



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Nicolas RATAZZI

**Intersection de courbes et de sous-groupes et problèmes de minoration de hauteur dans les variétés abéliennes C.M.**

Tome 58, n° 5 (2008), p. 1575-1633.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2008\\_\\_58\\_5\\_1575\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2008__58_5_1575_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# INTERSECTION DE COURBES ET DE SOUS-GROUPES ET PROBLÈMES DE MINORATION DE HAUTEUR DANS LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES C.M.

par Nicolas RATAZZI

---

RÉSUMÉ. — Nous prouvons un cas particulier de la conjecture suivante e Zilber-Pink, conjecture généralisant celle de Manin-Mumford : soit  $X$  une courbe incluse dans une variété abélienne  $A$  sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , qui n'est pas incluse dans une sous-variété de torsion ; l'intersection de  $X$  avec la réunion de tous les sous-groupes de codimension au moins 2 est finie. Nous démontrons ici le cas où  $A$  est une puissance d'une variété abélienne C.M. simple. La preuve reprend la stratégie de Rémond (suivant Bombieri-Masser-Zannier) avec deux ingrédients supplémentaires ; l'un des deux constituant le coeur de cet article : une minoration de la hauteur de Néron-Tate des points sur les variétés abéliennes C.M., dans l'esprit du problème de Lehmer. Cette minoration est l'analogie du résultat similaire de Amoroso-David pour  $\mathbb{G}_m^n$ , et est une généralisation du théorème de David-Hindry sur le problème de Lehmer abélien.

ABSTRACT. — We prove a special case of the following conjecture of Zilber-Pink generalising the Manin-Mumford conjecture : let  $X$  be a curve inside an Abelian variety  $A$  over  $\overline{\mathbb{Q}}$ , provided  $X$  is not contained in a torsion subvariety, the intersection of  $X$  with the union of all subgroup schemes of codimension at least 2 is finite; we settle the case where  $A$  is a power of a simple CM Abelian variety. The proof is based on the strategy of Rémond (following Bombieri-Masser-Zannier) with two new ingredients, one of them, being at the heart of this article : a lower bound for the Néron-Tate height of points on CM Abelian varieties in the spirit of Lehmer's problem. This lower bound is an analog of the similar result of Amoroso-David on  $\mathbb{G}_m^n$  and is a generalisation of the theorem of David-Hindry on the abelian Lehmer's problem.

---

*Mots-clés* : hauteur normalisée, problème de Lehmer, conjecture de Manin-Mumford, variétés abéliennes, approximation diophantienne.

*Classification math.* : 11G50, 11G10, 11J95, 14K22, 11R20.

## 1. Introduction

Dans cet article nous nous intéressons à la généralisation suivante de la conjecture de Manin-Mumford : soit  $G$  une variété semi-abélienne sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  et  $X$  une courbe contenue dans  $G$  ; soit  $G^{[r]}$  l'union de tous les sous-groupes algébriques non nécessairement connexes de  $G$  de codimension  $\geq r$ , on demande pour quelles valeurs de  $r$  l'intersection  $X \cap G^{[r]}$  est finie. La conjecture de Manin-Mumford correspond au cas  $r = \dim G$  (en effet  $G^{[\dim G]} = G(\overline{\mathbb{Q}})_{\text{tors}}$ ). De plus pour avoir un  $r$  aussi petit que possible, il faut visiblement supposer que  $X$  n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique strict de  $G$ . L'énoncé est faux pour  $r = 1$  et la conjecture optimiste est  $r = 2$ .

Nous obtenons ici (cf. Théorème 1.13), en suivant une stratégie développée par Bombieri-Masser-Zannier [7], Viada [34] puis Rémond [25], le résultat optimal  $r = 2$  pour les variétés abéliennes de la forme  $A = B^n$  où  $B$  est une variété abélienne de type C.M. simple. La preuve est notamment basée sur deux raffinements : d'une part une amélioration (faisant l'objet de l'article séparé [22]) dans le cas des variétés abéliennes de type C.M., d'un résultat de Masser [17] concernant le problème de la borne (non-uniforme) sur la torsion ; d'autre part un raffinement du résultat principal de minoration de hauteur de David et Hindry [10] sur le problème de Lehmer pour les variétés abéliennes de type C.M. C'est la preuve, par des techniques d'approximation diophantienne ou de transcendance, de ce dernier raffinement qui est au cœur du présent article.

Ce type de problème (intersection de courbes et de sous groupes) a tout d'abord été traité dans [7] dans le cas de  $\mathbb{G}_m^n$  pour lequel ils obtiennent un résultat essentiellement optimal :  $r = 2$  mais leur hypothèse sur  $C$  est légèrement plus forte. Leur méthode (et l'obtention du résultat  $r = 2$ ) a ensuite été étendue par Viada [34], complété par Rémond-Viada [27], au cas d'une variété abélienne de la forme  $A = E^n$  avec  $E$  une courbe elliptique à multiplication complexe. Rémond [25] a finalement étendu la stratégie (mais pas le résultat optimal) au cas d'une variété abélienne quelconque. Néanmoins il n'obtient pas de nouveau résultat optimal inconditionnel (son résultat inconditionnel étant loin de l'optimalité, voir par exemple le théorème C ci-dessous pour le cas C.M.). Par contre il montre qu'une très bonne minoration, conjecturale, de la hauteur des points non de torsion (cf. la conjecture 1.4 ci-après ainsi que la remarque qui suit) entraîne  $r = 2$  pour  $G = A$  variété abélienne.

Ainsi notre résultat permet de passer du cas d'une puissance d'une courbe elliptique de type C.M. à une puissance d'une variété abélienne de type

C.M., simple de dimension quelconque. Avant de donner les énoncés précis, indiquons dès à présent que notre énoncé clé de minoration de hauteur (Théorème 1.6) est l'analogue dans le cas des variétés abéliennes de type C.M. du résultat de Amoroso-David [2] dans le cas de  $\mathbb{G}_m^n$ . De plus notre preuve est une combinaison des preuves de [10] et [2] : nous reprenons le fil de la preuve de [10] en introduisant dans notre cadre abélien les idées nouvelles de [2].

