordonné filtrant et considérons $\mathcal{C}_1^{I^\circ}$ la catégorie des systèmes projectifs de \mathcal{C}_1 indexés sur I et \mathcal{C}'^I celle des systèmes inductifs de \mathcal{C}' indexés sur I . On dispose alors de foncteurs $\varprojlim : \mathcal{C}'^I \rightarrow \mathcal{C}'$ et $\varinjlim : \mathcal{C}_1^{I^\circ} \rightarrow \mathcal{C}_1$. Le premier est exact et passe donc aux catégories dérivées ; le second est seulement exact à gauche et son usage nécessite les résultats suivants :

PROPOSITION 2.10. — Soient $I, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}'$ comme ci-dessus. Alors :

1) \varprojlim_I possède un dérivé droit $\text{R}\varprojlim_I : D^+(\mathcal{C}_1^{I^\circ}) \rightarrow D^+(\mathcal{C}_1)$.

2) Supposons \mathcal{C}_1 munie d'un foncteur Φ vers la catégorie Ab des groupes abéliens. Si Φ est exact et commute aux limites projectives filtrantes, alors $\text{R}\varprojlim_I$ commute aussi à Φ . Si de plus Φ est fidèle, alors :

(i) $\text{R}\varprojlim_I$ est de dimension cohomologique ≤ 1 dès que I possède un ensemble cofinal dénombrable.

(ii) $\text{R}^q \varprojlim_I A$ s'annule pour $q \geq 1$, dès que $\Phi(A) \in \text{Ab}^{I^\circ}$ est dans l'image essentielle du foncteur d'oubli $\text{Comp}^{I^\circ} \rightarrow \text{Ab}^{I^\circ}$, Comp désignant la catégorie des groupes topologiques compacts.

3) Soit $F : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}_2$ un bifoncteur covariant exact à gauche dérivable à droite (resp. covariant exact à droite et dérivable à gauche de dimension homologique finie) et notons $*$ = $+$ (resp. $*$ = b). On suppose que :

▷ \mathcal{C}' possède suffisamment d'objets déployants (cf. la preuve de 2.5) pour $\mathbf{R}F$ (resp. $\mathbf{L}F$) ;

▷ via la première variable, F commute aux produits infinis.

Alors $\mathbf{R}F$ s'étend naturellement en un bifoncteur

$$D^*(\mathcal{C}_1^{I^\circ}) \times D^*(\mathcal{C}') \longrightarrow D^*(\mathcal{C}_2^{I^\circ})$$

et l'on a pour $(A, B) \in D^*(\mathcal{C}_1^{I^\circ}) \times D^*(\mathcal{C})$ un isomorphisme bifonctoriel

$$\begin{aligned} \mathbf{R}F(\mathop{\text{R}\lim}\limits_{\leftarrow I} A, B) &\simeq \mathop{\text{R}\lim}\limits_{\leftarrow I} \mathbf{R}F(A, B) \\ (\text{resp. } \mathbf{L}F(\mathop{\text{R}\lim}\limits_{\leftarrow I} A, B) &\simeq \mathop{\text{R}\lim}\limits_{\leftarrow I} \mathbf{L}F(A, B)). \end{aligned}$$

4) Soit $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}_1$ un foncteur contravariant exact. On suppose que G transforme sommes infinies en produits infinis. Il y a alors un isomorphisme

$$G(\mathop{\lim}\limits_{\leftarrow I} A) \simeq \mathop{\text{R}\lim}\limits_{\leftarrow I} G(A),$$

fonctoriel en $A \in D^-(\mathcal{C}'^I)$.

Démonstration. — 1) résulte de l'existence dans $\mathcal{C}_1^{I^\circ}$ de suffisamment de systèmes projectifs flasques au sens de [35]. Comme nous en aurons l'utilité, indiquons brièvement de quoi il s'agit.

On dit qu'un système projectif $A = (A_i) \in \mathcal{C}_1^{I^\circ}$ est *flasque* si pour tout $I'' \subset I' \subset I$,

$$\mathop{\lim}\limits_{\leftarrow I'} A \rightarrow \mathop{\lim}\limits_{\leftarrow I''} A.$$

Pour $A \in \mathcal{C}_1^{I^\circ}$, on définit un « effacement flasque » $A \rightarrow \text{Fl}(A)$, où

$$\text{Fl}(A)_i = \prod_{j \leq i} A_j$$

est le système projectif évident et où les flèches $A_i \rightarrow \text{Fl}(A)_i$ sont induites par celles de A . Il est utile de noter que l'on dispose ici d'un foncteur résolvant « à la Godement » : si

$$\mathbf{Fl}^\bullet : \text{Kom}_{\text{naifs}}^a(\mathcal{C}_1^{I^\circ}) \longrightarrow \text{Kom}_{\text{naifs}}^{a+1}(\mathcal{C}_1^{I^\circ})$$

est induit par Fl , on note

$$\mathbf{Fl}^* : \text{Kom}(\mathcal{C}_1^{I^\circ}) \longrightarrow \text{Kom}(\mathcal{C}_1^{I^\circ}), \quad A^\bullet \longmapsto \text{Tot}_\Pi \mathbf{Fl}^\bullet(A^\bullet),$$

où Tot_Π est le foncteur « complexe total » avec des produits (et non des sommes). On a donc

$$\mathop{\text{R}\lim}\limits_{\leftarrow I} A^\bullet = \mathop{\lim}\limits_{\leftarrow I} \mathbf{Fl}^*(A^\bullet).$$

2) La construction ci-dessus montre que $\mathop{\text{R}\lim}\limits_{\leftarrow I}$ commute bien à Φ .

(i) On peut toujours supposer $\mathcal{C}_1 = \text{Ab}$ et invoquer [35], corollaire à la proposition 5. D'après [30], il faut prendre garde à la proposition 5 elle-même (reportée aussi dans [15]), qui est fausse en toute généralité. Lorsque $\mathcal{C}_1 = \text{Ab}$, la version usuelle du critère de Mittag-Leffler remplace [35], proposition 5, et permet cependant de conclure.

(ii) Il est bien connu que $\varprojlim_I \text{Comp}^{I^\circ} \rightarrow \text{Comp}$ est exact. Le résultat s'en déduit aisément. On renvoie à [18] pour une étude plus complète des foncteurs $\text{R}^q \varprojlim_I$.

3) Traitons le cas où le foncteur F est exact à gauche dérivable à droite. Si $B^\bullet \in \text{Kom}^*(\mathcal{C})$ est un complexe à objets déployants pour RF et si A^\bullet est dans $\text{Kom}^*(\mathcal{C}_1^\circ)$, $\text{RF}(A^\bullet, B^\bullet) := F(A^\bullet, B^\bullet) \in D^+(\mathcal{C}_2^{I^\circ})$ définit l'extension de RF (resp. LF) souhaitée. Les foncteurs $F(-, B^q)$ ($q \geq 0$) sont exacts et commutent aux produits infinis. Il y a donc un isomorphisme naturel de complexes triples naïfs

$$F(\varprojlim \text{Fl}^\bullet(A^\bullet), B^\bullet) \simeq \varprojlim \text{Fl}^\bullet(F(A^\bullet, B^\bullet)),$$

fonctoriel en (A^\bullet, B^\bullet) . En groupant de deux manières différentes, on obtient un isomorphisme de complexes simples, duquel se déduit celui de l'énoncé.

Le cas F exact à droite dérivable à gauche se traite de façon analogue. Expliquons la condition de dimension homologique finie : l'extension de F au complexes fait intervenir des sommes directes, alors que ci-dessus, le passage aux complexes simples fait intervenir des produits. La condition de dimension homologique finie permet de faire uniquement des produits finis.

4) Dualisons la construction du 1) (i) : pour $A \in \mathcal{C}^I$, posons $\text{Cofl}(A) \rightarrow A$, où $\text{Cofl}(A)_i = \bigoplus_{j \leq i} A_j$ avec les flèches naturelles. De même, on définit

$$\text{Cofl}^\bullet : \text{Kom}_{\text{naïfs}}^a(\mathcal{C}') \rightarrow \text{Kom}_{\text{naïfs}}^{a+1}(\mathcal{C}') \quad \text{et} \quad \text{Cofl}^*(A^\bullet) := \text{Tot}_{\oplus} \text{Cofl}^\bullet(A^\bullet).$$

Comme G est exact et transforme sommes en produits, pour $A^\bullet \in \text{Kom}^-(\mathcal{C}')$, on a un isomorphisme de doubles complexes naïfs

$$G(\varinjlim \text{Cofl}^\bullet(A^\bullet)) \simeq \varinjlim \text{Fl}^\bullet(G(A^\bullet))$$

dont se déduit celui de l'énoncé en prenant les complexes totaux (noter que l'on a $\text{Tot}_{\Pi} \circ G \simeq G \circ \text{Tot}_{\oplus}$). □

Remarque 2.11. — Dans le point 3), on peut jouer sur la variance en les deux variables, soit en remplaçant \mathcal{C}' par sa catégorie opposée, soit en remplaçant \mathcal{C}_1 par sa catégorie opposée (dans ce cas, on utilise le point 4). Ainsi, soit par exemple $F : \mathcal{C}'_1 \times \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}_2$ contravariant en la première variable et covariant en la seconde. On suppose que F est dérivable à droite,

transforme sommes infinies en la première variable en produits infinis et que \mathcal{C}' possède suffisamment d'objets déployants. Soient \mathcal{C}_1 la catégorie opposée à \mathcal{C}'_1 , $F' : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}_2$ le bifoncteur covariant déduit de F et $G : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}'_1$ le foncteur contravariant exact induit par l'identité. Combinant 3) et 4) on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{RF}(\varinjlim_I A, B) &= \mathrm{RF}'(G(\varinjlim_I A), B) \simeq \mathrm{RF}'(\mathrm{R}\varprojlim_I G(A), B) \\ &\simeq \mathrm{R}\varprojlim_I \mathrm{RF}'(G(A), B) = \mathrm{R}\varprojlim_I \mathrm{RF}(A, B). \end{aligned}$$

Dans ce travail, les passages à la limites apparaissent dans deux contextes différents :

▷ Le plus souvent, pour former les modules d'Iwasawa : prendre $I = \mathbb{N}$, la catégorie des sous-groupes ouverts de Γ et $\mathcal{C}_1 = {}_\Lambda \mathcal{C}$. Par abus de langage, on parlera de la limite d'un système normique ; aussi $\mathrm{R}\varprojlim$ désignera-t-il souvent le foncteur composé

$$D^+(\varprojlim \mathcal{C}) \longrightarrow D^+(\mathcal{C}^I) \xrightarrow{\mathrm{R}\varprojlim} D^+(\mathcal{C}).$$

On dit d'un système normique $A \in \varprojlim \mathcal{C}$ qu'il est de type fini sur \mathbb{Z}_p si chaque $\pi_n(A) = A_n$ l'est. On note $\varprojlim_{\mathrm{tf}} \mathcal{C} \subset \varprojlim \mathcal{C}$ la sous-catégorie des systèmes normiques de type fini et $\mathrm{Kom}^*(\varprojlim_{\mathrm{tf}} \mathcal{C})$ (resp. $D^*(\varprojlim_{\mathrm{tf}} \mathcal{C})$) la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Kom}^*(\varprojlim \mathcal{C})$ (resp. $D^*(\varprojlim \mathcal{C})$) des complexes dont les objets de cohomologie sont dans dans $\varprojlim_{\mathrm{tf}} \mathcal{C}$. Pour les catégories de modules l'indice « tf » prend sa signification habituelle. Le fait suivant se déduit de 2.10, 2) (ii) :

PROPOSITION 2.12. — *Si $A \in \mathrm{Kom}^+(\varprojlim_{\mathrm{tf}} \mathcal{C})$, alors $\varprojlim A \rightarrow \mathrm{R}\varprojlim A$ est un isomorphisme (dans $D^+(\mathcal{C})$).* □

Comme la restriction de $\varprojlim : \varprojlim \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ à $\varprojlim_{\mathrm{tf}} \mathcal{C}$ est exacte, on voit que $\mathbb{Z}_p \otimes - : \mathcal{C} \rightarrow \varprojlim \mathcal{C}$ (qui est l'adjoint à gauche de \varprojlim) vérifie la propriété suivante : *soit P un objet projectif de \mathcal{C} , si $\mathbb{Z}_p \otimes P$ est de type fini alors c'est un objet projectif dans $\varprojlim_{\mathrm{tf}} \mathcal{C}$.*

▷ Occasionnellement, pour former les modules de Tate ou la cohomologie continue : prendre $I = \mathbb{N}$, la catégorie des entiers naturels ordonnés, et $\mathcal{C}_1 = \varprojlim \mathcal{C}$. On conviendra alors d'indexer les systèmes projectifs par la lettre k et on notera $\mathrm{R}\varprojlim_k$ au lieu de $\mathrm{R}\varprojlim_I$.

Dans ce cadre, indiquons le rapport entre module de Tate et bidualité :

LEMME 2.13. — *Soient $A \in D^b(\varprojlim \mathcal{C})$ et $A_n := \pi_n A$. Alors:*

(i) *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

▷ $A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p^k \in D^b(\varprojlim_{\mathrm{tf}} \mathcal{C}) ;$

- ▷ $\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A) \in D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\text{tf}}$;
- ▷ chaque \mathbb{Z}_p -module $H^q(A_n)$ possède une suite de composition dont chaque quotient est soit de torsion et de \mathbb{Z}_p -cotype fini, soit uniquement p -divisible, soit de \mathbb{Z}_p -type fini.

(ii) Il y a un isomorphisme et une flèche naturelle

$$\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, A)[1] \simeq \text{Rlim}_{\leftarrow k} A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p^k \longrightarrow \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A);$$

c'est isomorphisme si la condition (i) est satisfaite.

(iii) Supposons (i) satisfaite. Si de plus chaque \mathbb{Z}_p -module $H^q(A_n)$ est de torsion, alors il y a un isomorphisme naturel $A \simeq \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[-1]$.

Démonstration. — (i) Commençons par montrer trois faits :

(a) $\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p) \simeq \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p$.

En effet, si I (resp. P) désigne le complexe de \mathbb{Z}_p -modules $[\mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p]$ (resp. $[\mathbb{Z}_p \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_p]$) placé en degrés $[0, 1]$ (resp. $[-1, 0]$), alors

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A \otimes_{\mathbb{Z}_p} P, I), I) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, I), I) \otimes_{\mathbb{Z}_p} P$$

d'où le résultat annoncé.

(b) $A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p \in D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\text{tf}} \iff \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p) \in D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\text{tf}}$.

En effet, si M est un \mathbb{Z}_p -module tué par p , alors on a simplement

$$\begin{aligned} \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(M) &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)[-1], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)[-1] \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}/p), \mathbb{Z}/p) \end{aligned}$$

et l'on voit que M est de type fini si et seulement si $\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(M)$ l'est ; l'assertion annoncée s'en déduit par troncature de $A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p$.

(c) Si $M \in {}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}$, alors on a l'équivalence : $M \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p \in D^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C})_{\text{tf}} \iff M$ possède une suite de composition comme dans l'énoncé.

L'implication \Leftarrow est évidente. Montrons \Rightarrow . Soient $M_1 \subset M_2 \subset M$ définis de la manière suivante : M_1 est le sous-module de torsion de M et l'image de M_2 dans M/M_1 est le sous-groupe constitué des éléments infiniment p -divisibles (noter que M_2/M_1 est p -divisible, car M/M_1 est sans torsion). Alors $M_1, M_2/M_1, M/M_2$ est la suite de composition annoncée. En effet, $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}_p}(M_1, \mathbb{Z}/p) = \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}/p)$ est fini, donc M_1 est de cotype fini ; M_2/M_1 est uniquement p -divisible ; $M_2/M_1 = \bigcap_k p^k(M/M_1)$, si bien que

M/M_2 est p -adiquement séparé ; comme de plus $\text{Tor}_0^{\mathbb{Z}_p}(M/M_2, \mathbb{Z}/p)$ est fini, on voit tout de suite que $\varprojlim (M/M_2)/p^k$ est de type fini, donc M/M_2 aussi.

Pour montrer (i), on fait un raisonnement en cercle :

▷ Si $\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A) \in D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$, alors il en est de même de $\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p$, puis de $A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p$, par (a) et (b).

▷ Si $A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p \in D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$, alors on a $H^q(A_n) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p \in D^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C})_{\text{tf}}$ pour tout q (observer que la suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur $(-)\otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p$ dégénère en suites exactes courtes). D'après (c), $H^q(A_n)$ possède donc une suite de composition comme dans l'énoncé.

▷ Si les $H^q(A_n)$ possèdent une suite de composition comme dans l'énoncé, alors $\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(H^q(A_n))$ appartient à $D^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C})_{\text{tf}}$ (se ramener par dévissage aux trois cas suivants : 1) si $M \in {}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}_{\text{tf}}$ est de torsion de cotype fini, alors

$$\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}_p) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)[-1]$$

est de type fini, donc $\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(M)$ aussi ; 2) si $M \in {}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}$ est uniquement p -divisible, $M \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = 0$, puis

$$\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}_p) = \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(M \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$$

et enfin $\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A) = 0$; 3) si M est de type fini, alors M possède une résolution parfaite et $M \simeq \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(M)$ est aussi de type fini), et donc $\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A)$ appartient à $D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$.

(ii) Expliquons d'abord l'isomorphisme. Malheureusement, 2.10, 3) ne suffit pas et nous procéderons donc à la main. Soit $(P_k) \in \text{Kom}^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$ (resp. $(Q_k) \in \text{Kom}^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}^{\mathbb{N}})$) le système projectif (resp. inductif) évident des complexes $[\mathbb{Z}_p \xrightarrow{p^k} \mathbb{Z}_p]$ placés en degrés $[-1, 0]$ (resp. $[0, 1]$), de sorte que $(P_k) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}((Q_k), \mathbb{Z}_p)$. Pour $A \in \text{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C})$, on a dans $\text{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$ des isomorphismes naturels

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{Cofl}((Q_k)), A) \simeq \text{Fl}^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}((Q_k), A)) \simeq \text{Fl}^*(A \otimes_{\mathbb{Z}_p} (P_k))$$

dont celui de l'énoncé se déduit en appliquant \varprojlim_k (noter le quasi-isomorphisme $\varprojlim_k Q_k \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[-1]$).

Passons à l'étude de la seconde flèche de l'énoncé. Dans $D^b(\Gamma\mathcal{C})$ (resp. $D^b({}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$) on a $A \rightarrow \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A)$ (resp. $(\mathbb{Z}/p^k) \leftarrow \mathbb{Z}_p$) ; d'où, dans $D^b(\Gamma\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$:

$$A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L (\mathbb{Z}/p^k) \xrightarrow{(1)} \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p^k \xleftarrow{(2)} \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A)$$

(le système projectif de droite est constant). On laisse au lecteur le soin de montrer que la flèche (2) donne un isomorphisme lorsqu'on lui applique

$\mathop{\mathrm{Rlim}}_{\leftarrow k}$ (les foncteurs π_n et d'oubli permettent de travailler dans ${}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}$ et ${}_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ}$ au lieu de $\underline{\Gamma}\mathcal{C}$ et $\underline{\Gamma}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ}$; on peut alors invoquer un argument de compacité, en mimant le raisonnement de 3.4 (iii)). La flèche de l'énoncé est donc construite.

Pour mémoire, notons que la flèche ainsi obtenue

$$\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, A)[1] \longrightarrow \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A)$$

redonne la flèche de bidualité lorsqu'on la compose avec la flèche évidente

$$A = \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p, A) \longrightarrow \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, A)[1].$$

Reste à vérifier que la flèche (1) est un isomorphisme lorsque la condition (i) est vérifiée. Mais dans ce cas, l'analogie modulo p^k de (i) (a) permet d'interpréter celle-ci comme la flèche de bidualité

$$A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p^k \longrightarrow \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p^k),$$

laquelle est un isomorphisme, puisque $A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p^k$ est dans $D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\mathrm{tf}}$.

(iii) D'après (ii), la flèche de bidualité $A \rightarrow \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A)$ s'identifie à

$$A \longrightarrow \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, A)[1].$$

De là un triangle distingué

$$A \longrightarrow \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A) \longrightarrow \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p, A)[1] \longrightarrow A[1]$$

duquel on tire $A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Sous nos hypothèses, on a de plus $A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Q}_p = 0$, si bien que la flèche naturelle

$$A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[-1] \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}_p = A$$

est un isomorphisme. Le résultat suit. □

3. Adjonction et dualité

On présente une étude de la dualité Λ -linéaire selon une approche inspirée de [16]. L'utilisation des catégories dérivées, largement influencée par [31], montre ici toute son efficacité ; elle permet notamment la synthèse et la généralisation des résultats de [42].

Comme on a choisi de travailler avec des Λ -modules non topologisés, il convient de faire une hypothèse de noéthérianité. Dans cette section et *dans tout le reste de l'article*, on suppose que Γ contient un pro- p -sous-groupe ouvert⁽¹⁾ et l'on fait les hypothèses suivantes :

⁽¹⁾ Cette condition permettra l'usage du lemme de Nakayama.

▷ $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ est noethérien ;

▷ la dimension homologique globale de Λ est finie (i.e. la p -dimension cohomologique de Γ est finie, cf. [4]).

La seconde hypothèse nous est imposée par le domaine de définition des divers foncteurs dérivés qu'on utilise. Elle est superflue en de nombreux endroits, si l'on agrandit précautionneusement les domaines de définition en question. Il est bien connu que la première condition est vérifiée notamment si Γ est un pro- p -groupe analytique (cf. [26], V.2.2.4. Lorsque de plus la seconde est vérifiée, alors Γ est automatiquement un groupe de Poincaré (*loc. cit* V.2.5.8 et ref.).

3.1. Un résultat général

Dans notre contexte, la dualité homologie/cohomologie prend la forme du lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Il y a dans $D^b(\mathcal{C}_\Gamma)$ un isomorphisme*

$$\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\underline{\Gamma}(A), \mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}_p$$

fonctoriel en $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$

Démonstration. — D'après 2.8 (ii), il y a dans $D^b(\Gamma\mathcal{C})$ une flèche fonctorielle en A :

$$\mathrm{R}\underline{\Gamma}(A) \longrightarrow \underline{\mathrm{RHom}}(\mathbb{Z}_p, A).$$

Le triangle distingué tautologique

$$A \longrightarrow A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \longrightarrow A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p \longrightarrow A[1]$$

donne donc lieu à un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\underline{\Gamma}(A), \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\underline{\Gamma}(A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p)[1] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\mathrm{RHom}}(\mathbb{Z}_p, A), \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\mathrm{RHom}}(\mathbb{Z}_p, A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p)[1]. \end{array}$$

Les deux flèches horizontales sont des isomorphismes, car $\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Z}_p)$ s'annule sur tous les complexes dont la cohomologie est uniquement divisible. La seconde flèche verticale est un isomorphisme par 2.8 (iii). La première flèche verticale est donc elle aussi un isomorphisme, et l'on conclut en invoquant l'isomorphisme d'évaluation 2.7, 2), (ii)–(iii) :

$$\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}_p \simeq \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\mathrm{RHom}}(\mathbb{Z}_p, A), \mathbb{Z}_p). \quad \square$$

THÉORÈME 3.2. — On rappelle que $\underline{\Lambda} \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}_\Lambda$ désigne le système normale canonique $(\mathbb{Z}_p[G_n])$.

(i) Pour $M \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$, il y a dans $\underline{\Gamma}\mathcal{C}$ un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(M \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{RHom}_\Lambda(M, \underline{\Lambda}).$$

(ii) Pour $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$, il y a dans $\underline{\Gamma}\mathcal{C}$ un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\underline{\Gamma}(A)) \simeq \mathrm{RHom}_\Lambda(\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p), \underline{\Lambda}).$$

Démonstration. — (i) Par adjonction, puis induction, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(M \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) &\simeq \underline{\mathrm{RHom}}(M, \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)) \\ &\simeq \underline{\mathrm{RHom}}(M, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{RHom}_\Lambda(M, \underline{\mathrm{Coind}}\mathbb{Z}_p) \end{aligned}$$

d'où le résultat, puisque $\underline{\Lambda} \simeq \underline{\mathrm{Coind}}\mathbb{Z}_p$ dans $\underline{\Gamma}\mathcal{C}_\Lambda$.

