



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Marco BRUNELLA

Un complément à l'article de Dloussky sur le colmatage des surfaces holomorphes

Tome 58, n° 5 (2008), p. 1723-1732.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2008__58_5_1723_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

UN COMPLÉMENT À L'ARTICLE DE DLOUSSKY SUR LE COLMATAGE DES SURFACES HOLOMORPHES

par Marco BRUNELLA

RÉSUMÉ. — Nous étudions les surfaces complexes compactes qui sont des dégénéralions de surfaces de Hopf éclatées. Nous démontrons que si une telle surface S contient une hypersurface réelle globale strictement pseudoconvexe, alors S est une surface de Kato. Ceci permet d'améliorer un résultat de Dloussky, paru dans ce même journal en 1993.

ABSTRACT. — We study compact complex surfaces which are degenerations of blown-up Hopf surfaces. We prove that if such a surface S contains a strictly pseudoconvex global real hypersurface, then S is a Kato surface. This allows to improve a result by Dloussky, published in this journal in 1993.

1. Introduction

Un des problèmes principaux laissés ouverts par les travaux de Kodaira sur les surfaces complexes compactes est la classification des surfaces de classe VII_0 , *i.e.* des surfaces complexes, compactes, connexes, minimales, de dimension de Kodaira $-\infty$, et avec premier nombre de Betti égal à 1 ([6]). Les efforts conjoints de Inoue, Bogomolov, Li-Yau-Zheng et Teleman ([9]) ont conduit à la classification des surfaces de classe VII_0 dont le deuxième nombre de Betti est égal à 0 : il y a seulement les *surfaces de Hopf* et les *surfaces d'Inoue*. La classification des surfaces de classe VII_0 dont le deuxième nombre de Betti est strictement positif semble par contre encore largement ouverte, malgré des résultats partiels et importants de (entre autres) Kato, Enoki, Nakamura, Dloussky, Oeljeklaus, Toma et Teleman, voir *e.g.* [10] pour un survol récent et une bibliographie complète.

Conjecturellement, ces surfaces (qu'on appellera désormais de classe VII_0^+) devraient toutes appartenir à la classe des *surfaces de Kato* (appelées aussi surfaces à Coquille Sphérique Globale), qui s'obtiennent par un procédé de chirurgie à partir d'une boule éclatée et dont la structure est assez bien comprise ([4], [1], [6]).

D'après leur construction, ces surfaces de Kato sont des dégénération de surfaces de Hopf éclatées. Plus exactement, étant donné une surface de Kato X , on peut construire une famille lisse de surfaces complexes compactes X_t au-dessus du disque ($t \in \mathbb{D}$) telle que $X_0 \simeq X$ et X_t est, pour tout $t \neq 0$, une surface de Hopf primaire éclatée en n points, n étant le deuxième nombre de Betti de X . Mais on ne sait pas si, réciproquement, toute surface minimale qui est dégénération de surfaces de Hopf éclatées est une surface de Kato ; la confirmation de ce cas spécial jouerait un rôle significatif dans la conjecture de classification ci-dessus ([10], [3]). Remarquons qu'une dégénération minimale de surfaces de Hopf éclatées est nécessairement une surface de classe VII_0^+ .

Dans [5], Kato donne une condition suffisante (et trivialement nécessaire) pour qu'une surface X de classe VII_0^+ soit une surface de Kato : contenir une hypersurface réelle lisse $\Sigma \subset X$ ayant les trois propriétés suivantes :

- (1) $X \setminus \Sigma$ est connexe (on dira que Σ est *globale*) ;
- (2) Σ est strictement pseudoconvexe dans X ;
- (3) Σ est (abstraitement) le bord d'une surface de Stein (peut-être singulière).

Remarquons qu'une hypersurface réelle globale dans une surface X de classe VII_0 est nécessairement connexe, car $b_1(X) = 1$.