Par ailleurs, comme il est fait dans [2] pour  $\mathbb{G}_m^n$  et suivant leur preuve nous tirons du résultat de minoration de hauteur une seconde application (cf. Théorème 1.10), elle aussi liée aux problèmes de minoration de hauteurs dans les variétés abéliennes. Finalement nous indiquons en appendice deux derniers résultats concernant les problèmes de minoration de hauteur. Le premier donne une preuve du fait (qui est précisé en appendice) que “une bonne minoration de la hauteur des points d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne sur une variété abélienne entraîne une bonne minoration de la hauteur de tous les points d'ordre infini”. Le second est une preuve de ce que le problème de Lehmer abélien de [10] (cf. leur conjecture 1.4) est équivalent au problème *a priori* plus fort, dit multihomogène (cf. la conjecture 1.6 de [10]). Dans le cas de  $\mathbb{G}_m^n$  cette équivalence avait déjà été notée et démontrée par Amoroso et David dans leur article [1]. Nous adaptons en appendice leur preuve au cas des variétés abéliennes.

## 1.1. Énoncés

### 1.1.1. Problèmes de minoration de hauteur

Le résultat que nous obtenons (Théorème 1.6) généralise le résultat principal de [10]. Il s'agit de l'analogue du même résultat pour  $\mathbb{G}_m^n$  démontré dans [2]. Notre preuve suit la preuve de [10] en utilisant dans notre cadre abélien les idées nouvelles introduites dans [2]. Par ailleurs, tout comme cela était fait dans [1] pour le cas de  $\mathbb{G}_m^n$  nous remplaçons dans le résultat le degré  $[K(x) : K]$  par *l'indice d'obstruction* (cf. Définition 1.2). Une telle possibilité avait déjà été notée dans [10]. L'application la plus frappante de ce résultat concerne les problèmes d'intersection de courbes et de sous-groupes algébriques et est détaillée plus bas dans la sous-section suivante. Enfin tout comme [2] dans le cas de  $\mathbb{G}_m^n$  et en adaptant leur preuve au cadre abélien nous donnons une autre application de notre résultat : le théorème 1.6 concernant la minoration du minimum absolu des sous-variétés de variétés abéliennes de type C.M. Dans ce qui suit nous

utilisons librement la notion d'indice d'obstruction  $\delta_{\mathcal{L}}$  rappelée plus loin dans l'introduction.

CONJECTURE 1.1 (Problème de Lehmer abélien). — Soient  $A/K$  une variété abélienne sur un corps de nombres et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites symétrique ample sur  $A$ . Il existe une constante strictement positive  $c(A/K, \mathcal{L})$  telle que pour tout point  $P \in A(\overline{K})$  d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de  $A$ , on a

$$(1.1) \quad \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L})}{\delta_{\mathcal{L}, K}(P)}.$$

De plus, en terme du degré  $D = [K(P) : K]$ , on a pour tout point  $P \in A(\overline{K})$  qui n'est pas de torsion

$$(1.2) \quad \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L})}{D^{\frac{1}{g_0}}},$$

où  $g_0$  est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant le point  $P$ .

Dans cette direction, David et Hindry obtiennent le résultat suivant (c'est le théorème 1.5 de [10]) :

THÉORÈME A (David-Hindry [10]). — Soient  $A/K$  une variété abélienne de type C.M. de dimension  $g$  sur un corps de nombres et munie d'un fibré en droites ample et symétrique  $\mathcal{L}$ . Il existe une constante strictement positive  $c(A/K, \mathcal{L})$  telle que pour tout point  $P \in A(\overline{K})$  d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de  $A$  on a

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L})}{D^{\frac{1}{g}}} \left( \frac{\log \log 3D}{\log 2D} \right)^{\kappa(g)},$$

où  $\kappa(g)$  est une fonction explicite de  $g$  et  $D = [K(P) : K]$ .

Par ailleurs, ils énoncent un problème de Lehmer “multihomogène” *a priori* plus fort que le problème de Lehmer abélien (cf. le paragraphe A.2 de l'appendice du présent article). Ils se demandent également dans quelle mesure leur théorème A pourrait être raffiné afin de dire des choses sur la deuxième partie du problème de Lehmer abélien. Enfin, ils indiquent qu'il serait intéressant de quantifier l'hypothèse “d'ordre infini” en terme du degré de la plus petite sous-variété de torsion pouvant contenir le point.

Dans notre présent article nous répondons entre autres à toutes ces questions, dans un cadre raffiné plus précis. Nous formulons notre résultat principal (et la preuve) en utilisant des indices d'obstructions. Avant d'énoncer précisément nos résultats, commençons par définir l'indice d'obstruction suivant [10], Définition 1.2 :

DÉFINITION 1.2. — Soient  $A/K$  une variété abélienne,  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample et symétrique,  $P$  un point de  $A(\overline{K})$  et  $F/K$  une extension algébrique. On définit l'indice d'obstruction de  $P$  relativement à  $\mathcal{L}$  et  $F$ , et l'on note  $\delta_{\mathcal{L},F}(P)$ , par

$$\delta_{\mathcal{L},F}(P) = \min \left\{ (\deg_{\mathcal{L}_F} X)^{\frac{1}{\text{codim} X}} \mid X \text{ sous-}F\text{-variété stricte de } A_F, \right. \\ \left. \text{telle que } P \in X(\overline{K}) \right\},$$

où l'on a noté  $\mathcal{L}_F$  le faisceau sur  $A_F$  tiré en arrière de  $\mathcal{L}$  par la projection naturelle de  $A_F$  sur  $A$ . Plus généralement on peut définir l'indice d'obstruction (relativement à  $\mathcal{L}$  et  $F$ ), pour une sous- $\overline{K}$ -variété  $V$  de  $A_{\overline{K}}$  :

$$\delta_{\mathcal{L},F}(V) = \min \left\{ (\deg_{\mathcal{L}_F} X)^{\frac{1}{\text{codim} X}} \mid X \text{ sous-}F\text{-variété stricte de } A_F, \right. \\ \left. \text{telle que } \overline{V}^F \subset X \right\},$$

où l'on a noté  $\overline{V}^F$  l'image schématique de  $V \subset A_{\overline{K}}$  dans  $A_F$ .