(ii) Appliquant $\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Z}_p)$ au lemme 3.1, on obtient dans $D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})$:

$$\mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\underline{\Gamma}(A)) \simeq \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p).$$

On conclut par (i), appliqué à $M = \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$. □

COROLLAIRE 3.3. — Il y a dans $D^b(\Lambda\mathcal{C})$ des isomorphismes fonctoriels :

(i) Pour $M \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$,

$$\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim M \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{RHom}_\Lambda(M, \Lambda).$$

(ii) Pour $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$,

$$\mathrm{R}\varprojlim \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\underline{\Gamma}(A)) \simeq \mathrm{RHom}_\Lambda(\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p), \Lambda).$$

Démonstration. — (i) Les compatibilités entre homomorphismes et limites donnent ici (voir 2.10, 3) et remarque) :

$$\begin{aligned} \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim M \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) &\simeq \mathrm{R}\varprojlim \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(M \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \\ &\simeq \mathrm{R}\varprojlim \mathrm{RHom}_\Lambda(M, \underline{\Lambda}) \\ &\simeq \mathrm{RHom}_\Lambda(M, \mathrm{R}\varprojlim \underline{\Lambda}) \\ &\simeq \mathrm{RHom}_\Lambda(M, \Lambda). \end{aligned}$$

De même, (ii) découle de 3.2 en appliquant $\mathrm{R}\varprojlim$. □

3.2. Le cas des groupes de Poincaré

PROPOSITION 3.4. — On suppose que Γ est un groupe de Poincaré de dimension d , i.e. $D(\Gamma) \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[d]$ (cf. 7.3) ; alors :

(i) Dans $D^b(\mathcal{C}_\Gamma)$, fonctoriellement en $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$, on a

$$\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}_p \simeq \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} A, \mathbb{Z}_p)[d].$$

(ii) Si $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\mathrm{tf}}$, alors dans $D^b(\mathcal{C}_\Gamma)$, on a

$$\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\Gamma(A), \mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p)))[d].$$

Aussi, si $A \in \Gamma\mathcal{C}$ est fini :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\Gamma(A), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p))[d].$$

(iii) Si $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$, alors dans $D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$, on a

$$\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{RHom}_\Lambda(A, \Lambda)[d].$$

Démonstration. — (i) Le théorème 7.3, ou plutôt 7.4 (iii), donne ici

$$\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}_p \simeq \underline{\mathrm{RHom}}(A, \mathbb{Z}_p[d]).$$

Le résultat s'en déduit via l'isomorphisme de 3.2 (i) :

$$\underline{\mathrm{RHom}}(A, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} A, \mathbb{Z}_p).$$

(ii) Comme $A = \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A)$, le lemme 3.1 et sa version à droite donnent

$$\begin{aligned} \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}_p &\simeq \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\Gamma(A), \mathbb{Z}_p), \\ \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} A &\simeq \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p)), \mathbb{Z}_p), \end{aligned}$$

d'où le résultat de l'énoncé, en remplaçant dans (i).

Si $A \in \Gamma\mathcal{C}$ est fini, les groupes de cohomologie de $\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p))$ le sont aussi (car Λ est noethérien ; utiliser par exemple 2.8) et l'isomorphisme de l'énoncé suit.

(iii) Par 7.4 (iii) et induction, on a dans $D^b(\mathcal{C}_\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \overset{L}{\otimes} \Lambda &\simeq \mathrm{RHom}(A, \mathbb{Z}_p) \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}_p \\ &\simeq \underline{\mathrm{RHom}}(A, \mathbb{Z}_p[d]) \simeq \mathrm{RHom}_\Lambda(A, \Lambda)[d]. \end{aligned}$$

D'après 2.10, 3), on a $\mathrm{RHom}_\Lambda(A, \Lambda) \simeq \varprojlim \mathrm{RHom}_\Lambda(A, \underline{\Lambda})$. Reste à montrer que la flèche naturelle de $D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$

$$(*) \quad \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow \varprojlim (\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \overset{L}{\otimes} \Lambda)$$

est un isomorphisme (ce qui se vérifie dans $D^b(\mathbb{Z}_p\mathcal{C})$, par oubli). Maintenant les objets de cohomologie de $\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p)$ sont des Λ -modules topologiques compacts, puisque d'après 2.11 et 2.10, 2) (ii) :

$$\mathrm{Ext}^q(A, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{R}^q \varprojlim \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A_i, \mathbb{Z}_p) \simeq \varprojlim \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^q(A_i, \mathbb{Z}_p)$$

si $A = \varinjlim A_i$ avec A_i des complexes à objets de \mathbb{Z}_p -type fini. Par troncature du complexe $\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p)$, il suffit donc de montrer que la flèche naturelle de $D^b(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p})$

$$(**) \quad M \longrightarrow \mathrm{R} \varprojlim (M \overset{L}{\otimes}_{\Lambda} \mathbb{Z}_p[G_n])$$

est un isomorphisme pour tout $M \in \mathcal{C}_{\Lambda}$ provenant par oubli de la catégorie $\mathcal{C}_{\Lambda\text{-comp}}$ des Λ -modules (à droite) topologiques compacts.

D'après [4], M possède une résolution $P \rightarrow M$, où $P \in \mathrm{Kom}^b(\mathcal{C}_{\Lambda\text{-comp}})$ est à objets projectifs (dans $\mathcal{C}_{\Lambda\text{-comp}}$). Fixons encore un système projectif de résolutions parfaites $L_n \rightarrow \mathbb{Z}_p[G_n]$ dans ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$. Ont alors lieu dans $\mathrm{Kom}^b(\mathbb{Z}_p\mathcal{C}^{N^\circ})$ des quasi-isomorphismes (pour le premier, cf. [4], 2.1) :

$$P \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[G_n] \longleftarrow P \widehat{\otimes}_{\Lambda} L_n = P \otimes_{\Lambda} L_n \longrightarrow M \otimes_{\Lambda} L_n.$$

Ici $\widehat{\otimes}_{\Lambda} : \mathcal{C}_{\Lambda\text{-comp}} \times {}_{\Lambda}\text{-comp}\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}_p\mathcal{C}$ désigne le produit tensoriel complété (il coïncide avec \otimes_{Λ} lorsque le second argument est dans ${}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$, vue comme sous-catégorie pleine de ${}_{\Lambda\text{-comp}}\mathcal{C}$). Aussi

$$P \widehat{\otimes}_{\Lambda} \mathbb{Z}_p[G_n] \simeq M \overset{L}{\otimes}_{\Lambda} \mathbb{Z}_p[G_n]$$

dans $D^b(\mathbb{Z}_p\mathcal{C}^{N^\circ})$. Comme les objets du complexe $P \widehat{\otimes}_{\Lambda} \mathbb{Z}_p[G_n]$ sont des systèmes projectifs de \mathbb{Z}_p -modules topologiques compacts, donc déployants pour $\mathrm{R} \varprojlim$ (2.10 2) (ii)), la flèche (***) est représentée par

$$P \longrightarrow \varprojlim P \otimes_{\Lambda} \mathbb{Z}_p[G_n].$$

C'est bien un isomorphisme, puisque les objets de P sont compacts. □

COROLLAIRE 3.5. — *Si Γ est un groupe de Poincaré de dimension d , alors, fonctoriellement en $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$:*

$$\mathrm{R} \varprojlim \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{R}\Gamma(A) \simeq \mathrm{Bid}_{\Lambda}(A)[-d].$$

Démonstration. — On réécrit 3.3 (ii) en tenant compte de 3.4 (iii). □

4. Descente et codescente

Si $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$ est de la forme $\mathrm{R}\Gamma(A_\infty)$ pour un certain $A_\infty \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$, la connaissance de A équivaut à celle de $\varinjlim A \simeq A_\infty$. Dans ces conditions,

il y a un isomorphisme naturel, donné par le corollaire 3.3 :

$$X_\infty \simeq \mathrm{RHom}_\Lambda (\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p} (A_\infty), \mathbb{Z}_p), \Lambda$$

et cela répond à la question 1.2.

Le but de cette section est la construction, pour $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$ quelconque, d'un triangle distingué qui généralise l'isomorphisme précédent. Comme expliqué dans l'introduction, on en donne en fait deux constructions duales, dont la comparaison aboutit à une relation non triviale entre le « défaut de descente » du système A et son « défaut de codescente ».

4.1. Triangles de (co)-descente : $j(A)$ et $k(A)$

À chaque objet $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$, sont associés fonctoriellement les objets suivants :

- ▷ $A_n := \pi_n(A) \in D^b(G_n\mathcal{C})$, pour chaque $n \in N$ (cf 2.6).
- ▷ $A^* := \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \in D^b(\mathcal{C}_\Gamma)$,
 $A_n^* := \pi_n(A^*) \simeq \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A_n, \mathbb{Z}_p) \in D^b(\mathcal{C}_{G_n})$.
- ▷ $A_\infty := \varprojlim A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$,
 $A_\infty^* := \varprojlim A^* \in D^b(\mathcal{C}_\Gamma)$.
- ▷ $X_\infty := R\varprojlim A \in D^b(\Lambda\mathcal{C})$,
 $X_\infty^* := R\varprojlim A^* \simeq \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p) \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$.

On rappelle que si $A \in \mathrm{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C})_{\mathrm{tf}}$, alors la flèche canonique $\varprojlim A \rightarrow X_\infty$ est un isomorphisme dans $D^b(\Lambda\mathcal{C})$ (2.12), i.e. $H^q(X_\infty) \simeq \varprojlim H^q(A_n)$.

Commençons par un critère de noéthérianité pour X_∞ et X_∞^* .

LEMME 4.1. — Soit Γ_n un pro- p -sous-groupe ouvert de Γ .

1) Soit $A \in \Gamma\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$, alors on a $X_\infty = \varprojlim A \in \Lambda\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$ si, et seulement si, $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} X_\infty$ est de \mathbb{Z}_p -type fini. Si c'est le cas, alors $\mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} X_\infty$ appartient à $D^b(\mathbb{Z}_p\mathcal{C})_{\mathrm{tf}}$.

2) Soit $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\mathrm{tf}}$, alors :

- (i) $X_\infty \in D^b(\Lambda\mathcal{C})_{\mathrm{tf}}$ équivaut à $\mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} X_\infty \in D^b(G_n\mathcal{C})_{\mathrm{tf}}$.
- (ii) $X_\infty^* \in D^b(\Lambda\mathcal{C})_{\mathrm{tf}}$ équivaut à $\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\Gamma(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Z}_p) \in D^b(\mathcal{C}_{G_n})_{\mathrm{tf}}$. Cela se produit si, et seulement si, $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^p(\mathrm{R}^q\Gamma(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Z}_p)$ est de type fini sur \mathbb{Z}_p pour $p = 0, 1, q \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — 1) X_∞ étant profini, on peut le munir de sa topologie compacte, et celle-ci est compatible avec l'action de Λ . On applique alors la version topologique du lemme de Nakayama.

2) (i) On applique 1) aux Λ -modules $H^q(X_\infty) = \varprojlim H^q(A_n)$. Observons la suite spectrale d'hypercohomologie :

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_{-p}^{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(\mathbb{Z}_p, H^q(X_\infty)) \implies \text{Tor}_{p+q}^{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(\mathbb{Z}_p, X_\infty) = E^{p+q}.$$

Si $X_\infty \in D^b(\Lambda\mathcal{C})_{\text{tf}}$, alors les $E_2^{p,q}$ sont de type fini sur Λ , donc les E^{p+q} aussi, i.e. $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}^L X_\infty \in D^b(\mathbb{Z}_p\mathcal{C})_{\text{tf}}$.

Réciproquement, supposons les E^{p+q} de type fini sur Λ et montrons que les $H^q(X_\infty)$ le sont aussi. Ayant remarqué les équivalences suivantes, données par le point 1) :

$$H^q(X_\infty) \in (\Lambda\mathcal{C})_{\text{tf}} \iff E_2^{0,q} \in (\Lambda\mathcal{C})_{\text{tf}} \iff (\forall p, E_2^{p,q} \in (\Lambda\mathcal{C})_{\text{tf}}),$$

on procède par récurrence descendante sur q , pour montrer que $E_2^{0,q}$ est dans $(\Lambda\mathcal{C})_{\text{tf}}$ (noter que $E_2^{0,q} = 0$ pour $q \gg 0$) : le terme initial

$$E_2^{0,q} = \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} H^q(X_\infty)$$

est une extension d'un sous-module de $E^q = \text{Tor}_q^{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(\mathbb{Z}_p, X_\infty)$ (de type fini par hypothèse) par un Λ -module qui possède une filtration dont les graduations sont des quotients des $E_2^{-r-1,q+r} = \text{Tor}_{r+1}^{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(\mathbb{Z}_p, H^{q+r}(X_\infty))$, $r \geq 1$, lesquels sont noethériens par hypothèse de récurrence.

(ii) Le point précédent possède bien sûr une variante à droite ; appliquons celle-ci à $X_\infty^* = R\varprojlim A^*$. Comme

$$X_\infty^* \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}^L \mathbb{Z}_p \simeq \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{R}\Gamma(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Z}_p)$$

(cf. 3.1), le résultat se lit sur la suite spectrale

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^p(\text{R}^{-q}\Gamma(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Z}_p) \implies \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^{p+q}(\text{R}\Gamma(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Z}_p)$$

dans laquelle $E_2^{p,q} = 0$ pour $p \neq 0, 1$. □

Passons à la construction des « triangles de descente » (resp. de codescente). Pour chaque A_n il existe dans $D^b(\mathcal{G}_n\mathcal{C})$ un morphisme naturel de descente $j_{A,n} : A_n \rightarrow \text{R}\Gamma(\Gamma_n, A_\infty)$ et un morphisme naturel de codescente $k_{A,n} : \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}^L X_\infty \rightarrow A_n$. Il s'agit de relever cette collection de morphismes en une flèche de $D^b(\Gamma\mathcal{C})$ et de munir cette dernière d'un cône fonctoriel.

PROPOSITION 4.2. — Soit $\text{Tr}(D^b(\Gamma\mathcal{C}))$ la catégorie des triangles distingués de $D^b(\Gamma\mathcal{C})$.

(i) Il existe un foncteur $j : D^b(\Gamma\mathcal{C}) \rightarrow \text{Tr}(D^b(\Gamma\mathcal{C})) :$

$$A \longmapsto j(A) := (A \xrightarrow{j_A} \text{R}\Gamma(A_\infty) \rightarrow C(j_A) \rightarrow A[1])$$

tel que $\pi_n(j_A) = j_{A,n}$.

(ii) Il existe un foncteur $k : D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}} \rightarrow \text{Tr}(D^b(\Gamma\mathcal{C})) :$

$$A \longmapsto k(A) := (\mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} X_\infty \xrightarrow{k_A} A \rightarrow C(k_A) \rightarrow \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} X_\infty[1])$$

tel que $\pi_n(k_A) = k_{A,n}$.

Démonstration. — (i) Il suffit de construire un foncteur

$$\tilde{j} : \text{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Tr}(\text{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C}))$$

préservant les quasi-isomorphismes et qui vérifie les conditions suivantes :

▷ les premier et second termes du triangle $\tilde{j}(A)$ ont respectivement pour image A et $\text{R}\Gamma(A_\infty)$ dans $D^b(\Gamma\mathcal{C}) ;$

▷ la première flèche de $\tilde{j}(A)$ a pour image $j_{A,n}$ dans $D(G_n\mathcal{C})$.

Une fois \tilde{j} construit, on définit $j(A)$ comme l'image de $\tilde{j}(A)$ dans $D^b(\Gamma\mathcal{C})$.

Pour construire \tilde{j} , considérons le foncteur résolvent

$$K^* : (-) : \text{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C})$$

construit par Verdier dans [37], annexe au chapitre I. Celui-ci est muni d'un quasi-isomorphisme $B \mapsto K^*(B)$ fonctoriel en B , et les objets du complexe $K^*(B)$ sont Γ -cohomologiquement triviaux, de sorte que $\Gamma(\Gamma_n, K^*(B))$ représente $\text{R}\Gamma(\Gamma_n, B)$. Par définition, le morphisme de descente $j_{A,n}$ est alors représenté par la flèche composée

$$A_n \longrightarrow \Gamma(\Gamma_n, \varinjlim A) \longrightarrow \Gamma(\Gamma_n, K^*(\varinjlim A)).$$

Comme remarqué dans les préliminaires, cette flèche respecte la structure de système normique et donne une flèche $\tilde{j}_A : A \rightarrow \Gamma(K^*(\varinjlim A))$ dans $\text{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C})$. A donc lieu dans $\text{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C})$ un triangle distingué tautologique, fonctoriel en $A \in \text{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C}) :$

$$\tilde{j}(A) := (A \xrightarrow{\tilde{j}_A} \Gamma(\Gamma_n, K^*(\varinjlim A)) \rightarrow C(\tilde{j}_A) \rightarrow A[1]).$$

Celui-ci vérifie bien les deux propriétés annoncées, et cela termine la preuve.

(ii) Fixons une fois pour toutes une résolution projective $P \rightarrow \mathbb{Z}_p$ dans $D^b(\Lambda\mathcal{C})$. Si A appartient à $\text{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$, alors $X_\infty \in D^b(\Lambda\mathcal{C})$ est représenté par $\varinjlim A$ (2.12), et la flèche de codescente $k_{A,n}$ de $D^b(G_n\mathcal{C})$ par la flèche composée $P \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} \varinjlim A \rightarrow \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} \varinjlim A \rightarrow A_n$. Comme en (i), on note que cette dernière flèche a en fait lieu dans $\text{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C})$, et donne un triangle distingué tautologique fonctoriel dont le foncteur k est déduit par localisation. □

Remarque 4.3. — 1) Soit $A \in \text{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$. Alors :

(i) Les flèches j_A et k_A ne dépendent pas des résolutions qu'on a choisies. Par ailleurs, on peut aussi expliciter k_A à l'aide d'une résolution projective de $\varprojlim A$: soit $P \rightarrow \varprojlim A$ une telle résolution, alors k_A est représentée par la flèche composée $\varprojlim \mathbb{Z}_p \otimes P \rightarrow \mathbb{Z}_p \otimes \varprojlim A \rightarrow A$.

(ii) Remplacer $K^*(A)$ par une autre résolution Γ -acyclique de A dans la preuve ci-dessus remplace $j(A)$ par un autre triangle distingué, qui lui est (non canoniquement) isomorphe. Remarque analogue pour P et k_A .

2) Soit $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$, non dans $D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$. Si A est représenté par un complexe de $\Gamma\mathcal{C}$ dont les objets sont acycliques pour le foncteur $\text{R}\varprojlim$, alors la construction de $k(A)$ tient encore. J'ignore si l'on peut trouver un tel complexe pour tout $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$.

Remarque 4.4. — Soit $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$, alors 4.1 montre les équivalences

$$(i) X_\infty \in D^b(\Lambda\mathcal{C})_{\text{tf}} \iff C(k_A) \in D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}},$$

$$(ii) X_\infty^* \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{\text{tf}} \iff \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A), \mathbb{Z}_p) \in D^b(\mathcal{C}_\Gamma)_{\text{tf}}.$$

PROPOSITION 4.5. — Notons encore $k : D^b(\mathcal{C}_\Gamma)_{\text{tf}} \rightarrow \text{Tr}(D^b(\mathcal{C}_\Gamma))$ l'analogue à droite du foncteur k de la proposition précédente. Si $A^* \in D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$, il y a dans $D^b(\Gamma\mathcal{C})$ un diagramme commutatif, fonctoriel en $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$:

$$\begin{array}{ccc} (X_\infty^* \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{k_{A^*}} & A^* \\ \text{ev} \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{R}\Gamma(A_\infty), \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(j_A, \mathbb{Z}_p)} & \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \end{array}$$

Démonstration. — Soit $A \in \text{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C})$, tel que $A^* \in D^b(\mathcal{C}_\Gamma)_{\text{tf}}$. Si $I \in \text{Kom}^b(\mathbb{Z}_p\mathcal{C})$ est une résolution injective de \mathbb{Z}_p , alors $X_\infty^* \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$ est représenté par le complexe $\varprojlim \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, I) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim A, I)$. Soient maintenant $P \rightarrow \mathbb{Z}_p$ et $\varinjlim A \rightarrow K^*(\varinjlim A)$ les résolutions de la démonstration précédente, et considérons le diagramme commutatif de $\text{Kom}^b(\mathcal{C}_\Gamma)$:

$$\begin{array}{ccccc} \varprojlim \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, I) \otimes P & \longrightarrow & \varprojlim \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, I) \otimes \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, I) \\ \uparrow & & \wr \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim K^*(A), I) \otimes P & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim A, I) \otimes \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, I) \\ \text{ev} \downarrow & & \text{ev} \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\text{Hom}}(P, K^*(\varinjlim A)), I) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\text{Hom}}(\mathbb{Z}_p, \varinjlim A), I) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, I) \\ \downarrow & & \wr \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Gamma(K^*(\varinjlim A)), I) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Gamma(\varinjlim A), I) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, I). \end{array}$$

Dans celui-ci, la ligne supérieure (resp. inférieure) représente k_{A^*} (resp. $\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(j_A, \mathbb{Z}_p)$) et toutes les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes, ainsi que les flèches horizontales de gauche. On obtient le carré commutatif de l'énoncé en identifiant, dans $D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})$, les deux premières colonnes, ainsi que les deux premières et les deux dernières lignes. \square

4.2. Triangles d'adjonction : $\alpha_j(A)$ et $\alpha_k(A)$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le

THÉORÈME 4.6. — *Soit $A \in D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\mathrm{tf}}$, alors :*

(i) *Dans $D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})$, on a $C(j_A) \simeq C(j_{C(k_A)})$ fonctoriellement en A . Si de plus X_∞^* est dans $D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{\mathrm{tf}}$, alors $\mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p} C(j_A)$ est dans $D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\mathrm{tf}}$ et l'on a*

$$C(k_A) \simeq C(k_{\mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p} C(j_A)})[-1].$$

(ii) *Le foncteur j donne lieu à un triangle distingué, fonctoriel en A :*

$$\alpha_j(A) := (X_\infty \xrightarrow{\alpha_j} \mathrm{RHom}_\Lambda(X_\infty^*, \Lambda) \rightarrow \Delta_j(A) \rightarrow X_\infty[1])$$

dans lequel $\Delta_j(A) := \mathrm{R}\lim_{\leftarrow} \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A))$.

(iii) *Le foncteur k donne lieu à un triangle distingué*

$$\alpha_k(A) := (X_\infty^* \xrightarrow{\alpha_k} \mathrm{RHom}_\Lambda(X_\infty, \Lambda) \rightarrow \Delta_k(A) \rightarrow X_\infty^*[1]),$$

fonctoriel en A , dans lequel $\Delta_k(A) := \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_A), \mathbb{Z}_p)[1]$.

(iv) *Supposons de plus $X_\infty \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{\mathrm{tf}}$, alors il y a un isomorphisme de triangles $\alpha_j(A) \simeq \mathrm{RHom}_\Lambda(\alpha_k(A), \Lambda)$ fonctoriel en A , i.e.*

$$\begin{array}{ccccccc} X_\infty & \xrightarrow{\alpha_j} & \mathrm{RHom}_\Lambda(X_\infty^*, \Lambda) & \longrightarrow & \Delta_j(A) & \longrightarrow & X_\infty[1] \\ \downarrow & & \mathrm{id} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Bid}_\Lambda(X_\infty) & \xrightarrow{\mathrm{RHom}_\Lambda(\alpha_k, \Lambda)} & \mathrm{RHom}_\Lambda(X_\infty^*, \Lambda) & \rightarrow & \mathrm{RHom}_\Lambda(\Delta_k(A), \Lambda)[1] & \rightarrow & \mathrm{Bid}_\Lambda(X_\infty)[1]. \end{array}$$

En particulier,

$$\mathrm{R}\lim_{\leftarrow} \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A)) \simeq \mathrm{RHom}_\Lambda(\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_A), \mathbb{Z}_p), \Lambda).$$

Démonstration. — (i) Considérons $B := \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} X_\infty \in D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})$ et appliquons le foncteur j aux objets et flèches du triangle

$$k(A) = (B \xrightarrow{k_A} A \rightarrow C(k_A) \rightarrow B[1]).$$

On obtient alors un diagramme commutatif dont chaque ligne et colonne est un triangle distingué de $D^b(\Gamma\mathcal{C})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 B & \xrightarrow{j_B} & R\Gamma(B_\infty) & \longrightarrow & C(j_B) & \longrightarrow & B[1] \\
 \downarrow & & \downarrow R\Gamma(k_A) & & \downarrow & & \downarrow \\
 A & \xrightarrow{j_A} & R\Gamma(A_\infty) & \longrightarrow & C(j_A) & \longrightarrow & A[1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C(k_A) & \xrightarrow{j_{C(k_A)}} & R\Gamma(C(k_A)_\infty) & \longrightarrow & C(j_{C(k_A)}) & \longrightarrow & C(k_A)[1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 B[1] & \xrightarrow{j_{B[1]}} & R\Gamma(B_\infty)[1] & \longrightarrow & C(j_B)[1] & \longrightarrow & B[1]
 \end{array}$$

Pour obtenir le premier isomorphisme de l'énoncé, il suffit de montrer que $C(j_B) = 0$, i.e. que j_B est un isomorphisme. Soit $P \in \text{Kom}^b(\Lambda\mathcal{C})$ un complexe à objets projectifs représentant X_∞ . Comme les objets du complexe $\varinjlim \mathbb{Z}_p \otimes P$ sont Γ -cohomologiquement triviaux, la flèche j_B est représentée par $\mathbb{Z}_p \otimes P \rightarrow \Gamma(\varinjlim \mathbb{Z}_p \otimes P)$. C'est un isomorphisme de $\text{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C})$, puisque les objets de P sont des facteurs directs de Λ -modules libres, et que $C(j_\Lambda) = 0$.

Passons au second isomorphisme. L'hypothèse de finitude sur X_∞^* assure que $D := \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p} R\Gamma(A_\infty)$ est dans $D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$. Aussi le triangle distingué

$$\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(j(A)) = (\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p} A \xrightarrow{\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(j_A)} D \rightarrow \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p} C(j_A) \rightarrow \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p} A[1])$$

a-t-il lieu dans $D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$. On peut donc lui appliquer le foncteur k et cela donne en particulier un nouveau triangle distingué :

$$C(k_{\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p} A}) \rightarrow C(k_D) \rightarrow C(k_{\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p} C(j_A)}) \rightarrow C(k_{\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p} A})[1].$$

Comme $A \simeq \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A)$, il reste à montrer que $C(k_D) = 0$. Pour ce faire, nous utilisons le théorème 3.2, selon lequel $D \simeq \text{RHom}_\Lambda(X_\infty^*, \underline{\Lambda})$. Soit $P \in \text{Kom}^b(\mathcal{C}_\Lambda)$ un complexe parfait représentant X_∞^* , de sorte que le complexe $\text{Hom}_\Lambda(P, \Lambda) \in \text{Kom}^b(\Lambda\mathcal{C})$ est lui aussi parfait. Mais alors k_D est représentée par $\mathbb{Z}_p \otimes \text{Hom}_\Lambda(P, \Lambda) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P, \underline{\Lambda})$; c'est visiblement un isomorphisme, et l'on a bien $C(k_D) = 0$.

