ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Michel VAQUIÉ

Extensions de valuation et polygone de Newton

Tome 58, nº 7 (2008), p. 2503-2541.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2008__58_7_2503_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
58, 7 (2008) 2503-2541

EXTENSIONS DE VALUATION ET POLYGONE DE NEWTON

par Michel VAQUIÉ

RÉSUMÉ. — Soient (K, ν) un corps valué et L est une extension monogène finie de K définie par $L = K[x]/(P)$, alors toute valuation de L qui prolonge ν définit une pseudo-valuation ζ de $K[x]$ de noyau l'idéal (P). Nous savons associer à ζ une famille de valuations de $K[x]$, appelée famille admissible, construite de façon explicite à partir de valuations augmentées et de valuations augmentées limites.

Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une valuation μ de $K[x]$ appartienne à la famille admissible associée à une pseudo-valuation ζ correspondant à une valuation de L, condition ne faisant pas intervenir ζ mais uniquement le polynôme P. Nous pouvons ainsi déterminer toutes les valuations de L qui prolongent la valuation ν de K. Pour cela nous définissons le polygone de Newton associé à P, à un polynôme ϕ et à une valuation μ, à partir du développement de P selon les puissances de ϕ.

ABSTRACT. — Let (K, ν) be a valued field and L a finite cyclic extension of K defined by $L = K[x]/(P)$, then any valuation of L which extends ν defines a pseudo-valuation ζ on $K[x]$ whose kernel is the principal ideal (P). We know how to associate to ζ a family of valuations on $K[x]$, called an admissible family, which is explicitely constructed by augmented valuations and limit augmented valuations.

We give a necessary and sufficient condition for a valuation of $K[x]$ to belong to an admissible family associated to a pseudo-valuation ζ which corresponds to a valuation of L, this condition depends only on the polynomial P. On the way we can determine all the valuations of L which extend the valuation ν of K. To give this condition we define the Newton polygon associated to P, to a polynomial ϕ and to a valuation μ of $K[x]$.

Introduction

Soit K un corps muni d'une valuation ν et soit L un extension algébrique finie monogène de K, $L = K(\theta)$. Nous voulons déterminer toutes les valuations μ de L qui prolongent la valuation ν, c'est-à-dire que nous voulons

Mots-clés : valuation, extension, polygone de Newton.
Classification math. : 13A18, 12J10, 14E15.

déterminer toutes les valuations μ de L dont la restriction à K est égale à ν. Si nous appelons P le polynôme minimal de θ sur K, le corps L est isomorphe au quotient de l'anneau des polynômes $K[x]$ par l'idéal engendré par P, $L = K[x]/(P)$, et toute valuation μ de L correspond alors à une pseudo-valuation ζ de $K[x]$ dont le noyau $\mathcal{S}(\zeta) = \{f \in K[x] \mid \zeta(f) = +\infty\}$ est égal à l'idéal premier (P), cette pseudo-valuation ζ est définie par $\zeta(f) = \mu(f(\theta))$. Déterminer toutes les valuations μ de L qui prolongent ν revient alors à déterminer toutes les pseudo-valuations ζ de $K[x]$ qui prolongent ν et dont le noyau est égal à (P).

À toute valuation ou pseudo-valuation ζ de $K[x]$ qui prolonge ν, nous savons associer une *famille admissible* de valuations de $K[x]$, cette famille est essentiellement unique et nous la notons $\mathcal{A}(\zeta)$. Le problème se ramène alors à determiner toutes les familles admissibles $\mathcal{A}$ de valuations de $K[x]$ correspondant aux pseudo-valuations ζ de noyau égal à (P).

Une famille admissible $\mathcal{A}$ est une famille de valuations ou de pseudo-valuations $\big(\mu_i\big)_{i\in I}$ indexée par un ensemble totalement ordonné I, avec I possédant un plus petit élément 1, vérifiant les propriétés suivantes.

1. Pour tout polynôme f de $K[x]$ la famille $\big(\mu_i(f)\big)_{i\in I}$ est croissante, c'est-à-dire que nous avons l'inégalité $\mu_i(f) \leqslant \mu_{i'}(f)$ pour $i < i'$ dans I.

2. Pour tout polynôme f de $K[x]$ la famille $\big(\mu_i(f)\big)_{i\in I}$ est stationnaire à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe i dans I tel que nous avons l'égalité $\mu_i(f) = \mu_{i'}(f)$ pour tout $i' \geqslant i$. De plus, sitôt que nous avons l'égalité $\mu_i(f) = \mu_{i'}(f)$ pour $i < i'$, nous avons $\mu_i(f) = \mu_{i''}(f)$ pour tout $i'' \geqslant i$.

3. Chaque valuation μ_i de la famille est définie à partir des valuations μ_j pour $j < i$, soit comme *valuation augmentée*, soit comme *valuation augmentée limite*. La première valuation μ_1 de la famille est définie de façon explicite à partir de la valuation ν grâce à un polynôme ϕ_1 de degré 1 et à une valeur γ_1.

Nous renvoyons au paragraphe 1, ou aux articles [8] ou [6] pour la définition précise d'une famille admissible, ainsi que pour les définitions de valuation augmentée et de valuation augmentée limite.

Soit $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i\in I}$ une famille admissible, alors pour tout i appartenant à I, sauf éventuellement pour le dernier élément $\bar{l}$ de I s'il existe, μ_i est une valuation. L'application ζ définie par $\zeta(f) = \operatorname{Supp}\mu_i(f)$, qui est aussi égal à $\mu_i(f)$ pour i suffisamment grand d'après la propriété 2, et qui est égal à $\mu_{\bar{l}}$ si $\bar{l}$ est le dernier élément de I, est une valuation ou une pseudo-valuation de $K[x]$. Nous disons que la famille $\mathcal{A}$ *converge* vers ζ ou qu'elle est la famille admissible *associée* à ζ, et nous la notons $\mathcal{A}(\zeta)$.

Une valuation μ de $K[x]$ appartenant à une famille admissible $\mathcal{A}(\zeta)$ associée à une pseudo-valuation ζ de $K[x]$ de noyau l'idéal (P) est appelée une valuation *approchée* du polynôme P.

Le résultat principal de cet article permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une valuation μ de $K[x]$ soit une valuation approchée du polynôme P, condition qui ne fait intervenir que le polynôme P et ne suppose pas connue la pseudo-valuation ζ.

THÉORÈME 0.1 (*cf.* théorème 2.6). — *La valuation μ de $K[x]$ est une valuation approchée du polynôme P si et seulement si*

1. *P est μ_--divisible par ϕ si μ est la valuation augmentée $\mu = [\mu_- \ ; \ \mu(\phi) = \gamma]$ avec $\mu_- \neq \nu$, et est A-divisible si μ est la valuation augmentée limite $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma\right]$,*
2. *il existe au moins un polynôme-clé ψ pour la valuation μ, avec ψ non μ-équivalent à ϕ, qui μ-divise P.*

De plus, si μ est une valuation approchée de P, nous pouvons déterminer quels sont les *polynômes-clés* ϕ et les valeurs γ pour lesquels la valuation augmentée μ' associée à ϕ et γ, $\mu' = [\mu \ ; \ \mu'(\phi) = \gamma]$, est aussi une valuation approchée de P. De même si nous trouvons une famille pseudo-convergente $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ de valuations approchées de P, nous pouvons déterminer quellles sont les valeurs γ pour lesquelles la valuation augmentée limite associée à un polynôme-clé limite ϕ et à la valeur γ, $\mu' = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma\right]$, est encore une valuation approchée de P.

Comme le critère ne suppose pas connue a priori la pseudo-valuation ζ, et en particulier nous pouvons remarquer qu'il peut exister plusieurs pseudo-valuations ζ telles que la valuation μ appartienne aux familles $\mathcal{A}(\zeta)$, nous pouvons construire *pas à pas* les familles admissibles $\mathcal{A}(\zeta)$ cherchées. Nous trouvons ainsi les familles admissibles associées à toutes les pseudo-valuations ζ de $K[x]$ de noyau (P), c'est-à-dire que nous trouvons toutes les valuations de L qui prolongent la valuation ν.

Pour déterminer les valuations approchées d'un polynôme P de $K[x]$ nous définissons pour toute valuation μ de $K[x]$ et pour tout polynôme ϕ le *polygone de Newton* associé à P, ϕ et μ, que nous notons $\mathcal{PN}(P;\phi;\mu)$. Celui-ci est défini à partir du *développement de P selon les puissances de ϕ*, plus précisément à partir de l'écriture $P = p_m\phi^m + \ldots + p_0$ où les polynômes p_j sont de degré strictement inférieur au degré de ϕ. Pour un polynôme P donné les polynômes ϕ sont les polynômes *μ-irréductibles* qui *μ-divisent* P et les valeurs γ sont obtenues comme les pentes des faces de la *partie principale* $\mathcal{PN}(P;\phi;\mu)^+$ du polygone de Newton associé à P, ϕ et μ.

Nous pouvons voir le polygône de Newton $\mathcal{PN}(P;\phi;\mu)$ comme une généralisation du polygône de Newton associé à une courbe plane. Plus précisément soit $f(x,y)$ est un polynôme dans $k[x,y]$ définissant une courbe plane et considérons f comme un polynôme P de $K[x]$ avec $K = k(y)$, alors le polygone de Newton associé à f est essentiellement identique au polygone de Newton $\mathcal{PN}(P;\phi;\nu)$ associé à P, à $\phi = x$ et à la valuation y-adique, $\nu = \nu_y$, de K (*cf.* le paragraphe 4).

1. Polygone de Newton

Nous allons rappeler les résultats concernant les familles admissibles de valuations, nous renvoyons le lecteur aux articles de l'auteur, plus précisément à [8], [6], [7] et [4] pour des définitions précises et pour des résultats plus complets.

Nous considérons un corps K muni d'une valuation ν et nous choisissons un plongement du groupe des valeurs Γ_ν dans un groupe abélien totalement ordonné Γ. Toutes les valeurs γ que nous considèrerons seront alors dans Γ.

Nous appelons $\mathcal{E} = \mathcal{E}(K[x],\nu)$ l'ensemble des valuations ou pseudo-valuations de l'anneau des polynômes $K[x]$ dont la restriction à K est égale à ν, et nous appelons $\mathcal{F} = \mathcal{F}(K[x],\nu)$ l'ensemble des *familles admissibles* de valuations de $K[x]$ appartenant à $\mathcal{E}$.

Nous rappelons qu'une pseudo-valuation ζ d'un anneau R est une application ζ de R à valeurs dans $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \{+\infty\}$, où Γ est un groupe abélien totalement ordonné, vérifiant les propriétés

$$\zeta(fg) = \zeta(f) + \zeta(g) \quad \text{et} \quad \zeta(f+g) \geqslant \inf\bigl(\zeta(f), \zeta(g)\bigr),$$

mais pouvant prendre la valeur $+\infty$ pour des éléments $f \neq 0$. L'ensemble

$$\mathcal{S}(\zeta) \;=\; \{f \in R \mid \zeta(f) = +\infty\}$$

est appelé le *noyau* de la pseudo-valuation ζ, c'est un idéal premier de l'anneau R.

À toute valuation ou pseudo-valuation μ de $\mathcal{E}$ nous pouvons associer une famille *admise* $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}$, que nous notons $\mathcal{A}(\mu)$, nous rappelons que cette famille n'est pas unique mais définie à équivalence près. La famille $\mathcal{A}$ est une famille admissible, c'est-à-dire qu'elle est réunion de familles *admissibles simples* $\mathcal{S}^{(j)}$, pour j parcourant J, avec $J = \{1, \ldots, N\}$ ou $J = \mathcal{N}^*$, chaque famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$étant constituée d'une partie *discrète* $\mathcal{D}^{(j)}$ et d'une partie *pseudo-convergente* ou *continue* $\mathcal{C}^{(j)}$, la dernière famille pseudo-convergente $\mathcal{C}^{(N)}$ pouvant être éventuellement vide.

Nous pouvons écrire la famille $\mathcal{A}$ sous la forme $\mathcal{A} = \big(\mu_l\big)_{l\in I}$, où I est un ensemble totalement ordonné, chaque valuation μ_l étant définie soit comme *valuation augmentée*, soit comme *valuation augmentée limite*. Dans le premier cas nous avons

$$\mu_l \;=\; [\mu_{l'}\ ;\ \mu_l(\phi_l) = \gamma_l],$$

et ϕ_l est un *polynôme-clé* définissant la valuation μ_l à partir de la valuation $\mu_{l'}$ avec $l' < l$, nous remarquons que si l a un unique prédécesseur $l-1$ dans I nous avons $l' = l-1$. Dans le deuxième cas nous avons

$$\mu_l \;=\; \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu_l(\phi_l) = \gamma_l\ \big],$$

et ϕ_l est un *polynôme-clé limite* définissant la valuation μ_l à partir de la famille pseudo-convergente $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$.

Nous notons respectivement $\big(\phi_l\big)_{l\in I}$ et $\big(\gamma_l\big)_{l\in I}$ les familles de polynômes et de valeurs associées à la famille de valuations $\mathcal{A}$. Nous disons que la famille $\mathcal{A}$ est *complète* si l'ensemble I possède un plus grand élément $\bar{l}$, dans ce cas la valuation ou la pseudo-valuation μ est la valuation $\mu_{\bar{l}}$, sinon nous disons que la famille $\mathcal{A}$ est *ouverte*. Dans le cas où l'ensemble I possède un plus grand élément $\bar{l}$, nous définissons I^* comme I privé de $\bar{l}$, sinon nous posons $I^* = I$, et nous définissons la sous-famille $\mathcal{A}^* = \big(\mu_l\big)_{l\in I^*}$.

La première valuation μ_1 de la famille $\mathcal{A}$ est obtenue à partir de la valuation ν de K grâce à un polynôme ϕ_1 unitaire de degré 1 et à une valeur γ_1. Nous considèrerons parfois que la valuation $\nu = \mu_0$ appartient à la famille $\mathcal{A}$ et par abus de notation nous considèrerons que 0 est le plus petit élément de l'ensemble I. La valuation μ_1 est ainsi considérée comme une valuation augmentée, définie par le polynôme ϕ_1, et nous la notons encore

$$\mu_1 \;=\; [\nu\ ;\ \mu_1(\phi_1) = \gamma_1].$$

Comme le polynôme ϕ_1 est de degré un, tout polynôme f de $K[x]$ s'écrit sous la forme

$$f \;=\; a_m\phi^m + \ldots + a_1\phi + a_0,$$

avec a_j appartenant au corps K et la valuation $\mu_1(f)$ est définie par

$$\mu_1(f) = \mathrm{Inf}(\nu(a_j) + j\gamma_1,\ 0 \leqslant j \leqslant m).$$

Nous allons rappeler quelques définitions et propriétes concernant les valuations de l'anneau des polynômes $K[x]$ (*cf.* [1], [2], [8], [4]).

Nous pouvons d'abord déduire de la division euclidienne dans l'anneau des polynômes $K[x]$ la définition suivante. Pour tout couple de polynômes f et ϕ dans $K[x]$ nous définissons le *développement de f selon les puissances de ϕ* par

$$f \;=\; f_m\phi^m + \ldots + f_1\phi + f_0,$$

où les polynômes f_j vérifient $\deg f_j < \deg\phi$ pour tout j, $0 \leqslant j \leqslant m$.

Pour toute valuation μ appartenant à $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ nous appelons $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ l'*algèbre graduée* associée à la valuation μ et H_μ l'application naturelle de $K[x]$ dans $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ qui à tout polynôme f associe sa *partie homogène* qui est de degré $\alpha = \mu(f)$.

Nous disons que deux polynômes f et g sont *μ-équivalents* s'ils ont même image dans $\mathrm{gr}_\mu K[x]$, $H_\mu(f) = H_\mu(g)$, c'est-à-dire si nous avons $\mu(f-g) > \mu(f) = \mu(g)$, et nous notons $f \underset{\mu}{\sim} g$.

Nous disons que f est *μ-divisible* par g, ou que g *μ-divise* f si l'image $H_\mu(f)$ est divisible par l'image $H_\mu(g)$ dans $\mathrm{gr}_\mu K[x]$, c'est-à-dire s'il existe un polynôme q dans $K[x]$ tel que nous ayons $\mu(f-qg) > \mu(f) = \mu(qg)$, et nous notons $g \,\underset{\mu}{|}\, f$.