Remarque 1.3. — En considérant la variété  $\overline{\{P\}}^F$ , image schématique de  $P \in A_{\overline{K}}$  dans  $A_F$ , on constate immédiatement que

$$\delta_{\mathcal{L},F}(P) \leq [F(P) : F]^{\frac{1}{g}}.$$

On notera  $\delta_{\mathcal{L},\text{tors}}$  l'indice d'obstruction relatif au corps  $K_{\text{tors}} = K(A_{\text{tors}})$ . Par ailleurs dans la suite, comme on travaille avec un fibré en droites  $\mathcal{L}$  fixe, on l'omettra régulièrement dans la notation de  $\delta_{\mathcal{L},F}$  afin de ne pas trop alourdir les notations. Ceci étant, on peut maintenant énoncer le raffinement attendu du problème de Lehmer :

CONJECTURE 1.4 (Problème de Lehmer abélien relatif). — Soient  $A/K$  une variété abélienne sur un corps de nombres et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample et symétrique. Il existe une constante strictement positive  $c(A/K, \mathcal{L})$  telle que pour tout point  $P \in A(\overline{K})$  d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de  $A$  on a

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L})}{\delta_{\mathcal{L},\text{tors}}(P)}.$$

Remarque 1.5. — Cette conjecture n'englobe a priori que la première partie de l'énoncé du problème de Lehmer abélien de David et Hindry. Mais comme nous le montrons dans l'appendice (Corollaire A.3), la seconde partie du problème de Lehmer abélien de [10] est en fait une conséquence de la première.

Dans un précédent travail, [24], nous avons obtenu dans le cas de ce problème de Lehmer relatif un résultat, optimal à des puissances de  $\log D_{\text{tors}}$  près, dans le cas des courbes elliptiques à multiplication complexe. En direction de cette conjecture, nous obtenons, dans le cas des variétés abéliennes de type C.M., un résultat, essentiellement optimal pour le terme principal. Pour tout entier  $n$ , on note  $K_n := K(A[n])$  l'extension engendrée sur  $K$  par le groupe des points de torsion  $A[n]$ . On a  $K_{\text{tors}} = \bigcup_{n \geq 1} K(A[n])$ .

**THÉOREME 1.6.** — *Soit  $A/K$  une variété abélienne de type C.M. de dimension  $g$  sur un corps de nombres et munie d'un fibré en droites ample et symétrique  $\mathcal{L}$ . Il existe une constante strictement positive  $c(A/K, \mathcal{L})$  telle que pour tout point  $P \in A(\overline{K})$  et pour tout entier  $n$ , on a l'alternative suivante :*

– soit

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L})}{\delta_{\mathcal{L}, K_n}(P)} \left( \frac{\log \log 3 [K_n : K] \delta_{\mathcal{L}, K_n}(P)}{\log 2 [K_n : K] \delta_{\mathcal{L}, K_n}(P)} \right)^{\kappa(g)},$$

avec  $\kappa(g) = (g + 1)!(2g + 5)(g + 2)(2g.g!)^g$  ;

– soit le point  $P$  est contenu dans une sous-variété de torsion stricte,  $B$ , de  $A_{K_n}$ , définie sur  $K_n$ , de degré majoré par

$$\left( \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} B \right)^{\frac{1}{\text{codim } B}} \leq c(A/K, \mathcal{L})^{-1} \delta_{\mathcal{L}, K_n}(P) (\log 2 [K_n : K] \delta_{\mathcal{L}, K_n}(P))^{2g+2\kappa(g)}.$$

*Remarque 1.7.* — Un peu plus généralement le même énoncé est valable pour toute extension  $L/K$  abélienne telle que son discriminant  $\text{disc}(L/K)$  vérifie

$$(1.3) \quad \frac{1}{[L : K]} \log \text{disc}(L/K) \leq c_1(A/K, \mathcal{L}) (\log[L : K])^2.$$

Notamment (cf. la preuve du lemme 2.3) ceci est vrai pour toute extension  $K \subset L \subset K_n$  telle que  $\log \varphi(n) \ll \log[L : K]$ . Par exemple, on peut voir que le théorème précédent reste valable pour tout  $n$  avec  $L = K(T_n)$  où  $T_n$  est un point de torsion de  $A$  d'ordre  $n$ .<sup>(1)</sup>

Comme dit précédemment il s'agit ici de l'analogie d'un résultat de Amoroso et David obtenu dans [2] pour le groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_m^n$ .

---

<sup>(1)</sup> Notons que l'inégalité (1.3) n'est pas toujours vérifiée comme le montre l'exemple  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{l}) \subset \mathbb{Q}(A[l])$  avec  $l$  premier congru à 1 modulo 4.

*Remarque 1.8.* — En appliquant la remarque 1.2, on déduit du théorème 1.6 le même énoncé avec  $\delta_{\mathcal{L}, K_n}(P)$  remplacé par le degré  $[K_n(P) : K_n]^{\frac{1}{g}}$ .

On a ici quantifié l’hypothèse “ $P$  est d’ordre infini” par une borne sur le degré de la plus petite sous-variété de torsion contenant le point  $P$ . Notons que ce type de résultats, rarement mis en évidence, contient la plupart du temps des informations arithmétiques supplémentaires. On donne d’ailleurs ici, suivant la preuve du résultat analogue pour  $\mathbb{G}_m^n$  due à Amoroso-David [2], une conséquence de cette quantification. Il s’agit d’une minoration du minimum absolu des sous-variétés non de torsion de  $A^n$  où  $A/K$  est une variété abélienne simple de type C.M. Pour cela on introduit deux notations : on pose  $\mathcal{L}_n$  le fibré  $\mathcal{L}^{\boxtimes n}$  sur  $A^n$  déduit d’un fibré ample et symétrique  $\mathcal{L}$  sur  $A$ . Par ailleurs, on note

$$V^* = V \setminus \bigcup B,$$

où l’union porte sur les sous-variétés  $B$  de torsion incluses dans  $V$ . On donne dans l’énoncé suivant une minoration du minimum absolu d’une variété non de torsion. Notons que l’on ne la suppose pas irréductible.