(ii) Appliquer le foncteur $\text{R}\varprojlim \circ \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(-)$ au triangle distingué $j(A)$ en donne un nouveau

$$\begin{aligned}
 \text{R}\varprojlim \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A) &\longrightarrow \text{R}\varprojlim \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(R\Gamma(A_\infty)) \\
 &\longrightarrow \text{R}\varprojlim \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p} C(j_A) \longrightarrow \text{R}\varprojlim \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A)[1].
 \end{aligned}$$

D'où celui de l'énoncé, compte tenu du corollaire 3.3 (ii) appliqué à $A_\infty \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$ et de l'isomorphisme $A \simeq \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A) \in D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$.

(iii) Appliquer le foncteur $\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Z}_p) \circ \varinjlim$ au triangle distingué $k(A)$ en donne un nouveau :

$$X_\infty^* \rightarrow \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} X_\infty, \mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_A), \mathbb{Z}_p)[1] \rightarrow X_\infty^*[1].$$

D'où celui de l'énoncé, puisque d'après l'analogie à gauche de 3.3 (i) :

$$\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} X_\infty, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{RHom}_\Lambda(X_\infty, \Lambda).$$

(iv) Soit comme en (i), $B = \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} X_\infty$. L'hypothèse de finitude sur X_∞ nous assure que $B, C(k_A) \in D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\mathrm{tf}}$. Sachant que

$$A \simeq \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A), \quad B \simeq \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(B), \quad C(k_A) \simeq \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(C(k_A))$$

et $C(j_B) = 0$, on obtient en appliquant $\mathrm{R}\varprojlim \circ \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(-)$ au premier diagramme de la démonstration :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{R}\varprojlim B & \longrightarrow & \mathrm{R}\varprojlim \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\Gamma(B_\infty)) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathrm{R}\varprojlim B[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_\infty & \longrightarrow & \mathrm{R}\varprojlim \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\Gamma(A_\infty)) & \longrightarrow & \mathrm{R}\varprojlim \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A)) & \longrightarrow & X_\infty[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{R}\varprojlim C(k_A) & \longrightarrow & \mathrm{R}\varprojlim \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\Gamma(C(k_A)_\infty)) & \longrightarrow & \mathrm{R}\varprojlim \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(C(j_{C(k_A)})) & \longrightarrow & \mathrm{R}\varprojlim C(k_A)[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{R}\varprojlim B[1] & \longrightarrow & \mathrm{R}\varprojlim \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\Gamma(B_\infty))[1] & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

Dans ce diagramme commutatif, chaque ligne ou colonne est un triangle distingué de $D^b(\Lambda\mathcal{C})$. De plus :

▷ la seconde ligne du diagramme s'identifie au triangle $\alpha_j(A)$, par construction de ce dernier ;

▷ la seconde colonne s'identifie à $\mathrm{RHom}_\Lambda(\alpha_k(A), \Lambda)$, comme cela résulte des isomorphismes de triangles distingués suivants (3.3) :

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\varprojlim \mathrm{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{R}\Gamma(\varinjlim k(A))) &\simeq \mathrm{RHom}_\Lambda(\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim k(A), \mathbb{Z}_p), \Lambda) \\ &\simeq \mathrm{RHom}_\Lambda(\alpha_k(A), \Lambda). \end{aligned}$$

Pour obtenir l'isomorphisme souhaité entre les triangles

$$\mathrm{RHom}_\Lambda(\alpha_k(A), \Lambda) \quad \text{et} \quad \alpha_j(A),$$

il suffit donc de montrer que $\mathrm{R}\varprojlim C(k_A) = 0$. Mais cela relève du même argument que la démonstration de 3.4 (iii). □

COROLLAIRE 4.7. — Si $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\mathrm{tf}}$ et $X_\infty^* \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{\mathrm{tf}}$, alors

$$C(j_A) = 0 \iff C(k_A) = 0.$$

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de 4.6 (i). □

COROLLAIRE 4.8. — Si Γ est un groupe de Poincaré de dimension d (par exemple $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^d$), alors

$$R\varprojlim_{\leftarrow} \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A)) \simeq \text{Bid}_{\Lambda}(\varinjlim C(k_A))[-d]$$

Démonstration. — On réécrit simplement 4.6 (iv) à l'aide de 3.4 (iii). \square

On relève un critère de noethérianité pour X_{∞}^* , utile en pratique :

COROLLAIRE 4.9. — On suppose $A \in D^b(\Gamma C)_{\text{tf}}$ et $X_{\infty} \in D^b(\Lambda C)_{\text{tf}}$. Alors on a l'équivalence

$$X_{\infty}^* \in D^b(\mathcal{C}_{\Lambda})_{\text{tf}} \iff \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_A), \mathbb{Z}_p) \in D^b(\mathcal{C}_{\Lambda})_{\text{tf}}.$$

Démonstration. — Cela se lit sur le triangle distingué $\alpha_k(A)$. \square

Remarque 4.10. — Pour $A \in D^b(\Gamma C)$ non nécessairement dans $D^b(\Gamma C)_{\text{tf}}$, le triangle distingué $\alpha_j(A)$ admet une généralisation évidente :

$$R\varprojlim_{\leftarrow} \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A) \rightarrow \text{RHom}_{\Lambda}(X_{\infty}^*, \Lambda) \rightarrow \Delta_j(A) \rightarrow R\varprojlim_{\leftarrow} \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A)[1].$$

De la même façon, lorsqu'on est dans le cas de 4.3 (iii), il est possible de généraliser une partie des résultats.

Remarque 4.11. — Disons qu'un foncteur $F : D^b(\mathcal{C}) \rightarrow D^b(\mathcal{C}')$ covariant (resp. contravariant) est d'amplitude $[a, b]$ s'il possède la propriété suivante :

« A acyclique hors de $[\alpha, \beta]$ implique $F(A)$ acyclique hors de $[\alpha + a, \beta + b]$ (resp. $[a - \beta, b - \alpha]$) ».

On a jusqu'ici défini trois foncteurs exacts covariants

$$\begin{aligned} C(j_{(-)}) : D^b(\Gamma C) &\longrightarrow D^b(\Gamma C), & \Delta_j : D^b(\Gamma C)_{\text{tf}} &\longrightarrow D^b(\Lambda C), \\ C(k_{(-)}) : D^b(\Gamma C)_{\text{tf}} &\longrightarrow D^b(\Lambda C) \end{aligned}$$

et un contravariant

$$\Delta_k : D^b(\Gamma C)_{\text{tf}} \rightarrow D^b(\mathcal{C}_{\Lambda}).$$

Si $\text{cd}_p \Gamma = d$, ils sont a priori d'amplitudes respectives $[-1, d + 1]$, $[-1, d]$, $[-d - 1, 0]$, $[-1, d + 1]$ (que $\Delta_j(A)$ soit acyclique en degrés $> \beta + d$ si A l'est en degrés $\geq \beta$ se lit par exemple sur l'isomorphisme

$$\Delta_j(A) \simeq \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A), \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p),$$

compte-tenu de la nullité de

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(\varinjlim \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(H^{d+1}(\Gamma_n, H^{\beta}(A_{\infty})), \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p)$$

dûe à la p -divisibilité de $H^{d+1}(\Gamma_n, -)$.

QUESTION 4.12. — *Que peut-on dire en général concernant la « taille » de $\Delta_j(A)$ et $\Delta_k(A)$? En particulier, lorsqu'on dispose d'un foncteur \det , peut-on caractériser $\det(\Delta_j)$ directement en termes de l'objet A ?*

Si $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^d$ et $A \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}$ est de la forme $A = \mathbb{Z}_p \otimes X_\infty$, c'est l'objet de la section suivante que de donner une condition suffisante pour avoir $\Delta_j(A) = 0$ dans $D^b(\Lambda\mathcal{C}/\{\text{pseudo-nuls}\})$. Le cas où A est quelconque reste assez mystérieux, même pour $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^d$.

Lorsque $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$, $C(j_A)$ et $C(k_A)$ ont tendance à se stabiliser (en un sens adéquat, cf. section 5.2) lorsque A provient de l'arithmétique (e.g. de la cohomologie d'une représentation p -adique) ; lorsque cela se produit, on parvient à une compréhension satisfaisante des quatre foncteurs de la remarque précédente.

5. Le cas commutatif : $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^d$

Dans ce paragraphe et *dans toute la suite de l'article*, on suppose que

$$\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^d,$$

si bien que Λ est un anneau commutatif. On identifie donc $\Lambda\mathcal{C}$ et \mathcal{C}_Λ . L'an-neau Λ est régulier de dimension $d + 1$ (voir [36]) ; on note parfois Q son corps des fractions. On désigne les pseudo-isomorphismes par le symbole \approx ou au besoin $\xrightarrow{\approx}$; rappelons que \approx est une relation d'équivalence sur la classe des Λ -modules de torsion. Si $M \in D^b(\Lambda\mathcal{C})$ on utilisera les notations suivantes :

$$E^q(M) := \text{Ext}_\Lambda^q(M, \Lambda), \quad H_q(\Gamma_n, M) := \text{Tor}_q^{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]}(\mathbb{Z}_p, M).$$

Pour un Λ -module M , on note $t_\Lambda M$ le sous-module de Λ -torsion et $f_\Lambda M := M/t_\Lambda M$; de même avec \mathbb{Z}_p au lieu de Λ . On note aussi

$$M[p^k] = \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}/p^k) \quad (\text{resp. } M/p^k = \text{Tor}_0^{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Z}/p^k))$$

le noyau (resp. conoyau) de la multiplication par p^k .

5.1. Δ_k et la structure des Λ -modules

Rassemblons en un lemme quelques propriétés des E^q . On renvoie à [16] pour une étude systématique de ces foncteurs.

LEMME 5.1. — Soit M un Λ -module de type fini. Alors :

- (i) $E^q M$ est de torsion (resp. pseudo-nul) si $q \geq 1$, (resp. $q \geq 2$).
- (ii) Si M est de torsion, le bord de la suite spectrale de bidualité induit un pseudo-isomorphisme canonique $M \xrightarrow{\sim} E^1 E^1 M$.
- (iii) Si M est de torsion, alors $E^1 M$ ne possède aucun sous-module pseudo-nul.
- (iv) Il existe un pseudo-isomorphisme (non canonique) $t_\Lambda M \approx E^1 M$. En particulier, si M est de torsion, on a les équivalences

$$M \approx 0 \iff E^1 M \approx 0 \iff E^1 M = 0.$$

Esquisse d'une démonstration. — La partie (i) se voit par localisation, puisque la dimension homologique globale d'un corps (resp. d'un anneau principal) vaut 0 (resp. 1).

(ii) Il résulte de la nullité de $E^0 E^0 M$ que le bord en question est bien défini. Qu'il soit un pseudo-isomorphisme se vérifie en localisant.

Les parties (iii) et (iv) se déduisent facilement des deux faits suivants :

- ▷ si M est de torsion, alors $E^0 M = 0$ et $E^1 M \simeq \text{Hom}_\Lambda(M, Q/\Lambda)$;
- ▷ si M est sans torsion, alors $E^1 M$ est pseudo-nul (localiser). \square

Lorsque $M \in D^b(\underline{\Lambda}\mathcal{C})_{\text{tf}}$ vérifie $M \otimes_{\underline{\Lambda}}^L Q = 0$ (i.e. lorsque tous les modules de cohomologie de M sont de torsion), on définit l'idéal caractéristique de M par

$$\chi(M) := \prod (\text{Char} H^q(M))^{(-1)^q}$$

où Char désigne l'idéal caractéristique au sens habituel de la théorie des modules d'Iwasawa.

PROPOSITION 5.2. — Soit $A \in D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\text{tf}}$. On suppose $X_\infty \in D^b(\underline{\Lambda}\mathcal{C})_{\text{tf}}$ et $X_\infty^* \in D^b(\underline{\mathcal{C}}_\Lambda)_{\text{tf}}$. Alors :

- (i) $\Delta_j(A) \otimes_\Lambda Q = 0$ équivaut à $\Delta_k(A) \otimes_\Lambda Q = 0$;
- (ii) lorsque $\Delta_j(A) \otimes_\Lambda Q = 0$, on a $\chi(\Delta_j(A)) = \chi(\Delta_k(A))$.

Démonstration. — D'après 4.6 (iv), on a

$$\Delta_j(A) = \text{RHom}_\Lambda(\Delta_k(A), \Lambda)[1]. \quad \square$$

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas où $A \in D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\text{tf}}$ est :

- ▷ concentré en degré 0, i.e. $A \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tf}}$, et
- ▷ vérifie la condition de codescente galoisienne, version non dérivée, i.e.

$$H^{-1}(C(k_A)) = H^0(C(k_A)) = 0.$$

On souhaite décrire explicitement le complexe $\Delta_k(A)$ dans cette situation.

LEMME 5.3. — Soient $M \in {}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\text{tf}}$ et $A := \mathbb{Z}_p \otimes M \in {}_{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tf}}$, de sorte que $X_{\infty} \simeq M$. On a alors :

- 1) $X_{\infty}^* \in D^b(\mathcal{C}_{\Lambda})_{\text{tf}}$.
- 2) $\Delta_k(A) \otimes_{\Lambda} Q = 0$, $\Delta_k(A)$ est acyclique en degrés négatifs et vérifie :
 - (i) $H^1(\Delta_k(A)) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, X_{\infty}), \mathbb{Z}_p)$,
 - (ii) $H^q(\Delta_k(A)) = E^q(X_{\infty})$ pour $q \geq 2$.

Démonstration. — 1) Le triangle distingué $\alpha_k(A)$ montre que X_{∞}^* est dans $D^b(\mathcal{C}_{\Lambda})_{\text{tf}}$ si, et seulement si, $\Delta_k(A)$ est dans $D^b(\mathcal{C}_{\Lambda})_{\text{tf}}$, fait que le calcul de la cohomologie de $\Delta_k(A)$ mettra en évidence ci-dessous.

2) On souhaite calculer $\Delta_k(A) = \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_A), \mathbb{Z}_p)[1]$. Examinons le triangle distingué $k(A)$:

$$\mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} X_{\infty} \xrightarrow{k_A} A \longrightarrow C(k_A) \longrightarrow \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} X_{\infty}[1].$$

Par hypothèse, A est concentré en degré 0 et $H^0(k_A)$ est un isomorphisme.

On obtient donc $C(k_A)[-1] \simeq \tau_{\leq -1} \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} X_{\infty}$, puis

$$\Delta_k(A) \simeq \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \tau_{\leq -1} \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} M, \mathbb{Z}_p).$$

Le résultat souhaité (y compris la noethérianité annoncée en 1) est alors un cas particulier du lemme suivant, dont nous aurons à nouveau l'utilité un peu plus loin. □

LEMME 5.4. — Soient $M \in D^b({}_{\Lambda}\mathcal{C})$ et $a \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

- (i) $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^q(\varinjlim \tau_{\leq a} \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} M, \mathbb{Z}_p) = 0$ pour $q \leq -1 - a$;
- (ii) $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^{-a}(\varinjlim \tau_{\leq a} \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} M, \mathbb{Z}_p) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_{-a}(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p)$;
- (iii) $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^q(\varinjlim \tau_{\leq a} \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} M, \mathbb{Z}_p) = E^q(M)$ pour $q \geq 1 - a$;
- (iv) pour tout $q \in \mathbb{Z}$ une suite exacte naturelle

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(\varinjlim H_{q-1}(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p) \hookrightarrow E^q(M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_q(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p).$$

Démonstration. — D'après 3.3 (i), on a

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^q(\varinjlim \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} X_{\infty}, \mathbb{Z}_p) \simeq E^q(X_{\infty}).$$

Par ailleurs, la suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur

$$\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Z}_p) : D^b({}_{\Gamma}\mathcal{C}) \longrightarrow D^b(\mathcal{C}_{\Lambda})$$

appliquée à la flèche $\varinjlim \tau_{\leq a} \mathbb{Z}_p \otimes^L M \rightarrow \varinjlim \mathbb{Z}_p \otimes^L M$ produit un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(\varinjlim H^{1-q}(\Upsilon), \mathbb{Z}_p) & \hookrightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^q(\varinjlim \Upsilon, \mathbb{Z}_p) & \twoheadrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H^{-q}(\Upsilon), \mathbb{Z}_p) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(\varinjlim H_{q-1}(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p) & \hookrightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^q(\varinjlim \mathbb{Z}_p \otimes^L M, \mathbb{Z}_p) & \twoheadrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_q(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p) \end{array}$$

où l'on a posé $\Upsilon = \tau_{\leq a} \mathbb{Z}_p \otimes^L M$. Dans celui-ci, les flèches verticales extrêmes sont, selon les valeurs de q , soit nulles soit des isomorphismes. Le résultat suit. \square

En pratique, l'expression de $H^1(\Delta_k(A))$ donnée par le lemme 5.3 est peu maniable. On cherche dans ce qui suit à contrôler sa taille.

DÉFINITION 5.5. — Soit $M \in {}_{\Lambda} \mathcal{C}_{\text{tf}}$ un module de torsion. On munit M de deux filtrations décroissantes fonctorielles :

- ▷ $I^1 M = \varprojlim t_{\mathbb{Z}_p}(M_{\Gamma_n})$ et $I^{q+1} M = I^1(I^q(M))$ pour $q \geq 1$.
- ▷ $F^1 M$ est le noyau de l'application composée

$$M \longrightarrow E^1 E^1 M \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, E^1 M), \mathbb{Z}_p)$$

où la première flèche est celle de 5.1 (ii) et la seconde est la flèche de droite dans la suite exacte 5.4 (iv), appliquée au module $E^1 M$.

- ▷ $F^{q+1} M = F^1 F^q M$ pour $q \geq 1$.

Remarque 5.6. — La flèche composée qui définit $F^1 M$ est pseudo-surjective, si bien que $M/F^1 M \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, E^1 M), \mathbb{Z}_p)$ avec conoyau pseudo-nul.

PROPOSITION 5.7. — Soit $M \in {}_{\Lambda} \mathcal{C}_{\text{tf}}$ un module de torsion, alors $I^q M$ est contenu dans $F^q M$.

Démonstration. — On peut toujours supposer $q = 1$. Il s'agit alors de montrer que l'image de $\varprojlim t_{\mathbb{Z}_p}(M_{\Gamma_n})$ par l'application

$$M \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, E^1 M), \mathbb{Z}_p)$$

est nulle. C'est évident si l'on écrit cette dernière comme la limite projective des applications $M_{\Gamma_n} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H_1(\Gamma_n, E^1 M), \mathbb{Z}_p)$. \square

QUESTION 5.8. — Est-il vrai que $I^q M = F^q M$?

Cette question possède une réponse affirmative si $d = 1$, i.e. si $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$. En effet, on montre alors facilement que $M/I^1 M$ et $M/F^1 M$ sont tous deux \mathbb{Z}_p -libres de même rang, et le résultat suit.

LEMME 5.9. — Soient $M, M' \in {}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\text{tf}}$ de torsion. S'il y a un pseudo-isomorphisme $M \xrightarrow{\sim} M'$, celui-ci induit des pseudo-isomorphismes :

- (i) $I^q M \xrightarrow{\sim} I^q M'$ et $F^q M \xrightarrow{\sim} F^q M'$.
- (ii) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, M'), \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p)$.

Démonstration. — (i) Soit $J = I$ ou F . Tout revient à montrer que la flèche $M/J^1 M \rightarrow M'/J^1 M'$ est un pseudo-isomorphisme. Or :

- ▷ son conoyau est pseudo-nul, par hypothèse ;
- ▷ il existe un pseudo-isomorphisme $M \xleftarrow{\sim} M'$, lequel implique à son tour une pseudo-surjection $M/J^1 M \leftarrow M'/J^1 M'$; en particulier $\text{Char}(M/J^1 M)$ divise $\text{Char}(M'/J^1 M')$;

▷ son noyau est donc nécessairement pseudo-nul lui aussi.

- (ii) $M \xrightarrow{\sim} M'$ induit $E^1 M' \xrightarrow{\sim} E^1 M$. Comme

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p)$$

s'identifie à un quotient de $E^1 M$, on peut raisonner comme en (i). □

COROLLAIRE 5.10. — Soit $M \in {}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\text{tf}}$ un module de torsion. Alors il existe une pseudo-surjection non canonique

$$\varprojlim f_{\mathbb{Z}_p}(M_{\Gamma_n}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p).$$

Démonstration. — Par 5.7, on sait déjà que

$$\varprojlim f_{\mathbb{Z}_p}(M_{\Gamma_n}) = M/I^1 M \twoheadrightarrow M/F^1 M.$$

Mais par 5.6 :

$$M/F^1 M \approx \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, E^1 M), \mathbb{Z}_p).$$

Par 5.1, on peut trouver un pseudo-isomorphisme $M \approx E^1 M$ non canonique et celui-ci induit à son tour par 5.9 :

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, E^1 M), \mathbb{Z}_p) \approx \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, M), \mathbb{Z}_p),$$

ce qui termine la démonstration. □

5.2. Stabilisation (cas $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$)

Nous étudions le phénomène de stabilisation pour le défaut de (co)-descente. Celui-ci semble particulier au cas $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$, où les complexes $C(j_A)$ et $C(k_A)$ sont particulièrement courts. Lorsqu'elle a lieu, la stabilisation rend particulièrement agréable la description du rapport entre descente et codescente. On suppose $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$ dans tout 5.2.

DÉFINITION 5.11. — (i) On dit d'un système inductif (resp. projectif) (A_n) qu'il se stabilise s'il existe un rang n_0 tel que les flèches de transition $A_n \rightarrow A_m$ (resp. $A_m \rightarrow A_n$) soient des isomorphismes pour $m \geq n \geq n_0$.

(ii) On dit d'un système normique $A \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}$ qu'il se stabilise via la restriction (resp. corestriction) si le système inductif (resp. projectif) sous-jacent se stabilise.

(iii) On dit d'un objet $A \in D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})$ qu'il se stabilise (via la restriction ou la corestriction) s'il en est ainsi pour ses objets de cohomologie.

Commençons par quelques faits généraux.

LEMME 5.12. — Soit $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A[1]$ un triangle distingué de $D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})$. Si deux des trois sommets se stabilisent via la restriction ou la corestriction, il en est de même du troisième.

Démonstration. — On applique le lemme des cinq. \square

LEMME 5.13. — Soient A, B, C des systèmes inductifs de \mathbb{Z}_p -modules.

(i) On suppose que les B_n sont de type fini et qu'il y a une suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$. Alors B se stabilise si, et seulement si, A et C se stabilisent.

(ii) On suppose que les A_n et les C_n sont de type fini et qu'il y a une suite exacte courte $A \rightarrow B \rightarrow C$. Si A et C se stabilisent, alors B aussi.

Démonstration. — (i) Si A et C se stabilisent alors B aussi, clairement. Si B se stabilise, alors $A_m \hookrightarrow A_n$ pour $n \geq m \gg 0$. Mais alors $\varinjlim A_n$ est une union croissante à l'intérieur du \mathbb{Z}_p -module noethérien $\varinjlim B_n$, donc se stabilise. On en déduit que C_n se stabilise aussi, par le lemme du serpent.

(ii) découle immédiatement de (i). \square

5.2.1. Critères de stabilisation

Pour $A \in D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})$, on cherche à établir des critères pour :

- ▷ la stabilisation éventuelle de $C(j_A)$ via la corestriction ;
- ▷ la stabilisation éventuelle de $C(k_A)$ via la restriction.

Dans la pratique, ces deux problèmes sont équivalents. En effet :

PROPOSITION 5.14. — Soit $A \in D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\text{tf}}$, alors :

(i) Si $C(k_A)$ se stabilise via la restriction, alors $C(j_A)$ se stabilise via la corestriction.

(ii) Soit $A \in D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\text{tf}}$, vérifiant $X_\infty^* \in D^b(\underline{\Delta}\mathcal{C})_{\text{tf}}$. Si $C(j_A)$ se stabilise via la corestriction, alors $C(k_A)$ se stabilise via la restriction.

La preuve repose sur le lemme suivant :

LEMME 5.15. — Soit $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$, alors :

(i) Si A stabilise via la restriction, alors $C(j_A)$ se stabilise via la cores-
triction.

(ii) On suppose $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$. Si A stabilise via la cores-
restriction, alors $C(k_A)$ se stabilise via la restriction.

Preuve de 5.15. — (i) Considérant le triangle distingué tautologique

$$A \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Q}_p \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Q}_p}^L \mathbb{Z}_p \rightarrow A[1],$$

on se ramène tout de suite au cas où A est de torsion. Par troncature et récurrence sur la longueur de A , on peut supposer que A est concentré en degré 0 et, quitte à remplacer Γ par un sous-groupe ouvert, que tous les $j_{n,m}$ sont des isomorphismes. Mais alors $C(j_A)$ se réduit à la collection $(H^1(\Gamma_n, A_\infty))$ (munie de sa structure naturelle de système normique, via res et cor) placée en degré 1. L'action de Γ sur A_∞ étant triviale, on voit tout de suite que $\text{cor} : H^1(\Gamma_m, A_\infty) \rightarrow H^1(\Gamma_n, A_\infty)$ est un isomorphisme pour tout $m \geq n$ et cela termine la démonstration.