Nous pouvons ainsi définir les notions de *μ-minimalité*, de *μ-irréducibilité* et de *μ-inversibilité* par :

– un polynôme f est *μ-minimal* si et seulement si il vérifie

$$f \,\underset{\mu}{|}\, g \;\Longrightarrow\; \deg g \geqslant \deg f,$$

– un polynôme f est *μ-irréductible* si et seulement si il vérifie

$$f \,\underset{\mu}{|}\, ab \;\Longrightarrow\; f \,\underset{\mu}{|}\, a \quad \text{ou} \quad f \,\underset{\mu}{|}\, b,$$

– un polynôme f est *μ-inversible* si et seulement si il existe g dans $K[x]$ tel que $fg \underset{\mu}{\sim} 1$.

Nous rappelons qu'un polynôme ϕ appartenant à $K[x]$ est appelé un *polynôme-clé* pour la valuation μ s'il vérifie les propriétés suivantes :

– ϕ est μ-minimal,
– ϕ est μ-irréductible,
– ϕ est unitaire.

Alors pour toute valeur γ dans $\bar\Gamma = \Gamma \cup \{+\infty\}$ vérifiant $\gamma > \mu(\phi)$, nous pouvons définir la valuation augmentée μ' associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ, que nous notons $\mu' = [\mu\,;\ \mu'(\phi) = \gamma]$, de la façon suivante. Pour tout f dans $K[x]$ la valuation $\mu'(f)$ est définie par

$$\mu'(f) \;=\; \mathrm{Inf}\big(\mu(f_j) + j\gamma\ ,\ 0 \leqslant j \leqslant m\big),$$

où $f = f_m\phi^m + \ldots + f_1\phi + f_0$ est le développement de f selon les puissances de ϕ.

C'est une valuation de $K[x]$, une pseudo-valuation de noyau l'idéal engendré par ϕ dans la cas $\gamma = +\infty$, vérifiant $\mu(f) \leqslant \mu'(f)$ pour tout f dans $K[x]$.

De même si $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ est une famille pseudo-convergente de valuations, associée à la famille $\left(\phi_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ de polynômes-clés et à la famille $\left(\gamma_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ de valeurs, nous pouvons définir les notions de *A-divisibilité*, ainsi que celles de *A-minimalité*, de *A-irréducibilité* et de *A-inversibilité* de la manière suivante :

– les polynômes f et g sont *A-équivalents* si et seulement si il existe α_0 dans A tel que pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$ dans A, f et g sont μ_α-équivalents, et nous notons $f \underset{A}{\sim} g$,

– le polynôme f est *A-divisible* par le polynôme g, ou le polynôme g *A-divise* le polynôme f, si et seulement si il existe α_0 dans A tel que pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$ dans A, f est μ_α-divisible par g, et nous notons $g \underset{A}{\mid} f$,

– un polynôme f est *A-minimal* si et seulement si il vérifie

$$f \underset{A}{\mid} g \implies \deg g \geqslant \deg f,$$

– un polynôme f est *A-irréductible* si et seulement si il vérifie

$$f \underset{A}{\mid} ab \implies f \underset{A}{\mid} a \quad \text{ou} \quad f \underset{A}{\mid} b,$$

– un polynôme f est *A-inversible* si et seulement si il existe α_0 dans A tel que pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$ dans A, f est μ_α-inversible.

Un polynôme ϕ appartenant à $K[x]$ est appelé un *polynôme-clé limite* pour la famille pseudo-convergente $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ s'il vérifie les propriétés suivantes :

– ϕ est A-minimal,

– ϕ est A-irréductible,

– ϕ est unitaire.

C'est équivalent à dire que le polynôme ϕ est un polynôme unitaire de degré minimal pour lequel la famille $\left(\mu_\alpha(\phi)\right)_{\alpha\in A}$ n'est pas stationnaire. Plus précisément, supposons que la famille $\mathcal{C}$ est *admissible pseudo-convergente*, c'est-à-dire que la famille de polynômes $\left(\phi_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ n'est pas *convergente* (*cf.* [4]). Par définition cela signifie que l'ensemble

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{C}) \;=\; \left\{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f)\ \forall\alpha < \beta \text{ dans } A\right\}$$

est non vide et que tout polynôme f appartenant à cet ensemble vérifie $\deg f > \deg \phi_\alpha$. Nous notons d_A le degré minimal d'un polynôme f appartenant à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, alors l'ensemble $\Phi(\mathcal{C}) = \Phi(A)$ défini par

$$\Phi(\mathcal{C}) = \left\{\phi \in K[x] \mid \mu_\alpha(\phi) < \mu_\beta(\phi)\ \forall\alpha < \beta \text{ dans } A,\ \deg\phi = d_A \text{ et } \phi \text{ unitaire}\right\},$$

est égal à l'ensemble des polynômes-clés limites pour la famille $\mathcal{C}$.

Pour tout polynôme g n'appartenant pas à l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, c'est en particulier le cas pour tout polynôme g avec $\deg g < \deg \phi = d_A$, nous définissons $\mu_A(g)$ par $\mu_A(g) = \sup\ (\mu_\alpha(g), \alpha \in A)$, c'est-à-dire que nous avons l'égalité $\mu_A(g) = \mu_\alpha(g)$ pour α suffisamment grand dans A.

Pour toute valeur γ dans $\bar{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A, nous pouvons définir la valuation augmentée limite μ' associée au polynôme-clé limite ϕ et à la valeur γ, que nous notons $\mu' = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma\right]$, de la façon suivante. Pour tout f dans $K[x]$ la valuation $\mu'(f)$ est définie par

$$\mu'(f) \ = \ \mathrm{Inf}\big(\mu_A(f_j) + j\gamma\ ,\ 0 \leqslant j \leqslant m\big),$$

où $f = f_m\phi^m + \ldots + f_1\phi + f_0$ est le développement de f selon les puissances de ϕ.

C'est une valuation de $K[x]$, une pseudo-valuation de noyau l'idéal engendré par ϕ dans le cas $\gamma = +\infty$, vérifiant $\mu_\alpha(f) \leqslant \mu'(f)$ pour tout α dans A et pour tout polynôme f de $K[x]$.

Nous allons introduire une généralisation de la notion de polygone de Newton (*cf.* [2] § 5 ou [5] § 5).

Soit Γ un groupe ordonné et nous définissons la *droite* D de l'espace $\mathbb{R}\times\Gamma$ comme le sous-ensemble $D = \big\{(x,\gamma) \in \mathbb{R}\times\Gamma \mid q\gamma + \alpha x + \beta = 0\big\}$, où $q \in \mathbb{R}$, et α et $\beta \in \Gamma$. La *pente* $p(D)$ de la droite D d'équation $q\gamma + \alpha x + \beta = 0$ est l'élément $p(D) = \alpha/q$ appartenant à $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Cette définition de la pente ne correspond pas à la définition usuelle, par exemple celle utilisée dans [5], mais est égale à l'opposé.

Chaque droite D définit deux *demi-espaces* $H^D_\geqslant$ et $H^D_\leqslant$ de $\mathbb{R}\times\Gamma$ par :

$$H^D_\geqslant = \big\{(x,\gamma) \in \mathbb{R}\times\Gamma \mid q\gamma + \alpha x + \beta \geqslant 0\big\}$$

$$H^D_\leqslant = \big\{(x,\gamma) \in \mathbb{R}\times\Gamma \mid q\gamma + \alpha x + \beta \leqslant 0\big\}.$$

Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}\times\Gamma$ nous définissons son *enveloppe convexe* $\mathrm{Conv}(A)$ par

$$\mathrm{Conv}(A) = \bigcap H,$$

où H parcourt l'ensemble des demi-espaces de $\mathbb{R}\times\Gamma$ contenant A. Une *face* F de $\mathrm{Conv}(A)$ est un sous-ensemble F de $\mathrm{Conv}(A)$ défini par $F = \mathrm{Conv}(A) \cap D$, où D est une droite de $\mathbb{R}\times\Gamma$ vérifiant :

– $\mathrm{Conv}(A)$ est contenu dans l'un des demi-espaces $H^D_\geqslant$ ou $H^D_\leqslant$ définis par D,

– $F = \mathrm{Conv}(A) \cap D$ contient au moins deux points distincts.

Nous définissons la *pente* $p(F)$ de la face F comme la pente de la droite D qui définit F.

Soient μ une valuation de $K[x]$, f et ϕ deux polynômes de $K[x]$ et soit

$$f \;=\; f_m\phi^m + \ldots + f_1\phi + f_0,$$

le développement de f selon les puissances de ϕ.

Définition 1.1. — *Le polygone de Newton associé aux polynômes f et ϕ et à la valuation μ, que nous notons $\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)$, est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\big\{(k,\delta) \mid \delta \geqslant \mu(f_k), 0 \leqslant k \leqslant m\big\}$:*

$$\mathcal{PN}(f;\mu;\phi) \;=\; \operatorname{Conv}\Big(\big\{(k,\delta) \mid \delta \geqslant \mu(f_k), 0 \leqslant k \leqslant m\big\}\Big).$$

Nous pouvons définir le *support* du polynôme f associé à la valuation μ et au polynôme ϕ, c'est le sous-ensemble $\operatorname{Supp}_{(\mu;\phi)}(f)$ de $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$ défini par

$$\operatorname{Supp}_{(\mu;\phi)}(f) \;=\; \Big\{\big(k,\mu(f_k)\big) \;;\; 0 \leqslant k \leqslant m\Big\}.$$

Cet ensemble détermine le polygone de Newton $\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)$ car nous avons l'égalité

$$\big\{(k,\delta) \mid \delta \geqslant \mu(f_k), 0 \leqslant k \leqslant m\big\} \;=\; \operatorname{Supp}_{(\mu;\phi)}(f) + \big(\{0\} \times \Gamma^+\big),$$

où Γ^+ est le sous-ensemble des éléments $\gamma \geqslant 0$ de Γ.

Par définition le polygone de Newton $\mathcal{PN} = \mathcal{PN}(f;\mu;\phi)$ est l'ensemble des couples (x,γ) appartenant à $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$ pour lesquels il existe des entiers k_1 et k_2 avec

$$0 \leqslant k_1 \leqslant x \leqslant k_2 \leqslant m$$

$$(k_2 - k_1)\gamma \geqslant (k_2 - x)\mu(f_{k_1}) - (k_1 - x)\mu(f_{k_2}).$$

La donnée du polygone de Newton $\mathcal{PN}$ est équivalente à la donnée

d'une suite finie d'entiers : $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = m$,

d'une suite finie de valeurs dans Γ : $\delta_1 > \ldots > \delta_r$,

définis par les propriétés suivantes :

1. pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant m$, nous avons l'inégalité :

$$\mu(f_k) + k\delta_t \;\geqslant\; \mu(f_{a_{t-1}}) + a_{t-1}\delta_t \;=\; \mu(f_{a_t}) + a_t\delta_t,$$

2. pour $k < a_{t-1}$ et pour $k > a_t$, nous avons l'inégalité stricte :

$$\mu(f_k) + k\delta_t \;>\; \mu(f_{a_{t-1}}) + a_{t-1}\delta_t \;=\; \mu(f_{a_t}) + a_t\delta_t.$$

Les couples $\big(a_t, \mu(f_{a_t})\big)$, $0 \leqslant t \leqslant r$, sont appelés les *sommets* du polygone $\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)$. Par définition, si $\big(a_{t-1}, \mu(f_{a_{t-1}})\big)$ et $\big(a_t, \mu(f_{a_t})\big)$ sont deux sommets consécutifs du polygone, tous les éléments $\big(k, \mu(f_k)\big)$ du support

$\mathrm{Supp}_{(\mu;\phi)}(f)$ appartiennent au demi-plan $H_t = H_{\geqslant}^{D_t}$ *au-dessus* de la droite D_t passant ces deux sommets. La pente de cette droite est égale à δ_t,

$$\delta_t \;=\; \frac{\mu(f_{a_t}) - \mu(f_{a_{t-1}})}{a_t - a_{t-1}},$$

et la face F_t est le segment compris entre les sommets $\bigl(a_{t-1}, \mu(f_{a_{t-1}})\bigr)$ et $\bigl(a_t, \mu(f_{a_t})\bigr)$.

Le demi-plan H_t est l'ensemble des points (x,γ) de $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$ vérifiant

$$\gamma \;\geqslant\; \mu(f_{a_t}) + \delta_t(x - a_t).$$

De plus, tout élément du support qui appartient à la droite D_t appartient forcément à la face F_t.

Nous posons $\delta_0 = +\infty$ et $\delta_{r+1} = -\infty$, nous avons ainsi les inégalités $\delta_{r+1} < \delta < \delta_0$ pour tout δ dans Γ, et les nous définissons les demi-plans H_0 et H_{r+1} par

$$H_0 \;=\; \bigl\{(x,\gamma) \mid x \geqslant 0\bigr\} \quad \text{et} \quad H_{r+1} \;=\; \bigl\{(x,\gamma) \mid x \leqslant m\bigr\}.$$

Alors le polygone de Newton $\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)$ est obtenu comme l'intersection des demi-plans H_t, pour $0 \leqslant t \leqslant r+1$.

Définition 1.2. — *Soient f et ϕ deux polynômes dans $K[x]$, alors l'ordre de μ-divisibilité de f par ϕ est le plus grand entier n tel que ϕ^n μ-divise f.*

En particulier l'ordre de μ-divisibilité de f par ϕ est égal à l'ordre de divisibilité de $H_\mu(f)$ par $H_\mu(\phi)$ dans l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$.

Remarque 1.3. — Pour tout polynôme f il existe un polynôme μ-inversible e et des polynômes-clés $\phi_1, \dots, \phi_t$, $t \geqslant 0$, pour la valuation μ, non μ-équivalents entre eux et des entiers $n_1, \dots n_t$, tels que nous ayons

$$f \underset{\mu}{\sim} e\, {\phi_1}^{n_1} \dots {\phi_t}^{n_t}$$

et cette décomposition est unique à μ-équivalence près (*cf.* [7] Corollaire à la Proposition 2.3), et pour tout j l'exposant n_j est l'ordre de μ-divisibilité de f par ϕ_j. Cette décomposition correspond à la décomposition en facteurs irréductibles de l'image $H_\mu(f)$ dans $\mathrm{gr}_\mu K[x]$, $H_\mu(f) = EF_1^{n_1} \dots F_t^{n_t}$, et au choix pour chaque F_j d'un polynôme de degré minimal ϕ_j avec $H_\mu(\phi_j) = F_j$.

Lemme 1.4. — *Soit ϕ un polynôme μ-minimal, alors pour tout polynôme f, nous avons l'égalité*

$$\mu(f) \;=\; \inf\bigl(\mu(f_j\phi^j)\ ;\ 0 \leqslant j \leqslant m\bigr).$$

De plus, si n est l'ordre de μ-divisibilité de f par ϕ nous avons

$$\mu(f) \;=\; \mu(f_n\phi^n) \;<\; \mu\big(f_j\phi^j\big) \text{ pour tout } j<n.$$

Démonstration. — Comme le polynôme ϕ est μ-minimal, il en est de même pour tout ϕ^j, $j \geqslant 1$, par conséquent si nous écrivons la division euclidienne $f = q\phi^j + r$ de f par ϕ^j, nous avons $\mu(q\phi^j) \geqslant \mu(f)$ et $\mu(r) \geqslant \mu(f)$ avec $\mu(r) > \mu(f)$ si et seulement si f est μ-divisible par ϕ^j, c'est-à-dire si l'ordre de μ-divisibilité de f par ϕ est supérieur ou égal à j.

Soit a le plus petit entier, $0 \leqslant a \leqslant m$, tel que $\mu(f_a\phi^a)$ soit égal à $\inf\big(\mu(f_j\phi^j)\ ;\ 0 \leqslant j \leqslant m\big)$, alors nous avons $\mu\big(f_{a-1}\phi^{a-1} + \ldots + f_0\big) \geqslant \inf\big(\mu(f_j\phi^j)\ ;\ 0 \leqslant j \leqslant a-1\big) > \mu\big(f_a\phi^a\big)$, d'où

$$\mu\big(f_a\phi^a\big) \;=\; \mu\big(f_a\phi^a + f_{a-1}\phi^{a-1} + \ldots + f_0\big) \;\geqslant\; \mu(f).$$

Nous en déduisons l'égalité $\mu\big(f_a\phi^a\big) = \mu(f)$, que le polynôme f n'est pas μ-divisible par ϕ^{a+1} et est μ-divisible par ϕ^a. □

Nous en déduisons le résultat suivant.