**DÉFINITION 1.9.** — *Supposons que la variété abélienne  $A$  soit plongée dans un espace projectif  $\mathbb{P}_n$  ; notons  $\mathcal{R}$  l’anneau des coordonnées de  $\mathbb{P}_n$  ; on dira qu’une sous-variété  $V$  de  $A$  peut être définie incomplètement par des équations de degré  $\leq L$  si  $V$  est une composante isolée de  $A \cap Z(\mathcal{I})$  où  $\mathcal{I}$  est un idéal homogène de  $\mathcal{R}$  engendré par des polynômes de degré au plus  $L$ .*

**THÉORÈME 1.10.** — *Soit  $A/K$  une variété abélienne simple de type C.M., plongée dans un espace projectif par un fibré en droites ample  $\mathcal{L}$ , et  $n \geq 1$  un entier. Il existe une constante strictement positive  $c(A/K, \mathcal{L}, n)$  telle que : pour toute sous-variété (non nécessairement irréductible)  $V$  de  $A^n$ , définie sur une extension  $K_r := K(A[r])/K$  pour un certain entier  $r$ , incomplètement définie dans  $A^n$  sur  $K_r$  par des équations de degré au plus  $D_{\text{inc}}$ , alors on a pour tout point  $\bar{K}$ -rationnel  $P$  de  $V^*$  :*

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L}, n)}{D_{\text{inc}}} \left( \frac{\log \log 3 [K_r : K] D_{\text{inc}}}{\log 3 [K_r : K] D_{\text{inc}}} \right)^{\kappa(g)},$$

avec  $\kappa(g) = (g + 1)!(2g + 5)(g + 2)(2g.g!)^g$ .

Notons (cf. par exemple [9], p. 790) que  $V$  est toujours incomplètement définie par des équations de degré au plus  $c_1(A/K, \mathcal{L}, n) \deg_{\mathcal{L}} V$ . En notant  $\mu^*(V)$  le minimum absolu de  $V$  (i.e. le minimum des hauteurs des points de  $V^*$ ), on obtient en corollaire :



COROLLAIRE 1.11. — Soit  $A/K$  une variété abélienne simple de type C.M. et  $n \geq 1$  un entier. Il existe une constante strictement positive  $c(A/K, n)$  telle que : pour toute sous-variété (non nécessairement irréductible)  $V/K$  de  $A^n$ , non de torsion et définie sur  $K$ , on a :

$$\mu^*(V) \geq \frac{c(A/K, n)}{\deg_{\mathcal{L}} V} \left( \frac{\log \log 3 \deg_{\mathcal{L}} V}{\log 3 \deg_{\mathcal{L}} V} \right)^{\kappa(g)},$$

avec  $\kappa(g) = (g+1)!(2g+5)(g+2)(2g.g!)^g$ .

Ceci rend effectif les résultats de Bombieri et Zannier [9], et raffine ceux de David et Philippon [11] concernant ce même problème. Plus exactement en suivant la preuve de [9], on constate qu'ils obtiennent une minoration effective mais qui est multiexponentielle en le degré, au lieu d'être comme ici linéaire. Concernant le résultat de [11], bien qu'il ne soit pas explicitement rédigé, on peut voir qu'ils obtiennent comme conséquence de leur théorème principal, une minoration polynomiale en le degré.

### 1.1.2. Intersection de courbes et de sous-groupes

Soient  $A/\overline{\mathbb{Q}}$  une variété abélienne (définie) sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ ,  $X/\overline{\mathbb{Q}}$  une courbe géométriquement irréductible de  $A$  et  $r$  un entier positif ou nul. Comme dit précédemment on considère l'ensemble

$$A^{[r]} := \bigcup_{\text{codim } G \geq r} G(\overline{\mathbb{Q}})$$

où l'union porte sur les sous-groupes algébriques non-nécessairement connexes de  $A$  de codimension au moins  $r$ . De manière indépendante, Zilber ([36], Conjecture 2) pour les variétés semi-abéliennes et Pink ([21], Conjecture 1.3) pour les variétés de Shimura mixtes, ont formulés une conjecture qui, dans le cas des courbes incluses dans une variété abélienne sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  se spécialise en la suivante :

CONJECTURE 1.12 (Zilber-Pink, cas particulier). — Soient  $A/\overline{\mathbb{Q}}$  une variété abélienne et  $X/\overline{\mathbb{Q}}$  une courbe dans  $A$  géométriquement irréductible. Si  $X$  n'est pas contenue dans un sous-groupe algébrique strict de  $A$ , alors l'ensemble  $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A^{[2]}$  est fini.

Rémond [25] a montré que la conjecture précédente est vraie si une très bonne minoration (conjecturale) des points d'ordre infini de  $A$  est vraie :

THÉORÈME B (Rémond [25]). — Si la conjecture 1.4 est vraie pour toute variété abélienne alors la conjecture 1.12 est vraie pour toute variété abélienne.

Par ailleurs dans le cas des variétés abéliennes de type C.M., Rémond [25] obtient un résultat inconditionnel, mais sensiblement plus faible que la conjecture 1.12 : soit  $A$  une variété abélienne de type C.M., géométriquement isogène au produit  $\prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$  où les  $A_i$  sont des variétés abéliennes simples de dimension respective  $g_i$ , deux à deux non-isogènes.