(ii) À l'aide de 4.5 appliqué à A^* , on construit facilement un isomor-
phisme $\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(C(j_{A^*}), \mathbb{Z}_p) \simeq C(k_{\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A)})$; comme $A \simeq \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(A)$, le
résultat souhaité se déduit de (i). □

Preuve de 5.14. — (i) Comme $C(j_A) = C(j_{C(k_A)})$ (cf. 4.6 (i)), il suffit
d'appliquer 5.15 (i) à l'objet $C(k_A) \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$.

(ii) Puisque $C(j_A)$ se stabilise via la cores-
restriction, alors $\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p} C(j_A)$ aussi.
Comme $C(k_A) \simeq C(k_{\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p} C(j_A)})[-1]$ (4.6 (i)), il suffit d'appliquer 5.15 (ii)
à l'objet $\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p} C(j_A) \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$. □

Remarque 5.16. — Soit $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$.

(i) Comme $\varinjlim C(j_A) = 0$, la stabilisation de $C(j_A)$ via la restriction
ne présente aucun intérêt. Aussi, dira-t-on désormais simplement « $C(j_A)$
se stabilise » au lieu de « $C(j_A)$ se stabilise via la cores-
restriction ». Pour des raisons similaires, on dira « $C(k_A)$ se stabilise » au lieu de « $C(k_A)$ se
stabilise via la restriction ».

(ii) Il ne faut pas croire que la stabilisation de $C(j_A)$ ou $C(k_A)$ se pro-
duise systématiquement. Pour s'en convaincre, observer le cas d'un système
normique dont la limite inductive et la limite projective soient toutes deux
triviales.

Au vu de 5.14, on s'intéresse désormais uniquement à la stabilisation
de $C(k_A)$. La proposition suivante est très utile.

PROPOSITION 5.17. — 1) Soit $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A[1]$ un triangle distingué de $D^b(\Gamma\mathcal{C})$. Si $C(k_A)$ et $C(k_B)$ se stabilisent, alors il en est de même de $C(k_C)$.

2) Soit $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$ tel que $X_\infty \in D^b(\Lambda\mathcal{C})_{\text{tf}}$. Sont alors équivalents :

- (i) $C(k_A)$ se stabilise.
- (ii) $C(k_{H^q(A)})$ se stabilise pour tout q .

Pour la preuve, on utilisera le lemme suivant.

LEMME 5.18. — Soit $A \in \Gamma\mathcal{C}_{\text{tf}}$. Si X_∞ est dans $\Lambda\mathcal{C}_{\text{tf}}$, alors $H^{-2}(C(k_A))$ se stabilise automatiquement.

Démonstration. — Le système inductif sous-jacent à $(H^{-2}(C(k_A))) \in \Gamma\mathcal{C}$ s'identifie à la réunion croissante des $H_1(\Gamma_n, X_\infty) \simeq X_\infty^{\Gamma_n}$, et celle-ci se stabilise par noethérianité. □

Preuve de 5.17. — 1) On applique 5.12 au triangle distingué

$$C(k_A) \longrightarrow C(k_B) \longrightarrow C(k_C) \longrightarrow C(k_A)[1]$$

déduit de celui de l'énoncé par application du foncteur $C(k_{(-)})$.

2) L'implication (ii) \Rightarrow (i) découle du point 1) par troncature et récurrence sur la longueur de A .

Passons à l'implication (i) \Rightarrow (ii). Soit q_0 tel que $H^q(A) = 0$ pour $q > q_0$ et considérons le triangle distingué

$$C(k_{\tau_{\leq q_0-1}A}) \longrightarrow C(k_A) \longrightarrow C(k_{H^{q_0}(A)}) \longrightarrow C(k_{\tau_{\leq q_0-1}A})[1]$$

déduit, par application du foncteur $C(k_{(-)})$, du triangle distingué tautologique. Par récurrence sur la longueur de A , il nous suffit de montrer que si $C(k_A)$ se stabilise, alors il en est de même de $C(k_{\tau_{\leq q_0-1}A})$ et $C(k_{H^{q_0}(A)})$. On peut toujours supposer $q_0 = 0$. Soit donc A tel que $H^q(A) = 0$ pour $q > 0$, tel que $C(k_A)$ se stabilise. D'après la remarque 4.11, $H^q(C(k_{\tau_{\leq -1}A})) = 0$ (resp. $H^q(C(k_A)) = 0$, $H^q(C(k_{H^0(A)})) = 0$) si $q > -1$ (resp. $q > 0$, $q \neq -2, -1, 0$). En prenant le cohomologie du triangle distingué ci-dessus, on obtient donc :

- ▷ $H^0(C(k_{H^0(A)})) = H^0(C(k_A))$ se stabilise par hypothèse.
- ▷ $H^q(C(k_{\tau_{\leq q_0-1}A})) = H^q(C(k_A))$ se stabilise par hypothèse pour $q < -2$.
- ▷ Une suite exacte

$$\begin{aligned} H^{-2}(C(k_{\tau_{\leq q_0-1}A})) &\hookrightarrow H^{-2}(C(k_A)) \longrightarrow H^{-2}(C(k_{H^0(A)})) \\ &\longrightarrow H^{-1}(C(k_{\tau_{\leq q_0-1}A})) \longrightarrow H^{-1}(C(k_A)) \twoheadrightarrow H^{-1}(C(k_{H^0(A)})) \end{aligned}$$

dans laquelle le second et le cinquième terme se stabilisent par hypothèse, ainsi que troisième en vertu de 5.18. Par 5.13, on conclut à la stabilisation des six termes de la suite exacte, et cela termine la démonstration. \square

Pour appliquer 5.17, 2), on a parfois recours au lemme suivant.

LEMME 5.19. — Soient $q_0 \in \mathbb{N}$ et $Z_1 \hookrightarrow Z_2 \rightarrow \dots \rightarrow Z_q \rightarrow \dots \twoheadrightarrow Z_{q_0}$ une suite exacte à q_0 termes dans une catégorie abélienne \mathcal{A} . Alors il existe un triangle distingué (non unique) de $D^b(\mathcal{A})$ dont la suite exacte longue de cohomologie s'identifie à la précédente.

Cela se démontre par récurrence sur q_0 .

COROLLAIRE 5.20. — Soient $q_0 \in \mathbb{N}$ et $A^1 \hookrightarrow A^2 \rightarrow \dots \rightarrow A^q \rightarrow \dots \twoheadrightarrow A^{q_0}$ une suite exacte à q_0 termes dans $\underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tf}}$. On suppose que chaque Λ -module $\varprojlim_n A_n^q$ est de type fini. Soit $i \in \{1, 2, 3\}$; si $C(k_{A^q})$ se stabilise pour q non congru à i modulo 3, alors $C(k_{A^q})$ se stabilise aussi pour q congru à i modulo 3.

Démonstration. — On applique 5.17, 2), 1), puis 2) à un triangle distingué fourni par le lemme précédent. Il est naturellement possible d'établir ce corollaire directement, en procédant par découpage (il faut alors considérer $q_0 - 3$ suites exactes à neuf termes, et appliquer systématiquement 4.11, 5.18 et 5.13). \square

PROPOSITION 5.21. — Soit $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ une suite exacte dans $\underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tf}}$. On suppose que $\varprojlim B_n$ est de type fini sur Λ et que $C(k_B)$ se stabilise. Sont alors équivalents :

- (i) $H^0 C(k_A)$ se stabilise ;
- (ii) $H^{-1} C(k_C)$ se stabilise ;
- (iii) $C(k_A)$ et $C(k_C)$ se stabilisent.

Preuve de 5.21. — Comme (iii) implique ((i) et (ii)), il suffit de montrer que ((i) ou (ii)) implique (iii). On note d'abord que (iii) équivaut à la stabilisation de $H^0(C(k_C))$ et $H^{-1}(C(k_C))$ (5.18 et 5.17 1.).

Ensuite, on observe la suite exacte suivante de systèmes inductifs de \mathbb{Z}_p -modules de types finis (NB : $\varprojlim A_n$, $\varprojlim B_n$ et $\varprojlim C_n$ sont de Λ -type fini) :

$$\begin{aligned} H^{-1}(C(k_B)) &\longrightarrow H^{-1}(C(k_C)) \longrightarrow H^0(C(k_A)) \\ &\longrightarrow H^0(C(k_B)) \longrightarrow H^0(C(k_C)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Par hypothèse, le premier et le quatrième terme se stabilisent. Si de plus le second ou le troisième se stabilisent aussi, alors il en est de même des deux termes restants par 5.13. \square

5.2.2. Conséquences de la stabilisation

Signalons qu'on fait dans ce paragraphe un usage systématique de la dualité de Poincaré; les isomorphismes en jeu sont donc tous fonctoriels, mais certains dépendent de l'isomorphisme $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$ choisi.

PROPOSITION 5.22. — Soit A dans $D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\text{tf}}$ tel que X_∞ soit dans $D^b(\Lambda\mathcal{C})_{\text{tf}}$. Si $C(k_A)$ se stabilise, alors :

- 1) (i) $X_\infty^* \in D^b(\Lambda\mathcal{C})_{\text{tf}}$ et $\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A), \mathbb{Z}_p) \in D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\text{tf}}$.
- (ii) $C(j_A)$ se stabilise aussi.

2) Les modules de cohomologie de $\Delta_j(A)$ et $\Delta_k(A)$ sont fixés par Γ_n pour n suffisamment grand (et sont donc de torsion sur Λ). De plus il y a des isomorphismes fonctoriels :

- (i) $\Delta_k(A) \simeq \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\Delta_j(A), \mathbb{Z}_p) \simeq \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(R\varprojlim C(j_A), \mathbb{Z}_p)$;
- (ii) $\Delta_j(A) \simeq \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\Delta_k(A), \mathbb{Z}_p) \simeq \varinjlim C(k_A)[-1]$;
- (iii) il existe dans $D^b(\Lambda\mathcal{C})$ un triangle distingué fonctoriel

$$\begin{aligned} R\varprojlim C(j_A) &\longrightarrow \varinjlim C(k_A)[-1] \\ &\longrightarrow \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p, R\varprojlim C(j_A))[1] \longrightarrow R\varprojlim C(j_A)[1]. \end{aligned}$$

En particulier, $R\varprojlim C(j_A) \simeq \varinjlim C(k_A) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p[-2]$.

3) Si de plus les \mathbb{Z}_p -modules $H^q(A_n)$ sont tous de torsion (et donc finis), alors

- (i) les Λ -modules de cohomologie de X_∞ et X_∞^* sont de torsion ;
- (ii) $\chi(\Delta_j(A)) = \chi(\Delta_k(A)) = \Lambda$.

Démonstration. — 1) (i) Comme A et $\mathbb{Z}_p \otimes^L X_\infty$ sont dans $D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\text{tf}}$, on voit que $C(k_A)$ et $\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(C(k_A), \mathbb{Z}_p)$ le sont aussi. Mais alors l'hypothèse de stabilisation montre que les modules de cohomologie sont de type fini sur \mathbb{Z}_p , et donc sur Λ . La première assertion provient alors de 4.9 et la seconde de 4.4 (ii).

La partie (ii) résulte de 5.14 (i).

2) Que la cohomologie de $\Delta_j(A) = R\varprojlim \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A))$ et celle de

$$\Delta_k(A) = \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_A), \mathbb{Z}_p)[1]$$

soit fixée par Γ_n pour $n \gg 0$ est une conséquence immédiate de la stabilisation des limites en jeu.

(i) D'après 4.6 (iv) et 3.4 (iii), on a

$$\Delta_j(A) \simeq \text{RHom}_\Lambda(\Delta_k(A), \Lambda)[1] \simeq \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\Delta_k(A), \mathbb{Z}_p)$$

d'où le premier isomorphisme de l'énoncé. Pour obtenir le second, on observe que la flèche de bidualité $C(j_A) \rightarrow \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A))$ induit dans $D^b(\Lambda\mathcal{C})$ un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{R}\varprojlim \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A)), \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{R}\varprojlim C(j_A), \mathbb{Z}_p) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p} \pi_n(C(j_A)), \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\pi_n C(j_A), \mathbb{Z}_p) \end{array}$$

dans lequel la flèche inférieure est un isomorphisme puisque la cohomologie de $\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\pi_n C(j_A), \mathbb{Z}_p)$ est de \mathbb{Z}_p -type fini. Ici, π_n est le foncteur de projection de la remarque 2.6, et on regarde $\pi_n C(j_A)$ comme un objet de $D^b(\Lambda\mathcal{C})$, par abus de notation. Par stabilisation, les deux flèches verticales sont des isomorphismes pour n suffisamment grand ; d'où le second isomorphisme de l'énoncé.

- (ii) Cette partie est similaire, mais plus facile.
- (iii) En combinant (i) et (ii), on obtient un isomorphisme

$$\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(\text{R}\varprojlim C(j_A)) \simeq \varinjlim C(k_A)[-1].$$

Maintenant, l'analogie dans $D^b(\Lambda\mathcal{C})$ de 2.13 (ii) montre que

$$\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(\text{R}\varprojlim C(j_A))$$

s'identifie à $\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \text{R}\varprojlim C(j_A))[1]$; le triangle distingué recherché provient donc du triangle distingué tautologique

$$\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p[1].$$

L'isomorphisme de l'énoncé suit, puisque

$$\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p, \text{R}\varprojlim C(j_A)) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = 0$$

et $\text{R}\varprojlim C(j_A) \simeq \text{R}\varprojlim C(j_A) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[-1]$.

3) On peut toujours supposer, quitte à s'y ramener par troncature et récurrence sur la longueur de A , que celui-ci est concentré en degré 0. Dans ce cas :

(i) X_∞ (resp. X_∞^*) est concentré en degré 0 (resp. 1) et la cohomologie du triangle distingué $\alpha_k(A)$ donne une suite exacte

$$0 \rightarrow E^0(X_\infty) \longrightarrow H^0(\Delta_k(A)) \longrightarrow H^1(X_\infty^*) \longrightarrow E^1(X_\infty)$$

sur laquelle il apparaît que :

- ▷ $E^0(X_\infty)$ est de torsion puisque $H^0(\Delta_k(A))$ l'est (cf. 2). D'où en fait $E^0(X_\infty) = 0$, si bien que X_∞ est de Λ -torsion.
- ▷ $H^1(X_\infty^*)$ est de Λ -torsion puisque $H^0(\Delta_k(A))$ et $E^1(X_\infty)$ le sont aussi (cf. 5.1 (i)).

(ii) Il suffit de calculer $\chi(\Delta_k(A))$ (cf. 5.2) Regardant $\pi_n C(k_A)$ comme un objet de $D^b(\Lambda\mathcal{C})$, on a pour n suffisamment grand un isomorphisme $\Delta_k(A) \simeq \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\pi_n C(k_A), \mathbb{Z}_p)$ dans $D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$. Observons alors le triangle distingué $\pi_n(C(k_A))$ est dans $\text{Tr}(D^b(\Lambda\mathcal{C}))$:

$$\mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} X_\infty \longrightarrow A_n \longrightarrow \pi_n C(k_A) \longrightarrow \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} X_\infty[1].$$

Comme A_n est fini, on voit que $\chi(\pi_n C(k_A)) = \chi(\mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} X_\infty)$. Ce dernier idéal caractéristique est trivial puisque X_∞ est de Λ -torsion. Finalement, $\chi(\Delta_k(A)) = \Lambda$. □

En vue des applications on se propose d'expliciter la proposition précédente. Rappelons que si M est un \mathbb{Z}_p -module, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(M, \mathbb{Z}_p)$ s'identifie naturellement au dual de Pontryagin du sous-module de \mathbb{Z}_p -torsion de M . Avec les conventions expliquées dans la section 2.1, ce dernier est muni de l'action de Λ (à droite) par transport de structure $((f \cdot \lambda)(m) = f(\lambda m))$, lorsque M est un Λ -module (à gauche).

PROPOSITION 5.23. — *Soit $A = (A_n)$ un système normique dans lequel les A_n sont de type fini sur \mathbb{Z}_p . Comme toujours, on note $X_\infty = \varprojlim A_n$, $A_\infty = \varinjlim A_n$ et $X_\infty^* = \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)$. Pour plus de clarté, notons*

$$j_n : A_n \longrightarrow (A_\infty)^{\Gamma_n}, \quad (\text{resp. } k_n : (X_\infty)_{\Gamma_n} \rightarrow A_n)$$

l'application de descente (resp. codescente), de sorte que les systèmes normiques formés par la cohomologie de $C(j_A)$ et $C(k_A)$ valent respectivement :

- ▷ Pour $C(j_A)$: $H^{-1} = (\text{Ker } j_n)$, $H^0 = (\text{Coker } j_n)$,
 $H^1 = (H^1(\Gamma_n, A_\infty))$, $H^2 = (H^2(\Gamma_n, A_\infty))$,
 $H^q = 0$ si $q \neq -1, 0, 1, 2$.
- ▷ Pour $C(k_A)$: $H^{-2} = (H_1(\Gamma_n, X_\infty))$, $H^{-1} = (\text{Ker } k_n)$,
 $H^0 = (\text{Coker } k_n)$, $H^q = 0$ si $q \neq -2, -1, 0$.

On suppose que $\text{Ker } k_n$ et $\text{Coker } k_n$ sont de type fini sur \mathbb{Z}_p et se stabilisent. Alors :

- 1) X_∞ est de type fini sur Λ et $H^q(C(j_A))$ se stabilise pour tout q .
- 2) (i) On a $H^q(\Delta_j(A)) \simeq \varinjlim H^{q-1}(C(k_A))$ pour tout q et il y a une suite exacte courte

$$\varprojlim_{n,k} H^q(C(j_A))/p^k \hookrightarrow H^q(\Delta_j(A)) \twoheadrightarrow \varprojlim_{n,k} H^{q+1}(C(j_A))[p^k]$$

où $(-)[p^k]$ (resp. $(-)/p^k$) désigne le plus grand sous-module (resp. quotient) tué par p^k .

(ii) On a $H^q(\Delta_k(A)) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(\varprojlim H^{1-q}(C(j_A)), \mathbb{Z}_p)$ pour tout q et il y a une suite exacte courte

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(\varinjlim H^{-q}(C(k_A)), \mathbb{Z}_p) &\hookrightarrow H^q(\Delta_k(A)) \\ &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H^{-1-q}(C(k_A)), \mathbb{Z}_p). \end{aligned}$$

(iii) On a $H^q(\Delta_j(A)) \approx E^1 H^{-q}(\Delta_k(A))$ pour tout q . De plus les Λ -modules de cohomologie de $\Delta_j(A)$ sont tous pseudo-isomorphes à un quotient convenable de $\mathbb{Z}_p[G_n]^a$ pour n et a suffisamment grand.

(iv) Si les A_n sont finis, alors $\prod_q \text{Char}(H^q(\Delta_k(A)))^{(-1)^q} = \Lambda$.

3) Les Λ -modules

$$H^0(X_\infty^*) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p) \quad \text{et} \quad H^1(X_\infty^*) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(A_\infty, \mathbb{Z}_p)$$

sont de type fini et le second est de torsion. Il sont de plus sujets aux isomorphismes et suites exactes suivants :

- (i) $E^{q+1}(H^1(X_\infty^*)) \hookrightarrow E^q(X_\infty^*) \twoheadrightarrow E^q(H^0(X_\infty^*))$.
- (ii) $H^{-1}(\Delta_j(A)) \hookrightarrow X_\infty \rightarrow E^0(X_\infty^*) \twoheadrightarrow H^0(\Delta_j(A))$
 et $E^1(X_\infty^*) \simeq H^1(\Delta_j(A))$.
- (iii) $H^{-1}(\Delta_k(A)) \hookrightarrow H^0(X_\infty^*) \twoheadrightarrow E^0(X_\infty) \twoheadrightarrow H^0(\Delta_k(A))$
 $\twoheadrightarrow H^1(X_\infty^*) \twoheadrightarrow E^1(X_\infty) \twoheadrightarrow H^1(\Delta_k(A))$
 et $E^2(X_\infty) \simeq H^2(\Delta_k(A))$.

Démonstration. — Expliquons seulement les points qui ne découlent pas immédiatement de 5.22.

2) (i) Il faut expliciter l'isomorphisme $\Delta_j(A) \simeq R\varprojlim \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A))$ pour obtenir la suite exacte. On procède en deux étapes : d'abord 2.13 (ii) donne une suite spectrale à valeurs dans $\underline{C}_{\text{tf}}$:

$$E_2^{p,q} = \varprojlim_k \text{Tor}_{-p}^{\mathbb{Z}_p}(H^q(C(j_A)), \mathbb{Z}/p^k) \implies H^{p+q}(\text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(C(j_A))) = E^{p+q}.$$

Celle-ci dégénère en des suites exactes courtes, dont celles de l'énoncé se déduisent par passage à la limite projective.

(ii) La stabilisation de $C(j_A)$ assure que les objets de cohomologie de $R\varprojlim C(j_A)$ sont de \mathbb{Z}_p -torsion, et 5.22, 2) (i) donne l'isomorphisme annoncé.

(iii) Comme les Λ -modules de cohomologie de $\Delta_j(A)$ sont de type fini et de torsion, le bord de la suite spectrale d'hypercohomologie (cf. 4.6 (iv))

$$E_2^{p,q} = E^{p+1} H^{-q}(\Delta_k(A)) \implies H^{p+q}(\Delta_j(A)) = E^{p+q}$$

réalise pour tout q un pseudo-isomorphisme

$$H^q(\Delta_j(A)) \xrightarrow{\sim} E^1 H^{-q}(\Delta_k(A)).$$

Le reste se déduit du fait que $H^q(\Delta_j(A))$ est fixé par Γ_n pour n suffisamment grand.

3) Que $H^1(X_\infty^*)$ soit de Λ -torsion se lit sur la suite exacte (iii), compte tenu de 2) (iii) et 5.1 (i).

(ii) La suite exacte de l'énoncé, obtenue en prenant la cohomologie du triangle distingué $\alpha_j(A)$, commence *a priori* par

$$0 \rightarrow E^{-1}(X_\infty^*) \rightarrow H^{-1}(\Delta_j(A)) \rightarrow H^0(X_\infty) \rightarrow \dots$$

Maintenant $E^{-1}(X_\infty^*) = E^0(H^1(X_\infty^*))$ est trivial puisque $H^1(X_\infty^*)$ est de Λ -torsion. □

COROLLAIRE 5.24. — Soit $A = (A_n) \in \underline{\Gamma}C_{\text{tf}}$. Si tous les A_n sont de \mathbb{Z}_p -torsion et que $C(k_A)$ se stabilise, alors :

(i) les Λ -modules $X_\infty = \varprojlim A_n$ et $H^1(X_\infty^*) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim A_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ sont noethériens de torsion.

(ii) Non canoniquement, les quatre modules suivants sont pseudo-isomorphes :

$$H^{-1}(\Delta_j(A)), \quad H^0(\Delta_j(A)), \quad H^0(\Delta_k(A)), \quad H^1(\Delta_k(A)).$$

Démonstration. — (i) Comme les A_n sont de \mathbb{Z}_p -torsion, c'est que X_∞^* est concentré en degré 1. Maintenant, $H^1(X_\infty^*)$ est de Λ -torsion (cf. 5.23, 3) et les modules de cohomologie de $\Delta_j(A)$ aussi (cf. 2 (iii)) ; il en est donc de même de X_∞ .

(ii) D'après 5.23, 2) (iii), il suffit de vérifier que l'on a

$$\chi(H^1(\Delta_k(A))) = \chi(H^0(\Delta_k(A))).$$

Mais cela découle de 5.23, 2) (iv), puisque d'après 5.23, 3) (iii), on a

$$H^{-1}(\Delta_k(A)) \subset H^0(X_\infty^*) = 0, \quad H^2(\Delta_k(A)) \simeq E^2(X_\infty) \approx 0$$

(cf. 5.1 (i)). □

Mentionnons encore un corollaire de la description 5.22, 2).

COROLLAIRE 5.25. — Soit $A \in \underline{\Gamma}C_{\text{tf}}$ et supposons, comme en 5.22, que les systèmes inductifs $\text{Ker } k_n$ et $\text{Coker } k_n$ se stabilisent. Notons

$$\phi : R\varprojlim C(j_A) \rightarrow \varinjlim C(k_A)[-1]$$

le morphisme fonctoriel figurant dans le triangle 5.22, 2) (iii). Alors :

1) (i) $\text{Ker } H^q(\phi)$ est p -divisible.

(ii) Coker $H^q(\phi)$ est \mathbb{Z}_p -libre.