Dans [2], Dloussky étudie ce qui se passe quand l'hypersurface Σ ne satisfait plus (*a priori*) la condition (3), ou satisfait une condition plus faible. En particulier, il obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 1.1 ([2]). — *Soit X une surface de classe VII_0^+ et soit $\Sigma \subset X$ une hypersurface réelle globale strictement pseudoconvexe. Supposons qu'il existe sur un voisinage de Σ dans X une fonction holomorphe non constante. Alors X est une dégénération de surfaces de Hopf primaires éclatées.*

La preuve de Dloussky consiste à montrer l'existence dans X d'un cycle de courbes rationnelles ; le fait que X est alors une dégénération de surfaces de Hopf primaires éclatées vient d'un théorème général de Nakamura [6].

Notre objectif est de montrer que dans le théorème de Dloussky ci-dessus on peut remplacer la conclusion par l'affirmation (en principe plus forte) : X est une surface de Kato. Ce résultat s'inscrit dans le problème plus

ambitieux, déjà mentionné ci-dessus, de montrer que toute dégénération minimale de surfaces de Hopf éclatées est une surface de Kato ; nous allons résoudre ce problème dans le cas spécial des surfaces qui contiennent une hypersurface réelle avec les propriétés (1) et (2) ci-dessus.

THÉORÈME 1.2. — *Soit X une surface de classe VII_0^+ qui est dégénération de surfaces de Hopf éclatées. Supposons que X contient une hypersurface réelle globale strictement pseudoconvexe Σ . Alors X est une surface de Kato.*

COROLLAIRE 1.3. — *Sous les mêmes hypothèses du théorème 1.1, X est une surface de Kato.*

La preuve du théorème 1.2 s'appuie sur le résultat de Kato [5] : nous démontrerons que Σ est forcément le bord d'une surface de Stein. L'idée est d'utiliser la famille X_t pour plonger Σ dans une hypersurface strictement pseudoconvexe de dimension plus grande, en se ramenant ainsi au théorème de Rossi [8]. Soulignons que dans le théorème 1.2 il n'y a aucune hypothèse concernant l'existence de fonctions holomorphes non constantes au voisinage de Σ .

2. Preuve

2.1. Remarque préliminaire

Si X est une dégénération de surfaces de Hopf éclatées, son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_m$, pour un certain $m \geq 1$. Il existe donc un revêtement fini d'ordre m , $X' \rightarrow X$, dont le groupe fondamental est \mathbb{Z} ; cette surface X' est une dégénération de surfaces de Hopf *primaires* éclatées. L'hypersurface globale strictement pseudoconvexe $\Sigma \subset X$ se relève en une hypersurface globale strictement pseudoconvexe $\Sigma' \subset X'$, et si Σ' est bord d'une surface de Stein, son quotient Σ l'est aussi. Ceci signifie qu'il suffit de démontrer le théorème 1.2 dans le cas "primaire" $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$. *A posteriori* on aura donc $m = 1$, car toute surface de Kato a un groupe fondamental cyclique (il n'y a pas de surfaces de Kato "secondaires", comme pour les surfaces de Hopf).

2.2. Choix d'une déformation spéciale

Soit X une surface de classe VII_0^+ , dégénération de surfaces de Hopf éclatées. Posons $n = b_2(X) > 0$. Soit $\{X_t\}_{t \in B}$ une déformation verselle de

$X = X_0$. En suivant [3], on sait qu'il existe une hypersurface analytique complexe $H \subset B$, passant par $0 \in B$, telle que toutes les surfaces X_t , $t \in B \setminus H$, sont des surfaces de Hopf éclatées (en n points, pas nécessairement distincts). Pour tout $t_0 \in B$, la restriction de la famille $\{X_t\}$ à un voisinage de t_0 fournit une déformation verselle de X_{t_0} . Si X_{t_0} est une surface de Hopf éclatée en n points, sa déformation verselle est constituée, hors d'une hypersurface, de surfaces de Hopf éclatées en n points *distincts*. On en déduit qu'il existe une hypersurface analytique complexe $F \subset B \setminus H$ telle que toutes les surfaces X_t , $t \in B \setminus (H \cup F)$, sont des surfaces de Hopf éclatées en n points *distincts*. (Probablement, en poursuivant les arguments de [3] on peut montrer que l'adhérence de F est analytique dans B , mais nous n'aurons pas besoin de cette propriété.)