**THÉORÈME C** (Rémond [25]). — *Soient  $A/\overline{\mathbb{Q}}$  une variété abélienne de type C.M. et  $X$  une courbe dans  $A$  non contenue dans un sous-groupe algébrique strict, alors  $X(\overline{\mathbb{Q}}) \cap A^{[2+\sum_{i=1}^m g_i]}$  est fini.*

En utilisant notre résultat de minoration de hauteur (cf. Théorème 1.6 ci-dessus) ainsi qu'un résultat faisant l'objet d'un article séparé [22] concernant la torsion dans les variétés abéliennes de type C.M., nous améliorons ceci et obtenons un résultat optimal dans le cas d'une puissance d'une variété abélienne simple de type C.M. :

**THÉORÈME 1.13.** — *La conjecture 1.12 est vraie pour toute variété abélienne  $A$  de type C.M., isogène à une puissance d'une variété abélienne simple.*

*Remarque 1.14.* — Dans les énoncés précédents (Théorèmes C et 1.13) nous avons utilisé l'hypothèse  $X$  contenue dans aucun sous-schéma en groupes de  $A$ , distinct de  $A$ . Dans son article [25], Rémond utilise en fait une hypothèse plus forte : il suppose que  $X$  est transverse (i.e. contenue dans aucune translatée de sous-variété abélienne). En fait le corollaire 1.1 de [26] et sa preuve montrent que l'on peut dans nos énoncés dans le cas des variétés abéliennes, remplacer l'hypothèse  $X$  transverse par l'hypothèse plus faible  $X$  contenue dans aucun sous-schéma en groupes de  $A$ , distinct de  $A$ . C'est ce que nous avons fait ici.

On peut en fait énoncer un résultat optimal dans un cadre un peu plus vaste qu'une puissance d'une variété abélienne simple de type C.M. Considérons pour cela une notion introduite formellement dans [22] :

**DÉFINITION 1.15.** — *Soit  $A/K$  une variété abélienne quelconque sur un corps de nombres. On définit un invariant  $\gamma(A)$  par*

$$\gamma(A) = \inf \left\{ x > 0 \mid \exists C > 0, \forall F/K \text{ finie, } |A(F)_{\text{tors}}| \leq C[F : K]^x \right\}.$$

Le seul résultat connu en toute généralité pour cet invariant est dû à Masser [17] : il obtient

$$\gamma(A) \leq g.$$

Par ailleurs, dans [22] l'auteur a obtenu une reformulation combinatoire de cet invariant  $\gamma(A)$  dans le cas d'une variété abélienne  $A/K$  géométriquement simple de type C.M. En particulier, dans le cas d'une telle variété abélienne, le corollaire 1.13 de [22] donne la majoration

$$\gamma(A) \leq \frac{2g}{2 + \log_2 g}$$

où  $g = \dim A$  et  $\log_2$  est le log en base 2. Cette majoration raffine celle de Masser : si  $g \geq 2$  alors  $\gamma(A) < g$ . De plus dans le cas d'une variété abélienne C.M. de type non-dégénéré (i.e. ayant un groupe de Mumford-Tate aussi grand que possible, donc de dimension  $g + 1$ ) on montre même que  $\gamma(A)$  est beaucoup plus petit :  $\gamma(A) = \frac{2g}{g+1}$ .

Soit  $A/K$  une variété abélienne. Elle est isogène à un produit :  $\prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$ , où les  $A_i$  sont simples et deux à deux non-isogènes, de dimension  $g_i$ . On montre au paragraphe 4 que si  $X$  est une courbe transverse de  $A$  et si  $A$  est de type C.M., alors

$$\min_{1 \leq i \leq m} g_i > \sum_{i=1}^m \gamma(A_i) \implies |X(\bar{K}) \cap A^{[2]}| < +\infty.$$

## Plan de l'article

Les paragraphes 2 et 3 sont consacrés à la preuve du théorème 1.6 concernant le problème de Lehmer, le paragraphe 4 est consacré au théorème 1.13 concernant le problème d'intersection de courbe et de sous-groupes et le paragraphe 5 au théorème 1.10 concernant le minimum absolu. L'appendice explique les liens entre les parties (1) et (2) du problème de Lehmer abélien ainsi que les liens entre le problème de Lehmer abélien et sa variante multihomogène (Conjecture A.11) formulée par David et Hindry.

Plus précisément, au paragraphe 2 nous donnons une majoration du discriminant absolu de l'extension  $K(A[n])/Q$  dont nous aurons besoin dans l'application du lemme de Siegel. Nous faisons également dans ce paragraphe les rappels nécessaires sur les isogénies de Frobenius. Classiquement depuis le résultat de Dobrowolski concernant le problème de Lehmer, c'est essentiellement en utilisant des transformés par ces isogénies d'un point  $P$ , dont on suppose par l'absurde qu'il ne vérifie pas la conclusion du théorème 1.6, que nous allons extrapoler. Il y a ceci dit ici une différence, dans la mesure où l'on travaille, non plus sur  $K$  mais sur  $K(A[n])$  : on considérera plutôt des tordus de ces points par un certain automorphisme de

$\text{Gal}(\overline{K}/K)$ , un Frobenius de l'extension abélienne  $K(A[n])/K$ . Au paragraphe 3, et avec la différence précédemment indiquée, nous donnons la preuve du théorème 1.6 en suivant ce qui est fait dans [10] et avec les idées nouvelles introduites dans [2]. Notons tout de même une autre différence par rapport à [10] : on travaille avec les indices d'obstruction alors que dans [10] la preuve est faite avec le degré  $D$ . Il y a donc certaines modifications supplémentaires à faire. Ceci étant la preuve est une classique preuve d'approximation diophantienne, avec un lemme de Siegel (le théorème de Bombieri-Vaaler qui nous permet d'avoir un contrôle explicite de la dépendance en le corps sur lequel on travaille), un lemme de zéros et, comme dans [10] une descente finale où l'on réitère  $g$  fois l'ensemble de la preuve pour pouvoir conclure. Dans ce paragraphe 3 nous avons choisi d'insister plus particulièrement sur les points qui diffèrent par rapport à [10] en renvoyant à cette référence lorsque cela s'avérait nécessaire.

Au paragraphe 4, nous donnons une preuve, suivant la stratégie de [25], du théorème 1.13 en utilisant notre résultat sur le problème de Lehmer.

Au paragraphe 5 nous donnons une preuve par récurrence sur  $n$  du théorème 1.10 basé sur notre théorème 1.6 et suivant la preuve de [2] dans le cas de  $\mathbb{G}_m^n$ . On utilise ici à plein l'alternative démontrée dans le théorème 1.6.