2) Considérons un triangle distingué $A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow A[1]$, où A' et A'' vérifient les mêmes hypothèses que A . Dans ces conditions, pour $q \in \mathbb{Z}$ fixé :

(i) ϕ induit un isomorphisme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccc} \varprojlim_{n,k} H^q(C(j_A))/p^k & \longrightarrow & \varprojlim_{n,k} H^q(C(j_{A'}))/p^k & \longrightarrow & \varprojlim_{n,k} H^q(C(j_{A''}))/p^k \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\ t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim H^{q-1}(C(k_A)) & \longrightarrow & t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim H^{q-1}(C(k_{A'})) & \longrightarrow & t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim H^{q-1}(C(k_{A''})). \end{array}$$

(ii) Si $\varprojlim H^q(C(j_{A''}))$ est fini, alors le diagramme ci-dessus se prolonge en un isomorphisme de suites exactes longues :

▷ à gauche à l'aide de l'isomorphisme $\Delta_j(-) \simeq \varinjlim C(k_{(-)})[1]$:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & H^{q-1}(\Delta_j(A')) & \longrightarrow & H^{q-1}(\Delta_j(A'')) & \longrightarrow & \varprojlim_{n,k} H^q(C(j_A))/p^k & \longrightarrow \cdots \\ & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & \varinjlim H^{q-2}(C(k_{A'})) & \longrightarrow & \varinjlim H^{q-2}(C(k_{A''})) & \longrightarrow & t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim H^{q-1}(C(k_A)) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

▷ à droite à l'aide de $R\varprojlim C(j_{(-)}) \simeq \varinjlim C(k_{(-)}) \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[-2]$:

$$\begin{array}{ccccccc} \varprojlim_{n,k} H^q(C(j_{A''}))/p^k & \longrightarrow & \varprojlim H^{q+1}C(j_A) & \longrightarrow & \varprojlim H^{q+1}C(j_{A'}) & \longrightarrow & \cdots \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \\ t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim H^{q-1}(C(k_{A''})) & \longrightarrow & \text{Tor}_{q-1}^{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_A), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & \text{Tor}_{q-1}^{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C(k_{A'}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Démonstration. — Le point 1) est clair, puisque les modules de cohomologie du cône de ϕ sont uniquement p -divisibles.

2) (i) Comme $H^q(C(j_A))$ est de \mathbb{Z}_p -torsion et que $H^q(C(k_A))$ est de type fini, on peut préciser 1) : $\text{Ker } H^q(\phi)$ est le sous groupe p -divisible maximal de $H^q(R\varprojlim C(j_A))$ (i.e. le noyau de $\varprojlim H^q(C(j_A)) \rightarrow \varprojlim_{n,k} H^q(C(j_A))/p^k$)

et $\text{Im } \phi = t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim H^{q-1}(C(k_A))$. D'où l'isomorphisme de suites exactes de l'énoncé.

(ii) ▷ Au vu de 5.23, 2) (i), 5.22, 2) (ii) et de la définition de ϕ , le diagramme commutatif suivant se produit en toute généralité :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & H^{q-1}(\Delta_j(A'')) & \longrightarrow & H^q(\Delta_j(A)) & \xleftarrow{\supset} & \varprojlim_{n,k} H^q(C(j_A))/p^k & \longrightarrow \cdots \\ & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & \varinjlim H^{q-2}(C(k_{A''})) & \longrightarrow & \varinjlim H^{q-1}(C(k_A)) & \xleftarrow{\supset} & t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim H^{q-1}(C(k_{A'})) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Puisque par hypothèse $H^{q-1}(\Delta_j(A''))$ est fini (cf. 5.23 2) (i)), l'image des flèches de gauche est incluse dans celle des flèches de droite. Le diagramme de l'énoncé est donc bien défini et ses lignes sont automatiquement exactes.

▷ De manière analogue, on peut prolonger le diagramme à droite comme indiqué dans l'énoncé, à condition que $\varprojlim H^q(C(j_{A''})) \rightarrow \varprojlim H^{q+1}(C(j_A))$ se factorise par le quotient fini maximal $\varprojlim_{n,k} H^q(C(j_A))/p^k$. C'est ici le cas, puisque par hypothèse, $\varprojlim H^q(C(j_{A''}))$ est lui-même fini. □

6. Applications

6.1. Cohomologie galoisienne continue

6.1.1. Généralités

Soit G un groupe profini, muni d'une surjection fixée $G \twoheadrightarrow \Gamma$. Pour chaque sous-groupe ouvert Γ_n de Γ , notons H_n l'image réciproque de Γ_n dans G et $H_\infty = \bigcap H_n$. Ainsi, $G_n = \Gamma/\Gamma_n = G/H_n$ et $\Gamma = G/H_\infty$. On note ${}_G\mathcal{C}$ la catégorie des \mathbb{Z}_p -modules munis d'une action discrète de G , et $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$ la catégorie des \mathbb{Z}_p -représentations continues de G dont le \mathbb{Z}_p -module sous-jacent est \mathbb{Z}_p -libre de rang fini. La définition de [15] pour la cohomologie continue se prête à la variante suivante :

DÉFINITION 6.1. — Soit $*$ = b si $\text{cd}_p G < \infty$ et $*$ = $+$ sinon.

(i) Soit $\underline{\Gamma}(G, -) : {}_G\mathcal{C} \rightarrow \underline{\Gamma}\mathcal{C}$ le foncteur qui à $M \in {}_G\mathcal{C}$ associe le système normique (M^{H_n}) . On note son foncteur dérivé droit

$$\text{R}\underline{\Gamma}(G, -) : D^*({}_G\mathcal{C}) \longrightarrow D^*(\underline{\Gamma}\mathcal{C}).$$

(ii) Soit ${}_G\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ}$ la catégorie des systèmes projectifs d'objets de ${}_G\mathcal{C}$ indexés sur \mathbb{N} . On note encore

$$\text{R}\underline{\Gamma}(G, -) : D^*({}_G\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ}) \longrightarrow D^*(\underline{\Gamma}\mathcal{C})$$

le foncteur composé

$$D^*({}_G\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ}) \xrightarrow{\text{R}\underline{\Gamma}(G, -)} D^*(\underline{\Gamma}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ}) \xrightarrow{\text{R}\varprojlim_{\mathbb{N}}} D^*(\underline{\Gamma}\mathcal{C}).$$

(iii) Si T est une \mathbb{Z}_p -représentation continue de G , on note

$$\text{R}\underline{\Gamma}(G, T) := \text{R}\underline{\Gamma}(G, (T/p^k)),$$

où (T/p^k) désigne le système projectif évident.

Remarque 6.2. — (i) Soit $A \in D^*(\mathcal{G}\mathcal{C})$ et $(A) \in D^*(\mathcal{G}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$ le système projectif de valeur constante A . On a alors $R\Gamma(G, A) = R\Gamma(G, (A))$. Plus généralement, si $A \in \mathcal{G}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ}$ est un système projectif qui se stabilise, sa cohomologie au sens (ii) coïncide avec la cohomologie de sa limite, au sens (i).

(ii) Si l'image de G dans $\text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(T)$ est finie, on peut donner un sens à $R\Gamma(G, T)$ soit par (i) soit (iii). On convient systématiquement du sens (iii) lorsque G est un groupe de Galois du type G_F ou $G_{S,F}$ (cf. 6.1.2).

(iii) Soit K^* un foncteur résolvant, au sens de [37], Annexe 2, déf. 1.4, et notons $C_k^\bullet = K^*(T/p^k)$. Alors la collection des résolutions $T/p^k \rightarrow C_k^\bullet$ est organisée en système projectif et donne donc une résolution dans $\mathcal{G}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ}$ $(T/p^k) \rightarrow C^\bullet$, où $C^\bullet = (C_k^\bullet) \in \text{Kom}^+(\mathcal{G}\mathcal{C})^{\mathbb{N}^\circ} = \text{Kom}^+(\mathcal{G}\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$.

Celle-ci vérifie :

(*) Les G -modules C_k^q sont G -cohomologiquement triviaux.

(**) Les systèmes projectifs $(\Gamma(C_k^q)) \in (\Gamma\mathcal{C})^{\mathbb{N}^\circ}$ sont flasques.

Aussi, $R\Gamma(G, T)$ est représenté par $\varprojlim_k \Gamma(G, C_k^\bullet) \in \text{Kom}^+(\Gamma\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$.

(iv) Comme expliqué dans [15], les propriétés (*) et (**) ci-dessus sont vérifiées par toute résolution injective $(T/p^k) \rightarrow I^\bullet$, $I^\bullet \in \text{Kom}^+(\mathcal{G}\mathcal{C})^{\mathbb{N}^\circ}$. On en déduit que $R\varprojlim_k \circ R\Gamma$ est aussi le dérivé droit du foncteur composé $\varprojlim \circ \Gamma$.

(v) Bien sûr, on retrouve la cohomologie continue de H_n en appliquant le foncteur π_n de 2.6 : $\pi_n R\Gamma(G, T) \simeq R\Gamma(H_n, T)$.

(vi) En considérant le cône de la multiplication par $p^t : (T/p^k) \rightarrow (T/p^k)$, on voit tout de suite qu'il y a isomorphisme naturel

$$R\Gamma(G, T) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}/p^t \simeq R\Gamma(G, T/p^t);$$

mieux, la collection de ces isomorphismes pour t variable se relève en un isomorphisme de $D^+(\Gamma\mathcal{C}^{\mathbb{N}})$, d'où en passant à la limite inductive

$$R\Gamma(G, T) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq R\Gamma(G, T \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \quad \text{dans } D^+(\Gamma\mathcal{C}).$$

On renvoie à [15] pour les propriétés générales de la cohomologie continue, et la comparaison avec la définition de [39] (par cochaînes continues). On se contente de détailler le résultat suivant, qui reflète essentiellement la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie continue pour la collection des extensions de groupes $H_n \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G_n$:

PROPOSITION 6.3. — Soit $T \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$ et notons

$$A := R\Gamma(G, T) \in D^*(\Gamma\mathcal{C}).$$

Alors $C(j_A) = 0$.

Démonstration. — On note k l'indice des systèmes projectifs sur \mathbb{N} et n ou m celui des systèmes projectifs sur N , sous-jacents aux objets de $\underline{\mathcal{C}}$. Il s'agit de vérifier que la flèche de restriction

$$\text{res}_n : R\Gamma(H_n, T) \longrightarrow R\Gamma\left(\Gamma_n, \varinjlim_m R\underline{\Gamma}(G, T)\right)$$

est un isomorphisme (notons qu'avec les notations expliquées plus haut, la cohomologie de $\varinjlim_m R\underline{\Gamma}(G, T)$ vaut $\varinjlim_m H^\bullet(H_m, T)$).

Soit $C^\bullet = (C_k^\bullet) \in \text{Kom}^+(\mathcal{C}^{\mathbb{N}^\circ})$ un complexe qui possède les propriétés (*) et (**) (cf. 6.2). Les objets $R\Gamma(H_n, T)$ et $\varinjlim_m R\underline{\Gamma}(G, T)$ sont alors représentés respectivement par $\varprojlim_k C_k^{\bullet H_n}$ et $\varinjlim_m \varprojlim_k C_k^{\bullet H_m}$, et il nous suffit de montrer que les objets de ce dernier complexe sont Γ_n -acycliques. En effet, si c'est le cas la flèche res_n est alors représentée (cf. 4.3) par la flèche suivante, qui est visiblement un isomorphisme :

$$\varprojlim_k C_k^{\bullet H_n} \longrightarrow \left(\varinjlim_m \varprojlim_k C_k^{\bullet H_m}\right)^{\Gamma_n}.$$

Calculons donc, pour $p \geq 1$:

$$\begin{aligned} H^p(\Gamma_n, \varinjlim_m \varprojlim_k C_k^{qH_m}) &\simeq \varinjlim_m H^p(\Gamma_n/\Gamma_m, \varprojlim_k C_k^{qH_m}) \\ &\simeq \varinjlim_m H^p(\Gamma_n/\Gamma_m, R\varprojlim_k C_k^{qH_m}) \quad \text{par (**)}. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} H^p(\Gamma_n/\Gamma_m, R\varprojlim_k C_k^{qH_m}) &= \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p[\Gamma_n/\Gamma_m]}^p(\mathbb{Z}_p, R\varprojlim_k C_k^{qH_m}) \\ &\simeq R^p\varprojlim_k \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p[\Gamma_n/\Gamma_m]}(\mathbb{Z}_p, C_k^{qH_m}) \quad \text{par 2.11.} \end{aligned}$$

Mais d'après (*), $C_k^{qH_m}$ est Γ_n/Γ_m -acyclique, si bien que

$$\begin{aligned} R^p\varprojlim_k \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p[\Gamma_n/\Gamma_m]}(\mathbb{Z}_p, C_k^{qH_m}) &\simeq R^p\varprojlim_k (C_k^{qH_m})_{\Gamma_n/\Gamma_m} \\ &\simeq R^p\varprojlim_k C_k^{qH_n} \simeq 0 \quad \text{par (**)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $H^p(\Gamma_n, \varinjlim_m \varprojlim_k C_k^{qH_m}) \simeq 0$ pour $p \geq 1$, et cela termine la démonstration. □

6.1.2. Un calcul d'adjoint à la Jannsen

Soit F un corps de nombres, et F_∞/F une extension galoisienne de groupe Γ . Soit S un ensemble de places de F (fini ou non) contenant celles qui se ramifient dans F_∞/F . On note $G_S = G_{S,F}$ le groupe de Galois

de la clôture S -ramifiée de F , et G_{S, F_n} le sous-groupe qui fixe F_n . Nous sommes donc dans la situation du paragraphe précédent avec $G = G_S \rightarrow \Gamma$ et $H_n = G_{S, F_n}$.

THÉOREME 6.4. — Si $\text{cd}_p G_S < \infty$, alors :

(i) $\text{R}\lim_{\leftarrow} \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(\text{R}\Gamma(G_{S, F_n}, T))$ est isomorphe à

$$\text{RHom}_{\Lambda} \left(\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \text{R}\Gamma(G_{S, F}, T), \mathbb{Z}_p), \Lambda \right)$$

(ii) Si S est fini, alors $\text{R}\Gamma(G_{S, F_n}, T) \simeq \text{Bid}_{\mathbb{Z}_p}(\text{R}\Gamma(G_{S, F_n}, T))$.

Démonstration. — (i) résulte de 4.10, compte-tenu de 6.3.

(ii) Lorsque S est fini, on a $\text{R}\Gamma(G_S, T) \in D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$ (cf. [39], corollaire de la proposition 2.1). □

COROLLAIRE 6.5. — Si S est fini et $\text{cd}_p G_S < \infty$, il y a une suite spectrale à valeurs dans ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$:

$$\text{Ext}_{\Lambda}^p \left(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p} \left(H^q(G_{S, F_{\infty}}, T \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right), \Lambda \right) \implies \varprojlim H^{p+q}(G_{S, F_n}, T).$$

Démonstration. — Notons qu'il y a un isomorphisme naturel

$$\begin{aligned} &\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p} \left(\varinjlim \text{R}\Gamma(G_{S, F}, T), \mathbb{Z}_p \right) \\ &\simeq \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p} \left(\varinjlim \text{R}\Gamma(G_{S, F}, T \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right). \end{aligned}$$

La suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur $\text{RHom}_{\Lambda}(-, \Lambda)$, à coefficients dans $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H^q(G_{S, F_{\infty}}, T \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ donne donc le résultat, compte-tenu de 6.4. □

Remarque 6.6. — Cette suite spectrale fait l'objet d'une note non publiée de Janssen [17]. Elle y est obtenue « à la main » indépendamment de nos hypothèses (selon lesquelles Λ est noethérien, $\text{cd}_p \Gamma < \infty$ et $\text{cd}_p G_S < \infty$).

6.2. Le groupe des (p) -classes dans les \mathbb{Z}_p^d -extensions

On conserve les notations du paragraphe précédent, mais on suppose désormais $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^d$, $S = S_p \cup S_{\infty}$ et $p \neq 2$ si F possède une place réelle (ces conditions assurant $\text{cd}_p G_S \leq 2$). Comme première illustration des méthodes de cet article, on se propose d'établir le théorème 6.7 ci-dessous et ses corollaires. On peut voir cette étude comme un analogue partiel de [27] pour les \mathbb{Z}_p^d -extensions.

Les résultats qui suivent (6.7, 6.8 et 6.9) ont été obtenus en collaboration avec J. Nekovář. Leur démonstration occupe toute la présente section.

La taille des groupes de décomposition de Γ joue un rôle important dans notre étude. Notons $S^{\text{dec}} = \{v \in S_p(F); \Gamma_v = 0\}$ et considérons l'hypothèse

(Dec_a) Pour tout $v \in S_p(F)$, on a $\text{rg}_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_v \geq a$.

(Ainsi (Dec₁) équivaut à $S^{\text{dec}} = \emptyset$.) Soit encore

$$Z := \text{Ker} \left(\bigoplus_{v \in S_p(F), \Gamma_v \neq 0} \mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]] \rightarrow \mathbb{Z}_p \right).$$

THÉORÈME 6.7. — Notons $\mathcal{C}\ell'_n := \mathcal{C}l(\mathcal{O}_{F_n}[\frac{1}{p}]) \otimes \mathbb{Z}_p$.

(i) Les Λ -modules $\varprojlim \mathcal{C}\ell'_n$ et $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathcal{C}\ell'_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ sont noethériens de torsion. De plus, il existe un morphisme naturel (défini en 4.6) :

$$\alpha_k : \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathcal{C}\ell'_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \longrightarrow E^1(\varprojlim \mathcal{C}\ell'_n)$$

et un pseudo-isomorphisme (non canonique) $\text{Ker } \alpha_k \approx \text{Coker } \alpha_k$.

(ii) $\text{Ker } \alpha_k \hookrightarrow E^1(Z)$. En particulier, α_k est un pseudo-isomorphisme injectif si l'hypothèse (Dec₂) est vérifiée.

COROLLAIRE 6.8. — (i) $\text{Char}(\varprojlim \mathcal{C}\ell'_n) = \text{Char}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathcal{C}\ell'_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p))$. De plus :

$$\varprojlim \mathcal{C}\ell'_n \approx 0 \iff \varinjlim \mathcal{C}\ell'_n = 0.$$

(ii) Soit $(\varprojlim \mathcal{C}\ell'_n)^0$ le sous-module pseudo-nul maximal de $\varprojlim \mathcal{C}\ell'_n$ et considérons l'application de capitulation $j_n : \mathcal{C}\ell'_n \rightarrow (\varinjlim_m \mathcal{C}\ell'_m)^{\Gamma_n}$. Sous (Dec₂), il y a une suite exacte canonique

$$\varprojlim_n \text{Ker } j_n \hookrightarrow (\varprojlim \mathcal{C}\ell'_n)^0 \twoheadrightarrow \varprojlim_{n,k} \text{Coker } j_n[p^k].$$

COROLLAIRE 6.9 (comp. [31], 9.4.11). — Notons $E'_n := \mathcal{O}_{F_n}[\frac{1}{p}]^\times \otimes \mathbb{Z}_p$. Alors :

(i) On a $t_\Lambda \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \approx Z$, non canoniquement.

(ii) Sous (Dec₃), il y a un isomorphisme naturel

$$\text{Coker } \alpha_k \simeq t_\Lambda \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

Principe de la preuve de 6.7. — Considérons les systèmes normiques naturels $\mathcal{C}\ell' = (\mathcal{C}\ell'_n) \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tf}}$ et $E' = (E'_n) \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tf}}$. Prouver 6.7 revient à expliciter la suite exacte longue de cohomologie de $\alpha_k(\mathcal{C}\ell')$. Pour cela, nous utiliserons les systèmes normiques auxiliaires suivants :

▷ $R\Gamma_S := R\underline{\Gamma}(G_S, \mathbb{Z}_p(1)) \in D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\text{tf}}$ (cf.6.1).

▷ $H_S^q := H^q(R\underline{\Gamma}_S) = (H^q(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1))) \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tf}}$, avec $q = 1, 2$.

▷ $\text{Br}' := (\text{Br}'_n) \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tf}}$, où

$$\text{Br}'_n = \varprojlim_k H^2(G_{S, F_n}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1))[p^k]$$

est le module de Tate du groupe de Brauer de $\mathcal{O}_{F_n}[\frac{1}{p}]$.

▷ $\underline{\Lambda}_v = \mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]] \otimes \mathbb{Z}_p = (\mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]]_{\Gamma_n}) \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tf}}$, où Γ_v est le groupe de décomposition de Γ en v . Concrètement, $k_{m,n} : \mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]]_{\Gamma_m} \rightarrow \mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]]_{\Gamma_n}$ (resp. $j_{n,m} : \mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]]_{\Gamma_n} \rightarrow \mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]]_{\Gamma_m}$) est la flèche induite par l'identité (resp. la multiplication par $\sum_{g \in \Gamma_n/\Gamma_m} g$).

▷ $\underline{\mathbb{Z}}_p = \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p = (\mathbb{Z}_p) \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tf}}$. Concrètement, $k_{m,n} = \text{id}$ et $j_{n,m} = [\Gamma_n : \Gamma_m]$.

Résumons les relations qui existent entre ces différents objets :

LEMME 6.10. — *Il y a dans $D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})_{\text{tf}}$ des triangles distingués :*

- (i) $H_S^1[-1] \rightarrow R\Gamma_S \rightarrow H_S^2[-2] \rightarrow H_S^1$.
- (ii) $\mathcal{C}' \rightarrow H_S^2 \rightarrow \text{Br}' \rightarrow \mathcal{C}'[1]$; de plus, $H_S^1 \simeq E'$.
- (iii) $\text{Br}' \rightarrow \bigoplus_{v|p} \underline{\Lambda}_v \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}_p \rightarrow \text{Br}'[1]$.

Esquisse d'une preuve. — La suite exacte de Kummer (resp. le principe de Hasse) donne lieu à un isomorphisme et une suite exacte (resp. une suite exacte)

$$E'_n \simeq H^1(G_{S, F_n}, \mathbb{Z}_p(1)), \quad \mathcal{C}'_n \hookrightarrow H^2(G_{S, F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) \twoheadrightarrow \text{Br}'_n,$$

$$\left(\text{resp. } \text{Br}'_n \hookrightarrow \bigoplus_{v|p} \mathbb{Z}_p[[G_n/G_{n,v}]] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p \right),$$

compatibles à la restriction et à la corestriction. □

Pour $A \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}$ ou $D^b(\underline{\Gamma}\mathcal{C})$, on note $A_\infty(A)$, $X_\infty(A)$, $A^*_\infty(A)$, $X^*_\infty(A)$ les objets notés simplement A_∞ , X_∞ , A^*_∞ , X^*_∞ dans le paragraphe 4.1. Commençons par deux lemmes.

- LEMME 6.11. — (i) *On a $C(j_{R\Gamma_S}) = 0$ et $X^*_\infty(R\Gamma_S) \in D^b(\mathcal{C}_\Lambda)_{\text{tf}}$.*
- (ii) *On a $C(k_{R\Gamma_S}) = 0$ et $X_\infty(R\Gamma_S) \in D^b(\Lambda\mathcal{C})_{\text{tf}}$.*
- (iii) *On a $\Delta_k(R\Gamma_S) = \Delta_j(R\Gamma_S) = 0$.*

Démonstration. — Tout provient de la proposition 6.3, moyennant 4.4 et 4.7. □

LEMME 6.12. — *Soit*

$$\text{Br}'_{\text{non-dec}} := \text{Ker} \left(\bigoplus_{v \in S^{\text{dec}}} \underline{\Lambda}_v \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}_p \right),$$

de sorte que le module Z de 6.9 s'identifie naturellement à $X_\infty(\text{Br}'_{\text{non-dec}})$.

Alors :

(i) Il y a dans $D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$ un triangle distingué naturel

$$\text{Br}'_{\text{non-dec}} \longrightarrow \text{Br}' \longrightarrow \bigoplus_{v \in S^{\text{dec}}} \underline{\Lambda} \longrightarrow \text{Br}'_{\text{non-dec}}[1]$$

lequel induit

$$Z = X_\infty(\text{Br}'_{\text{non-dec}}) \simeq t_\Lambda X_\infty(\text{Br}') \quad \text{et} \quad f_\Lambda(X_\infty(\text{Br}')) \simeq \bigoplus_{v \in S^{\text{dec}}} \Lambda.$$

(ii) On a

$$X_\infty^*(\text{Br}'_{\text{non-dec}}) = 0, \quad \Delta_j(\text{Br}'_{\text{non-dec}}) \simeq \Delta_j(\text{Br}') \simeq Z[1],$$

$$\Delta_k(\text{Br}') \simeq \Delta_k(\text{Br}'_{\text{non-dec}}) \simeq \text{RHom}_\Lambda(Z, \Lambda) \simeq \tau_{\geq 1} \text{RHom}_\Lambda(X_\infty(\text{Br}'), \Lambda).$$

(iii) Sous (Dec_a) , on a $\text{Ext}^q(X_\infty(\text{Br}'), \Lambda) = 0$ pour $q \leq a - 1$. En particulier, (Dec_2) équivaut à la pseudo-nullité de $X_\infty(\text{Br}')$.

Démonstration. — (i) Comme $S^{\text{dec}} \subsetneq S$, la projection naturelle $\text{Br}' \rightarrow \bigoplus_{v \in S^{\text{dec}}} \underline{\Lambda}$ est surjective, d'où le triangle distingué de l'énoncé. Le reste suit.

(ii) Ayant remarqué que :

▷ si $v \notin S^{\text{dec}}$, alors $A_\infty(\underline{\Lambda}_v)$ est uniquement p -divisible et donc

$$X_\infty^*(\underline{\Lambda}_v) = \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty(\underline{\Lambda}_v), \mathbb{Z}_p) = 0;$$

▷ $X_\infty^*(\mathbb{Z}_p) = 0$;

on voit que $X_\infty(\text{Br}'_{\text{non-dec}}) = 0$. Comme par ailleurs $\Delta_k(\underline{\Lambda}) = \Delta_j(\underline{\Lambda}) = 0$, les résultats de l'énoncé se déduisent facilement de (i), en appliquant les foncteurs α_j et α_k aux objets et aux flèches du triangle distingué de (i).