Si $\mathbb{D} \subset B$ est un petit disque holomorphe plongé passant par 0 et en position générale, l'intersection $\mathbb{D} \cap (H \cup F)$ est dénombrable et s'accumule, au plus, sur le seul point 0. On en déduit :

LEMME 2.1. — *Il existe une famille lisse $\{X_t\}_{t \in \mathbb{D}}$ telle que :*

- (1) $X_0 = X$;
- (2) *pour certains $0 < \alpha < \beta < 1$ et pour tout $t \in \mathbb{D}$, $\alpha < |t| < \beta$, X_t est une surface de Hopf éclatée en n points distincts.*

On désignera par A l'anneau $\{t \in \mathbb{D} \mid \alpha < |t| < \beta\}$. Remarquons que, étant donné $\{X_t\}$ comme dans ce lemme, on peut choisir α et β aussi proches de 0 que l'on veut.

Pour tout $t \in A$, la surface X_t contient donc n courbes exceptionnelles (rationnelles et d'auto-intersection -1) disjointes $E_t^{(1)}, \dots, E_t^{(n)}$. En utilisant la stabilité par déformations des courbes exceptionnelles, on voit que l'espace total $\cup_{t \in A} X_t$ contient n surfaces lisses disjointes $S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$ telles que, pour tout $t \in A$ et tout $j = 1, \dots, n$, $S^{(j)} \cap X_t = E_t^{(j)}$. Remarquons qu'il n'y a pas ici de problème de "monodromie" autour de $t = 0$, car l'espace total $\cup_{t \in \mathbb{D}} X_t$ est diffeomorphe à $\mathbb{D} \times X_0$ et les courbes $E_t^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$, sont homologiquement indépendantes dans X_t , donc elles ne peuvent pas être permutées quand on fait le tour de A .

Considérons maintenant l'hypersurface réelle strictement pseudoconvexe $\Sigma_0 = \Sigma \subset X = X_0$. On peut bien sûr la déformer dans les fibres proches X_t , en préservant la stricte pseudoconvexité dans la fibre. Mais on peut aussi facilement choisir ces hypersurfaces déformées $\Sigma_t \subset X_t$ de manière telle que l'union

$$\Gamma = \bigcup_{t \in \mathbb{D}(\varepsilon)} \Sigma_t$$

soit une hypersurface strictement pseudoconvexe dans l'espace *total*

$$Y = \bigcup_{t \in \mathbb{D}(\varepsilon)} X_t$$

pour ε assez petit. En effet, sur un voisinage de Σ_0 dans X_0 il existe une fonction strictement plurisousharmonique définissant Σ_0 ; il suffit donc de prolonger cette fonction sur un voisinage de Σ_0 dans l'espace total de manière strictement plurisousharmonique, ce qui est facile, et en suite définir Γ comme niveau nul de cette fonction prolongée (voir par exemple [7] pour les propriétés basiques d'extension et d'approximation des fonctions plurisousharmoniques).

On choisit α et β ci-dessus de module inférieur à ε ; quitte à rescaler t , on peut supposer $\varepsilon = 1$. En particulier, pour tout $t \in A$, Σ_t est une hypersurface globale et strictement pseudoconvexe dans la surface de Hopf éclatée en n points distincts X_t .