Corollaire 1.5. — *Avec les hypothèses précédentes, le couple $(n,\mu(f_n))$ est un sommet du polygone de Newton $\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)$, c'est-à-dire qu'il existe s, $0 \leqslant s \leqslant r$ tel que $a_s = n$.*

De plus, si nous posons $\mu(\phi) = \delta$, alors nous avons les inégalités : $\delta_{s+1} \leqslant \delta < \delta_s$.

Si ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ, pour toute valeur $\gamma > \delta = \mu(\phi)$ nous pouvons définir la valuation augmentée $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi)]$. Rappelons que par définition ϕ est un polynôme μ-minimal et que nous avons

$$\mu'(f) \;=\; \inf\big(\mu(f_k) + k\gamma; 0 \leqslant k \leqslant m\big).$$

Par conséquent nous voyons que le polygone de Newton $\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)$ joue un rôle important pour l'étude des valuations augmentées de μ associées à un polynôme-clé donné ϕ, et plus particulièrement la partie du polygone de Newton correspondant aux pentes $\delta_i > \delta$. Nous posons la définition suivante.

Définition 1.6. — *La partie principale du polygone de Newton est la partie de $\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)$ au-dessus des faces de pente strictement plus grande que $\delta = \mu(\phi)$, c'est-à-dire que la partie principale est la partie comprise entre les sommets $\big(0,\mu(f_0)\big)$ et $\big(n,\mu(f_n)\big)$, où n est l'ordre de μ-divisibilité de f par ϕ :*

$$\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)^+ \;=\; \mathcal{PN}(f;\mu;\phi) \cap \big([0,n] \times \Gamma\big).$$

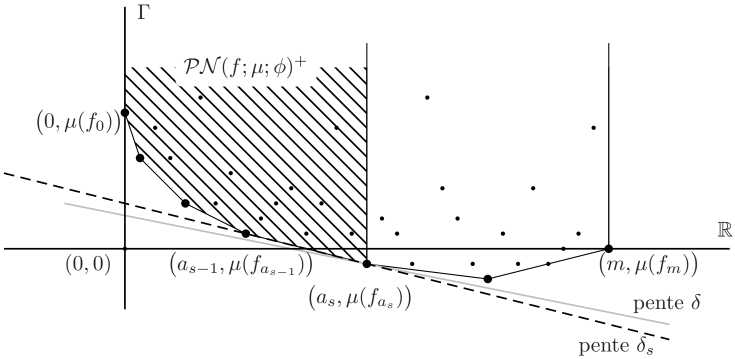

Figure 1.1 : Polygone de Newton $\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)$

Remarque 1.7. — Si nous écrivons le polynôme f de $K[x]$ sous la forme $f = a_d x^d + \ldots a_0$, nous pouvons définir le polygone de Newton $\mathcal{PN}(f;\nu;x)$ comme l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$ de l'ensemble $\big\{(k,\delta) \mid \delta \geqslant \nu(a_k),$ $0 \leqslant k \leqslant d\big\}$.

Dans ce cas nous identifions la partie principale du polygone avec le polygone tout entier :

$$\mathcal{PN}(f;\nu;x)^+ \;=\; \mathcal{PN}(f;\nu;x).$$

Nous voulons étendre les définitions précédentes au cas d'une famille admissible pseudo-convergente $\mathcal{C}$ de valuations et d'un polynôme-clé limite ϕ pour $\mathcal{C}$.

Définition 1.8. — *Le polygone de Newton associé au polynôme f, à la famille pseudo-convergente $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ et au polynôme-clé limite ϕ pour $\mathcal{C}$, que nous notons $\mathcal{PN}\big(f;\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A};\phi\big)$ ou $\mathcal{PN}\big(f;\mathcal{C};\phi\big)$, est l'enveloppe convexe de l'ensemble $\big\{(k,\delta) \mid \delta \geqslant \mu_A(f_k), 0 \leqslant k \leqslant m\big\}$:*

$$\mathcal{PN}\big(f;\mathcal{C};\phi\big) = \mathrm{Conv}\Big(\big\{(k,\delta) \mid \delta \geqslant \mu_A(f_k), 0 \leqslant k \leqslant m\big\}\Big).$$

Nous pouvons aussi définir le *support* du polynôme f associé à la famille de valuations $\mathcal{C}$ et au polynôme-clé limite ϕ, c'est le sous-ensemble $\mathrm{Supp}_{(\mathcal{C};\phi)}(f)$ de $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$ défini par

$$\mathrm{Supp}_{(\mathcal{C};\phi)}(f) \;=\; \big\{\big(k,\mu_A(f_k)\big)\;;\;0 \leqslant k \leqslant m\big\},$$

et il détermine encore le polygone de Newton $\mathcal{PN}(f;\mathcal{C};\phi)$ car nous avons l'égalité

$$\big\{(k,\delta) \mid \delta \geqslant \mu_A(f_k), 0 \leqslant k \leqslant m\big\} \;=\; \mathrm{Supp}_{(\mathcal{C};\phi)}(f) + \big(\{0\} \times \Gamma^+\big).$$

Le polygone de Newton $\mathcal{PN}\big(f;\mathcal{C};\phi\big)$ est un encore un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+\times\Gamma$, et nous notons comme précédemment

$$0=a_0<a_1<\ldots<a_r=m \quad \text{et} \quad \delta_1>\ldots>\delta_r$$

les suites définissant les sommets et les pentes du polygone. Nous définissons aussi l'entier s, $0\leqslant s\leqslant m$, comme le plus grand entier tel que $\delta_s>\mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A.

Définition 1.9. — *La partie principale du polygone de Newton est la partie de $\mathcal{PN}\big(f;\mathcal{C};\phi\big)$ au-dessus des faces de pente strictement plus grande que $\mu_\alpha(\phi)$ pour tout α, c'est-à-dire que la partie principale est la partie comprise entre les sommets $\big(0,\mu(f_0)\big)$ et $\big(a_s,\mu(f_{a_s})\big)$:*

$$\mathcal{PN}\big(f;\mathcal{C};\phi\big)^+ \ = \ \mathcal{PN}\big(f;\mathcal{C};\phi\big)\cap\big([0,a_s]\times\Gamma\big).$$

Nous avons un résultat analogue au lemme 1.4 pour une famille admissible pseudo-convergente $\mathcal{C}=\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, associée aux familles $\big(\phi_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ et $\big(\gamma_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, et un polynôme-clé limite ϕ.

Définition 1.10. — *Soient f un polynôme dans $K[x]$ et $\mathcal{C}=\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ une famille admissible pseudo-convergente de valuations, alors l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité ou ordre de A-divisibilité de f est le plus grand entier n tel que ϕ^n A-divise f, où ϕ est un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$.*

Remarque 1.11. — L'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité est bien défini et ne dépend pas du polynôme-clé limite ϕ choisi. En effet tous les polynômes-clés limites pour la famille $\mathcal{C}$ sont A-équivalents.

Soient $\mathcal{C}=\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ une famille admissible pseudo-convergente de valuations, $\big(\phi_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ la famille de polynômes-clés et $\big(\gamma_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ la famille de valeurs associées, et soit $d=\deg\phi_\alpha$. Nous déduisons alors du théorème de *A-factorisation* ([8], Théorème 1.19) que pour tout polynôme f dans $K[x]$ il existe α_0 dans A, $\lambda=\lambda(f)$ dans Γ et un entier $k=k(f)$ dans $\mathcal{N}$ avec $dk<\deg f$ tels que

$$\forall\alpha\geqslant\alpha_0 \quad \mu_\alpha(f)=k\gamma_\alpha+\lambda.$$

En particulier un polynôme f appartient à l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ si et seulement si l'entier $k(f)$ ainsi associé à f est strictement positif.

Lemme 1.12. — *Avec les notations précédentes, pour tous polynômes f et g dans $K[x]$ nous avons l'implication*

$$f \underset{A}{\mid} g \quad\Longrightarrow\quad k(g)\geqslant k(f).$$

Démonstration. — Soit α dans A suffisamment grand tel que nous avons les égalités

$$\mu_\beta(f) = k(f)\gamma_\beta + \lambda(f) \quad \text{et} \quad \mu_\beta(g) = k(g)\gamma_\beta + \lambda(g),$$

pour tout $\beta \geqslant \alpha$ dans A et tel que g est μ_α-divisible par f. Il existe alors des polynômes r et q dans $K[x]$, qui dépendent de α, tels que nous avons

$$g = fq + r \quad \text{et} \quad \mu_\alpha(r) > \mu_\alpha(g) = \mu_\alpha(fq).$$

Nous déduisons du théorème de A-factorisation qu'il existe $\alpha' > \alpha$, des entiers positifs k' et k'', des valeurs λ' et λ'' dans Γ tels que pour tout β vérifiant $\alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha'$ nous avons les égalités

$$\mu_\beta(r) = k'\gamma_\beta + \lambda' \quad \text{et} \quad \mu_\beta(q) = k''\gamma_\beta + \lambda''.$$

Nous en déduisons qu'il existe α'' dans A avec $\alpha < \alpha'' \leqslant \alpha'$ tel que pour tout β vérifiant $\alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha''$ nous avons $\mu_\beta(r) > \mu_\beta(g) = \mu_\beta(fq)$, d'où la relation $k(g) = k(f) + k'' \geqslant k(f)$. □

Nous notons $k_0 = k_0(\mathcal{C})$ l'entier $k(\phi)$ associé à un polynôme-clé limite ϕ et nous déduisons aussi du lemme 1.12 qu'il ne dépend pas du polynôme-clé limite choisi.

Si pour tout α nous écrivons $\phi = g_{a,\alpha}\phi_\alpha^a + \ldots + g_{0,\alpha}$ le développement du polynôme-clé limite ϕ selon les puissances de ϕ_α, nous avons l'inégalité $a \geqslant k_0$. De plus, si nous supposons que l'ensemble des valeurs $\{\gamma_\alpha ; \alpha \in A\}$ a une borne supérieure $\bar{\gamma}$ nous avons $a = k_0$ et $g_{a,\alpha} = 1$ (*cf.* [6] Théorème 3.5).

LEMME 1.13. — *Soit n l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité de f et soit $f = f_m\phi^m + \ldots + f_0$ le développement de f selon les puissances d'un polynôme-clé limite ϕ, alors pour tout α suffisamment grand f est μ_α-équivalent à $f_n\phi^n$.*

Démonstration. — Soient $k_0 = k_0(\mathcal{C})$ et λ_0 l'entier et la valeur associés au polynôme-clé limite ϕ, c'est-à-dire que k_0 et λ_0 sont définis de telle façon que que nous ayons $\mu_\alpha(\phi) = \lambda_0 + k_0\gamma_\alpha$ pour α suffisamment grand, et nous avons $k_0 \geqslant 1$.

Pour tout α nous avons $\mu_\alpha(f) \geqslant \inf\big(\mu_\alpha(f_j\phi^j)\ ;\ 0 \leqslant j \leqslant m\big)$, avec égalité si les $\mu_\alpha(f_j\phi^j)$ sont tous distincts, et pour α suffisamment grand nous avons $\mu_\alpha(f_j\phi^j) = \mu_A(f_j) + j(\lambda_0 + k_0\gamma_\alpha)$. Comme l'ensemble $\{\gamma_\alpha\}$ n'a pas de plus grand élément, nous en déduisons qu'il existe un entier n, $0 \leqslant n \leqslant m$ tel que nous ayons

$$\mu_\alpha(f) = \mu_A(f_n) + n(\lambda_0 + k_0\gamma_\alpha) < \mu_A(f_j) + j(\lambda_0 + k_0\gamma_\alpha) \text{ pour } j \neq n,$$

et n est l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité de f par ϕ. □

Remarque 1.14. — Nous déduisons du lemme 1.13 que pour tout polynôme f de $K[x]$ nous avons l'égalité

$$k(f) = n.k_0(\mathcal{C}),$$

où n est l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité de f.

De plus, comme tout polynôme n'appartenant pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ est A-inversible, pour tout polynôme f dont l'ordre de divisibilité est égal à n, il existe un polynôme e A-inversible tel que

$$f \underset{A}{\sim} e\phi^n.$$

Nous déduisons aussi du lemme 1.13 que pour tout entier $j \geqslant 1$ le polynôme ϕ^j est A-minimal.

Corollaire 1.15. — *Si n est l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité de f alors le couple $\big(n, \mu_A(f_n)\big)$ est un sommet du polygone de Newton $\mathcal{PN}\big(f; \mathcal{C}; \phi\big)$, c'est-à-dire qu'il existe s, $0 \leqslant s \leqslant r$ tel que $a_s = n$. De plus, nous avons $\delta_s > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A et il existe α avec $\mu_\alpha(\phi) > \delta_{s+1}$.*

Démonstration. — C'est une conséquence des inégalités

$$\mu_A(f_j) + j\mu_\alpha(\phi) > \mu_A(f_n) + n\mu_\alpha(\phi)$$

qui sont valables pour tout α suffisamment grand. □

Soient μ une valuation et ϕ un polynôme-clé pour μ, alors pour tout polynôme f et pour toute relation de la forme

$$(*) \quad f = q_l\phi^l + \ldots + q_0,$$

sans faire aucune hypothèse sur les polynômes q_j nous pouvons définir un polygone de Newton $\mathcal{PN}(*)$ comme l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$ de l'ensemble $\big\{(j, \delta) \mid \delta \geqslant \mu(q_j), 0 \leqslant j \leqslant l\big\}$. En général ce polygone dépend de l'écriture $(*)$ choisie, mais nous avons le résultat suivant.

Proposition 1.16. — *Si les polynômes q_j apparaissant dans le développement $(*)$ sont tous μ-inversibles, alors le couple $\big(n, \mu(q_n)\big)$, où n est l'ordre de μ-divisibilité de f par ϕ, est un sommet du polygone de Newton $\mathcal{PN}(*)$, et la partie de $\mathcal{PN}(*)$ comprise entre les sommets $\big(0, \mu(q_0)\big)$ et $\big(n, \mu(q_n)\big)$ coïncide avec la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}(f; \mu; \phi)^+$.*

Démonstration. — Soit $\gamma > \delta = \mu(\phi)$ et soit μ' la valuation augmentée associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ, $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$.

Comme les polynômes q_j sont μ-inversibles, nous pouvons calculer la valuation $\mu'(f)$ à partir du développement $(*)$ (*cf.* [1] Theorem 5.2, [8] Corollaire à la Proposition 1.3), c'est-à-dire que nous avons l'égalité

$$\mu'(f) = \inf\bigl(\mu(q_j) + j\gamma \ ;\ 0 \leqslant j \leqslant l\bigr).$$

Par conséquent, si $f = f_m\phi^m + \ldots + f_0$ est le développement de f selon les puissances de ϕ, nous avons l'égalité

$$\inf\bigl(\mu(p_k) + k\gamma \ ;\ 0 \leqslant k \leqslant m\bigr) = \inf\bigl(\mu(q_j) + j\gamma \ ;\ 0 \leqslant j \leqslant l\bigr)$$

pour tout γ avec $\delta < \gamma < +\infty$, et nous en déduisons le résultat. □

Dans la suite nous considèrerons les polygones de Newton associés au polynôme P définissant une extension L de K fixée et nous noterons $\mathcal{PN}_\mu(\phi)$, $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)$, le polygone de Newton associé aux polynômes P et ϕ et à la valuation μ, respectivement à la famille pseudo-convergente $\mathcal{C} = \bigl(\mu_\alpha\bigr)_{\alpha\in A}$. De même nous noterons $\mathcal{PN}_\mu(\phi)^+$ et $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)^+$ les parties principales de ces polygones de Newton.

Remarque 1.17. — Si le polynôme ϕ est de degré supérieur au degré de P, alors le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi)$ est réduit au seul sommet $\bigl(0, \mu(P)\bigr)$, et si il est de degré égal à celui de P, nous avons $P = \phi + a_0$ et le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi)$ a une seule face comprise entre les deux sommets $\bigl(0, \mu(a_0)\bigr)$ et $(1, 0)$.