(iii) Comme $\mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]] = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]} \mathbb{Z}_p \in {}_\Lambda\mathcal{C}$, on a dans $D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$

$$\begin{aligned} \text{RHom}_\Lambda(\mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]], \Lambda) &\simeq \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]}(\mathbb{Z}_p, \Lambda) \\ &\simeq \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]) \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]} \Lambda. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]) \simeq \mathbb{Z}_p[-d_v] \quad \text{et} \quad \text{RHom}_\Lambda(\mathbb{Z}_p, \Lambda) \simeq \mathbb{Z}_p[-d]$$

où d_v (resp. d) désigne le rang de Γ_v (resp. Γ) (cf. 3.4 (iii)). Aussi 6.10 (iii) donne-t-il un triangle distingué de $D^b(\mathcal{C}_\Lambda)$:

$$\mathbb{Z}_p[-d] \rightarrow \bigoplus_{v|p} \mathbb{Z}_p[[\Gamma/\Gamma_v]][-d_v] \rightarrow \text{RHom}_\Lambda(X_\infty(\text{Br}'), \Lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_p[1-d].$$

D'où la première assertion de l'énoncé. L'assertion concernant la pseudo-nullité résulte de 5.1 (iv). □

Nous sommes maintenant en mesure d'expliciter le théorème 4.6 appliqué au système normique H_S^2 . Pour plus de lisibilité, et en vue de références futures, on adopte les notations suivantes :

- ▷ $H_{Iw}^q(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)) := \varprojlim H^q(G_{S, F_n}, \mathbb{Z}_p(1))$
 $= H^q(X_\infty(\mathrm{R}\Gamma_S)) \simeq X_\infty(H_S^q).$
- ▷ $\mathcal{H}^q(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)) := \varinjlim H^q(G_{S, F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) = H^q(A_\infty(\mathrm{R}\Gamma_S)) \simeq A_\infty(H_S^q).$
- ▷ $j_n^q : H^q(G_{S, F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow \mathcal{H}^q(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))^{\Gamma_n}$,
de sorte que $H^0(j_{H_S^q}) = (j_n^q).$
- ▷ $k_n^q : H_{Iw}^q(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))^{\Gamma_n} \rightarrow H^q(G_{S, F_n}, \mathbb{Z}_p(1)),$
si bien que $H^0(k_{H_S^q}) = (k_n^q).$

PROPOSITION 6.13. — 1) Pour $p = 0, 1$ et $q = 1, 2$, les Λ -modules

$$H_{Iw}^q(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \quad \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^p(\mathcal{H}^q(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p),$$

sont tous de type fini.

2) (i) $C(j_{H_S^2}) \simeq C(j_{H_S^1}[2])$ (resp. $C(k_{H_S^2}) \simeq C(k_{H_S^1}[2])$) est acyclique hors de $[-1, d - 1]$ (resp. $[-d - 1, -2]$). Explicitement :

(ii) $\mathrm{Ker} j_n^1 = \mathrm{Coker} j_n^1 = 0$ et $\mathrm{Ker} k_n^2 = \mathrm{Coker} k_n^2 = 0.$

(iii) $\mathrm{Ker} j_n^2 = H^1(\Gamma_n, \mathcal{H}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))),$
 $\mathrm{Coker} j_n^2 = H^2(\Gamma_n, \mathcal{H}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))),$
 $H_2(\Gamma_n, H_{Iw}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))) = \mathrm{Ker} k_n^1,$
 $H_1(\Gamma_n, H_{Iw}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))) = \mathrm{Coker} k_n^1.$

(iv) Pour $q \geq 1$ on a,

$$H^q(\Gamma_n, \mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))) = H^{q+2}(\Gamma_n, \mathcal{H}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))),$$

$$H_{q+2}(\Gamma_n, H_{Iw}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))) = H_q(\Gamma_n, H_{Iw}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))).$$

3) (i) $\Delta_k(H_S^2) = \Delta_k(H_S^1)[-2]$ est acyclique hors de $[1, d + 1].$

(ii) Les modules de cohomologie de $\Delta_k(H_S^2)$ sont noethériens de torsion. De plus :

- ▷ $H^q(\Delta_k(H_S^2))$ est pseudo-nul si $q \neq 1.$
- ▷ $H^1(\Delta_k(H_S^2)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, H_{Iw}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))), \mathbb{Z}_p).$

(iii) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p) = E^0(H_{Iw}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))).$

En particulier, $H_{Iw}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$ et $\varprojlim \mathrm{Br}'_n$ possèdent le même Λ -rang. Explicitement, il y a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p) \simeq \bigoplus_{v \in S^{\mathrm{dec}}} \Lambda.$$

(iv) Il y a une suite exacte naturelle

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p) &\hookrightarrow E^1(H_{\text{Iw}}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))) \\ &\longrightarrow H^1(\Delta_k(H_S^2)). \end{aligned}$$

(v) Pour $q \geq 2$, on a $H^q(\Delta_k(H_S^2)) = E^q(H_{\text{Iw}}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)))$.

4) (i) $\Delta_j(H_S^2) = \Delta_j(H_S^1)[2]$ est acyclique hors de $[-1, d - 1]$.

(ii) Les modules de cohomologie de $\Delta_j(H_S^2)$ sont noethériens de torsion. De plus :

- ▷ $H^q(\Delta_j(H_S^2))$ est pseudo-nul si $q \neq -1$.
- ▷ $H^{-1}(\Delta_j(H_S^2)) \approx E^1(H^1(\Delta_k(H_S^2)))$.

(iii) Il y a des suites exactes naturelles

$$\begin{aligned} H^{-1}(\Delta_j(H_S^2)) &\hookrightarrow H_{\text{Iw}}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)) \longrightarrow E^0(X_\infty^*(H_S^2)) \longrightarrow H^0(\Delta_j(H_S^2)), \\ E^1(\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)) &\hookrightarrow E^0(X_\infty^*(H_S^2)) \\ &\longrightarrow E^0(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)), \\ \varprojlim_n \text{Ker } j_n^2 &\hookrightarrow H^{-1}(\Delta_j(H_S^2)) \longrightarrow \varprojlim_{n,k} \text{Coker } j_n^2[p^k], \\ \varprojlim_{n,k} (\text{Coker } j_n^2)/p^k &\hookrightarrow H^0(\Delta_j(H_S^2)) \longrightarrow \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, \mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)))[p^k]. \end{aligned}$$

(iv) Pour $q \geq 1$, il y a un isomorphisme

$$E^{q+1}(\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)) \simeq H^q(\Delta_j(H_S^2)).$$

Démonstration. — 1) est une conséquence directe de 6.11 (i) et (ii). Le point (i) de 2), 3), 4) résulte de 6.11 (iii), 6.10 (i) et 4.11.

2) (ii)–(iv) découlent immédiatement de 2) (i). Ces résultats sont en fait bien connus et peuvent aussi se lire sur des suites spectrales convenables (e.g. [20], 2.3, pour la codescente).

3) (ii) D’après 2) (ii), la flèche de descente $\mathbb{Z}_p \otimes X_\infty(H_S^2) \rightarrow H_S^2$ est un isomorphisme et l’on peut donc appliquer 5.3.

4) (ii) : on raisonne comme en 5.23, 2) (iii).

Le reste de l’énoncé exprime essentiellement la cohomologie des triangles distingués $\alpha_k(H_S^2)$ et $\alpha_j(H_S^2)$, aux exceptions suivantes près :

3) (iii) Comme $\mathcal{C}\ell'_n$ est fini, la suite exacte de Kummer (cf. 6.10) montre que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{Br}', \mathbb{Z}_p) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H_S^2, \mathbb{Z}_p)$. La description explicite de l’énoncé résulte donc de 6.12 (i).

4) (iii) On raisonne comme en 5.23, 2) (i) pour obtenir les deux dernières suites exactes. □

Dans la proposition 6.13, on s'est attaché à expliciter la cohomologie des triangles distingués $\alpha_j(A)$ et $\alpha_k(A)$ avec $A = H_S^2$. Pour avoir une vision complète de la situation, il conviendrait de faire de même avec $A = H_S^1$, puis de recoller les deux avec $R\Gamma_S$. A défaut d'écrire les détails d'une étude aussi fastidieuse, on se contente d'évoquer deux points significatifs.

COROLLAIRE 6.14. — (i) On a

$$H_{Iw}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq E^0(\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)).$$

(ii) Il y a une suite exacte naturelle

$$\begin{aligned} H^1(\Delta_k(H_S^2)) &\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p) \\ &\longrightarrow E^0(H_{Iw}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))) \longrightarrow H^2(\Delta_k(H_S^2)) \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1). \end{aligned}$$

En particulier, $H^1(\Delta_k(H_S^2)) \simeq t_\Lambda \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n, \mathbb{Z}_p)$.

Démonstration. — Pour (i) (resp. (ii)), on écrit un morceau de la suite exacte longue de cohomologie de $\alpha_j(H_S^1)$ (resp. $\alpha_k(H_S^1)$), compte-tenu de 6.13, 4) (i). La dernière assertion résulte de la suite exacte, puisque

$$t_\Lambda E^0(H_{Iw}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))) = 0$$

et $H_S^1 \simeq E'$ (voir 6.10 (ii)). □

Le résultat suivant est l'ingrédient principal pour la preuve de 6.7.

PROPOSITION 6.15. — Il existe des pseudo-isomorphismes non canoniques

$$Z \approx H^1(\Delta_k(H_S^2)) \approx H^{-1}(\Delta_j(H_S^2)).$$

En particulier, on a les équivalences

$$(\mathrm{Dec}_2) \iff H^1(\Delta_k(H_S^2)) \approx 0 \iff H^{-1}(\Delta_j(H_S^2)) \approx 0.$$

Démonstration. — Pour ne pas exclure le cas où (Dec_1) n'est pas vérifiée, soit $H_{S, \mathrm{non-dec}}^2$ le noyau de la flèche composée $H_S^2 \rightarrow \mathrm{Br}' \rightarrow \bigoplus_{v \in S^{\mathrm{dec}}} \underline{\Lambda}$. On a alors deux triangles distingués naturels

$$\begin{aligned} H_{S, \mathrm{non-dec}}^2 &\longrightarrow H_S^2 \longrightarrow \bigoplus_{v \in S^{\mathrm{dec}}} \underline{\Lambda} \longrightarrow H_{S, \mathrm{non-dec}}^2[1], \\ \mathcal{C}' &\rightarrow H_{S, \mathrm{non-dec}}^2 \longrightarrow \mathrm{Br}'_{\mathrm{non-dec}} \longrightarrow \mathcal{C}'[1] \end{aligned}$$

sur lesquels on lit les faits suivants :

▷ $C(k_{H_{S, \mathrm{non-dec}}^2}) \simeq C(k_{H_S^2})$. En particulier,

$$\mathbb{Z}_p \otimes X_\infty(H_{S, \mathrm{non-dec}}^2) \simeq H_{S, \mathrm{non-dec}}^2.$$

▷ $\Delta_k(H_S^2) \simeq \Delta_k(H_{S, \mathrm{non-dec}}^2)$.

$$\triangleright f_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty(H_{S,\text{non-dec}}^2)_{\Gamma_n}) \simeq f_{\mathbb{Z}_p}((H_{S,\text{non-dec}}^2)_n) \simeq (\text{Br}'_{\text{non-dec}})_n.$$

D'après 6.13 3. (iii), le Λ -module $M := X_\infty(H_{S,\text{non-dec}}^2)$ est de Λ -torsion. On peut donc lui appliquer 5.3, 2) (i) et 5.10 ; cela donne une pseudo-surjection non-canonique $Z \simeq \varprojlim M_{\Gamma_n} \rightarrow H^1(\Delta_k(H_{S,\text{non-dec}}^2)) \simeq H^1(\Delta_k(H_S^2))$.

Mais $H^1(\Delta_k(H_S^2)) \simeq t_\Lambda \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n, \mathbb{Z}_p)$ (cf. 6.14 (ii)), or d'après [31], 9.4.11 (iii),

$$\text{Char}(Z) \mid \text{Char}(t_\Lambda \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n, \mathbb{Z}_p))$$

(noter que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n, \mathbb{Z}_p) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$). Le noyau de la pseudo-surjection précédente est donc nécessairement pseudo-nul. D'où le premier pseudo-isomorphisme de l'énoncé. Le reste suit, grâce à 6.13, 4) (ii) et 6.12 (iii). \square

COROLLAIRE 6.16. — (i) $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)$ ne possède aucun sous-module pseudo-nul.

(ii) Sous (Dec_2) , $H^{-1}(\Delta_j(H_S^2))$ est le sous-module pseudo-nul maximal de $H_{\text{Iw}}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$.

Démonstration. — (i) Au vu de 6.13 3. (iv), il suffit de montrer que $E^1(X_\infty(H_S^2))$ ne possède aucun sous-module pseudo-nul. Mais d'après la preuve de 6.15, $X_\infty(H_S^2)$ est somme directe d'un Λ -module libre et du Λ -module de torsion $X_\infty(H_{S,\text{non-dec}}^2)$. D'où

$$E^1(X_\infty(H_S^2)) \simeq E^1(X_\infty(H_{S,\text{non-dec}}^2)),$$

et le résultat par 5.1 (iii).

(ii) Le Λ -module $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(\mathcal{H}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)$ étant de torsion (6.13, 3) (iv) et 5.1 (i)), les deux premières suites exactes de 6.13, 4) (iii), jointes à 5.1 (iii), montrent que le sous-module pseudo-nul maximal de $H_{\text{Iw}}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$ est contenu dans $H^{-1}(\Delta_j(H_S^2))$. D'où le résultat, par 6.15. \square

Preuve de 6.7. — (i) Comme $\mathcal{C}' = \text{Ker}(H_S^2 \rightarrow \text{Br}')$, 6.13, 1) et 3) (iii) montrent que $\varprojlim \mathcal{C}'_n$ est noethérien de torsion. Que le module

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathcal{C}'_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = H^1(X_\infty^*(\mathcal{C}')) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(\mathcal{H}_S^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)$$

soit noethérien de torsion résulte de 6.13 1), 3) (iv) et 5.1 (i).

Comme $X_\infty(\mathcal{C}')$ est de Λ -torsion, la suite exacte longue de cohomologie du triangle distingué $\alpha_k(\mathcal{C}')$ s'écrit

$$0 \rightarrow H^0(\Delta_k(\mathcal{C}')) \rightarrow H^1(X_\infty^*(\mathcal{C}')) \rightarrow E^1(X_\infty(\mathcal{C}')) \rightarrow H^1(\Delta_k(\mathcal{C}')) \rightarrow 0.$$

La flèche centrale est celle notée α_k dans l'énoncé, et il reste à montrer que les deux termes extrêmes sont pseudo-isomorphes.

Appliquer Δ_k à 6.10 (ii) donne un triangle distingué dont la suite exacte longue de cohomologie s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (***) \quad H^0(\Delta_k(H_S^2)) &\rightarrow H^0(\Delta_k(\mathcal{C}')) \rightarrow H^1(\Delta_k(\text{Br}')) \\
 &\longrightarrow H^1(\Delta_k(H_S^2)) \longrightarrow H^1(\Delta_k(\mathcal{C}')) \longrightarrow H^2(\Delta_k(\text{Br}')).
 \end{aligned}$$

Dans celle-ci, le premier terme est trivial (6.13, 3) (i) et le dernier pseudo-nul (6.12 (ii) et 5.1 (i)). Maintenant, 6.15, 5.1 (iv) et 6.12 (ii) donnent, non-canoniquement,

$$H^1(\Delta_k(H_S^2)) \simeq t_\Lambda X_\infty(\text{Br}') \simeq E^1(X_\infty(\text{Br}')) \simeq H^1(\Delta_k(\text{Br}')).$$

Comme $t_\Lambda X_\infty(\text{Br}')$ est pseudo-semi-simple, il résulte de la suite exacte précédente que $H^0(\Delta_k(\mathcal{C}'))$ et $H^1(\Delta_k(\mathcal{C}'))$ le sont aussi et qu'ils possèdent le même idéal caractéristique. D'où $H^0(\Delta_k(\mathcal{C}')) \simeq H^1(\Delta_k(\mathcal{C}'))$, non canoniquement.

(ii) Puisque $X_\infty(\mathcal{C}')$ est de torsion (cf. (i)), c'est que l'on a l'égalité $H^0(\Delta_k(\mathcal{C}')) = \text{Ker } \alpha_k$. Mais d'après 6.12 (ii)

$$H^1(\Delta_k(\text{Br}')) \simeq E^1(X_\infty(\text{Br}')) \simeq E^1(Z)$$

et la suite exacte (***) donne donc l'injection $\text{Ker } \alpha_k \hookrightarrow E^1(Z)$ de l'énoncé. Si l'hypothèse (Dec₂) est vérifiée, 6.12 (iii) montre qu'en fait, $E^1(Z) = 0$ et cela termine la démonstration. □

Preuve de 6.8. — (i) résulte directement de 6.7, 6.16 (i).

(ii) En toute généralité, la suite exacte longue de cohomologie du triangle distingué $\alpha_j(\mathcal{C}')$ s'écrit

$$0 \rightarrow H^{-1}(\Delta_j(\mathcal{C}')) \rightarrow X_\infty(\mathcal{C}') \rightarrow E^1(H^1(X_\infty^*(\mathcal{C}'))) \rightarrow H^0(\Delta_j(\mathcal{C}')) \rightarrow 0.$$

Dans celle-ci :

▷ le troisième terme ne possède aucun sous-module pseudo-nul non nul (5.1, (iii)) ;

▷ la flèche centrale coïncide avec $E^1(\alpha_k)$; sous (Dec₂), c'est un pseudo-isomorphisme et le premier terme est donc pseudo-nul.

Aussi, $(\varprojlim \mathcal{C}'_n)^0 \simeq H^{-1}(\Delta_j(\mathcal{C}'))$.

La suite exacte de l'énoncé est semblable à 5.23, 2) (i). □

Preuve de 6.9. — Le (i) a été établi au cours de la preuve de 6.15.

(ii) Sous (Dec₃), on a $H^1(\Delta_k(\text{Br}')) = H^2(\Delta_k(\text{Br}')) = 0$ (6.12 (iii)). Le raisonnement de 6.7 (i) donne alors

$$\begin{aligned}
 \text{Coker } \alpha_k &\simeq H^1(\Delta_k(\mathcal{C}')) \simeq H^1(\Delta_k(H_S^2)) \\
 &\simeq t_\Lambda \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E'_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).
 \end{aligned}
 \quad \square$$

Remarque 6.17. — 1) (i) L'équivalence de 6.8 (i), longtemps suspectée, avait déjà été établie dans [34], conditionnellement à la conjecture de Gross pour chaque F_n ; la preuve reposait alors de façon cruciale sur les résultats de [27]. Des résultats partiels figurent aussi dans [25] et [28], voir [34] à ce sujet.

(ii) La divisibilité $\text{Char}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \mathcal{C}'_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) \mid \text{Char}(\varprojlim \mathcal{C}'_n)$ était déjà connue (voir [31] (prop. 9.4.1 (iii))). La preuve de 6.15 présentée ici repose d'ailleurs sur les résultats de [31], 9.4.

(iii) Sous (Dec_2) , 6.15 est en fait indépendant de [31], 9.4. Dans le cas général, une réponse positive à la question 5.8 engloberait le résultat de *loc. cit.* On peut se demander si une adaptation des méthodes de *loc. cit.* permettrait de répondre à 5.8; nous espérons y revenir dans un travail ultérieur.

2) Pour $T = \mathbb{Z}_p(0)$, 6.16 (i) possède un analogue bien connu, relié à la conjecture de Leopoldt faible. Celui-ci est originellement dû à [8] et [32] en a donné une autre preuve. On pourra aussi consulter [31], 9.3.1, pour un résultat général.

3) La proposition 6.14 (i) montre que $f_\Lambda H_{\text{Iw}}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$ est réflexif; (ii) pourrait être le point de départ d'une discussion sur la réflexivité du module $f_\Lambda \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \mathbb{Z}_p)$. Il serait sans doute intéressant de comparer cette approche avec celle de [10].

Toute la présente étude concerne les modules d'Iwasawa attachés à la \mathbb{Z}_p -représentation continue $T = \mathbb{Z}_p(1)$. Pour $T = \mathbb{Z}_p(i)$, l'étude analogue présente quelques différences dont la plus marquante est peut-être la description du sous-module pseudo-nul maximal de $H_{\text{Iw}}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$: pour $i \geq 2$, celui-ci vaut tout simplement $\varprojlim \text{Ker } j_n^2$. Cette remarque est à rapprocher du fait suivant: les méthodes de [41], [43] permettent de produire des éléments de $\text{Ker } j_n \subset H^2(G_{S, F_n}, \mathbb{Z}_p(i))$ (pour n fixé) seulement pour $i \geq 2$ et non pour $i = 1$.

QUESTION 6.18. — *Est-il possible d'adapter les méthodes de [41], [43] pour produire des éléments du sous-quotient*

$$\varprojlim_{n,k} \text{Coker } j_n^2[p^k] \quad \text{de } H_{\text{Iw}}^2(F_\infty, \mathbb{Z}_p(1)) ?$$

Une réponse positive à cette question demanderait certainement la construction préalable de systèmes projectifs d'unités le long de sous-extensions bien choisies de F_∞ .

6.3. Descente et codescente dans la tour cyclotomique

On propose ici une étude systématique de la (co-)descente pour les systèmes normiques usuels de la théorie d'Iwasawa cyclotomique. On retrouve ainsi de façon concise et unifiée de nombreux résultats connus (voir [24], [11], [27], [3], [23], [33], [6] et [14]). Pour simplifier, on suppose $p \neq 2$.

L'approche axiomatique présente l'avantage de mettre en lumière les hypothèses dont dépendent les résultats. On ne fait ici aucun usage de la conjecture principale. Par ailleurs, l'étude est essentiellement indépendante de la conjecture de Leopoldt (théorème de Baker-Brumer, dans notre contexte), à l'exception du corollaire 6.35. Les propriétés « arithmétiques » qu'on utilise systématiquement sont rassemblées dans le lemme 6.22.

Le phénomène de stabilisation joue un rôle important. Il est automatique pour les systèmes normiques qui proviennent de la cohomologie de $\mathbb{Z}_p(1)$; Pour les unités cyclotomiques, l'étude repose entièrement sur un résultat préalable de [3] (cf. 6.21).

Fixons F un corps de nombres abélien et considérons sa \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique F_∞/F . On note $\Gamma_n = \text{Gal}(F_\infty/F_n)$ et $\Gamma/\Gamma_n = G_n$ comme toujours. Munies de la norme et de l'extension, les collections suivantes constituent les systèmes normiques que l'on souhaite étudier :

- ▷ $E_n := \mathcal{O}_{F_n}^\times \otimes \mathbb{Z}_p$ le \mathbb{Z}_p -module des unités, $E = (E_n) \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tf}}$.
- ▷ $Cl_n := Cl(\mathcal{O}_{F_n}) \otimes \mathbb{Z}_p$ le p -groupe de classes, $Cl = (Cl_n) \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tf}}$.
- ▷ $C_n \subset E_n$ le \mathbb{Z}_p -module engendré par les unités cyclotomiques (cf. [38] pour une définition précise), $C = (C_n) \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tf}}$.
- ▷ $B_n := E_n/C_n$, $B = (B_n) \in \underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tf}}$.

On utilisera aussi les systèmes normiques auxiliaires suivants :

- ▷ $E' = (E'_n)$, $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}'_n)$, $\text{Br}' = (\text{Br}'_n)$, $\text{R}\Gamma_S = \text{R}\underline{\Gamma}(G_S, \mathbb{Z}_p(1))$,
 $H^1_S = (H^1(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq E')$, $H^2_S = (H^2(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1)))$,
 $\underline{\Delta}_v = (\mathbb{Z}_p[G_n/G_{n,v}])$ (voir section 6.2 pour les notations).
- ▷ $I = (I_n)$ où I_n est le \mathbb{Z}_p -module libre sur les p -places de F_n ; les application de transitions sont induites par l'extension et la norme des idéaux.

Si A est un système normique, on note :

$$A_\infty = \varinjlim A_n, \quad X_\infty = \varprojlim A_n, \quad j_n : A_n \rightarrow (A_\infty)^{\Gamma_n}, \quad k_n : (X_\infty)_{\Gamma_n} \rightarrow A_n.$$

Si plusieurs systèmes normiques sont en jeu, on écrira parfois $A_\infty(A)$, $X_\infty(A)$, $j_{n,A}$ ou encore $k_{n,A}$ pour indiquer auquel on se rapporte.

PROPOSITION 6.19. — Si $A = E, Cl, C$ ou B , alors :

- 1) X_∞ est un Λ -module de type fini.
- 2) (i) Les systèmes inductifs $H_1(\Gamma_n, X_\infty)$, $\text{Ker } k_n$ et $\text{Coker } k_n$ se stabilisent ; en particulier, leur limite est de type fini sur \mathbb{Z}_p .
 (ii) Les systèmes projectifs $\text{Ker } j_n$, $\text{Coker } j_n$, $H^1(\Gamma_n, A_\infty)$, $H^2(\Gamma_n, A_\infty)$ se stabilisent ; en particulier leur limite est de torsion sur \mathbb{Z}_p .
- 3) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)$ et $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p}^1(A_\infty, \mathbb{Z}_p) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(t_{\mathbb{Z}_p} A_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ sont des Λ -modules de type fini.

Commençons par un lemme.