2.3. Colmatage des fibres latérales

Soit $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ le revêtement cyclique infini associé à l'hypersurface globale $\Gamma \subset Y$, obtenu en recollant bout à bout une infinité de "couronnes" $Y \setminus \Gamma$ [2]. D'après la remarque préliminaire, on peut identifier \tilde{Y} avec le revêtement universel de Y . Fixons une composante connexe $\tilde{\Gamma}$ de $\pi^{-1}(\Gamma)$, et posons, pour tout $t \in \mathbb{D}$, $\tilde{X}_t = \pi^{-1}(X_t)$ (le revêtement universel de X_t) et $\tilde{\Sigma}_t = \tilde{\Gamma} \cap \tilde{X}_t$ (une composante connexe de $\pi^{-1}(\Sigma_t)$). L'hypersurface $\tilde{\Sigma}_t$ sépare \tilde{X}_t en deux composantes connexes, une composante \tilde{X}_t^+ par rapport à laquelle $\tilde{\Sigma}_t$ est un bord pseudoconvexe, et une composante \tilde{X}_t^- par rapport à laquelle $\tilde{\Sigma}_t$ est un bord pseudoconcave. De manière analogue, $\tilde{Y} \setminus \tilde{\Gamma} = \tilde{Y}^+ \cup \tilde{Y}^-$.

Chaque surface $S^{(j)} \subset Y_A = \cup_{t \in A} X_t \subset Y$ se relève par π en une collection dénombrable de surfaces isomorphes $S_i^{(j)} \subset \tilde{Y}_A = \cup_{t \in A} \tilde{X}_t \subset \tilde{Y}$, $i \in \mathbb{Z}$. Pour tout $t \in A$, $E_{t,i}^{(j)} = S_i^{(j)} \cap \tilde{X}_t$ est une courbe exceptionnelle qui se projette sur $E_t^{(j)}$ par π . Et toute courbe exceptionnelle contenue dans \tilde{X}_t , $t \in A$, est du type $E_{t,i}^{(j)}$ pour j et i convenables.

LEMME 2.2. — *Supposons que pour un certain $t_0 \in A$ la courbe exceptionnelle $E_{t_0,i}^{(j)}$ est contenue dans $\tilde{X}_{t_0}^+$. Alors pour tout $t \in A$ la courbe exceptionnelle $E_{t,i}^{(j)}$ est contenue dans \tilde{X}_t^+ .*

Démonstration. — Si ce n'était pas vrai, par un argument de continuité il existerait $t_1 \in A$ tel que la courbe exceptionnelle $E_{t_1,i}^{(j)}$ serait contenue

dans la clôture $\tilde{X}_{t_1}^+ \cup \tilde{\Sigma}_{t_1}$ mais pas dans $\tilde{X}_{t_1}^+$, et donc elle aurait un point de tangence avec $\tilde{\Sigma}_{t_1}$ de son côté pseudoconvexe. Ceci contredit le principe du maximum. □

Fixons un petit voisinage tubulaire V de $\tilde{\Gamma}$ dans \tilde{Y} , et soit

$$W = V \cup \bigcup_{t \in A} \tilde{X}_t^+$$

(ouvert de \tilde{Y}). Quitte à rétrécir A et V , le lemme précédent affirme que si la courbe exceptionnelle $E_{i,i}^{(j)}$ est contenue dans \tilde{X}_t^+ , pour un certain $t \in A$, alors la surface $S_i^{(j)}$ est contenue dans W et, en plus, elle est disjointe de V (donc, elle est proprement plongée dans W). On peut alors effondrer cette surface, *i.e.* effondrer sur un point chacune de ses fibres au-dessus de A . Le résultat est une nouvelle variété lisse W' , dans laquelle chaque fibre au-dessus de A contient une courbe exceptionnelle en moins. En répétant cette opération pour toutes les surfaces $S_i^{(j)}$ de ce type, on obtient une nouvelle variété lisse W_0 , qui contient V (et donc $\tilde{\Gamma}$), mais dans laquelle chaque $\tilde{\Sigma}_t$ est bord strictement pseudoconvexe d'une surface lisse \hat{X}_t^+ qui ne contient *aucune* courbe exceptionnelle, résultat de l'effondrement de toutes les courbes exceptionnelles de \tilde{X}_t^+ . On écrira :