Définition 1.18. — *Soit μ une valuation augmentée $\mu = [\mu_- \ ;\ \mu(\phi) = \gamma]$, respectivement une valuation augmentée limite $\mu = \bigl[\bigl(\mu_\alpha\bigr)_{\alpha\in A} \ ;\ \mu(\phi) = \gamma\bigr]$, alors pour tout polynôme f nous définissons le degré effectif $D_\phi(f)$ comme le plus grand entier j, $0 \leqslant j \leqslant m$ pour lequel nous avons l'égalité $\mu(f) = \mu_-(f_j) + j\gamma$, respectivement $\mu(f) = \mu_A(f_j) + j\gamma$, où $f = f_m\phi^m + \ldots + f_0$ est le développement de f selon les puissances de ϕ.*

Remarque 1.19. — Nous déduisons des théorèmes permettant de définir les valuations augmentées et les valuations augmentées limites (*cf.* [1] Theorem 4.4, [8] Théorème 1.2 et Proposition 1.22) que le degré effectif est additif, c'est-à-dire que pour tous polynômes f et g nous avons l'égalité :

$$D_\phi(fg) = D_\phi(f) + D_\phi(g).$$

Nous vérifions aussi que le degré effectif $D_\phi(f)$ ne dépend que de la classe de μ-équivalence du polynôme f, ou de la classe de μ_α-équivalence pour α suffisamment grand dans le cas d'une valuation augmentée limite.

Par définition, si nous appelons $o_\phi(f)$ l'ordre de μ-divisibilité de f par ϕ, ou l'ordre de A-divisibilité de f dans le cas d'une valuation augmentée limite, nous avons toujours l'inégalité

$$o_\phi(f) \leqslant D_\phi(f).$$

La valeur $\gamma = \mu(\phi)$ est la pente d'une face du polygône de Newton $\mathcal{PN}(f;\mu;\phi)$ si et seulement si nous avons l'inégalité stricte $o_\phi(f) < D_\phi(f)$, les deux sommets définissant la face sont alors $\big(o_\phi(f), \mu(f_{o_\phi(f)})\big)$ et $\big(D_\phi(f), \mu(f_{D_\phi(f)})\big)$

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant, qui est une extension du lemme 1.1 de [8].

Lemme 1.20. — *Soit μ_1 une valuation bien spécifiée définie par le polynôme ψ, c'est-à-dire que μ_1 est une valuation augmentée $[\mu\ ;\ \mu_1(\psi) = \delta]$ ou une valuation augmentée limite $\big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}\ ;\ \mu_1(\psi) = \delta\big]$. Alors tout polynôme μ_1-inversible g de $K[x]$ est μ_1-équivalent à r où r est le reste de la division euclidienne de g par le polynôme ψ.*

Démonstration. — Rappelons que comme ψ est un polynôme-clé pour la valuation μ_1, nous avons toujours $\mu(r) = \mu_1(r) \geqslant \mu_1(g)$ avec l'inégalité stricte $\mu_1(r) > \mu_1(g)$ si et seulement si g est μ_1-divisible par ψ (*cf.* [8] Lemme 1.1).

Nous supposons que la valuation μ_1 est une valuation augmentée, le cas d'une valuation augmentée limite se démontre de manière similaire. Soit $g = a_s\psi^s + \ldots + a_1\psi + a_0$ le développement de g selon les puissances de ψ, avec $r = a_0$. Par hypothèse il existe un polynôme h tel que hg soit μ_1-équivalent à 1, c'est-à-dire tel que $\mu_1(hg - 1) > \mu_1(hg) = \mu_1(1) = 0$.

Si nous avons $\mu_1(hg - 1) = \mu(hg - 1)$ alors hg est μ-équivalent à 1, par conséquent g n'est pas μ-divisible par ψ et $\mu_1(g) = \mu(g)$ et le résultat est une conséquence du lemme 1.4 de [8].

Supposons que nous ayons $\mu_1(hg - 1) > \mu(hg - 1)$. Pour tout δ' avec $\mu(\psi) < \delta' < \delta = \mu_1(\psi)$ nous pouvons définir la valuation augmentée μ' associée à ϕ et à δ', $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\psi) = \delta']$, alors pour tout polynôme f nous avons $\mu(f) \leqslant \mu'(f) \leqslant \mu_1(f)$ avec $\mu(f) = \mu'(f)$ si et seulement si $\mu(f) = \mu_1(f)$. Nous pouvons choisir δ' suffisamment proche de δ tel que nous avons encore l'inégalité $\mu'(hg - 1) > \mu(hg - 1)$, nous en déduisons que g n'est pas μ'-divisible par ψ et nous avons $\mu(r) = \mu(a_0) = \mu'(g)$. Comme ψ divise $g - r$ et comme nous avons $\delta' < \delta$, nous en déduisons $\mu'(g) \leqslant \mu'(g - r) < \mu_1(g - r)$, d'où le résultat. $\square$

2. Valuations approchées

Soit P un polynôme irréductible séparable unitaire appartenant à $K[x]$, et soit L l'extension algébrique de K définie par P, $L = K[x]/(P)$. Si nous choisissons une racine θ de P dans une clôture séparable K^{sep} de K fixée, L est le sous-corps $K(\theta)$ de K^{sep}.

Toute valuation μ de L qui prolonge la valuation ν définit une pseudo-valuation ζ de $K[x]$, dont le noyau $\mathcal{S}(\zeta) = \{f \in K[x] \mid \zeta(f) = +\infty\}$ est égal à l'idéal de $K[x]$ engendré par le polynôme P, $\mathcal{S}(\zeta) = (P)$. La pseudo-valuation ζ est définie par

$$\zeta(f) \ = \ \mu\big(f(\theta)\big) \quad \forall f \in K[x].$$

Il existe une bijection entre le sous-ensemble $\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_P(K[x], \nu)$ des pseudo-valuations ζ de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ dont le noyau est égal à l'idéal (P) et l'ensemble $\mathcal{E}(L, \nu)$ des valuations μ de L qui prolongent la valuation ν. Nous appelons indifféremment $\mathcal{A}(\mu)$ ou $\mathcal{A}(\zeta)$ la famille admise de valuations de $K[x]$, définie uniquement à équivalence près, associée à la pseudo-valuation ζ.

Nous voulons déterminer l'ensemble $\mathcal{E}(L, \nu)$ des valuations μ de L qui prolongent ν, ce qui est équivalent à déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_P$ des pseudo-valuations ζ appartenant à $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ qui ont pour noyau l'idéal (P). C'est aussi équivalent à déterminer l'ensemble des familles admises $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(K[x], \nu)$ qui sont associées aux pseudo-valuations appartenant à $\mathcal{E}_P$.

Une valuation ou pseudo-valuation μ de $\mathcal{E}$ est dite *bien spécifiée* si μ est obtenue soit comme valuation augmentée $\mu = [\mu_- \,;\, \mu(\phi) = \gamma]$ pour une valuation μ_-, soit comme valuation augmentée limite $\mu = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A} \,;\, \mu(\phi) = \gamma\big]$ pour une famille pseudo-convergente $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ (*cf.* [7]). Une valuation, ou pseudo-valuation, μ est bien spécifiée si et seulement si la famille admise associée $\mathcal{A}(\mu)$ est complète, et dans ce cas la valuation ou pseudo-valuation μ est la dernière valuation $\mu_{\bar{l}}$ de la famille $\mathcal{A}(\mu)$ ([7], Proposition 1.4).

Toute pseudo-valuation ζ de $\mathcal{E}_P$ est bien spécifiée, et ζ est alors la pseudo-valuation augmentée ou la pseudo-valuation augmentée limite $\mu_{\bar{l}}$ associée au polynôme $\phi_{\bar{l}} = P$ et à la valeur $\gamma_{\bar{l}} = +\infty$.

Sur l'ensemble $\mathcal{E}$ nous avons deux relations d'ordre partiel $\mu \leqslant \mu'$ et $\mu << \mu'$ définies de la manière suivante(*cf.* [6]) :

1. $\mu \leqslant \mu'$ si et seulement si $\mu(f) \leqslant \mu'(f)$ pour tout f dans $K[x]$,
2. $\mu << \mu'$ si et seulement si $\mathcal{A}(\mu)$ est une sous-famille de $\mathcal{A}(\mu')$.

Si les deux valuations μ et μ' sont bien spécifiées, ce que nous supposerons dans la suite, alors nous avons $\mu << \mu'$ si et seulement si μ appartient à la famille $\mathcal{A}(\mu')$.

Nous rappelons que si nous avons deux valuations μ et μ' de $\mathcal{E}$ qui vérifient $\mu \leqslant \mu'$, nous définissons l'ensemble $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(\mu, \mu')$ comme l'ensemble des polynômes f de $K[x]$ tels que $\mu(f) < \mu'(f)$. Si $\tilde{\Phi}$ est non vide, c'est-à-dire si μ n'est pas égale à μ', nous notons d le degré minimal d'un polynôme appartenant à cet ensemble et nous posons

$$\Phi = \Phi(\mu, \mu') = \big\{\phi \in K[x] \mid \mu(\phi) < \mu'(\phi),\ \deg \phi = d \text{ et } \phi \text{ unitaire}\big\},$$

et tout polynôme appartenant à Φ est un polynôme-clé pour μ.

La relation $\mu << \mu'$ entraîne la relation $\mu \leqslant \mu'$. Réciproquement nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.1. — *Soient μ et μ' deux valuations ou pseudo-valuations bien spécifiées de $\mathcal{E}$ qui vérifient la relation $\mu \leqslant \mu'$, et soit ϕ le polynôme qui définit la valuation μ.*

Alors, soit nous avons $\mu << \mu'$, soit il existe un polynôme-clé ϕ'' pour μ avec degϕ'' = degϕ et une valuation augmentée $\mu'' = [\mu\ ;\ \mu''(\phi'') = \gamma'']$ qui vérifie $\mu'' << \mu'$. De plus, si la valuation μ est de la forme $\mu = [\mu_-\ ;\ \mu(\phi) = \gamma]$, respectivement $\mu = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}\ ;\ \mu(\phi) = \gamma\big]$, la valuation μ'' est aussi de la forme $\mu'' = [\mu_-\ ;\ \mu''(\phi'') = \gamma'']$, respectivement $\mu'' = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}\ ;\ \mu''(\phi'') = \gamma''\big]$.

Démonstration. — Nous considérons d'abord le cas où μ est une valuation augmentée $\mu = [\mu_-\ ;\ \mu(\phi) = \gamma]$, avec μ_- qui n'est pas la valuation ν de K, alors nous avons $\mu_- << \mu'$, c'est-à-dire que μ_- est une des valuations de la famille admise $\mathcal{A}$ associée à μ' et est de la forme $\mu_i^{(j)}$ (*cf.* [6], Proposition 2.18).

Nous avons $\mu_- \leqslant \mu \leqslant \mu'$, avec $\mu_- \neq \mu$, par conséquent les ensembles $\Phi = \Phi(\mu_-, \mu)$ et $\Phi' = \Phi(\mu_-, \mu')$ sont égaux (*cf.* [6], Corollaire au Lemme 2.3). Le polynôme-clé ϕ appartient à Φ et tout successeur de la valuation μ_- dans la famille $\mathcal{A}$ est défini à partir d'un polynôme appartenant à Φ'.

Supposons que nous ayons l'égalité $\gamma = \mu(\phi) = \mu'(\phi)$ et nous considérons les différents cas.

i) L'ensemble $\tilde{\Phi}(\mu, \mu')$ est vide alors nous avons $\mu = \mu'$.

ii) L'ensemble $\tilde{\Phi}(\mu, \mu')$ est non vide et le degré minimal d'un polynôme f dans $\tilde{\Phi}(\mu, \mu')$ est strictement plus grand que le degré de ϕ, alors nous avons $\mu = \mu_{i+1}^{(j)}$ et μ appartient à $\mathcal{A}$, d'où $\mu << \mu'$.

iii) L'ensemble $\tilde{\Phi}(\mu,\mu')$ est non vide et le degré minimal d'un polynôme de $\tilde{\Phi}(\mu,\mu')$ est égal au degré de ϕ, alors $\Phi(\mu,\mu')$ est égal à l'ensemble des ψ dans $\Phi(\mu_-,\mu')$ tels que $\mu'(\psi) > \mu'(\phi)$. Si l'ensemble des valeurs $\Lambda = \{\mu'(\psi),\ \psi \in \Phi(\mu,\mu')\}$ n'admet pas de plus grand élément alors la valuation μ appartient à une sous famille admissible pseudo-convergente de $\mathcal{A}$ et nous avons $\mu << \mu'$. Si l'ensemble Λ admet un plus grand élément λ, la valuation μ'' cherchée est la valuation $\mu^{(j)}_{i+1} = [\mu^{(j)}_i\ ;\ \mu^{(j)}_{i+1}(\phi^{(j)}_{i+1}) = \gamma^{(j)}_{i+1}]$ avec $\gamma^{(j)}_{i+1} = \mu'(\phi^{(j)}_{i+1}) = \lambda = \gamma''$, dans ce cas nous avons $\phi'' = \phi + h$ avec $\mu_-(h) = \gamma$ et $\gamma < \gamma''$.

Supposons que nous ayons l'inégalité $\gamma = \mu(\phi) < \mu'(\phi) = \gamma_1$. Comme ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ nous pouvons définir la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu\ ;\ \mu_1(\phi) = \gamma_1]$ qui est aussi égale à la valuation augmentée $[\mu_-\ ;\ \mu_1(\phi) = \gamma_1]$ et qui vérifie $\mu \leqslant \mu_1 \leqslant \mu'$ avec $\mu_1(\phi) = \mu'(\phi)$.

Dans ce cas la valuation μ n'appartient pas à la famille $\mathcal{A}$, mais nous déduisons de ce qui précède appliquée à la valuation μ_1 que nous pouvons prendre pour μ'' soit μ_1, soit la valuation μ'' définie par le polynôme $\phi'' = \phi^{(j)}_{i+1}$ et par la valeur $\gamma'' = \gamma^{(j)}_{i+1}$. En particulier nous avons soit $\phi'' = \phi$, soit $\phi'' = \phi + h$ avec $\mu_-(h) = \gamma_1$, d'où ϕ'' μ-équivalent à ϕ.

Le cas où μ est une valuation augmentée associée à un polynôme unitaire ϕ de degré un, $\mu_- = \nu$, et le cas où μ est une valuation augmentée limite, $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu(\phi) = \gamma\right]$, se démontrent de manière identique. □

Définition 2.2. — *Nous appelons valuation approchée du polynôme P de $K[x]$ toute valuation bien spécifiée μ de $\mathcal{E}(K[x],\nu)$ pour laquelle il existe une pseudo-valuation ζ de $\mathcal{E}_P$ telle que $\mu \leqslant \zeta$ et qui vérifie $\mu(\phi) = \zeta(\phi)$ où ϕ est le polynôme qui définit μ. Nous disons que μ est la valuation approchée associée à la pseudo-valuation ζ de $\mathcal{E}_P$.*

Nous notons $\mathcal{VA}_P$ l'ensemble des valuations approchées de P.

Définition 2.3. — *Nous appelons racine approchée du polynôme P de $K[x]$ tout polynôme ϕ qui définit une valuation approchée μ de P.*

Nous notons $\mathcal{RA}_P$ l'ensemble des racines approchées de P.

Remarque 2.4. — Dans la définition d'une famille admissible $\mathcal{A}$ nous avons demandé que pour toute sous-famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$ de $\mathcal{A}$, les polynômes-clé $\phi^{(j)}_i$ définissant la partie discrète $\mathcal{D}^{(j)}$ de $\mathcal{S}^{(j)}$ vérifient l'inégalité stricte $\deg\phi^{(j)}_i < \deg\phi^{(j)}_{i+1}$. Cette condition sur les degrés ayant pour fonction d'assurer la minimalité de la famille de valuations augmentées itérées apparaissant dans $\mathcal{S}^{(j)}$, et ainsi permet d'avoir l'unicité de la partie discrète $\mathcal{D}^{(j)}$ (*cf.* [6]).