Enfin dans l'appendice nous montrons, que la partie (2) du problème de Lehmer abélien 1.1 entraîne sa partie (1) ; autrement dit, si l'on sait minorer la hauteur des points qui ne sont contenus dans aucune sous-variété de torsion, alors on sait en fait aussi bien minorer la hauteur de tous les points non de torsion. Ceci nous permet de raffiner, dans le cas des variétés abéliennes de type C.M. un résultat de Masser [17] sur la minoration des points d'ordre infini. Dans le second et dernier sous-paragraphe de l'appendice, nous montrons que la conjecture multihomogène de David et Hindry A.11 est en fait une conséquence du problème de Lehmer abélien.

## 2. Préliminaires arithmético-géométriques

Dans la suite de l'article nous introduisons un certain nombre de constantes  $c_i$ . Nous indiquerons en général entre parenthèses de quoi dépend cette constante (par exemple  $c_i(A/K)$  dépend de  $A/K$ ,  $c_i(\mathcal{L})$  dépend de  $\mathcal{L}$ ...). Si toutefois aucune dépendance n'est explicitement indiquée, c'est que la constante dépend uniquement des données  $A/K$  et  $\mathcal{L}$ .

### 2.1. Ramification

On travaille ici et comme partout avec une variété abélienne  $A/K$  où  $K$  est un corps de nombres.

*Notations.* — On note  $\varphi$  la fonction d'Euler et, si  $L/F$  est une extension finie de corps, on note  $\mathcal{D}_{L/F}$  la différentielle de  $L/F$ . Par ailleurs, si  $n$  est un entier, on note  $K_n = K(A[n])$  l'extension de degré  $\deg(K_n/K)$  de  $K$  engendrée par les points de torsion d'ordre divisant  $n$  de  $A(\overline{K})$ . Dans ce qui suit, on s'intéresse à une majoration du discriminant absolu,  $\text{disc}(K_n)$ , de  $K_n/\mathbb{Q}$ . On donne de plus une majoration du nombre et de la taille des premiers qui se ramifient dans  $K_n$ .

LEMME 2.1. — *Si  $n$  un entier strictement positif, on note  $\omega(n)$  le nombre de premiers deux à deux distincts divisant  $n$ . On a les inégalités :*

1. *Pour tout entier  $n \geq 2$ , on a  $\omega(n) \leq \frac{2 \log \varphi(n)}{\log 2}$ .*
2. *Pour tout entier  $n$  assez grand, on a  $\omega(n) \leq \frac{4 \log n}{\log \log n}$ .*

*Démonstration.* — Le point 1 est un exercice facile et le point 2 est un résultat classique que l'on peut par exemple trouver dans [33]. □

LEMME 2.2. — *Soit  $n$  un entier strictement positif. On écrit sa décomposition en facteurs premiers  $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ . On a*

$$\prod_{i=1}^{\omega(n)} p_i \leq \varphi(n)^3.$$

*Démonstration.* — C'est un simple calcul :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{\omega(n)} p_i &\leq \prod_{\alpha_i \geq 2} \varphi(p_i^{\alpha_i}) \prod_{\alpha_i=1} (\varphi(p_i) + 1) \leq 2^{\text{Card}\{i|\alpha_i=1\}} \prod_{\alpha_i \geq 2} \varphi(p_i^{\alpha_i}) \prod_{\alpha_i=1} \varphi(p_i) \\ &\leq 2^{\text{Card}\{p|p|n\}} \varphi(n) \leq 2^{\frac{2 \log \varphi(n)}{\log 2}} \varphi(n) = \varphi(n)^3, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le lemme 2.1 précédent dans la dernière inégalité. □

LEMME 2.3. — *On suppose ici que  $A/K$  a partout bonne réduction.*

1. *Il existe une constante strictement positive  $c_1([K : \mathbb{Q}])$  telle que pour tout  $n \geq 1$ , on a*

$$\text{disc}(K_n) \leq (\deg(K_n/K))^{c_1 \deg(K_n/K) \log \deg(K_n/K)}.$$

2. *Il existe une constante  $C_1(K)$  telle que le cardinal des premiers ramifiés dans  $K_n$  est majoré par  $C_1(K) + \log \varphi(n)$ .*

*Démonstration.* — Pour le point 1 : soient  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $K$  au-dessus d'un nombre premier  $p$  et  $\mathfrak{P}$  un idéal premier de  $K_n$  au-dessus de  $\mathfrak{p}$ . Soient  $v$  la place associée à  $p$ ,  $w_K$  la place associée à  $\mathfrak{p}$  et  $w_{K_n}$  celle associée à  $\mathfrak{P}$ . Soient  $\pi, \pi_K, \pi_{K_n}$  les uniformisantes associées à ces idéaux. Si  $e(\mathfrak{p})$  (respectivement  $e(\mathfrak{P})$ ) est l'indice de ramification de  $\mathfrak{p}$  sur  $p$  (respectivement de  $\mathfrak{P}$  sur  $\mathfrak{p}$ ), on a

$$w_{K_n}(\pi) = e(\mathfrak{p})w_{K_n}(\pi_K) = e(\mathfrak{p})e(\mathfrak{P})w_{K_n}(\pi_{K_n}) = e(\mathfrak{p})e(\mathfrak{P}),$$

et

$$w_K(\pi) = e(\mathfrak{p}).$$

On sait par le théorème 1 de [30] (voir également la proposition 18 de [31]) que, si la variété abélienne  $A$  a bonne réduction en  $\mathfrak{p}$ , alors l'extension  $K_n/K$  ne peut être ramifiée en  $\mathfrak{p}$  que si  $p$  divise  $n$  (c'est le sens facile du critère de Néron-Ogg-Schafarevitch). On a donc

$$\mathcal{D}_{K_n/K} = \prod_{\mathfrak{P}|p|n} \mathfrak{P}^{\text{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{K_n/K})}.$$