$$W_0 = V \cup \bigcup_{t \in A} \hat{X}_t^+.$$

Examinons de plus près ces fibres \hat{X}_t^+ . Pour tout $t \in A$, \tilde{X}_t est le revêtement universel d'une surface de Hopf éclatée, donc il est isomorphe à $(\mathbb{C}^2)^* = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ éclaté en une collection dénombrable et discrète de points \mathcal{P}_t , qui s'accumule sur l'origine et à l'infini. L'ouvert $\tilde{X}_t^+ \subset \tilde{X}_t$ correspond au bout "pseudoconcave" de \tilde{X}_t , et contient un voisinage de l'origine $\mathbb{B}^*(\varepsilon) \subset (\mathbb{C}^2)^*$ éclaté en $\mathcal{P}_t \cap \mathbb{B}^*(\varepsilon)$. La variété \hat{X}_t^+ s'obtient de \tilde{X}_t^+ en effondrant toutes les courbes exceptionnelles qui y sont entièrement contenues, en particulier toutes les courbes exceptionnelles provenant de $\mathcal{P}_t \cap \mathbb{B}^*(\varepsilon)$. On peut alors identifier \hat{X}_t^+ avec un ouvert de $(\mathbb{C}^2)^*$ éclaté en $\mathcal{Q}_t \subset \mathcal{P}_t$, où l'ensemble \mathcal{Q}_t ne s'accumule plus sur l'origine mais seulement à l'infini. Cet ouvert contient $\mathbb{B}^*(\varepsilon)$. Par conséquent, on peut ajouter à \hat{X}_t^+ le point $(0,0)$ et obtenir ainsi une nouvelle surface lisse \bar{X}_t^+ . C'est une surface de Stein, car $\bar{X}_t^+ \cup \tilde{\Sigma}_t$ est compacte, son bord $\tilde{\Sigma}_t$ est strictement pseudoconvexe, et \bar{X}_t^+ ne contient aucune courbe compacte (remarque : cette surface n'est pas nécessairement un ouvert de \mathbb{C}^2 , car \tilde{X}_t^+ peut contenir des morceaux de courbes exceptionnelles qui n'y sont pas entièrement contenues, et ces courbes ne sont pas effondrées).

On peut faire cette opération de “adjonction d’un point” en variant t dans A , les surfaces \bar{X}_t^+ se recollent alors holomorphiquement : c’est une conséquence du fait que les revêtements universels d’une famille des surfaces de Hopf se recollent de manière localement holomorphiquement trivial, *i.e.* isomorphe à $\mathbb{D} \times (\mathbb{C}^2)^*$. On obtient alors une nouvelle variété complexe

$$W_1 = V \cup \bigcup_{t \in A} \bar{X}_t^+$$

dans laquelle chaque $\tilde{\Sigma}_t$ est bord d’une surface de Stein \bar{X}_t^+ .

2.4. Approximation strictement pseudoconvexe

Fixons $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Dans la variété W_1 , considérons l’hypersurface réelle (singulière)

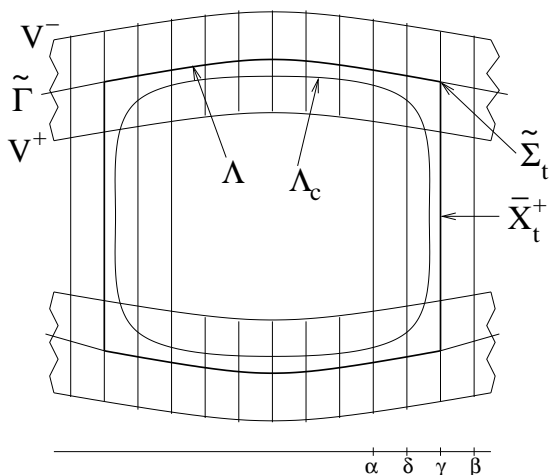
$$\Lambda = \left(\bigcup_{t \in \mathbb{D}(\gamma)} \tilde{\Sigma}_t \right) \cup \left(\bigcup_{t \in \partial \mathbb{D}(\gamma)} \bar{X}_t^+ \right).$$

On va démontrer que cette hypersurface est approximable par des hypersurfaces lisses et strictement pseudoconvexes.