Nous pouvons ne pas imposer cette condition sur le degré, et seulement demander que pour toute valuation $\mu_i^{(j)}$ appartenant à $\mathcal{D}^{(j)}$ le poynôme-clé $\phi_{i+1}^{(j)}$ vérifie $\deg \phi_i^{(j)} \leqslant \deg \phi_{i+1}^{(j)}$ et ne soit pas $\mu_i^{(j)}$-équivalent à $\phi_i^{(j)}$. Nous trouvons alors une famille de valuations augmentées ou augmentées limites qui vérifie essentiellement les mêmes propriétés qu'une famille admissible, une telle famille est appelée une famille *pré-admissible* dans [4].

Lemme 2.5. — *Une valuation μ est une valuation approchée du polynôme P si et seulement si elle appartient à une famille pré-admissible associée à l'une des pseudo-valuations ζ de $\mathcal{E}_P$.*

Démonstration. — C'est une conséquence de la définition d'une famille pré-admissible et du fait que de toute famille pré-admissible $\mathcal{A}'$ nous pouvons extraire une famille admissible $\mathcal{A}$ déterminée de la manière suivante.

Soient $\mathcal{S}^{(j)} = \left(\mu_1^{(j)}, \ldots, \mu_n^{(j)}; \left(\mu_\alpha^{(j)}\right)_{\alpha \in A^{(j)}}\right)$, $1 \leqslant j \leqslant N$, les sous-familles pré-admissibles simples de $\mathcal{A}'$. Alors la sous-famille $\mathcal{A}$ obtenue en enlevant toutes les valuations $\mu_i^{(j)}$ pour lesquelles nous avons l'égalité $\deg \phi_i^{(j)} = \deg \phi_{i+1}^{(j)}$, est une famille admissible. □

Par définition, une valuation approchée est une valuation et non une pseudo-valuation, en particulier toute valuation approchée de P est distincte de la pseudo-valuation ζ à laquelle elle est associée.

Théorème 2.6. — *Soit μ une valuation bien spécifiée de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ et soit ϕ le polynôme qui définit la valuation μ. Alors μ est une valuation approchée du polynôme P si et seulement si*

1. *P est μ_--divisible par ϕ si μ est la valuation augmentée $\mu = [\mu_- \ ; \ \mu(\phi) = \gamma]$ avec $\mu_- \neq \nu$, et est A-divisible si μ est la valuation augmentée limite $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha \in A} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma\right]$,*
2. *il existe au moins un polynôme-clé ψ pour la valuation μ, avec ψ non μ-équivalent à ϕ, qui μ-divise P.*

Remarque 2.7. — Dans le cas où μ est une valuation augmentée, $\mu = [\mu_-; \ \mu(\phi) = \gamma]$, nous déduisons du théorème 5.1 de [1] ou du théorème 1.2 de [8] que la condition (1) est équivalente à la condition $\mu_-(P) < \mu(P)$, et dans le cas où μ est une valuation augmentée limite, $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha \in A} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma\right]$, nous déduisons de la proposition 1.23 de [8] que la condition (1) est équivalent à la condition $\mu_\alpha(P) < \mu(P)$ pour tout α dans A.

Dans le cas où μ_- est la valuation ν de K, c'est-à-dire que μ est associée à un polynôme unitaire de degré un, la condition (1) est supposée toujours vérifiée.

La condition (2) est équivalente à demander que l'image de P dans l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ associée à la valuation μ admette un diviseur premier distinct de $H_\mu(\phi)$.

Remarque 2.8. — Le théorème 2.6 permet de déterminer uniquement à partir de la valuation μ et du polynôme P si la valuation μ apparaît dans une famille pré-admissible $\mathcal{A}(\zeta)$ associée à une pseudo-valuation ζ appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}_P(K[x],\nu)$, sans faire intervenir cette pseudo-valuation ζ.

Ainsi, grâce au théorème nous pouvons construire les familles admissibles $\mathcal{A}$ appartenant à $\mathcal{F}(K[x],\nu)$ associées aux pseudo-valuations ζ dont le noyau est égal à l'idéal (P), ce qui est équivalent aux familles admissibles associées aux valuations μ qui prolongent ν à l'extension $L = K[x]/(P)$ de K.

Démonstration. — Montrons d'abord que si μ est une valuation approchée du polynôme P, elle vérifie les conditions i) et ii) du théorème. Par hypothèse, il existe alors une pseudo-valuation ζ dans $\mathcal{E}_P$ telle que $\mu \leqslant \zeta$ et $\gamma = \mu(\phi) = \zeta(\phi)$.

Si μ est une valuation augmentée, $\mu = [\mu_- \ ; \ \mu(\phi) = \gamma]$, comme μ_- est une valuation, nous avons $\mu_-(P) < +\infty$, d'où P appartient à $\tilde{\Phi}(\mu_-,\zeta)$ et par conséquent appartient à $\tilde{\Phi}(\mu_-,\mu)$ d'après le corollaire au lemme 2.3 de [6], nous en déduisons que P est μ_--divisible par le polynôme-clé ϕ. Si μ est une valuation augmentée limite $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma\right]$, nous montrons de la même manière que pour tout α nous avons $\mu_\alpha(P) < \mu(P)$, par conséquent P est A-divisible par le polynôme-clé limite ϕ.

Si la condition ii) n'était pas vérifiée pour la valuation μ, le polynôme P serait μ-équivalent à un produit $e\phi^n$, avec e μ-inversible et $n \geqslant 0$. Nous aurions alors

$$\zeta(P - e\phi^n) \ \geqslant \ \mu(P - e\phi^n) \ > \ \mu(e\phi^n) \ = \ \zeta(e\phi^n),$$

d'où l'égalité $\zeta(P) = \zeta(e\phi^n)$, ce qui est impossible car $\zeta(e\phi^n) < +\infty$.

Pour montrer la réciproque, nous allons faire une récurrence descendante sur le degré du polynôme ϕ. Plus précisément nous allons montrer que si μ est une valuation bien définie associée à un polynôme ϕ de degré d qui vérifie les conditions i) et ii) du théorème, il existe une nouvelle valuation bien définie μ' associée à un polynôme ϕ' de degré $d' > d$ qui vérifie encore les conditions i) et ii) du théorème et telle que nous ayons $\mu \leqslant \mu'$ et $\mu(\phi) = \mu'(\phi)$. En fait nous allons construire la valuation μ' comme valuation augmentée, $\mu' = [\mu_1 \ ; \ \mu'(\phi')]$ avec $\mu_1 = \mu$ ou μ_1 valuation augmentée pour la valuation μ, ou comme valuation augmentée limite, $\mu' =$

$\left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi')\right]$ avec $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ famille admissible pseudo-convergente où chaque μ_α est une valuation augmentée pour μ.

Si nous avons $\deg\phi' = d' = \deg P$, alors ϕ' est égal à P, μ' est une des pseudo-valuations ζ appartenant à $\mathcal{E}_P$ et nous trouvons directement que μ est une valuation approchée du polynôme P. Si nous avons l'inégalité $\deg\phi' = d' < \deg P$, alors μ' est une valuation et par hypothèse de récurrence μ' est une valuation approchée de P associée à une pseudo-valuation ζ de $\mathcal{E}_P$. Nous avons alors les inégalités $\mu \leqslant \mu' \leqslant \zeta$, et comme ϕ est un polynôme de degré $d < \deg\phi'$ nous avons $\mu'(\phi) = \zeta(\phi)$, par conséquent μ est aussi une valuation approchée de P associée à ζ.

Nous considérons la décomposition de P en facteurs μ-irréductibles,

$$P \underset{\mu}{\sim} e\phi_0^{n_0}\phi_1^{n_1}\ldots\phi_t^{n_t},$$

avec $\phi_0 = \phi$ et les ϕ_j sont des polynômes-clés pour μ non μ-équivalents entre eux, et $n_0 \geqslant 0$ et $n_j \geqslant 1$ pour $j = 1,\ldots,t$, et par hypothèse nous avons $t \geqslant 1$.

Pour tout $j = 1,\ldots,t$ nous considérons l'ensemble Ψ_j des polynômes-clés ψ pour μ qui sont μ-équivalents à ϕ_j, en effet dans la décomposition de P en facteurs μ-irréductibles nous pouvons remplacer ϕ_j par n'importe quel polynôme ψ appartenant à Ψ_j. Un polynôme ψ appartient à Ψ_j si et seulement si nous avons $\psi = \phi_j - h$ avec h vérifiant $\deg h < \deg\phi_j$ et $\mu(h) > \mu(\phi_j)$.

Considérons le polynôme-clé ϕ_1 et l'ensemble Ψ_1. Au polynôme ϕ_1 et à la valuation μ nous pouvons associer le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_1)$, qui est déterminé par le développement de P selon les puissances de ϕ_1, $P = q_m\phi_1^m + \ldots + q_0$. Nous avons associé à $\mathcal{PN}_\mu(\phi_1)$ la suite d'entiers $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = m$ correspondant aux sommets $\left(a_k, \mu(q_{a_k})\right)$, et la suite de valeurs $\delta_1 > \ldots > \delta_r$ correspondant aux pentes des faces.

D'après le corollaire 1.5 le couple $\left(n_1, \mu(q_{n_1})\right)$ est un sommet du polygone $\mathcal{PN}_\mu(\phi_1)$, et comme nous avons $n_1 > 0$ la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi_1)^+$ du polygone est non vide et il existe au moins une face de pente $\delta > \mu(\phi_1)$. Si nous choisissons une de ces faces de pente $\delta = \delta_k$, comprise entre les sommets $\left(a_{k-1}, \mu(q_{a_{k-1}})\right)$ et $\left(a_k, \mu(q_{a_k})\right)$, $0 < k \leqslant s$, nous pouvons définir la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu\ ;\ \mu_1(\phi_1) = \delta]$. Alors le polynôme P est μ_1 équivalent à $q_{a_k}\phi_1^{a_k} + \ldots + q_{a_{k-1}}\phi_1^{a_{k-1}}$, et nous pouvons écrire

$$P \underset{\mu_1}{\sim} e'\ \phi_1^{n'}\ g,$$

où $e' = q_{a_{k-1}}$ est un polynôme μ_1-inversible, où $n' = a_{k-1} \geqslant 0$ et où g est le polynôme

$$g\ =\ q_{a_k}\phi_1^{(a_k - a_{k-1})} + \ldots + q_{a_{k-1}}.$$

C'est un polynôme non μ_1-inversible d'après le lemme 1.20 et non μ_1-divisible par ϕ_1. Nous en déduisons que la valuation augmentée μ_1 vérifie la condition i), car P est μ-divisible par ϕ_1, et la condition ii), car g admet au moins un polynôme-clé ψ non μ_1-équivalent à ϕ_1 comme μ_1-diviseur.

Ainsi, s'il existe un polynôme-clé ϕ_j parmi les μ-diviseurs de P avec $\deg \phi_j > \deg \phi$, nous pouvons prendre pour valuation bien définie μ' la valuation augmentée $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi') = \delta']$, où ϕ' est le polynôme-clé ϕ_j et où δ' est une des pentes de la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi_j)^+$ du polygone de Newton associé à ϕ_j.

Supposons que tous les polynômes-clés ϕ_j apparaissant comme facteurs μ-irréductibles de P aient pour degré $d = \deg \phi$, et comme précédemment nous en choisissons un ϕ_1 et nous considérons l'ensemble Ψ_1. A tout polynôme ψ dans Ψ_1 nous pouvons associer son degré d_1, la valeur $\gamma_1 = \mu(\psi)$ et n_1 l'ordre de μ-divisibilité de P par ψ, ces trois valeurs ne dépendent que de l'ensemble Ψ_1 et par hypothese nous avons $d_1 = \deg \phi$. Au polynôme ψ nous associons aussi son polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ et sa partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+ = \mathcal{PN}_\mu(\psi) \cap \big([0, n_1] \times \Gamma\big)$, et nous voulons étudier $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ quand ψ parcourt Ψ_1.

Soient ψ et ψ' deux polynômes appartenant à Ψ_1, en particulier nous pouvons écrire $\psi' = \psi - h$ avec $\deg h < \deg \psi = d_1$ et $\mu(h) > \mu(\psi) = \gamma_1$, et soient les développements de P selon les puissances de ψ et de ψ', respectivement

$$P \;=\; q_m \psi^m + \ldots + q_0 \quad \text{et} \quad P \;=\; q'_m \psi'^m + \ldots + q'_0.$$

Nous considérons les parties principales des polygones de Newton associés $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ et $\mathcal{PN}_\mu(\psi')^+$, déterminés respectivement par les suites

$$0 = a_0 < a_1 <, \ldots < a_s = n_1 \quad \text{et} \quad \delta_1 > \ldots > \delta_s > \gamma_1 \quad \text{pour } \psi\ ,$$

$$0 = a'_0 < a'_1 <, \ldots < a'_{s'} = n_1 \quad \text{et} \quad \delta'_1 > \ldots > \delta'_{s'} > \gamma_1 \quad \text{pour } \psi'.$$

Nous déduisons du lemme 1.4 que, comme ψ et ψ' sont des polynômes μ-minimaux, nous avons l'égalité $\mu(P) = \mu(q_{n_1}) + n_1\gamma_1 = \mu(q'_{n_1}) + n_1\gamma_1$, par conséquent nous avons $\mu(q_{n_1}) = \mu(q'_{n_1})$, c'est-à-dire que le dernier sommet $\big(n_1, \mu(q_{n_1})\big)$ de la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ ne dépend pas du polynôme ψ de Ψ_1.

Nous choisissons un polynôme-clé ψ appartenant à Ψ_1, nous appelons comme précédemment δ_1 la première pente du polygone de Newton associé $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$. Nous définissons alors la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu\ ;\ \mu_1(\psi) = \delta_1]$.

Comme nous avons supposé $\deg\psi = \deg\phi$, pour tous les polynômes q_j apparaissant dans le développement de P selon les puissances de ψ nous avons $\mu(q_j) = \mu_1(q_j)$, par conséquent les polygones de Newton associés aux valuations μ et μ_1 sont égaux,

$$\mathcal{PN}_\mu(\psi) \;=\; \mathcal{PN}_{\mu_1}(\psi).$$

De plus, comme δ_1 est la première pente du polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_1}(\psi)$, nous déduisons du lemme 1.4 que P n'est pas μ_1-divisible par ψ. $\square$

Proposition 2.9. — *Soit ψ' un polynôme-clé pour la valuation augmentée μ_1 vérifiant* $\deg\psi' = \deg\psi$ *et tel que P soit μ_1-divisible par ψ'. Alors le polynôme ψ' appartient à Ψ_1 et la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\psi')^+$ du polygone de Newton associé à ψ' coïncide avec la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ du polygone de Newton associé à ψ entre les sommets $(a_1, \mu(q_{a_1}))$ et $(n_1, \mu(q_{n_1}))$, est au dessus de $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ entre $(0, \mu(q_0))$ et $(a_1, \mu(q_{a_1}))$ et son premier sommet $(0, \mu(q'_0))$ est strictement au dessus de celui de $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$.*

Plus précisément, si nous appelons encore

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_s = n_1 \quad \text{et} \quad \delta_1 > \ldots > \delta_s > \gamma_1,$$

et

$$0 = a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_{s'} = n_1 \quad \text{et} \quad \delta'_1 > \ldots > \delta'_{s'} > \gamma_1,$$

les suites associées respectivement à $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ et à $\mathcal{PN}_\mu(\psi')^+$, nous avons les égalités :

$$s' = s+t \text{ avec } t \geqslant 0, \quad a'_{j+t} = a_j \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant s, \quad \delta'_{j+t} = \delta_j \text{ pour } 2 \leqslant j \leqslant s,$$

et les inégalités :

$$\delta'_{1+t} \geqslant \delta_1 \quad \text{et} \quad \mu(q'_0) > \mu(q_0).$$

Par conséquent, si nous avons $\delta_1 = \delta'_{1+t}$, nous devons avoir $t \geqslant 1$ et $0 < a'_t < a_1$.

Nous pouvons aussi remarquer que comme P est μ_1-divisible par ψ', les polynômes ψ et ψ' ne sont pas μ_1-équivalents.