Or la proposition 13 de [29] et la remarque suivant cette proposition nous donne la borne :

$$\text{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{K_n/K}) \leq e(\mathfrak{P}) - 1 + w_{K_n}(e(\mathfrak{P})) = e(\mathfrak{P}) - 1 + e(\mathfrak{p})e(\mathfrak{P})v(e(\mathfrak{P})).$$

Par ailleurs, l'indice  $e(\mathfrak{P})$  étant inférieur à  $\text{deg}(K_n/K)$ , on a  $v(e(\mathfrak{P})) \leq \frac{\log \text{deg}(K_n/K)}{\log 2}$ . Ainsi, on obtient la minoration

$$\text{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{K_n/K}) \leq \frac{2}{\log 2} e(\mathfrak{P}) \log \text{deg}(K_n/K).$$

Par transitivité et par définition du discriminant  $\text{disc}(K_n)$  on a

$$\begin{aligned} \text{disc}(K_n) &= N_{\mathbb{Q}}^K(\text{Disc}(K_n/K)) \text{Disc}(K/\mathbb{Q})^{\text{deg}(K_n/K)} \\ &= c_2^{\text{deg}(K_n/K)} N_{\mathbb{Q}}^{K_n}(\mathcal{D}(K_n/K)) \\ &\leq \prod_{p|n} p^{c_3 \sum_{\mathfrak{P}|p} f(\mathfrak{P})e(\mathfrak{P}) \log \text{deg}(K_n/K)} \\ &\leq \prod_{p|n} p^{c_3 \text{deg}(K_n/K) \log \text{deg}(K_n/K)}. \end{aligned}$$

Le formalisme de l'accouplement de Weil nous indique que  $\mu_n \subset K_n$ , donc pour les degrés que  $\text{deg}(K_n/\mathbb{Q}) \geq \varphi(n)$ . Ainsi, en utilisant le lemme 2.2 précédent, on peut conclure :

$$\begin{aligned} \text{disc}(K_n) &\leq \varphi(n)^{3c_3 \text{deg}(K_n/K) \log \text{deg}(K_n/K)} \\ &\leq \text{deg}(K_n/\mathbb{Q})^{3c_3 \text{deg}(K_n/K) \log \text{deg}(K_n/K)}. \end{aligned}$$

Concernant le point 2, on constate que  $p$  est ramifié dans  $K_n$  si et seulement si il est ramifié dans  $K$  ou s'il est non ramifié dans  $K$  mais tel qu'il existe un premier  $\mathfrak{p}$  de  $K$  au dessus de  $p$  se ramifiant dans  $K_n$ . Le sens facile du critère de Néron-Ogg-Schafarevitch et le point 1 du lemme 2.1 permettent de conclure.  $\square$

**COROLLAIRE 2.4.** — *Il existe une constante strictement positive  $c_2$  telle que pour tout  $n \geq 1$ , on a*

$$\log \left( \text{disc}(K_n)^{\frac{1}{\deg(K_n/K)}} \right) \leq c_2 (\log \deg(K_n/K))^2.$$

*Démonstration.* — C'est immédiat.  $\square$

*Remarque 2.5.* — Cette estimation n'est très certainement pas optimale, mais elle est simple à obtenir et nous suffira.

## 2.2. Frobenius et isogénies admissibles

### 2.2.1. Morphismes de Frobenius

*Notations.* — Si  $K$  est un corps de nombres, on note  $\mathcal{O}_K$  son anneau d'entiers,  $v$  une place finie de  $K$ , et  $k_v$  le corps résiduel associé à  $v$ .

Si  $A/K$  est une variété abélienne, on note  $\mathcal{A}/\mathcal{O}_K$  son modèle de Néron, et  $A_v/k_v$  la fibre spéciale correspondant à la place finie  $v$ . Rappelons la propriété universelle du modèle de Néron : si  $\mathcal{X}/\mathcal{O}_K$  est lisse, de fibre générique  $X/K$ , tout  $K$ -morphisme  $X \rightarrow A$  se relève de manière unique en un  $\mathcal{O}_K$ -morphisme  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$ . La propriété universelle du produit fibré  $A_v = \mathcal{A} \times_{\mathcal{O}_K} k_v$  permet d'associer naturellement à tout  $\mathcal{O}_K$ -endomorphisme de  $\mathcal{A}$  un  $k_v$ -endomorphisme de  $A_v$ . En utilisant la propriété universelle du modèle de Néron, on en déduit une flèche naturelle

$$\Psi : \text{End}_K(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End}_{k_v}(A_v).$$

Cette flèche n'est en général pas surjective, mais on peut par contre montrer qu'elle est injective aux places de bonne réduction.

Sur la variété  $A_v/k_v$ , on dispose d'un endomorphisme particulier : le morphisme de Frobenius  $\text{Frob}_v$ , correspondant en coordonnées projectives à l'élevation à la puissance  $q = N(v)$ , où  $N(v)$  est la norme  $K/\mathbb{Q}$  de  $v$ . Dans le cas C.M., un théorème de Shimura-Taniyama permet d'affirmer que le morphisme  $\text{Frob}_v$  se relève en presque toute place :

PROPOSITION D (Shimura-Taniyama). — Soit  $A/K$  une variété abélienne de type C.M. Notons  $\prod_{i=1}^r K_i$  le produit de corps de nombres qui est inclus dans  $\text{End}_{\overline{K}}(A) \otimes \mathbb{Q}$  et tel que  $\sum_{i=1}^r [K_i : \mathbb{Q}] = 2 \dim A$ . On suppose que le corps de nombres  $K$  contient tous les  $K_i$ , et que  $\prod_{i=1}^r \mathcal{O}_{K_i}$  est inclus dans  $\text{End}_K(A)$ . Alors, pour toutes les places sauf éventuellement un nombre fini d'entre elles, l'endomorphisme  $\text{Frob}_v$  se relève en un  $K$ -endomorphisme  $\alpha_v$  de  $A$ . On appellera morphisme de Frobenius sur  $A$  un tel endomorphisme.

Démonstration. — C'est le théorème 1, paragraphe III.13 de [31].  $\square$

Ce sont ces morphismes de Frobenius sur  $A/K$  qui vont nous permettre d'écrire l'étape d'extrapolation.