Soit V^+ la composante connexe de $V \setminus \tilde{\Gamma}$ qui est du côté pseudoconvexe de $\tilde{\Gamma}$. Quitte à rétrécir V , on dispose d’une fonction lisse et strictement plurisousharmonique

$$\psi^0 : V^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

qui tend vers $+\infty$ en s’approchant de $\tilde{\Gamma}$.



Montrons d'abord que, pour tout $t \in A$ (et quitte à rétrécir V), la fonction $\psi_t^0 = \psi^0|_{\overline{X}_t^+ \cap V^+}$ admet un prolongement lisse et strictement plurisousharmonique à la fibre \overline{X}_t^+ , en suivant [7]. En effet, sur la surface de Stein \overline{X}_t^+ il existe une fonction lisse, bornée et strictement plurisousharmonique ψ_t^1 ; quitte à ajouter une constante, on peut supposer que $\psi_t^1 > \psi_t^0$ au voisinage de $\overline{X}_t^+ \cap \partial V^+$ (tandis que, évidemment, on a $\psi_t^1 < \psi_t^0$ au voisinage de $\tilde{\Sigma}_t$). Soit $\max_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($\varepsilon > 0$) une fonction de maximum régularisé, c'est-à-dire une fonction lisse, convexe et égale à \max hors du voisinage de la diagonale $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid |a - b| < \varepsilon\}$. La fonction $\max_\varepsilon(\psi_t^0, \psi_t^1)$ est alors lisse et strictement plurisousharmonique sur $\overline{X}_t^+ \cap V^+$, et pour ε assez petit elle coïncide avec ψ_t^0 près de $\tilde{\Sigma}_t$ et avec ψ_t^1 près de $\overline{X}_t^+ \cap \partial V^+$. On peut donc la recoller avec ψ_t^1 hors de $\overline{X}_t^+ \cap V^+$, et obtenir ainsi le prolongement souhaité $\psi_t : \overline{X}_t^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de ψ_t^0 .

Ensuite, on peut étendre cette fonction lisse ψ_t à un voisinage $\cup_{s \in B_t} \overline{X}_s^+$ (avec B_t voisinage de t dans A), de manière qu'elle coïncide avec ψ^0 sur $\cup_{s \in B_t} \overline{X}_s^+ \cap V^+$. Quitte à rétrécir B_t , cette extension est encore strictement plurisousharmonique sur les fibres \overline{X}_s^+ , $s \in B_t$. En utilisant une partition de l'unité pour A , on recolle ces fonctions et on obtient une fonction lisse

$$\psi : V^+ \cup \bigcup_{t \in A} \overline{X}_t^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

qui est strictement plurisousharmonique sur V^+ ainsi qu' en restriction aux fibres \overline{X}_t^+ , $t \in A$, et qui tend vers $+\infty$ en s'approchant de $\tilde{\Gamma}$. Bien sûr, hors de V^+ cette fonction peut ne pas être sousharmonique dans les directions transverses aux fibres.