LEMME 6.20. — A lieu dans $\underline{\Gamma}\mathcal{C}$ une suite exacte « de localisation hors des p -places » qui se matérialise par une famille de suites exactes :

$$\begin{aligned} E_n \hookrightarrow H^1(G_{S, F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) &\longrightarrow I_n \longrightarrow Cl_n \\ &\longrightarrow H^2(G_{S, F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) \longrightarrow \bigoplus_{v|p} \mathbb{Z}_p[G_n/G_{n,v}] \longrightarrow \mathbb{Z}_p. \end{aligned}$$

Démonstration. — La construction directe (par localisation) d'un triangle distingué adéquat ne semblant pas relever des méthodes de cet article, on se contentera d'une construction à la main. D'abord, la théorie de Kummer donne comme en 6.10 (ii) $E'_n \simeq H^1(G_{S, F_n}, \mathbb{Z}_p(1))$ et $Cl'_n \hookrightarrow H^2(G_{S, F_n}, \mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow \text{Br}'_n$. La suite exacte de l'énoncé est alors obtenue en recollant cette dernière à la suite exacte de valuation $E_n \hookrightarrow E'_n \rightarrow \mathbb{Z}_p[S(F_n)] \rightarrow Cl_n$, via la flèche naturelle $Cl_n \rightarrow Cl'_n$. La famille de suites exactes ainsi construite est G_n -équivariante, compatible à la norme et à l'extension, et donne donc bien une suite exacte dans $\underline{\Gamma}\mathcal{C}$. □

Preuve de 6.19. — 1) Dans la suite exacte obtenue en appliquant \varprojlim_n à celle du lemme précédent, on connaît déjà la noéthérianité du second et du cinquième terme grâce à 6.13, 1), et celle des troisième et sixième terme est évidente, compte-tenu de leur description explicite. Le résultat suit.

2) (i) On a $C(k_{R\Gamma_S}) = 0$ d'après (6.11 (ii)). Par 5.17, 2), on en déduit que $C(k_{H_S^q})$ se stabilise pour $q = 1, 2$. Par ailleurs, les systèmes normiques I et $\underline{\Lambda}_v$ se stabilisent via la corestriction, puisque pour n suffisamment grand, l'extension F_∞/F_n est totalement ramifiée en chaque p -place. Il s'ensuit que $C(k_I)$ et $C(k_{\underline{\Lambda}_v})$ se stabilisent automatiquement (5.15), puis $C(k_E)$ et $C(k_{Cl})$ aussi, par 5.20, appliqué à la suite exacte 6.20.

Reste la stabilisation de $C(k_C)$ et $C(k_B)$. Par définition de B , il y a une suite exacte $C \hookrightarrow E \twoheadrightarrow B$, et il nous suffit donc par 5.21 d'établir la stabilisation de $\text{Coker } k_n$ pour $A = C$ (condition (i), *loc. cit.*). Or celle-ci est assurée par la

PROPOSITION 6.21 (voir [3], lemme 2.5). — Coker $k_{n,C}$ se stabilise dès que toutes les p -places sont totalement ramifiées dans F_∞/F_n . En particulier, Coker $k_{n,C}$ se stabilise.

La preuve de ce résultat repose sur un examen attentif de la définition des unités cyclotomiques.

Terminons la preuve de 6.19 : 2) (ii) procède de 5.14 (i), et 3) découle de 1) et 2) (i), compte-tenu de 4.9. □

Pour aller plus loin, nous devons prendre en compte la spécificité des quatre systèmes normiques qui nous occupent. Rassemblons en un lemme les propriétés qui nous seront utiles :

LEMME 6.22. — (i) Pour $A = E$, on a $t_{\mathbb{Z}_p}A_n = \mu_{p^\infty}(F_n)$, $\text{Ker } j_n = 0$ et $\text{Coker } j_n = 0$.

(ii) Pour $A = C$, on a $t_{\mathbb{Z}_p}A_n = \mu_{p^\infty}(F_n)$, $\text{Ker } j_n = 0$ et $\text{Coker } j_n$ est fini.

(iii) Pour $A = \mathcal{C}l$, on a A_n est fini et $\text{Coker } k_n = 0$ pour $n \gg 0$.

(iv) Pour $A = B$, B_n est fini.

Démonstration. — (i) est clair.

(ii) La trivialité de $\text{Ker } j_n$ se déduit de la propriété analogue pour E . Quant à $\text{Coker } j_n$, c'est d'une part un sous-quotient de E_n donc un \mathbb{Z}_p -module de type fini, et d'autre part un \mathbb{Z}_p -module de torsion, comme chaque objet de cohomologie de $C(j_A)$. Il est donc nécessairement fini.

(iii) Comme k_n est un isomorphisme pour $A = (H^2(G_{S,F_n}, \mathbb{Z}_p(1)))$ et $A = (\text{Br}'_n)$, appliquer le foncteur homologique $H^\bullet(C(k_{(-)}))$ aux suites exactes (découpées dans 6.20) $I \rightarrow \mathcal{C}l \rightarrow \mathcal{C}l' \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow \mathcal{C}l' \rightarrow H_S^2 \rightarrow \text{Br}'_n \rightarrow 0$ en donne une troisième : $\text{Coker } k_{n,I} \rightarrow \text{Coker } k_{n,\mathcal{C}l} \rightarrow \text{Ker } k_{n,\text{Br}'}$, dans laquelle les deux termes extrêmes s'annulent dès que F_∞/F_n est totalement ramifiée en chaque p -place. On a donc bien $\text{Coker } k_n = 0$ pour $A = \mathcal{C}l$ et $n \gg 0$.

(iv) La finitude de B_n est bien connue (on dispose même d'une formule pour l'ordre de B_n , cf. [38], théorème 4.1). □

Remarque 6.23. — (i) (Leopoldt) Pour $A = B$, $\text{Ker } k_n$ est fini pour tout n . En effet, la finitude de $\text{Ker } k_n$ (i.e. celle de $(\varprojlim B_m)_{\Gamma_n}$) résulte de la conjecture de Leopoldt sous sa forme « fonctions L p -adiques », modulo la généralisation par [40] aux corps abéliens quelconques du théorème d'Iwasawa reliant unités cyclotomiques et fonctions L p -adiques. On renvoie à [1], théorème 1.1, pour plus d'explications.

(ii) Considérons la condition suivante

$$(S_p = S_p^+) : \text{« } F_\infty \text{ et } F_\infty^+ \text{ possèdent le même nombre de } p\text{-places »}.$$

Pour $A = \mathcal{C}l$, cette condition assure la finitude de $\text{Ker } k_n$ pour tout n . En effet, cela résulte de la conjecture de Gross (cf. [22]) pour la partie « $-$ », et de celle de Leopoldt pour la partie « $+$ » (cf. [7], théorème 1).

En fait, $(S_p = S_p^+)$ équivaut à « $\text{Ker } k_n$ est fini pour tout n », comme nous le verrons plus loin (voir 6.33, 2).

Reste maintenant à écrire les résultats de la proposition 5.23 pour les quatre systèmes normiques qui nous occupent. On procède en trois étapes :

- ▷ 6.25, énoncé des résultats pour $A = \mathcal{C}l$ ou B ;
- ▷ 6.28, énoncé des résultats pour $A = E$ ou C ;
- ▷ 6.31, lien entre les deux premières étapes.

On indique à chaque étape une liste de corollaires (connus ou non) dont les notations suivantes simplifieront les énoncés.

DÉFINITION 6.24. — 1) Si M est un Λ -module de type fini, on note :

$$(i) \quad M^\delta = \bigcup M^{\Gamma_n} \simeq \varinjlim H_1(\Gamma_n, M).$$

$$(ii) \quad M^0 = t_{\mathbb{Z}_p} M^\delta \text{ son sous-module fini maximal.}$$

2) (ii) Dualement, si M est un Λ -module topologique discret (M est donc de \mathbb{Z}_p -torsion) tel que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ soit un Λ -module de type fini, on note :

$$(i) \quad M_\delta = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\delta, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \\ \simeq \varprojlim M_{\Gamma_n} \simeq \varprojlim H^1(\Gamma_n, M).$$

$$(ii) \quad M_0 = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^0, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq \varprojlim_{n,k} M_{\Gamma_n}/p^k.$$

PROPOSITION 6.25. — Soit $A = \mathcal{C}l$ ou B , alors :

- 1) Les Λ -modules X_∞ et $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ sont noethériens de torsion.
- 2) Il y a deux flèches adjointes naturelles

$$\alpha_j : X_\infty \rightarrow E^1(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)), \quad \alpha_k : \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \rightarrow E^1(X_\infty)$$

et celles-ci vérifient :

(i) non canoniquement, $\text{Ker } \alpha_j$, $\text{Coker } \alpha_j$, $\text{Ker } \alpha_k$, $\text{Coker } \alpha_k$ sont tous pseudo-isomorphes ;

(ii) noyau et conoyau de α_j sont décrits par

$$\varprojlim \text{Ker } j_n \hookrightarrow \text{Ker } \alpha_j \twoheadrightarrow \varprojlim_{n,k} \text{Coker } j_n[p^k],$$

$$\varprojlim_{n,k} \text{Coker } j_n/p^k \hookrightarrow \text{Coker } \alpha_j \twoheadrightarrow \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, A_\infty)[p^k],$$

$$\text{Ker } \alpha_j \simeq \varinjlim H_1(\Gamma_n, X_\infty), \quad \text{Coker } \alpha_j \simeq \varinjlim \text{Ker } k_n.$$

De plus, on a

$$E^2(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) \simeq \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, A_\infty)/p^k \simeq \varinjlim \text{Coker } k_n.$$

Pour $A = \mathcal{C}l$, ce dernier module vaut 0.

(iii) Noyau et conoyau de α_k sont décrits par

$$\begin{aligned} \text{Ker } \alpha_k &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim H^1(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \text{Coker } k_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) &\hookrightarrow \text{Ker } \alpha_k \twoheadrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \text{Ker } k_n, \mathbb{Z}_p). \end{aligned}$$

Pour $A = \mathcal{C}l$, le premier terme de la suite exacte précédente est trivial. Pour $A = \mathcal{C}l$ ou B , on a de plus

$$\begin{aligned} \text{Coker } \alpha_k &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim \text{Coker } j_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim \text{Ker } k_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) &\hookrightarrow \text{Coker } \alpha_k \twoheadrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_1(\Gamma_n, X_\infty), \mathbb{Z}_p), \\ E^2(X_\infty) &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim \text{Ker } j_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim H_1(\Gamma_n, X_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p). \end{aligned}$$

Démonstration. — Le corollaire 5.24 donne 1) et 2) (i). Le point 2) (ii) est donné par 5.23, 2) (i) et 3) (ii) ; enfin, le point 2) (iii) est donné par 5.23, 2) (ii) et 3) (iii). □

Remarque 6.26. — Dans la proposition précédente,

(i) Si $\text{Ker } \alpha_j$ est fini, alors le troisième terme de chacune des quatre suites exactes de 6.25 disparaît, puisque le terme central doit être fini d'après 6.25, 2) (i). De plus, les suites exactes en question mettent en évidence l'équivalence entre la finitude des modules $\text{Ker } \alpha_j$, $\varprojlim \text{Coker } j_n$, $\varprojlim H^1(\Gamma_n, A_\infty)$, $\varinjlim \text{Ker } k_n$ et $\varinjlim H_1(\Gamma_n, X_\infty)$. Comme les systèmes projectifs et inductifs en jeu se stabilisent, on voit facilement que la finitude de la limite équivaut à celle de tous les arguments ; par exemple, $\varinjlim \text{Ker } k_n$ est fini si et seulement si chacun des $\text{Ker } k_n$ l'est. On renvoie à 6.23 pour l'interprétation arithmétique de cette condition.

(ii) Pour $A = B$, la conjecture de Leopoldt assure la finitude de $\text{Ker } \alpha_j$ (cf. (i) et 6.23 (i)). Dans cette situation l'expert appréciera de voir la finitude des groupes de cohomologie $H^q(\Gamma_n, \varinjlim B_m)$ apparaître sans plus d'efforts. Dans ce contexte, on note que 6.25, 2) (iii) donne deux isomorphismes :

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim \text{Coker } j_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim \text{Ker } k_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq \text{Coker } \alpha_k$$

dont le premier répond au attentes de [25], cor. 4.6, en toute généralité.

(iii) Pour $A = \mathcal{C}l$, les résultats sont indépendants de toute hypothèse sur F . Par ailleurs, il tiennent *verbatim* si l'on remplace $\mathcal{C}l$ par $\mathcal{C}l'$. Dans ce contexte, le rapport entre $\text{Coker } \alpha_k$, $\varprojlim \text{Coker } j_n$ et $\varinjlim \text{Ker } k_n$ est à rapprocher de l'interprétation de [27] de ces deux derniers objets en termes du module de Bertrandias-Payan (cf. *loc. cit.*).

COROLLAIRE 6.27. — Avec les notations de la définition précédente,

- 1) (i) $(\varprojlim \mathcal{C}l_n)^0 \simeq \varprojlim \text{Ker } j_{n,\mathcal{C}l}$.
- (ii) $(\varinjlim \mathcal{C}l_n)_0 \simeq \varinjlim \text{Coker } k_{n,\mathcal{C}l} = 0$.
- 2) (i) $(\varprojlim B_n)^0 \simeq \varprojlim \text{Ker } j_{n,B}$.
- (ii) $(\varinjlim B_n)_0 \simeq \varinjlim \text{Coker } k_{n,B}$.

Démonstration. — D'après 6.25, 2) (ii), on a $\text{Ker } \alpha_j = (X_\infty)^\delta$. Les points 1) (i) et 2) (i) découlent aussitôt de 6.25, 2) (ii). De manière analogue, les points 1) (ii) et 2) (ii) s'obtiennent en dualisant l'isomorphisme $\text{Ker } \alpha_k = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}((A_\infty)^\delta, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ à l'aide de 6.25, 2) (iii). □

PROPOSITION 6.28. — Soient $A = E$ ou C , $X_\infty = \varprojlim A_n$, $A_\infty = \varinjlim A_n$. Alors :

- 1) Les Λ -modules X_∞ et $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)$ sont noethériens.
- 2) Il y a deux flèches duales naturelles

$$\tilde{\alpha}_j : X_\infty \rightarrow E^0(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)), \quad \alpha_k : \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p) \rightarrow E^0(X_\infty)$$

et celles-ci vérifient :

- (i) Noyau et conoyau de $\tilde{\alpha}_j$ sont décrits par

$$\begin{aligned} \text{Ker } \tilde{\alpha}_j &= \varprojlim \mu_{p^\infty}(F_n), & \text{Coker } \tilde{\alpha}_j &\simeq \varinjlim \text{Ker } k_n, \\ \varprojlim \text{Coker } j_n &\hookrightarrow \text{Coker } \tilde{\alpha}_j \longrightarrow \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, A_\infty)[p^k]. \end{aligned}$$

Dans la suite exacte précédente, le premier terme est fini si $A = C$, trivial si $A = E$.

De plus, $E^1(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)) \simeq \varinjlim \text{Coker } k_n$ et il y a une suite exacte

$$\varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, A_\infty)/p^k \hookrightarrow E^1(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty, \mathbb{Z}_p)) \longrightarrow \varprojlim H^2(\Gamma_n, A_\infty)[p^k].$$

(ii) Noyau et conoyau de α_k sont décrits par

$$\begin{aligned} \text{Ker } \alpha_k &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p} \left(\varprojlim H^2(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p} \left(\varinjlim \text{Coker } k_n, \mathbb{Z}_p \right), \\ \text{Coker } \alpha_k &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p} \left(\varprojlim H^1(\Gamma_n, A_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right), \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p} \left(t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim \text{Coker } k_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right) &\hookrightarrow \text{Coker } \alpha_k \twoheadrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p} \left(\varinjlim \text{Ker } k_n, \mathbb{Z}_p \right). \end{aligned}$$

De plus, il y a une suite exacte

$$\begin{aligned} \varprojlim \mu_{p^\infty}(F_n) &\hookrightarrow E^1(X_\infty) \twoheadrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p} \left(t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim \text{Ker } k_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right) \\ \text{et } \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p} \left(t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim \text{Ker } k_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right) &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p} \left(\varprojlim \text{Coker } j_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right); \\ \text{ce dernier module est trivial si } A &= E. \end{aligned}$$

Démonstration. — 1) vient de 5.23, 1) et 3). Si $\mu_p(F) = 0$, alors 2) (i) est donné par 5.23, 2) (i) et 3) (ii) ; enfin, 2) (ii) est donné par 5.23, 2) (ii) et 3) (iii). Pour traiter le cas $\mu_p(F) \neq 0$, on introduit le système normique des racines de l'unité $\underline{\mathbb{Z}_p}(1) = (\mu_{p^\infty}(F_n))$. Comme $\mu_{p^\infty}(F_\infty)$ est Γ -cohomologiquement trivial, on voit que $C(j_{\underline{\mathbb{Z}_p}(1)})$ et $C(k_{\underline{\mathbb{Z}_p}(1)})$ sont triviaux, si bien qu'il n'y a aucune difficulté à se ramener à l'étude du système normique $A/\underline{\mathbb{Z}_p}(1)$; laquelle est analogue au cas $\mu_p(F) = 0$. □

Si $M \hookrightarrow \Lambda^r$, il est bien connu (et facile à démontrer) que M est libre si, et seulement si, le conoyau est sans \mathbb{Z}_p -torsion. De plus, la \mathbb{Z}_p -torsion du conoyau en question ne dépend pas du plongement choisi, à unique isomorphisme près ; on définit donc ainsi un invariant structurel de M , appelé suggestivement le défaut de liberté du Λ -module M .

COROLLAIRE 6.29. — 1) (i) On a $t_\Lambda \varprojlim E_n = \mathbb{Z}_p(1)$ ou 0 selon que F contient ou non μ_p ; on a également

$$\begin{aligned} t_\Lambda \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p} \left(\varinjlim E_n, \mathbb{Z}_p \right) &\simeq \text{Hom} \left(\varprojlim_n H^2(\Gamma_n, \varinjlim_m E_m), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p} \left(\varinjlim \text{Coker } k_{n,E}, \mathbb{Z}_p \right). \end{aligned}$$

(ii) $f_\Lambda \varprojlim E_n$ est libre et le défaut de liberté de $f_\Lambda \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim E_n, \mathbb{Z}_p)$ est dual à

$$\varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, \varinjlim_m E_m)/p^k \simeq t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim \text{Coker } k_{n,E}.$$

2) (i) On a $t_\Lambda \varprojlim C_n = \mathbb{Z}_p(1)$ ou 0 selon que F contient ou non μ_p ; on a également

$$\begin{aligned} t_\Lambda \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p} \left(\varinjlim C_n, \mathbb{Z}_p \right) &\simeq \text{Hom} \left(\varprojlim_n H^2(\Gamma_n, \varinjlim_m C_m), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p} \left(\varinjlim \text{Coker } k_{n,C}, \mathbb{Z}_p \right). \end{aligned}$$

(ii) Le défaut de liberté du module $f_\Lambda \varprojlim C_n$ est isomorphe à

$$\varprojlim \text{Coker } j_{n,C} \simeq t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim \text{Ker } k_{n,C}$$

et celui de $f_\Lambda \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim C_n, \mathbb{Z}_p)$, dual à

$$\varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, \varinjlim_m C_m) / p^k \simeq t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim \text{Coker } k_{n,C}.$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition qui précède, compte-tenu du fait que le but de $\tilde{\alpha}_j$, comme celui de α_k , est un Λ -module libre, puisqu'obtenu en appliquant E^0 à un Λ -module de type fini. □

Remarque 6.30. — Le 1) (i) apparaît en filigrane dans [14]. La partie 1) (ii) est généralement attribué à [24] ; voir aussi [11] pour une démonstration algébrique de la première partie, dans le contexte de l'étude axiomatique de systèmes normiques particuliers.

La première partie de 2) (iii) est due à [3]. Le module $\varprojlim \text{Coker } j_{n,C}$ a fait l'objet de nombreuses études, cf. [2] pour quelques références.

PROPOSITION 6.31. — (i) Il y a un diagramme commutatif naturel, dans lequel la colonne centrale est exacte :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \varinjlim \text{Ker } k_{n,E} & \xrightarrow{\simeq} & \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, \varinjlim_m E_m)[p^k] \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \varprojlim I_n & & \\
 & & \downarrow r & & \\
 \varprojlim \text{Ker } j_{n,\mathcal{C}\ell} & \hookrightarrow & \text{Ker } \alpha_{j,\mathcal{C}\ell} & \twoheadrightarrow & \varprojlim_{n,k} \text{Coker } j_{n,\mathcal{C}\ell}[p^k] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, \varinjlim_m E_m) / p^k & \hookrightarrow & \varinjlim \text{Coker } k_{n,E} & \twoheadrightarrow & \varprojlim_{n,k} H^2(\Gamma_n, \varinjlim_m E_m)[p^k] \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \varprojlim \text{Br}'_n & & \\
 & & \downarrow & & \\
 \varprojlim_{n,k} \text{Coker } j_{n,\mathcal{C}\ell} / p^k & \hookrightarrow & \varinjlim \text{Ker } k_{n,\mathcal{C}\ell} & \twoheadrightarrow & \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, \varinjlim \mathcal{C}\ell_m)[p^k] \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 0 & &
 \end{array}$$

Dans ce diagramme, $r : \varprojlim I_n \rightarrow \text{Ker } \alpha_{j,\mathcal{C}\ell} = (\varprojlim \mathcal{C}\ell_m)^\delta$ est induite par la flèche naturelle $I_n \rightarrow \mathcal{C}\ell_n$.

(ii) Il y a une suite exacte naturelle

$$\begin{aligned} \varprojlim \text{Ker } j_{n, \mathcal{C}\ell} &\hookrightarrow \varprojlim_n H^1(\Gamma_n, \varinjlim_m E_m) \\ &\longrightarrow (\varprojlim I_n) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow \varprojlim \text{Coker } j_{n, \mathcal{C}\ell} \longrightarrow \varprojlim_n H^2(\Gamma_n, \varinjlim_m E_m) \\ &\longrightarrow (\varprojlim \text{Br}'_n) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow \varprojlim H^1(\Gamma_n, \varinjlim \mathcal{C}\ell_m). \end{aligned}$$

Démonstration. — Le moyen le plus rapide serait l'utilisation du triangle distingué sous-jacent à la suite exacte de localisation 6.20. Comme il n'est pas disponible directement, on en fabrique un à la main :

LEMME 6.32. — On peut trouver $Z, Z' \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$ et un triangle distingué de $D^b(\Gamma\mathcal{C})_{\text{tf}}$:

$$T = (Z \rightarrow R\Gamma_S \rightarrow Z' \rightarrow Z[1])$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Z et Z' sont acycliques en degrés $\neq 1, 2$ et la suite exacte longue de cohomologie de T s'identifie à 6.20 tronquée à l'avant-dernier terme :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^1(Z) & \hookrightarrow & H^1(R\Gamma_S) & \longrightarrow & H^1(Z') & \longrightarrow & H^2(Z) & \longrightarrow & H^2(R\Gamma_S) & \twoheadrightarrow & H^2(Z') \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\ E & \hookrightarrow & H^1_S & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \mathcal{C}\ell & \longrightarrow & H^2_S & \longrightarrow & \text{Br}' \end{array}$$

(ii) $\Delta_j(Z') \simeq X_\infty(Z')[1]$.

(iii) $\Delta_j(Z) \simeq \Delta_j(Z')[-1]$.

Démonstration. — (i) L'existence de Z, Z' et T vérifiant (i) relève du lemme 5.19. Les propriétés (ii) et (iii) se déduisent de (i). En effet :

(ii) Puisque $\tau_{\leq 1} Z' = I$ et $\tau_{\geq 2} Z' = \text{Br}'$ se stabilisent via la corestriction, on voit tout de suite que la cohomologie de $A_\infty(Z')$ est uniquement p -divisible. D'où, automatiquement, la trivialité de

$$X_\infty^*(Z') \simeq \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A_\infty(Z'), \mathbb{Z}_p),$$

si bien que le triangle distingué $\alpha_j(Z')$ se réduit à l'isomorphisme de l'énoncé.

(iii) est obtenu en appliquant Δ_j à T , puisque $\Delta_j(R\Gamma_S) = 0$ (6.11 (iii)). □

Retour à la preuve de 6.31. — Tronquer Z et appliquer le foncteur Δ_j donne un triangle distingué

$$\Delta_j(E[-1]) \longrightarrow \Delta_j(Z) \longrightarrow \Delta_j(\mathcal{C}\ell[-2]) \longrightarrow \Delta_j(E)$$

dans lequel le premier (resp. troisième) sommet est *a priori* (4.11) acyclique hors de $[0, 2]$ (resp. $[1, 3]$) et le second, hors de $[1, 2]$ (6.32, (ii)). D'où une suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} H^0(\Delta_j(E)) \hookrightarrow H^1(\Delta_j(Z)) \rightarrow H^{-1}(\Delta_j(\mathcal{C}\ell)) \\ \longrightarrow H^1(\Delta_j(E)) \longrightarrow H^2(\Delta_j(Z)) \twoheadrightarrow H^0(\Delta_j(\mathcal{C}\ell)) \end{aligned}$$

dont il reste à vérifier qu'elle donne bien la colonne du diagramme de l'énoncé. La description explicite des second et cinquième termes relève de 6.32. Pour les autres et pour les suites exactes horizontales, on applique 6.25, 2) (ii) et 6.28, 2) (i), compte-tenu de la description suivante de la cohomologie de $\Delta_j(A)$, valable aussi bien pour $A = E$ que pour $A = \mathcal{C}\ell$ (5.22, 2) (ii)) :

- ▷ $H^{-1}(\Delta_j(A)) \simeq \text{Ker } \alpha_j$ et $H^0(\Delta_j(A)) \simeq \text{Coker } \alpha_j \simeq \varinjlim \text{Ker } k_n$.
- ▷ $H^1(\Delta_k) \simeq \varinjlim \text{Coker } k_n$.