Démonstration de la proposition. — Si ψ' est un polynôme-clé pour la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu\,;\ \mu_1(\psi) = \delta_1]$ non μ_1-équivalent à ψ et de même degré que ψ, nous avons $\psi' = \psi - h$ avec $\deg h < \deg\psi$ et $\mu(h) = \delta_1$ (*cf.* [1] Theorem 9.4, [8] Théorème 1.11). En particulier nous en déduisons que ψ' est μ-équivalent à ψ, par conséquent appartient aussi à Ψ_1.

Soit δ vérifiant $\delta_1 \geqslant \delta > \gamma_1$, alors les valuations augmentées $\mu' = [\mu\,;\ \mu'(\psi) = \delta]$ et $\mu'' = [\mu\,;\ \mu''(\psi') = \delta]$ sont égales (*cf.* [6] Proposition 1.2), par conséquent nous avons l'égalité

$$\mu'(P) \;=\; \inf\bigl(\mu(q_j)+j\delta\ ;\ 0\leqslant j\leqslant m\bigr) \;=\; \inf\bigl(\mu(q'_j)+j\delta\ ;\ 0\leqslant j\leqslant m\bigr),$$

où $P=q_m\psi^m+\ldots+q_0$ et $P=q'_m{\psi'}^m+\ldots+q'_0$ sont les développements de P selon les puissances de ψ et de ψ'. Nous en déduisons l'égalité entre les parties des polygones de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ et $\mathcal{PN}_\mu(\psi')$ correspondant à des pentes δ vérifiant $\delta_1>\delta>\gamma_1$. En particulier nous en déduisons l'existence de $t\geqslant 0$ tel que $s'=s+t$, $a'_{j+t}=a_j$ et $\delta'_{j+t}=\delta_j$ pour $2\leqslant j\leqslant s$. De plus, pour tout δ avec $\inf(\delta_1,\delta'_{1+t})>\delta>\delta_2=\delta'_{2+t}$, nous avons l'égalité

$$\mu'(P) \;=\; \mu(q_{a_1})+a_1\delta \;=\; \mu\bigl(q'_{a'_{1+t}}\bigr)+a'_{1+t}\delta,$$

d'où $a'_{1+t}=a_1$.

Si nous avions $\delta_1>\delta'_{1+t}$, alors pour tout δ avec $\delta_1>\delta>\delta'_{1+t}$ nous aurions l'égalité $\mu'(P)=\mu(q_{a_1})+a_1\delta=\mu\bigl(q'_{a'_t}\bigr)+a'_t\delta$, ce qui est impossible car $a'_t<a'_{1+t}=a_1$.

Par hypothèse P n'est pas μ_1-divisible par le polynôme μ_1-minimal ψ, alors comme q_0 est le reste de la division euclidienne de P par ψ nous avons l'égalité $\mu_1(q_0)=\mu_1(P)$, par contre P est μ_1-divisible par le polynôme ψ', et comme q'_0 est le reste de la division euclidienne de P par ψ' nous avons l'inégalité stricte $\mu_1(q'_0)>\mu_1(P)$. Nous en déduisons l'inégalité $\mu(q'_0)>\mu(q_0)$. □

Suite de la démonstration du théorème. — À tout polynôme ψ appartenant à Ψ_1 nous associons la valeur $\lambda(\psi)=\mu(q_0(\psi))$, où $q_0=q_0(\psi)$ est défini par le développement de P selon les puissances de ψ, $P=q_m\psi^m+\ldots+q_0$. Comme P est irréductible, pour $\deg P>\deg\psi$ nous avons toujours $q_0\neq 0$, par conséquent $\lambda(\psi)\neq+\infty$ et nous définissons le sous-ensemble Λ_1 de Γ par

$$\Lambda_1 \;=\; \bigl\{\lambda(\psi)\mid\psi\in\Psi_1\bigr\}.$$

Si l'ensemble Λ_1 a un plus grand élément $\bar\lambda$, nous choisissons ψ dans Ψ_1 avec $\lambda(\psi)=\bar\lambda$. Nous déduisons alors de la proposition 2.9 que tout polynôme-clé ϕ' pour la valuation augmentée $\mu_1=[\mu\ ;\ \mu_1(\psi)=\delta_1]$ qui μ_1-divise P est de degré $\deg\phi'>\deg\psi$. Nous trouvons alors comme précédemment que pour toute pente δ' de la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_1}(\psi')$, la valuation augmentée $\mu'=[\mu_1\ ;\ \mu'(\phi')=\delta']$ satisfait les conditions i) et ii) du théorème avec $\deg\phi'>\deg\phi$.

Supposons maintenant que l'ensemble Λ_1 n'a pas de plus grand élément. Nous choisissons un polynôme ψ appartenant à Ψ_1 tel que l'indice a_1, $0<a_1\leqslant m$ du deuxième sommet $\bigl(a_1,\mu(q_{a_1})\bigr)$ du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ associé à ψ est minimal, et nous appelons encore δ_1 la pente de la première

face de $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ et μ_1 la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu\ ;\ \mu_1(\psi) = \delta_1]$. Nous considérons le sous-ensemble Ψ_1^* de Ψ_1 défini par

$$\Psi_1^* \;=\; \big\{\psi' \mid \psi' \text{ polynôme-clé pour } \mu_1 \text{ et } \psi' \underset{\mu_1}{\mid} P\big\}.$$

Alors, d'après la proposition 2.9, pour tout polynôme ψ' appartenant à Ψ_1^* les parties principales $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ et $\mathcal{PN}_\mu(\psi')^+$ des polygones de Newton associés respectivement à ψ et ψ' ont même nombre de faces, coïncident sur $[a_1, a_s] \times \Gamma$ et de plus $\big(a_1, \mu(q_{a_1})\big)$ est un sommet commun aux deux polygones de Newton. Nous définissons aussi le sous-ensemble Λ_1^* de Λ_1 par :

$$\Lambda_1^* \;=\; \big\{\lambda(\psi') = \mu(q_0(\psi')) \mid \psi' \in \Psi_1^*\big\}.$$

L'ensemble Λ_1^* n'a pas de plus grand élément et nous pouvons écrire

$$\Lambda_1^* \;=\; \{\lambda_\alpha \mid \alpha \in A\},$$

où A est un ensemble totalement ordonné tel que $\lambda_\alpha < \lambda_\beta$ pour $\alpha < \beta$ dans A. Pour tout α dans A nous choisissons un polynôme ψ_α dans Ψ_1^* avec $\lambda(\psi_\alpha) = \lambda_\alpha$. Nous notons γ_α la pente de la première face du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_\alpha)$ associé à ϕ_α, et nous définissons la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, où γ_α est défini par l'égalité $\lambda_\alpha = \mu(q_{a_1}) + a_1\gamma_\alpha$.

La famille $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ est une famille pseudo-convergente de valuations, et nous définissons l'ensemble

$$\tilde{\Phi}(A) \;=\; \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f) \text{ pour tout } \alpha < \beta \text{ dans } A\}.$$

Nous voulons montrer que la famille de polynômes $\big(\phi_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ associée à la famille $\mathcal{C}$ est non convergente, c'est-à-dire que la famille $\mathcal{C}$ est une famille admissible pseudo-convergente, ce qui est équivalent à montrer qu'il n'existe pas de polynôme unitaire ψ' avec $\deg \psi' = d$ appartenant à $\tilde{\Phi}(A)$. Supposons qu'il existe un tel polynôme ψ', alors nous déduisons de l'inégalité $\mu_\alpha(\psi') < \mu_\beta(\psi')$ que pour tout α dans A, ψ' est un polynôme-clé pour la valuation μ_α et nous pouvons écrire ψ' sous la forme $\psi' = \psi_\alpha + h_\alpha$ avec $\mu(h_\alpha) = \gamma_\alpha$ et $\deg h_\alpha < d$, par conséquent ψ' appartient à Ψ_1^*. Il existe alors θ dans A tel que $\lambda(\psi') = \lambda_\theta$, et nous posons $\psi' = \psi_\theta + h_\theta$. Comme ψ' est un polynôme-clé pour μ_α et comme $\mu_\alpha(\psi') = \gamma_\alpha$, nous avons l'égalité

$$\mu_\alpha(P) \;=\; \inf\big(\mu(q'_j) + j\gamma_\alpha\ ;\ 0 \leqslant j \leqslant m\big),$$

où $P = q'_m\psi'^m + \dots q'_0$ est le développement de P selon les puissances de ψ'. Nous en déduisons l'inégalité $\lambda_\theta = \mu(q'_0) \geqslant \mu_\alpha(P) = \lambda_\alpha$ pour tout α dans A, ce qui contredit le fait que Λ_1^* n'a pas de plus grand élément.

Par construction nous avons $\mu_\alpha(P) = \lambda_\alpha$, le polynôme P appartient à $\tilde{\Phi}(A)$ et par conséquent P est A-divisible par tout polynôme-clé limite ϕ' pour la famille $\mathcal{C}$.

Nous choisissons un polynôme-clé limite ϕ' et nous considérons le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi')$ défini à partir du développement de P selon les puissances de ϕ'. Alors pour toute pente δ' d'une face de la partie principale $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi')^+$ du polygone de Newton, nous pouvons définir la valuation augmentée limite $\mu' = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha \in A}\ ;\ \mu'(\phi') = \delta'\right]$, et nous vérifions que la valuation μ', qui par définition est une valuation bien spécifiée, satisfait encore les conditions i) et ii) du théorème. □

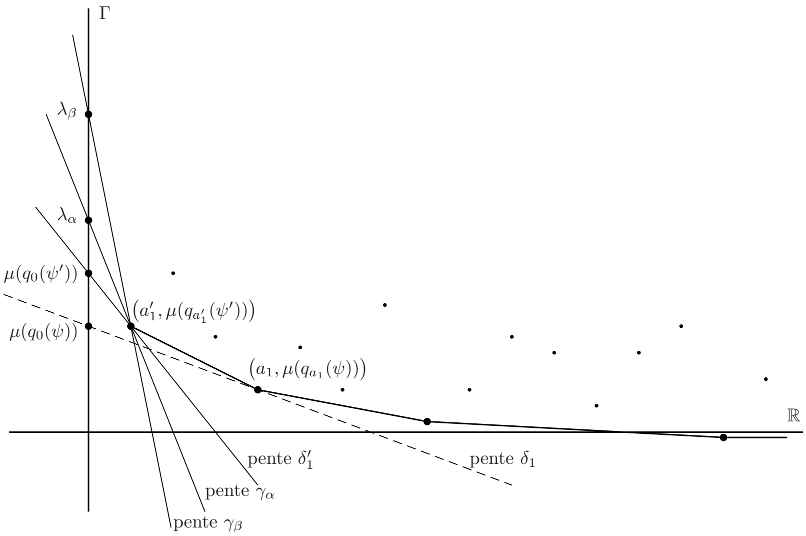

Figure 2.1 : Polygones de Newton associés à la valuation μ et aux polynômes ψ, ψ' et (ψ_α)

Définition 2.10. — *Pour tout polynôme irréductible unitaire P de $K[x]$ et pour toute valuation bien spécifiée μ de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ définie par un polynôme ϕ, nous définissons l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu)$ des pseudo-valuations ζ appartenant à $\mathcal{E}_P$ vérifiant $\mu \leqslant \zeta$ et $\mu(\phi) = \zeta(\phi)$.*

Nous notons $b_P(\mu)$ le cardinal de cet ensemble.

Par définition μ est une valuation approchée de P si et seulement si l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu)$ est non vide, c'est alors l'ensemble des pseudo-valuations de $\mathcal{E}_P$ auxquelles μ est associée et $b_P(\mu)$ est le nombre de ces pseudo-valuations.

Comme précédemment, nous fixons un polynôme irréductible unitaire P de $K[x]$ et soit μ une valuation approchée de P définie par le polynôme ϕ, $\mu = [\mu_- \ ; \ \mu(\phi) = \gamma]$ ou $\mu = \big[\mathcal{C} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma\big]$, avec $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$. Soit $\mu' = [\mu \ ; \ \mu'(\phi') = \gamma']$ une valuation augmentée définie par un polynôme-clé ϕ' vérifiant $\deg \phi' \geqslant \deg \phi$ et non μ-équivalent à ϕ. Nous avons alors le résultat suivant.

Lemme 2.11. — *L'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu')$ est le sous-ensemble de $\mathcal{B}_P(\mu)$ constitué des pseudo-valuations ζ vérifiant $\zeta(\phi') = \mu'(\phi') = \gamma'$.*

Démonstration. — Si ζ appartient à $\mathcal{B}_P(\mu')$, nous avons $\mu' \leqslant \zeta$ et $\zeta(\phi') = \mu'(\phi') = \gamma'$. Par conséquent nous avons aussi $\mu \leqslant \zeta$ et $\zeta(\phi) = \mu'(\phi) = \mu(\phi)$.

Réciproquement si ζ est une pseudo-valuation vérifiant $\mu \leqslant \zeta$ et $\gamma' \leqslant \zeta(\phi')$, la valuation augmentée μ' associée au polynôme ϕ' et à la valeur γ' vérifie aussi $\mu' \leqslant \zeta$. □

De l'inclusion $\mathcal{B}_P(\mu') \subset \mathcal{B}_P(\mu)$ pour μ' valuation augmentée pour la valuation μ et du fait que les ensembles $\mathcal{B}_P(\mu)$ sont finis, nous déduisons que pour toute famille admissible pseudo-convergente $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ il existe α_0 tel que les ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_\alpha)$ sont égaux pour $\alpha \geqslant \alpha_0$. Nous pouvons définir alors l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ par

$$\mathcal{B}_P(\mathcal{C}) = \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{B}_P(\mu_\alpha) = \mathcal{B}_P(\mu_\alpha) \quad \text{pour } \alpha \text{ suffisamment grand.}$$

Nous voulons préciser comment se comportent les ensembles $\mathcal{B}_P(\mu)$ quand nous passons de la valuation approchée μ de P aux valuations augmentées μ' pour μ qui sont encore des valuations approchées de P. Nous considérons la décomposition de P en facteurs μ-irréductibles,

$$P \underset{\mu}{\sim} e\phi_0^{n_0}\phi_1^{n_1}\ldots\phi_t^{n_t},$$

avec $\phi_0 = \phi$ et les ϕ_j sont des polynômes-clés pour μ non μ-équivalents entre eux, et $n_0 \geqslant 0$ et $n_j \geqslant 1$ pour $j = 1, \ldots, t$, et nous appelons n l'ordre de μ_--divisibilité ou de $\mathcal{C}$-divisibilité de P par ϕ. Nous déduisons alors du théorème 2.6 que nous avons $n \geqslant 1$ et $t \geqslant 1$.

Si P est un polynôme-clé pour la valuation μ nous avons $t = 1$, $n_0 = 0$ et $n_1 = 1$, sinon pour tout $i = 1, \ldots, t$ nous considérons le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)$ associé au polynôme ϕ_i et nous appelons

$$\delta_1^{(i)} \ > \ldots > \ \delta_{s_i}^{(i)}$$

les pentes des faces de la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)^+$. Nous pouvons alors définir pour tout $i = 1, \ldots, t$ et tout $j = 1, \ldots, s_i$, la valuation augmentée

$$\mu_j^{(i)} \ = \ [\mu \ ; \ \mu_j^{(i)}(\phi_i) = \delta_j^{(i)}]$$

associée au polynôme-clé ϕ_i et à la valeur $\delta_j^{(i)} > \mu(\phi_i)$.