Sur le disque $\mathbb{D}(\gamma)$ choisissons une fonction φ_0 telle que $\varphi_0(t) \rightarrow +\infty$ pour $t \rightarrow \partial \mathbb{D}(\gamma)$ et $\Delta \varphi_0 \geq 1$, et soit φ le relevé de φ_0 sur les fibres de W_1 au-dessus de $\mathbb{D}(\gamma)$. Après avoir fixé $\delta \in (\alpha, \gamma)$, pour $k > 0$ assez grand la fonction lisse

$$\rho = \psi + k\varphi$$

est alors strictement plurisousharmonique sur l'ouvert

$$V^+ \cup \bigcup_{|t| \in (\delta, \gamma)} \overline{X}_t^+,$$

car la perte de sousharmonicité de ψ sur le compact $(\bigcup_{|t| \in [\delta, \gamma]} \overline{X}_t^+) \setminus V^+$ et dans les directions transverses aux fibres est compensée par la forte sousharmonicité de $k\varphi$ dans les mêmes directions. En plus, ρ est exhaustive vers $\Lambda : \rho(x) \rightarrow +\infty$ pour $x \rightarrow \Lambda$.

2.5. Conclusion de la preuve

Si $c \in \mathbb{R}^+$ est une valeur régulière de ρ assez grande, l'hypersurface réelle

$$\Lambda_c = \{\rho = c\} \subset W_1$$

est lisse, compacte, strictement pseudoconvexe et proche de Λ . Puisque sa dimension (réelle) est 5 (> 3), d'après Rossi [8] Λ_c est le bord d'un espace de Stein Z de dimension 3. La fonction "t", naturellement définie sur un voisinage de l'infini de Z (provenant de W_1), se prolonge à la totalité de Z . La surface $Z_0 = \{t = 0\} \subset Z$ est alors une surface de Stein (peut-être singulière) dont le bord est $\Lambda_c \cap \{t = 0\}$. En recollant la "couronne" de $W_1 \cap \{t = 0\}$ entre $\Lambda_c \cap \{t = 0\}$ et $\Lambda \cap \{t = 0\} = \tilde{\Sigma}_0$, on voit que cette dernière est aussi le bord d'une surface de Stein. Donc $\Sigma = \Sigma_0 \simeq \tilde{\Sigma}_0$ est bord d'une surface de Stein, et d'après [5] la surface X est une surface de Kato.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. DLOUSSKY, « Structure des surfaces de Kato », *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* (1984), n° 14, p. ii+120.
- [2] ———, « Colmatage de surfaces holomorphes et classification des surfaces compactes », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **43** (1993), n° 3, p. 713-741.
- [3] ———, « On surfaces of class VII_0^+ with numerically anticanonical divisor », *Amer. J. Math.* **128** (2006), n° 3, p. 639-670.
- [4] M. KATO, « Compact complex manifolds containing "global" spherical shells. I », in *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977)* (Tokyo), Kinokuniya Book Store, 1978, p. 45-84.
- [5] ———, « Compact complex surfaces containing global strongly pseudoconvex hypersurfaces », *Tôhoku Math. J. (2)* **31** (1979), n° 4, p. 537-547.
- [6] I. NAKAMURA, « Classification of non-Kähler complex surfaces », *Sugaku Expositions* **2** (1989), p. 209-229.
- [7] R. RICHBURG, « Stetige streng pseudokonvexe Funktionen », *Math. Ann.* **175** (1968), p. 257-286.
- [8] H. ROSSI, « Attaching analytic spaces to an analytic space along a pseudoconcave boundary », in *Proc. Conf. Complex Analysis (Minneapolis, 1964)*, Springer, Berlin, 1965, p. 242-256.
- [9] A. D. TELEMAN, « Projectively flat surfaces and Bogomolov's theorem on class VII_0 surfaces », *Internat. J. Math.* **5** (1994), n° 2, p. 253-264.
- [10] ———, « Instantons and curves on class VII surfaces », Prépublication arXiv, 2007.

Manuscrit reçu le 23 août 2007,
accepté le 26 novembre 2007.

Marco BRUNELLA
IMB - CNRS UMR 5584
9 Avenue Savary
21078 Dijon (France)
Marco.Brunella@u-bourgogne.fr