Vérifier que la flèche r est bien induite par $I_n \rightarrow \mathcal{C}\ell_n$ ne pose pas de difficulté particulière, si l'on observe l'effet du morphisme fonctoriel $\Delta_j[-1] \rightarrow X_\infty$ (début du triangle α_j) sur la flèche composée suivante (cf. 6.32) :

$$I \simeq (\tau_{\leq 1} Z')[1] \rightarrow Z'[1] \rightarrow Z[2] \rightarrow (\tau_{\geq 2} Z)[2] \simeq \mathcal{C}\ell.$$

(ii) La suite exacte de l'énoncé est obtenue en appliquant le foncteur $\varinjlim C(j_{(-)})$ au triangle T de 6.32, compte-tenu de 5.22, 2) (iii) et du fait que $C(k_A) = (H_1(\Gamma_n, X_\infty))[2] \simeq (X_\infty^{\Gamma_n})[2]$, pour $A = I$ ou Br' . □

Remarque 6.33. — Une suite exacte à sept termes, similaire à celle de 6.31, 2) apparaît dans la littérature en plusieurs endroits (e.g. [14] et ref.). Cette suite exacte présente plusieurs intérêts :

1) Comme on sait que les limites en question se stabilisent, on obtient une information sur la structure des groupes $H^q(\Gamma_n, \varinjlim E_m)$, pour $q = 1, 2$ et $n \gg 0$. C'est l'objet de [14].

2) On voit se produire le pendant algébrique du phénomène des zéros triviaux : comme $H^q(\Gamma_n, \varinjlim E_m)$ est fixé par la conjugaison complexe, on obtient dans la partie imaginaire $(\varprojlim I_n \otimes \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p)^- \simeq \varprojlim (\text{Coker } j_{n, \mathcal{C}\ell})^-$. La conjecture de Leopoldt prédisant par ailleurs la finitude de $(\text{Coker } j_{n, \mathcal{C}\ell})^+$ (cf. 6.23), on voit que $\text{rg}_{\mathbb{Z}_p} (\varinjlim \mathcal{C}\ell_m)^\delta = \text{corg}_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim (\text{Coker } j_{n, \mathcal{C}\ell})$ (cf. 6.25, 1) (ii)) coïncide avec le nombre de p -places qui se décomposent dans F_∞ / F_∞^+ .

COROLLAIRE 6.34. — (i) $t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim \text{Coker } k_{n, E} \simeq (\varprojlim \mathcal{C}\ell'_n)^0$.

Démonstration. — Cela découle de la description explicite de la flèche r dans 6.31 (i). □

COROLLAIRE 6.35 (utilise la conjecture de Leopoldt, cf. 6.23, (ii)). — Il y a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
 \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, C_\infty)[p^k] & \hookrightarrow & \varprojlim_{n,k} H^1(\Gamma_n, E_\infty)[p^k] & \longrightarrow & \varprojlim \text{Cok } j_{n,B} \\
 & & \uparrow \wr & & \downarrow \wr \\
 (\varprojlim B_m)^0 & \hookrightarrow & \varinjlim \text{Ker } k_{n,C} & \longrightarrow & \varinjlim \text{Ker } k_{n,E} \longrightarrow \varinjlim \text{Ker } k_{n,B} \\
 \\
 \longrightarrow & (\varprojlim_n H^1(\Gamma_n, C_\infty))_0 & \longrightarrow & (\varprojlim_n H^1(\Gamma_n, E_\infty))_0 & \longrightarrow & (\varprojlim_n H^1(\Gamma_n, \varinjlim B_m))_0 \\
 & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 \longrightarrow & t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim \text{Coker } k_{n,C} & \longrightarrow & t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim \text{Coker } k_{n,E} & \longrightarrow & \varinjlim \text{Coker } k_n \\
 \\
 \longrightarrow & \varprojlim H^2(\Gamma_n, C_\infty) & \longrightarrow & \varprojlim H^2(\Gamma_n, E_\infty) & & \\
 & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\
 \longrightarrow & \varinjlim \text{Cok } k_{n,C} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \varinjlim \text{Cok } k_{n,E} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & &
 \end{array}$$

La première flèche verticale est surjective et son noyau vaut $\varinjlim \text{Coker } j_{n,C}$.

Démonstration. — On applique 5.25, 2) au triangle distingué tautologique $C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C[1]$ avec $q = 1$. L'hypothèse de 2) (i) est satisfaite grâce à Leopoldt : en effet $\varprojlim H^1(C_{j_B}) = \varprojlim \text{Coker } j_n$ se stabilise et $(B_\infty)^{\Gamma_n}$ est fini, par 6.26.

Dans l'énoncé, on a remplacé $H^0(\Delta_j(C)) = \text{Coker } \alpha_j = \text{Coker } \tilde{\alpha}_j$ par son quotient sans torsion (cf. 6.28, 2) (i)), c'est pourquoi la première flèche verticale n'est pas injective *a priori*. □

Remarque 6.36. — Ce résultat recouvre à la fois les théorèmes 3.7 (descente) et 4.5 (codescente) de [33], et montre que l'hypothèse concernant la nullité de $\varprojlim \text{Coker } j_{n,C} - (DG)$ dans la terminologie de *loc. cit.* — ne joue aucun rôle dans cette étude.

7. Appendice : construction explicite du complexe dualisant

Dans le cas d'un groupe Γ de dimension cohomologique finie pour lequel $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ est noethérien, on construit le complexe dualisant pour la cohomologie galoisienne de la catégorie ${}_\Gamma\mathcal{C}_{\text{tor}}$ des Γ -modules discrets de p -torsion. La construction, basée sur les propriétés des foncteurs d'induction

(cf. 2.3) d'une part, et le rapport entre cohomologie galoisienne et foncteurs Ext d'autre part, présente les avantages suivants :

▷ On obtient une formule explicite pour le complexe dualisant et pas seulement pour sa cohomologie.

▷ Au lieu d'une collection d'isomorphismes fonctoriels dans $D^b(\text{Ab})$, exprimant que les foncteurs $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H^q(\Gamma_n, -), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) : \Gamma\mathcal{C}_{\text{tor}} \rightarrow \text{Ab}$ sont tous représentables par le même objet de $D(\Gamma) \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$, on établit un isomorphisme fonctoriel dans $D^b(\Gamma\mathcal{C})$ (ce qui est plus précis), exprimant la « représentabilité » du foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{R}\Gamma(-), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ (cf. 7.3 et 7.4 pour l'énoncé exact). Cette précision est utile en vue des passages à la limites.

Comme toujours, on regarde $\Gamma\mathcal{C}$ comme une sous-catégorie pleine de $\Lambda\mathcal{C}$. Lorsqu'on écrit RHom_Λ ou $\text{R}\underline{\text{Hom}}$, il s'agit toujours des foncteurs obtenus par dérivation à droite sur $\Lambda\mathcal{C}$ (et non sur $\Gamma\mathcal{C}$).

LEMME 7.1. — (i) Soit B un objet injectif de $\Gamma\mathcal{C}$. Si B est de \mathbb{Z}_p -torsion, alors le foncteur $\text{Hom}_\Lambda(-, B) : \Lambda\mathcal{C}_{\text{tf}} \rightarrow \mathbb{Z}_p\mathcal{C}$ est exact.

(ii) Soit $B \in \text{Kom}^+(\Lambda\mathcal{C})$ un complexe dont les objets vérifient (i). Alors les flèches canoniques de $D^+(\mathbb{Z}_p\mathcal{C})$ (resp. $D^+(\Gamma\mathcal{C})$ ou $D^+(\underline{\mathcal{C}}_\Gamma)$) :

$$\text{Hom}_\Lambda(A, B) \longrightarrow \text{RHom}_\Lambda(A, B) \quad (\text{resp. } \underline{\text{Hom}}(A, B) \longrightarrow \text{R}\underline{\text{Hom}}(A, B))$$

sont des isomorphismes pour tout $A \in \text{Kom}^-(\Lambda\mathcal{C})_{\text{tf}}$.

Démonstration. — (i) La sous-catégorie de $\Gamma\mathcal{C}$ formée des objets de \mathbb{Z}_p -torsion s'identifie à celle des Λ -modules topologiques discrets et $\Lambda\mathcal{C}_{\text{tf}}$ à une sous-catégorie pleine des Λ -modules topologiques compacts. Le résultat provient alors de [4], lemma 2.2.

(ii) découle facilement de (i). □

On utilise maintenant les foncteurs d'induction (normique et discrète) définis dans les préliminaires (cf. 2.1).

LEMME 7.2. — Pour $(A, B, C) \in \Gamma\mathcal{C} \times \mathbb{Z}_p\mathcal{C} \times \Lambda\mathcal{C}$, il y a dans $\underline{\Gamma}\mathcal{C}$ un morphisme trifonctoriel

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, B) \otimes C \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(A, \text{Coind}_\Gamma(B) \otimes_\Lambda C)$$

qui est un isomorphisme si C est projectif de type fini.

Démonstration. — On a une série d'isomorphismes, expliqués ci-dessous :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, B) \otimes C &\xrightarrow[\simeq]{(1)} \underline{\text{Ind}}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, B)) \otimes_{\Lambda} C \\ &\xrightarrow[\simeq]{(2)} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\text{Coind}}(A), B) \otimes_{\Lambda} C \\ &\xrightarrow[\simeq]{(3)} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\text{Ind}}(A), B) \otimes_{\Lambda} C \\ &\xrightarrow[\simeq]{(4)} \text{Hom}_{\Lambda}(\underline{\text{Ind}}(A), \text{Coind}_{\Gamma}(B)) \otimes_{\Lambda} C. \end{aligned}$$

(1) est simplement l'isomorphisme d'induction pour $\underline{\text{Ind}} : \mathcal{C}_{\Lambda} \rightarrow \underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\Lambda}$ (noter que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, B)$ est un Λ -module à droite, via A).

(2) provient de l'isomorphisme d'évaluation suivant, dans $\underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\Lambda}$:

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, B) \otimes \Lambda \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\text{Hom}}(\Lambda, A), B).$$

(3) résulte de 2.4, qui identifie les foncteurs $\underline{\text{Ind}}$ et $\underline{\text{Coind}} : {}_{\Lambda}\mathcal{C} \rightarrow {}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\Gamma}$.

(4) Par hypothèse, Γ agit discrètement sur A . Comme Γ_n est distingué, on voit tout de suite que l'action à gauche de $\Gamma \subset \Lambda$ sur $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} A$ via le facteur Λ est discrète aussi. Munissant B d'une action triviale de Γ , on obtient alors un isomorphisme d'induction discrète

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} A, B) \simeq \text{Hom}_{\Lambda}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} A, \text{Coind}_{\Gamma} B).$$

Celui-ci a lieu dans ${}_{G_n}\mathcal{C}_{\Lambda}$, si l'on fait agir G_n à gauche via la conjugaison à droite sur $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]} A$ et Λ à droite via le facteur Λ (resp. $\text{Coind}_{\Gamma} B$) sur le premier (resp. second) terme (dans le contexte du paragraphe intitulé « induction discrète » dans les préliminaires, cette action de Λ doit être interprétée comme une action de Γ par conjugaison). D'où un isomorphisme dans $\underline{\Gamma}\mathcal{C}_{\Lambda}$, en faisant varier n ; (4) suit.

Par ailleurs, il y a dans $\underline{\Gamma}\mathcal{C}$ un isomorphisme d'induction, avec cette fois $\underline{\text{Ind}} : {}_{\Lambda}\mathcal{C} \rightarrow {}_{\Lambda}\mathcal{C}_{\Gamma}$:

$$\underline{\text{Hom}}(A, \text{Coind}_{\Gamma}(B) \otimes_{\Lambda} C) \simeq \text{Hom}_{\Lambda}(\underline{\text{Ind}}(A), \text{Coind}_{\Gamma}(B) \otimes_{\Lambda} C).$$

La flèche de l'énoncé provient alors finalement de la flèche naturelle de multiplication :

$$\text{Hom}_{\Lambda}(\underline{\text{Ind}}(A), \text{Coind}_{\Gamma}(B)) \otimes_{\Lambda} C \longrightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(\underline{\text{Ind}}(A), \text{Coind}_{\Gamma}(B) \otimes_{\Lambda} C).$$

C'est visiblement un isomorphisme lorsque A est projectif de type fini. \square

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème de dualité.

THÉOREME 7.3 (complexe dualisant). — *Soit*

$$D(\Gamma) := \varinjlim \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}_p \in D^b(\Gamma\mathcal{C}).$$

Si $A \in D^b(\Gamma\mathcal{C})$, il y a dans $D^b(\Gamma\mathcal{C})$ un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p}^L \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}(A, D(\Gamma)).$$

Démonstration. — de 7.3 : Soit $P \rightarrow \mathbb{Z}_p$ une résolution parfaite de \mathbb{Z}_p dans ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$. D’après 7.2, on a dans $\mathrm{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C})$ un isomorphisme fonctoriel, pour $A \in \mathrm{Kom}^-(\Gamma\mathcal{C})$ (avec les conventions de signes adéquates pour la formation des complexes totaux...) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes P \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathrm{Coind}_{\Gamma}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\Lambda} P).$$

Fixant un quasi-isomorphisme $\mathrm{Coind}_{\Gamma}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\Lambda} P \rightarrow I$ où $I \in \mathrm{Kom}^+(\Lambda\mathcal{C})$ est à objets injectifs, on obtient alors un morphisme composé, fonctoriel dans $\mathrm{Kom}^+(\Gamma\mathcal{C})$:

$$(7.1) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes P \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathrm{Coind}_{\Gamma}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\Lambda} P) \xrightarrow{?} \underline{\mathrm{Hom}}(A, I).$$

Comme $\mathrm{Coind}_{\Gamma}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\Lambda} P = \varinjlim \mathrm{Coind}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\Lambda} P \simeq \varinjlim \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes P$ représente $D(\Gamma)$ et que I en est une résolution injective dans ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$, on voit que le but de (7.1) ci-dessus représente $\mathrm{RHom}(A, D(\Gamma))$. Reste donc à montrer que la flèche marquée « ? » est un quasi-isomorphisme.

Puisque $\mathrm{Coind}_{\Gamma}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ est un injectif de ${}_{\Gamma}\mathcal{C}$, de \mathbb{Z}_p -torsion, c’est que les objets de $B := \mathrm{Coind}_{\Gamma}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes_{\Lambda} P$ vérifient les conditions de 7.1, (i). Si de plus on suppose A de type fini, 7.1, (ii) affirme que « ? » est un quasi-isomorphisme et cela termine la preuve dans ce cas. Le cas général se ramène au cas où A est de type fini, par un argument de passage à la limite. Détaillons : soient $(A_i) \in \mathrm{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}^I) = \mathrm{Kom}^b(\Gamma\mathcal{C}_{\mathrm{tf}})^I$ un système inductif de complexes de type fini tel que $A = \varinjlim A_i$ et $\mathrm{Coff}^*((A_i)) \rightarrow (A_i)$ la résolution coflasque envisagée dans la preuve de 2.10, 4) (notons que $\mathrm{Coff}^*((A_i)) \in \mathrm{Kom}^-(\Gamma\mathcal{C}^I)$). Par functorialité la flèche (7.1) donne un diagramme commutatif de $\mathrm{Kom}^+(\Gamma\mathcal{C}^{I^{\circ}})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}((A_i), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes P & \xrightarrow{(1)} & \underline{\mathrm{Hom}}((A_i), I) \\ (2) \downarrow & & \downarrow (3) \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Coff}^*((A_i)), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes P & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Coff}^*((A_i)), I) \\ (4) \downarrow & & \downarrow (5) \\ \mathrm{Fl}^*((\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A_i), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes P) & \xrightarrow{(6)} & \mathrm{Fl}^*(\underline{\mathrm{Hom}}(A_i, I)). \end{array}$$

Dans celui-ci :

▷ La flèche (1) est un quasi-isomorphisme d’après ce qu’on a déjà démontré, puisque les A_i sont de type fini.

▷ Les flèches (2) et (3) sont des quasi-isomorphismes, puisque les foncteurs $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes P$ et $\underline{\text{Hom}}(-, I)$ sont exacts.

▷ Les flèches (4) et (5) sont des isomorphismes, puisque les deux foncteurs précédents transforment sommes en produits.

En conséquence, la flèche (6) est elle aussi un qis. Il ne reste plus qu'à appliquer \varprojlim_I . On obtient alors un diagramme semblable dans lequel :

▷ les flèches (2) et (3) sont des quasi-isomorphismes, car les foncteurs

$$\varprojlim \circ \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes P \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(-, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes P \circ \varprojlim$$

$$\text{et } \varprojlim \circ \underline{\text{Hom}}(-, I) \simeq \underline{\text{Hom}}(-, I) \circ \varprojlim$$

▷ les flèches (4) et (5) sont toujours des isomorphismes ;

▷ la flèche (6) est un quasi-isomorphisme, car les objets des deux complexes inférieurs sont acycliques pour \varprojlim .

En conséquence, la flèche $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes P \rightarrow \underline{\text{Hom}}(A, I)$, déduite de (1) par \varprojlim_I , est elle aussi un quasi-isomorphisme, et cela termine la preuve dans le cas général. □

Remarque 7.4. — (i) À l'aide du lemme 3.1, on peut réécrire la formule définissant $D(\Gamma)$ de la manière suivante :

$$D(\Gamma) \simeq \varinjlim_{n,k} \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{R}\underline{\Gamma}(\mathbb{Z}/p^k), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

On retrouve la formule de [37], A.2 prop. 3.1, 5 c), en prenant la cohomologie.

(ii) Encore à l'aide du lemme 3.1, on voit que $D(\Gamma)$ est effectivement le complexe dualisant pour la catégorie des Γ -modules de discrets de p -torsion, au sens de [37], annexe de Verdier. Mieux : pour $A \in {}_{\Gamma}\mathcal{C}_{\text{tor}}$ il y a un isomorphisme fonctoriel dans $D^b({}_{\Gamma}\mathcal{C})$ (ou dans $D^b(\mathcal{C}_{\Gamma})$, en inversant l'action, ce qu'on n'a pas fait jusqu'ici pour des raisons d'écritures liées au foncteurs d'induction) :

$$\text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\text{R}\underline{\Gamma}(A), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq \underline{\text{RHom}}(A, D(\Gamma)).$$

(iii) Si $A \in D^b({}_{\Gamma}\mathcal{C})$, alors 7.3 appliqué à $A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ donne, dans $D^b({}_{\Gamma}\mathcal{C})$ (ou $D^b(\mathcal{C}_{\Gamma})$) :

$$\begin{aligned} \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A, \mathbb{Z}_p) \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p &\simeq \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \\ &\xrightarrow[\sim]{7.3} \underline{\text{RHom}}(A \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, D(\Gamma)) \\ &\simeq \underline{\text{RHom}}(A, \text{RHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, D(\Gamma))) \end{aligned}$$

le premier et troisième isomorphismes étant obtenus par adjonction.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-R. BELLIARD, « Global Units Modulo Circular Units : descent without Iwasawa's Main Conjecture », à paraître.
- [2] J.-R. BELLIARD & T. NGUYEN QUANG DO, « On modified circular units and annihilation of real classes », *Nagoya Math. J.* **177** (2005), p. 77-115.
- [3] J.-R. BELLIARD, « Sous-modules d'unités en théorie d'Iwasawa », in *Théorie des nombres, Années 1998/2001*, Publ. Math. UFR Sci. Tech. Besançon, Univ. Franche-Comté, Besançon, 2002, p. 12.
- [4] A. BRUMER, « Pseudocompact algebras, profinite groups and class formations », *J. Algebra* **4** (1966), p. 442-470.
- [5] P. DELIGNE, « Cohomologie à supports propres », SGA 4, 3, exp. XVII.
- [6] R. GREENBERG, « On a certain ℓ -adic representation », *Invent. Math.* **21** (1973), p. 117-124.
- [7] ———, « On the Iwasawa invariants of totally real number fields », *Amer. J. Math.* **98** (1976), p. 263-284.
- [8] ———, « On the structure of certain Galois groups », *Invent. Math.* **47** (1978), p. 85-99.
- [9] ———, « Iwasawa theory, past and present », *Adv. Stud. Pure Math.* **30** (2001), p. 335-385.
- [10] ———, « On the structure of certain Galois cohomology groups », *Doc. Math.* (2006), p. 335-391, Extra Volume J. Coates.
- [11] C. GREITHER, « Sur les normes universelles dans les Z_p -extensions », *J. Th. Nb. Bordeaux* **6** (1994), p. 205-220.
- [12] J. A. HILLMAN, *Algebraic invariants of links*, World Scientific, 2002.
- [13] K. IWASAWA, « On Z_ℓ -extensions of algebraic number fields », *Ann. of Math.* **98** (1973), p. 246-326.
- [14] ———, « On cohomology groups of units for Z_p -extensions », *Amer. J. Math.* **105** (1983), p. 189-200.
- [15] U. JANNSEN, « Continuous étale Cohomology », *Math. Ann.* **280** (1988), p. 207-245.
- [16] ———, « Iwasawa Modules up to Isomorphism », *Adv. Stud. Pure Math.* **17** (1989), p. 171-207.
- [17] ———, « A spectral sequence for Iwasawa adjoints », non publié, 11 p., 1994/2003.
- [18] C. U. JENSEN, *Les foncteurs dérivés de \varprojlim et leurs applications en théorie des modules*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 254, Springer-Verlag, Berlin, 1972, iv+103 pages.
- [19] M. KASHIWARA & P. SCHAPIRA, *Categories and sheaves*, Springer, 2005.
- [20] K. KATO, « Universal norms of p -units in some non-commutative Galois extensions », *Doc. Math.* (2006), p. 551-565, Extra Volume J. Coates.
- [21] V. G. KHALIN & A. V. YAKOVLEV, « Universal norms in Γ -extensions », *J. Math. Sci.* **20** (1982), p. 2692-2696.
- [22] M. KOLSTER, « An idelic approach to the wild kernel », *Invent. Math.* **103** (1991), p. 9-24.
- [23] R. KUCERA & J. NEKOVÁŘ, « Cyclotomic units in Z_p -extensions », *J. Algebra* **171** (1995), p. 457-472.
- [24] L. V. KUZ'MIN, « The Tate module for algebraic number fields », *Math. USSR Izvestija* **6** (1972), p. 263-321.

- [25] A. LANNUZEL & T. NGUYEN QUANG DO, « Conjectures de Greenberg et extensions pro- p -libres d'un corps de nombres », *Manuscripta Math.* **102** (2000), p. 187-209.
- [26] M. LAZARD, « Groupes analytiques p -adiques », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **26** (1965), p. 5-219.
- [27] M. LE FLOC'H, A. MOVAHHEDI & T. NGUYEN QUANG DO, « On Capitulation co-kernels in Iwasawa theory », *Amer. J. Math.* **127** (2005), p. 851-877.
- [28] W. MCCALLUM, « Greenberg's conjecture and units in multiple Z_p -extensions », *Amer. J. Math.* **123** (2001), p. 909-930.
- [29] A. S. MERKUR'EV, « A seven-term sequence in the Galois theory of schemes », *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya* **109(151)** (1979), n° 3, p. 395-409, 479.
- [30] J. S. MILNE, *Arithmetic duality theorems*, second éd., BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006, viii+339 pages.
- [31] J. NEKOVÁŘ, « Selmer complexes », *Astérisque* **310** (2006), p. 559p.
- [32] T. NGUYEN QUANG DO, « Formation de classes et modules d'Iwasawa », *Springer Lect. Notes* **1068** (1984), p. 167-185.
- [33] T. NGUYEN QUANG DO & M. LESCOP, « Iwasawa descent and co-descent for units modulo circular units », *Pure Appl. Math. Quarterly* **2** (2006), p. 199-230 (appendice de J.-R. Belliard).
- [34] T. NGUYEN QUANG DO & D. VAUCLAIR, « K_2 et conjectures de Greenberg dans les Z_p -extensions multiples », *J. Th. Nombres Bordeaux* **17** (2005), p. 693-712.
- [35] J.-E. ROOS, « Sur les foncteurs dérivés de \varprojlim . Applications », *C. R. Acad. Sc. Paris* **252** (1961), p. 3702-3704.
- [36] J.-P. SERRE, *Algèbre locale, multiplicités*, Springer, 1965.
- [37] ———, *Cohomologie Galoisienne*, Springer, 1973/1997.
- [38] W. SINNOTT, « On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field », *Invent. Math.* **62** (1980), p. 181-234.
- [39] J. TATE, « Relations between K_2 and Galois cohomology », *Invent. Math.* **36** (1976), p. 257-274.
- [40] T. TSUJI, « Semi-local units modulo cyclotomic units », *J. Number Theory* **78** (1999), p. 1-26.
- [41] D. VAUCLAIR, « Cup produit, noyaux de capitulation étales et conjecture de Greenberg généralisée », *K-theory* **36** (2005), p. 223-244.
- [42] ———, « Sur les normes universelles et la structure de certains modules d'Iwasawa », non publié, 53 p., 2006.
- [43] ———, « Noyaux de Tate et capitulation », *J. Number Th.* **128** (2008), p. 619-638.

Manuscrit reçu le 10 avril 2008,
révisé le 6 août 2008,
accepté le 19 septembre 2008.

David VAUCLAIR
Université de Caen
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Campus 2
14032 Caen Cedex (France)
vaclair@math.unicaen.fr