Proposition 2.12. — *Si P est un polynôme-clé pour la valuation μ, l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu)$ contient une seule pseudo-valuation ζ définie par $\zeta = [\mu\ ;\ \zeta(P) = +\infty]$.*

Sinon, pour tout $i = 1, \ldots, t$ et tout $j = 1, \ldots, s_i$, la valuation $\mu_j^{(i)}$ est une valuation approchée du polynôme P, et l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu)$ est l'union disjointe des ensembles $\mathcal{B}_P\big(\mu_j^{(i)}\big)$. En particulier nous en déduisons l'égalité

$$b_P(\mu) = \sum_{i,j} b_P\big(\mu_j^{(i)}\big).$$

Démonstration. — Soit $\mu_j^{(i)}$ la valuation augmentée associée au polynôme-clé ϕ_i et à la valeur $\delta_j^{(i)} > \mu(\phi_i)$. Par hypothèse ϕ_i est un μ-diviseur du polynôme P. Si nous écrivons $P = q_m\phi_i^m + \ldots + q_0$ le développement de P selon les puissances de ϕ_i et si $\delta_j^{(i)}$ est la pente de la face du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)$ comprise entre les sommets $\big(a_{j-1}, \mu(q_{a_{j-1}})\big)$ et $\big(a_j, \mu(q_{a_j})\big)$, alors P est $\mu_j^{(i)}$-équivalent à $q_{a_j}\phi_i^{a_j} + \ldots + q_{a_{j-1}}\phi_i^{a_{j-1}}$ et par conséquent il existe un polynôme-clé ψ pour la valuation $\mu_j^{(i)}$ non $\mu_j^{(i)}$-équivalent à ϕ_i qui $\mu_j^{(i)}$-divise P. Nous déduisons du théorème 2.6 que la valuation $\mu_j^{(i)}$ est une valuation approchée de P.

Soit ζ appartenant à $\mathcal{B}_P(\mu)$, alors nous avons $\mu \leqslant \zeta$ et nous pouvons définir les ensembles $\tilde{\Phi}(\mu,\zeta)$ et $\Phi(\mu,\zeta)$. Nous déduisons de l'égalité $\mu(\phi) = \zeta(\phi)$ que tout polynôme-clé ψ appartenant à $\Phi(\mu,\zeta)$ vérifie $\deg\psi \geqslant \deg\phi$ et n'est pas μ-équivalent à ϕ. De plus comme P appartient à $\tilde{\Phi}(\mu,\zeta)$, le polynôme ψ μ-divise P.

Si P est un polynôme-clé pour μ alors nous avons forcément $\psi = P$ et il existe une unique pseudo-valuation ζ appartenant à $\mathcal{B}_P(\mu)$ qui est définie par $\zeta = [\mu\ ;\ \zeta(P) = +\infty]$.

Sinon, nous pouvons supposer que le polynôme-clé ψ est l'un des ϕ_i et si nous posons $\delta = \zeta(\phi_i)$ la valuation augmentée $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi_i) = \delta]$ est une valuation approchée du polynôme P associée à ζ, c'est-à-dire que nous pouvons supposer que ζ appartient à $\mathcal{B}_P(\mu')$. La valeur δ est égale à la pente d'une des faces de la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)$, c'est une conséquence de l'inégalité $\mu'(P) < \zeta(P)$, par conséquent la valuation μ' est l'une des valuations $\mu_j^{(i)}$.

Il reste à montrer que les ensembles $\mathcal{B}_P\big(\mu_j^{(i)}\big)$ sont disjoints. Si la pseudo-valuation ζ appartient à $\mathcal{B}_P\big(\mu_j^{(i)}\big)$, alors nous avons $\zeta(\phi_i) = \delta_j^{(i)}$, par conséquent les ensembles $\mathcal{B}_P\big(\mu_j^{(i)}\big)$ et $\mathcal{B}_P\big(\mu_k^{(i)}\big)$ sont disjoints pour $j \neq k$. De plus pour $l \neq i$, le polynôme ϕ_l n'est pas μ-divisible par ϕ_i, par conséquent nous avons $\zeta(\phi_l) = \mu(\phi_l)$ pour tout ζ dans $\mathcal{B}_P\big(\mu_j^{(i)}\big)$ et comme nous avons $\delta_k^{(l)} > \mu(\phi_l)$ pour tout $k = 1, \ldots, s_l$, la pseudo-valuation ζ n'appartient à aucun des ensembles $\mathcal{B}_P\big(\mu_k^{(l)}\big)$. □

Remarque 2.13. — Nous pouvons énoncer un résultat similaire pour la valuation ν de K. Plus précisément, si nous appelons $\delta_1 > \ldots > \delta_s$ les pentes des faces du polygone de Newton $\mathcal{PN}(P;\nu;x)$, nous pouvons définir pour tout $j = 1, \ldots, s$ la valuation augmentée $\mu_j = [\nu\ ;\ \mu_j(x) = \delta_j]$. Alors chacune des valuations μ_j ainsi définie est une valuation approchée de P et l'ensemble $\mathcal{E}_P$ des pseudo-valuations ζ de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ de noyau (P) est égal à l'union disjointe des ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_j)$.

Nous avons un résultat similaire pour l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ associé à une famille pseudo-convergente. Soit $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ une famille admissible pseudo-convergente de valuations approchées de P et soit ϕ un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$. Nous considérons le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mathcal{C}}(\phi)$ associé à ϕ et nous appelons $\delta_1 > \ldots > \delta_s$ les pentes de la partie principale $\mathcal{PN}_{\mathcal{C}}(\phi)^+$, et nous définissons pour $j = 1, \ldots, s$ la valuation augmentée limite $\mu_i = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}\ ;\ \mu_i(\phi) = \delta_i\big]$ associée au polynôme ϕ et à la valeur δ_i.

Proposition 2.14. — *Si P est un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ contient une seule pseudo-valuation ζ définie par $\zeta = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}\ ;\ \mu_i(P) = +\infty\big]$.*

Sinon, pour tout $i = 1, \ldots, s$ la valuation μ_i est une valuation approchée du polynôme P, et l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ est l'union disjointe des ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_i)$.

Démonstration. — Comme précédemment, nous vérifions que les ensembles $\mathcal{B}_P(\mu_i)$ sont disjoints, car si ζ appartient à $\mathcal{B}_P(\mu_i)$ nous avons $\zeta(\phi) = \delta_i$, et qu'ils sont inclus dans $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$, car nous avons $\mu_\alpha \leqslant \mu_i$ et $\mu_\alpha(\phi_\alpha) = \mu_i(\phi_\alpha) = \zeta(\phi_\alpha)$.

Soit ζ appartenant à $\mathcal{B}_P(\mathcal{C})$ et supposons que P n'est pas un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$, alors P est A-divisible par le polynôme-clé limite ϕ et la valuation augmentée limite $\mu = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}\ ;\ \mu_i(\phi) = \zeta(\phi)\big]$ est une valuation approchée de P. Comme précédemment nous montrons que les seules valeurs possibles pour $\zeta(\phi)$ sont les pentes δ_i de la partie principale $\mathcal{PN}_{\mathcal{C}}(\phi)^+$ du polygone de Newton, par conséquent la valuation μ est l'une des valuations μ_i. □

Remarque 2.15. — La décomposition de P en facteurs μ-irréductibles $P \underset{\mu}{\sim} e\phi_0^{n_0}\phi_1^{n_1}\ldots\phi_t^{n_t}$ est unique à μ-équivalence près, mais si nous remplaçons un polynôme ϕ_i par un polynôme μ-équivalent ϕ_i' distinct de ϕ_i, nous pouvons obtenir un polygone de Newton dont la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i')^+$ est différente de la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\phi_i)^+$ de celui associé à ϕ_i. Par conséquent nous pouvons trouver une autre famille de valuations $\mu_j'^{(i)}$, avec $1 \leqslant j \leqslant s_i'$, avec éventuellement $s_i \neq s_i'$, mais nous déduisons de la démonstration de la proposition que l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mu, \phi_i) = \bigcup_{j=1}^{s_i} \mathcal{B}_P\big(\mu_j^{(i)}\big)$ ne dépend que de la classe de μ-équivalence du polynôme-clé ϕ_i, c'est-à-dire de son image $H_\mu(\phi_i)$ dans l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu(K[x])$.

De même la partie principale $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)^+$ du polygone de Newton dépend du polynôme-clé limite ϕ choisi, mais l'ensemble $\mathcal{B}_P(\mathcal{C}) = \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{B}_P\big(\mu_i\big)$ ne dépend que de la famille $\mathcal{C}$.

3. Cas d'un corps valué hensélien

Nous voulons décrire les valuations approchées d'un polynôme P, et les polygones de Newton associés dans le cas où le corps valué (K, ν) est hensélien. Nous rappelons qu'un corps valué (K, ν) est hensélien si pour toute extension algébrique L de K il existe un unique prolongement de ν à L.

Rappelons que si P un polynôme irréductible séparable unitaire appartenant à $K[x]$ et si L est l'extension algébrique de K définie par P, $L = K[x]/(P)$, il existe une bijection entre l'ensemble $\mathcal{E}_P$ des pseudo-valuations ζ appartenant à $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ ayant pour noyau l'idéal (P) et l'ensemble des valuations ζ de L qui prolongent ν. Nous allons donc étudier ce qui se passe pour les valuations approchées μ de P quand l'ensemble $\mathcal{E}_P$ contient un seul élément.

Théorème 3.1. — *Soit P un polynôme irréductible unitaire tel que l'ensemble $\mathcal{E}_P$ contienne une seule pseudo-valuation ζ.*

Pour toute valuation approchée μ de P définie par un polynôme ϕ, la décomposition de P en facteurs μ-irréductibles est de la forme

$$P \underset{\mu}{\sim} e\, \psi^n,$$

avec e polynôme μ-inversible, ψ polynôme-clé pour μ non μ-équivalent à ϕ et $n \geqslant 1$. De plus si ψ est différent de P le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ a une seule face et celle-ci est de pente $\delta > \mu(\psi)$.

Soit $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ une famille simple admissible pseudo-convergente de valuations approchées de P, alors si P n'est pas un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$, pour tout polynôme-clé limite ϕ le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)$ a une seule face et celle-ci est de pente $\delta > \mu_\alpha(\psi)$ pour tout α dans A.

Dire que les polygones de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ ou $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)$ ont une seule face et que la pente δ de celle-ci vérifie les inégalités $\delta > \mu(\psi)$ ou $\delta > \mu_\alpha(\psi)$ pour tout α dans A, est équivalent à dire que ces polygones de Newton ont une seule face et sont égaux à leurs parties principales.

Démonstration. — Nous déduisons de la proposition 2.12 que pour toute valuation approchée μ du polynôme P, il existe un unique polynôme-clé ψ pour la valuation μ non μ-équivalent à ϕ qui μ-divise P, c'est-à-dire que nous avons les égalités $t = 1$ et $\psi = \phi_1$, et que la partie principale $\mathcal{PN}_\mu(\psi)^+$ du polygone de Newton associé à ψ possède une seule face, c'est-à-dire que nous avons l'égalité $s_1 = 1$. Il reste à montrer que P n'est pas μ-divisible par le polynôme ϕ, c'est-à-dire que nous avons $n_0 = 0$, et que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ est égal à sa partie principale, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de face de pente $\delta \leqslant \mu(\psi)$.

Pour toute famille admissible pseudo-convergente de valuations approchées $\mathcal{C}$ et pour tout polynôme-clé limite ϕ pour $\mathcal{C}$ nous avons toujours P qui est A-équivalent à $e\phi^n$, avec e polynôme A-inversible et $n \geqslant 1$, et de même nous déduisons de la proposition 2.14 que la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)^+$ possède une seule face, il reste à montrer que le polygone de Newton est égal à sa partie principale.

Nous allons procéder par récurrence sur le degré du polynôme ϕ définissant la valuation approchée μ, ou des polynômes ϕ_α définissant les valuations approchées de la famille pseudo-convergente $\mathcal{C}$, le cas $\deg\phi = 1$ étant une conséquence immédiate de la remarque 2.13.

Premièrement, nous allons montrer que si μ est une valuation approchée du polynôme P, $\mu = [\mu_- \ ; \ \mu(\phi) = \gamma]$, telle que ϕ soit le seul μ_--diviseur irréductible de P et telle que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_-}(\phi)$ ait une seule face, alors P a un seul μ-diviseur premier ψ, avec ψ polynôme-clé pour μ non μ-équivalent à ϕ, et le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ a une seule face.

Soit $P = q_m\phi^m + \ldots + q_0$ le développement de P selon les puissances de ϕ, alors le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_-}(\phi)$ a une seule face si et seulement si il existe δ tel que nous ayons $\mu_-(q_0) = \mu_-(q_m) + m\delta \leqslant \mu_-(q_j) + j\delta$ pour tout j, et comme μ est une valuation approchée de P nous avons $\delta = \gamma$, c'est à dire que nous avons l'égalité suivante

$$\mu(P) = \mu_-(q_0) = \mu_-(q_m) + m\gamma.$$

Nous en déduisons que P n'est pas μ-divisible par ϕ, par conséquent la décomposition de P en facteurs μ-irréductibles est de la forme $P \underset{\mu}{\sim} e\psi^n$, avec ψ non μ-équivalent à ϕ. Nous en déduisons aussi que le degré effectif en ϕ pour la valuation μ, de P, $D_\phi(P)$, est égal à m.

Comme ψ est un polynôme-clé pour la valuation augmentée ϕ nous avons l'égalité

$$\psi \ = \ \phi^a + \ldots + h_0,$$

avec $\mu(\psi) = a\gamma = \mu_-(h_0)$ ([1] Theorem 9.4), d'où $D_\phi(\psi) = a$, et comme le degré effectif est additif nous trouvons $m = D_\phi(P) = nD_\phi(\psi) = na$.

Soit $P = p_r\psi^r + \ldots + p_0$ le développement de P selon les puissances de ψ, alors nous avons l'inégalité $r \geqslant n$. Nous déduisons des développements de P selon les puissances respectivement de ϕ et de ψ

$$(m+1)\ \deg\phi \ > \ \deg P \ \geqslant \ r\ \deg\psi \ = \ ra\ \deg\phi,$$

d'où $na = m \geqslant ra$, par conséquent nous avons $r = n$ et $q_m = 1$. L'ordre de μ-divisibilité de P par ψ est alors maximal, ce qui entraîne que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ est égal à sa partie principale, par conséquent il a une seule face et celle-ci est de pente $\delta' > \mu(\psi)$.

Deuxièmement, nous allons montrer que si μ est une valuation approchée du polynôme P de la forme $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu(\phi) = \gamma\right]$, telle que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)$ possède une seule face, alors comme dans le cas précédent P a un seul μ-diviseur premier ψ, avec ψ polynôme-clé pour μ non μ-équivalent à ϕ, et le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ a une seule face.

Comme le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)$ possède une seule face, l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité de P est maximal, et si nous écrivons encore $P = q_m\phi^m + \ldots + q_0$ le développement de P selon les puissances de ϕ il existe une valeur δ telle que nous ayons

$$\mu_A(q_0) = \mu_A(q_m) + m\delta \ \leqslant \ \mu_A(q_j) + j\delta \quad \text{pour tout } j,$$

et comme μ est une valuation approchée de P nous avons $\gamma = \delta$.

Comme précédemment, nous déduisons de l'égalité $\mu(P) = \mu_A(q_0)$ que P n'est pas μ-divisible par ϕ et le même raisonnement sur le degré effectif $D_\phi(P)$ montre encore que l'ordre de μ-divisibilité de P par un polynôme-clé ψ pour μ est maximal, c'est-à-dire que le poygone de Newton $\mathcal{PN}_\mu(\psi)$ a une seule face.

Enfin, nous allons montrer que si $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ est une famille admissible pseudo-convergente de valuations approchées de P telle que pour tout α le polynôme P n'est pas μ_α-divisible par ϕ_α et telle que pour tout $\alpha < \beta$ le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_\alpha}(\phi_\beta)$ possède une seule face, alors pour tout polynôme-clé limite ϕ pour $\mathcal{C}$ le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\mathcal{C}(\phi)$ est égal à sa partie principale.

Nous pouvons écrire pour tout α le développement de ϕ selon les puissances de ϕ_α,

$$\phi \ = \ g_{a,\alpha}\phi_\alpha^a + \ldots + g_{0,\alpha},$$

et soit k_0 l'entier tel que nous ayons l'égalité $\mu_\alpha(\phi) = \lambda_0 + k_0\gamma_\alpha$ pour α suffisamment grand. Alors pour tout $\beta > \alpha$, nous avons

$$\mu_\beta(\phi) = \inf\big(\mu_\alpha(g_{j,\alpha}) + j\gamma_\beta; 0 \leqslant j \leqslant a\big) = \lambda_0 + k_0\gamma_\beta.$$

Nous en déduisons $D_{\phi_\beta}(\phi) = k_0$ où D_{ϕ_β} est le degré effectif en ϕ_β pour la valuation μ_α, et nous avons $1 \leqslant k_0 \leqslant a$.

Soit $P = q_m\phi^m + \ldots + q_0$ le développement de P selon les puissances de ϕ, alors si n est l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité de P, nous avons

$$P \underset{\mu_\alpha}{\sim} q_n\phi^n \quad \text{et} \quad \mu_\alpha(P) \ = \ \lambda + (nk_0)\gamma_\alpha$$

pour α suffisamment grand, avec $1 \leqslant n \leqslant m$. Par hypothèse pour tout $\alpha < \beta$, μ_α est une valuation approchée pour P et ϕ_β est un μ_α-diviseur de P, par conséquent P est μ_α-équivalent à $e\phi_\beta^s$, et nous avons $D_{\phi_\beta}(P) = s$ avec $P = p_s\phi_\beta^s + \ldots + p_0$. Nous trouvons alors l'égalité $s = D_{\phi_\beta}(q_n\phi^n) = nk_0$ car q_n est μ_β-inversible.

Nous déduisons des développements de P selon les puissances de ϕ et de ϕ_β et du développement de ϕ selon les puissances de ϕ_β les inégalités

$$(s+1)\deg\phi_\beta > \deg P \geqslant m\deg\phi \text{ et } \deg\phi = a\deg\phi_\beta + \deg g_{a,\alpha} \geqslant k_0\deg\phi_\beta,$$

d'où $s \geqslant mk_0$, c'est-à-dire que nous avons l'inégalité $n \geqslant m$.

Par conséquent, nous avons $n = m$, l'ordre de $\mathcal{C}$-divisibilité de P est maximal et le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mathcal{C}}(\phi)$ est égal à sa partie principale. □

Remarque 3.2. — Nous déduisons de la démonstration du théorème que si P est un polynôme tel que $\mathcal{E}_P$ contienne une seule pseudo-valuation ζ, toute sous-famille admissible pseudo-convergente $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ de la famille admissible associée à ζ vérifie la conclusion du théorème 3.7 de [6] : si ϕ est un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C}$, le développement de ϕ selon les puissances des polynômes ϕ_α est de la forme

$$\phi = \phi_\alpha^a + g_{a-1,\alpha}\phi_\alpha^{a-1} + \ldots + g_{0,\alpha},$$

avec $\mu_\alpha(\phi) = a\gamma_\alpha$ pour α suffisamment grand.

4. Exemple

Nous considérons un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle et nous prenons pour corps valué (K, ν) l'extension transcendante pure $K = k(y)$ munie de la valuation y-adique, $\nu = \nu_y$. Nous choisissons un polynôme unitaire irréductible P dans $K[x]$ qui appartient aussi à l'anneau des polynômes $k[x,y]$ et nous définissons l'extension L de K par $L = K[x]/(P)$. Nous appelons respectivement S et R les anneaux suivants, $S = k[y]$ et $R = k[x,y]/(P)$, dont les corps de fractions respectifs sont K et L, nous supposons que R est fini sur S de dimension $d = \deg P = [L : K]$, et qu'il existe un seul idéal premier $\mathfrak{n}$ de R au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{m} = (y)$ de S. En particulier l'anneau local $R_{\mathfrak{n}}$ domine l'anneau local $S_{\mathfrak{m}}$.

Nous notons $\bar{R}$ la clôture intégrale de R dans L, alors les anneaux S et $\bar{R}$ sont réguliers de dimension 1, et $\bar{R}$ est la fermeture intégrale de S dans l'extension finie L de K. La valuation ν est l'unique valuation de K, triviale sur k, dont le centre sur S est égal à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire que ν est l'unique valuation de K dont l'anneau de valuation V_ν vérifie $S \subset V_\nu$ et $S \cap max(V_\nu) = \mathfrak{m}$, et l'anneau local $S_{\mathfrak{m}}$ est en fait égal à l'anneau V_ν. Nous en déduisons que les valuations μ_i de L qui prolongent la valuation ν correspondent aux idéaux premiers de $\bar{R}$ au-dessus de $\mathfrak{m}$, plus précisément l'application qui à une valuation μ de L associe son centre $\bar{R} \cap max(V_\mu)$ sur $\bar{R}$ induit une bijection entre l'ensemble $\mathcal{E}(L,\nu)$ des valuations de L qui prolongent la valuation ν et l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{q}$ de R vérifiant $\mathfrak{q} = S \cap \mathfrak{m}$, nous avons encore l' anneau local $\bar{R}_{\mathfrak{q}}$ qui est égal à l'anneau de valuation V_μ.

Les idéaux premiers de $\bar{R}$ au-dessus de l'idéal $\mathfrak{m}$ de S sont exactement les idéaux premiers de $\bar{R}$ au-dessus de l'idéal $\mathfrak{n}$ de R, et correspondent aux *branches analytiques* de l'anneau R, qui sont les idéaux premiers minimaux de R^{hens}, le hensélisé de l'anneau local $R_{\mathfrak{n}}$, ou ce qui revient au même qui sont les idéaux premiers minimaux de $\hat{R}$ le complété $\mathfrak{n}$-adique de R (*cf.* [3], Proposition 1 du Chapitre IX).

Géométriquement, nous pouvons considérer la courbe plane affine C définie par $C = \operatorname{Spec} R$, l'anneau local $R_{\mathfrak{n}}$ est l'anneau local de C au point o correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{n}$ de R, les idéaux premiers minimaux de R^{hens} correspondent bien aux branches analytiques de la courbe C en o. La normalisée $\bar{C}$ de la courbe C est définie par $\bar{C} = \operatorname{Spec} \bar{R}$ et les idéaux $\mathfrak{q}$ au-dessus de $\mathfrak{n}$ correspondent aux points de $\bar{C}$ au-dessus du point o.

Si nous écrivons le polynôme P de $K[x]$ sous la forme d'un polynôme f appartenant à $k[x,y]$,

$$P(x) \;=\; f(x,y) \;=\; \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j,$$

par définition le polygone de Newton $\mathcal{PN}(f)$ associé à f est l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de $\Gamma(f) = \operatorname{Supp}(f) + (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, avec $\operatorname{Supp}(f) = \big\{(i,j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid a_{ij} \neq 0\big\}$.

Nous avons l'égalité $P = p_d x^d + \ldots + p_0$ avec $p_i = \sum_j a_{ij} y^j$. Comme par hypothèse le polynôme P est unitaire, si nous appelons d son degré, nous avons $a_{ij} = 0$ pour $i > d$ et pour $i = d$ et $j > 0$ et nous avons $p_0 = a_{d0} = 1$. Nous vérifions alors que le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\nu(\phi_1)$ associé à P, au polynôme $\phi_1 = x$ et à la valuation y-adique $\nu = \nu_y$ est égal à $\mathcal{PN}(f) \cap ([0, d] \times \mathbb{R})$.

Exemple 4.1. — Nous reprenons l'exemple 3.2 étudié dans [9],

$$P \ = \ x^4 + y^2 x^3 + y^3(y^2 - 2)x^2 - y^5 x + y^6.$$

Nous allons montrer comment nous trouvons les deux valuations μ et μ' de $L = K[x]/(P)$ qui prolongent la valuation y-adique ν du corps $K = k(y)$.

Nous vérifions aussi le résultat de la proposition 2.12 de [9], comme la singularité n'est pas unibranche, pour toute valuation μ de L qui prolonge la valuation ν, la famille admissible $\mathcal{A}(\mu)$ associée à μ n'est pas finie, en particulier nous allons obtenir une famille infinie de polygones de Newton correspondant à une sous-famille pseudo-convergente de la famille $\mathcal{A}(\mu)$.

Comme la valuation $\nu = \nu_y$ est de rang 1 nous pouvons prendre $\Gamma = \mathbb{R}$.

Pour toute pseudo-valuation ζ de $K[x]$ de noyau l'idéal (P), la première valuation μ_1 de la famille $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\zeta)$, qui est de la forme $\mu_1 = [\nu\ ;\ \mu_1(\phi_1) = \gamma_1]$ avec $\phi_1 = x$, est déterminée par la valeur γ_1. Nous construisons le polygone de Newton $\mathcal{PN}_\nu(\phi_1)$, par définition c'est l'enveloppe convexe de $\mathrm{Supp}_{(\nu;\phi_1)}(P) + (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$, avec $\mathrm{Supp}_{(\nu;\phi_1)}(P) = \big\{(6,0), (5,1), (3,2), (2,3), (0,4)\big\}$.

Le polygone $\mathcal{PN}_\nu(\phi_1)$ a une seule face, de pente $\delta_1 = 3/2$, alors γ_1 ne peut prendre que la valeur $\gamma_1 = 3/2$, et il existe une seule possibilité pour la valuation μ_1,

$$\mu_1 = [\nu\ ;\ \mu_1(\phi_1) = 3/2].$$

Pour trouver les μ_1-diviseurs μ_1-irréductibles de P nous écrivons

$$P \underset{\mu_1}{\sim} x^4 - 2y^3x^2 + y^6 \ = \ (x^2 - y^3)^2,$$

et nous trouvons le polynôme-clé ϕ_2 qui μ_1-divise P, $\phi_2 = x^2 - y^3$.

Le développement de P selon les puissances de ϕ_2, $P = {\phi_2}^2 + y^2(x + y^3)\phi_2 + y^8$ nous permet de trouver le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_1}(\phi_2)$. Comme les pentes $\delta_1 = 9/2$ et $\delta_2 = 7/2$ sont strictement supérieures à $\mu_1(\phi_2) = 3$, le polygone de Newton est égal à sa partie principale, $\mathcal{PN}_{\mu_1}(\phi_2) = \mathcal{PN}_{\mu_1}(\phi_2)^+$, et il existe deux choix possibles pour la valuation augmentée associée au polynôme-clé ϕ_2,

$$\mu_2^{(1)} = [\mu_1 \ ; \ \mu_2(\phi_2) = \gamma_2^{(1)}] \quad \text{avec} \quad \gamma_2^{(1)} = \delta_1 = 9/2 \ ,$$

$$\mu_2^{(2)} = [\mu_1 \ ; \ \mu_2(\phi_2) = \gamma_2^{(2)}] \quad \text{avec} \quad \gamma_2^{(2)} = \delta_2 = 7/2.$$

Si nous prenons $\mu_2 = \mu_2^{(2)} = [\mu_1 \ ; \ \mu_2(\phi_2) = 7/2]$ nous trouvons

$$P \underset{\mu_2}{\sim} {\phi_2}^2 + y^2 x \phi_2 = \phi_2(\phi_2 + y^2 x),$$

et nous pouvons prendre comme polynôme-clé pour la valuation μ_2 qui μ_2-divise P et non équivalent à ϕ_2, le polynôme $\phi_3 = \phi_2 + y^2 x = x^2 + y^2 x - y^3$. Le développement de P selon les puissances de ϕ_3, $P = {\phi_3}^2 + (-y^2 x + y^5)\phi_3 + (-y^7 x + y^8)$ nous permet de trouver le polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_2}(\phi_3)$.

Ce polygone a deux faces, de pentes respectives $7/2$ et $9/2$, et comme nous avons $\mu_2(\phi_3) = 7/2$, la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_2}(\phi_3)^+$ est la partie de $\mathcal{PN}_{\mu_2}(\phi_3)$ au-dessus de $[0,1]$. La seule valeur possible pour γ_3 est la pente de l'unique face de $\mathcal{PN}_{\mu_2}(\phi_3)^+$, et nous trouvons la valuation $\mu_3 = [\mu_2 \ ; \ \mu_3(\phi_3) = 9/2]$. Grâce à l'équivalence $x^2 \underset{\mu_3}{\sim} y^3$ nous avons

$$P \underset{\mu_3}{\sim} y^5 \phi_3 + y^8 \underset{\mu_3}{\sim} y^5(\phi_3 - y^3 x),$$

et nous pouvons prendre comme polynôme-clé qui μ_3-divise P le polynôme $\phi_4 = \phi_3 - y^3 x$.

Nous pouvons continuer cette construction indéfiniment, plus précisém-ment si nous appelons $\Psi^{(2)}$ l'ensemble des polynômes-clés pour μ_2 qui sont μ_2-équivalents à ϕ_3, et $\Lambda^{(2)}$ le sous-ensemble de $\Gamma = \mathbb{R}$ défini dans la démonstration du théorèm 2.6,

$$\Lambda^{(2)} = \{\lambda(\psi) = \mu_2^{(1)}(q_0(\psi)) \mid \psi \in \Psi^{(2)}\},$$

où $P = \psi^2 + q_1(\psi)\psi + q_0(\psi)$ est le développement de P selon les puissances de ψ, alors nous vérifons que $\Lambda^{(2)}$ n'a pas de plus grand élément, en fait nous avons $\Lambda^{(2)} = \{\lambda \in (1/2)\mathcal{N} \mid \lambda \geqslant 8\}$.

Nous trouvons ainsi la famille pseudo-convergente $\mathcal{C}^{(2)} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A^{(2)}}$ de valuation où nous avons posé $\Lambda^{(2)} = A^{(2)}$ et pour tout α dans $A^{(2)}$ nous avons choisi un polynôme ϕ_α appartenant à Ψ vérifiant $\lambda(\phi_\alpha) = \alpha$; et la valuation μ_α est la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu_2 \ ; \ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, avec γ_α égal à la pente de la face de la partie principale du polygone de Newton $\mathcal{PN}_{\mu_2}(\phi_\alpha)^+$, $\gamma_\alpha = \lambda_\alpha - 7/2$.

Par exemple, pour $\phi_\alpha = \phi_4 = \phi_3 - y^3 x$, nous avons $\lambda_\alpha = 9$ et $\gamma_\alpha = 11/2$.

Il suffit de vérifier que le polynôme P est un polynôme-clé limite pour cette famille pseudo-convergente $\mathcal{C}^{(2)}$ et la pseudo-valuation cherchée est alors la valuation augmentée limite

$$\zeta^{(2)} = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A^{(2)}} \; ; \; \zeta^{(2)}(P) = +\infty\right].$$

Si nous choisissons pour deuxième valuation de la famille $\mathcal{A}$ la valuation associée à la première pente du polygone de Newton, $\mu_2 = \mu_2^{(1)} = [\mu_1 \; ; \; \mu_2(\phi_2) = 9/2]$, nous pouvons définir de manière analogue les ensembles $\Psi^{(1)}$ et $\Lambda^{(1)}$, l'ensemble $\Lambda^{(1)}$ n'a pas de plus grand élément et nous obtenons de même une famille pseudo-convergente de valuations $\mathcal{C}^{(1)}\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A^{(1)}}$. Dans ce cas le polynôme P est encore un polynôme-clé limite et la pseudo-valuation cherchée est la valuation augmentée limite

$$\zeta^{(1)} = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A^{(1)}} \; ; \; \zeta^{(1)}(P) = +\infty\right].$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. MacLane, « A construction for absolute values in polynomial rings », *Trans. Amer. Math. Soc.* **40** (1936), p. 363-395.

[2] ———, « A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field », *Duke Math. J.* **2** (1936), p. 492-510.

[3] M. Raynaud, « Anneaux Locaux Henséliens », in *Lect. Notes in Math.*, vol. 169, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1970.

[4] M. Vaquié, « Extension de valuation et famille admise », en préparation.

[5] ———, « Valuations », in *Resolution of Singularities - A Research Textbook in Tribute to Oscar Zariski*, Progress. in Mathematics, vol. 181, Birkhäuser Verlag Basel, 2000.

[6] ———, « Famille admise associée à une valuation de $K[x]$ », in *Singularités franco-japonaises* (S. M. Fr., éd.), Séminaires et Congrès, vol. 10, 2005.

[7] ———, « Algèbre graduée associée à une valuation de $K[x]$ », *Advanced Studies in Pure Mathematics* **46** (2007), p. 259-271, à paraître dans Singularities in Geometry and Topology 2004.

[8] ———, « Extension d'une valuation », *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), p. 3439-3481.

[9] ———, « Famille admissible de valuations et défaut d'une extension », *Jour. of Alg.* **311** (2007), p. 859-876.

Manuscrit reçu le 9 février 2007,
accepté le 11 janvier 2008.

Michel VAQUIÉ
Université Paul Sabatier, Bât. 1R2
Institut de Mathématiques de Toulouse
UMR CNRS 5219
31062 Toulouse Cedex 9 (France)
vaquie@math.ups-tlse.fr