Enfin pour tout nombre premier  $p$ , on note  $\Phi_p$  l'automorphisme de Frobenius de l'extension abélienne  $K_n/K$  et on choisit une extension de  $\Phi_p$  à  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ , que l'on note encore  $\Phi_p$ .

### 2.2.2. Isogénies admissibles

On rappelle la notion d'isogénie admissible telle qu'introduite dans [10].

DÉFINITION 2.6. — Soient  $A$  une variété abélienne et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample sur  $A$ . Une isogénie  $\alpha$  de  $A$  est dite admissible par rapport à  $\mathcal{L}$  si

- (1)  $\alpha$  est dans le centre de  $\text{End}(A)$ .
- (2) il existe un entier  $q(\alpha)$  appelé poids de  $\alpha$  tel que  $\alpha^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes q(\alpha)}$ .

Remarque 2.7. — En fait la condition (1) ne sert qu'à simplifier l'énoncé du lemme 2.10. C'est la condition (2) qui importe vraiment. Les seules isogénies qui nous intéresseront sont les relevées  $\alpha_v$  des morphismes de Frobenius qui sont admissibles (cf. la proposition 2.12).

LEMME E (David-Hindry). — Soient  $A$  une variété abélienne de dimension  $g$  munie d'un fibré en droites très ample  $\mathcal{L}$ , et  $\alpha$  une isogénie admissible relativement à  $\mathcal{L}$ , de poids  $q = q(\alpha)$ . Dans le plongement projectif de  $A$ , associé à  $\mathcal{L}$ ,  $A \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ , on a :

- 1.  $\text{card}(\text{Ker}(\alpha)) = q^g$ ,
- 2. pour toute sous-variété  $V$  de  $A$  de stabilisateur  $G_V$ , on a

$$\text{deg}_{\mathcal{L}}(\alpha(V)) = \frac{q^{\dim(V)}}{|G_V \cap \text{Ker}(\alpha)|} \text{deg}_{\mathcal{L}}(V)$$



3. pour toute sous-variété  $V$  de  $A$ , définie incomplètement dans  $A$  par des équations de degré inférieur à  $L$ , de stabilisateur  $G_V$  on a

$$\deg_{\mathcal{L}} G_V = |G_V : G_V^0| \deg_{\mathcal{L}} G_V^0 \leq \deg_{\mathcal{L}}(V)(2L)^{\dim V - \dim G_V}$$

et  $G_V$  est défini incomplètement dans  $A$  par des équations de degré inférieur à  $2L$ .

*Démonstration.* — Le point 1 est facile : par définition,  $\alpha^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes q}$ . On a donc,

$$q^g \deg_{\mathcal{L}}(A) = \deg_{\mathcal{L}^{\otimes q}}(A) = \deg_{\alpha^* \mathcal{L}}(A) = |\text{Ker}(\alpha)| \deg_{\mathcal{L}}(A).$$

L'amplitude de  $\mathcal{L}$  nous assure que le dernier degré est strictement positif. On simplifie pour conclure. Pour le point 2, il s'agit du point (ii) du lemme 6 de [14] et le point 3 correspond au point (ii) du lemme 2.1. de [10].  $\square$

LEMME 2.8. — Soient  $G$  un sous-groupe algébrique de la variété abélienne  $A/K$ ,  $\mathcal{L}$  un fibré en droites très ample sur  $A$ , et  $\alpha$  une isogénie admissible relativement à  $\mathcal{L}$  de poids  $q(\alpha)$  de  $A$ . On a

$$q(\alpha)^{\dim G} \leq \text{card}(\text{Ker}(\alpha) \cap G) \leq [G : G^0] q(\alpha)^{\dim G}.$$

*Démonstration.* — On note que

$$[G : G^0] \text{card}(\text{Ker}(\alpha) \cap G^0) \geq \text{card}(\text{Ker}(\alpha) \cap G) \geq \text{card}(\text{Ker}(\alpha) \cap G^0).$$

La restriction de  $\alpha$  à la sous-variété abélienne  $G^0$  est encore une isogénie admissible de poids  $q(\alpha)$  pour  $(G^0, \mathcal{L}|_{G^0})$  (cf. Lemme 2.4, point (ii) de [10]). Par le point 1 du lemme E précédent, on en déduit que le cardinal du noyau de cette isogénie  $\alpha|_{G^0}$  est  $q(\alpha)^{\dim G^0}$ .  $\square$

Soient  $F/K$  une extension finie de corps et  $V$  une sous- $F$ -variété stricte de  $A_F$  (produit fibré de  $A$  par  $\text{Spec } F$  au dessus de  $\text{Spec } K$ ),  $F$ -irréductible. Le lemme suivant (dont l'origine remonte à Dobrowolski [13]) montre que les images par une isogénie admissible de ses composantes géométriquement irréductibles sont essentiellement distinctes. Nous en aurons besoin au paragraphe 3.8. On commence pour cela par donner une définition :

DÉFINITION 2.9. — Soient  $A$  une variété abélienne et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample sur  $A$ . Deux isogénies admissibles de  $A$  par rapport à  $\mathcal{L}$  sont dites premières entre elles si leurs poids sont premiers entre eux.

LEMME 2.10. — Soient  $A$  une variété abélienne sur  $K$  de dimension  $g \geq 1$ ,  $\mathcal{L}$  un fibré en droites très ample sur  $A$ ,  $F/K$  une extension finie de corps de nombres et  $V$  une sous- $F$ -variété stricte de  $A_F$ , irréductible sur  $F$ . Si  $V_{\overline{K}}$  n'est pas une réunion de sous-variétés de torsion de  $A_{\overline{K}}$ , on a :

1. Pour tout couple  $(\alpha, \beta)$  d'isogénies admissibles pour  $\mathcal{L}$ , de poids distincts, pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/F)$ , et pour toute composante géométriquement irréductible  $W$  de  $V_{\overline{K}}$ , les sous-variétés  $\alpha(W)$  et  $\beta(\sigma(W))$  sont distinctes.
2. Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble d'isogénies admissibles pour  $\mathcal{L}$ , deux à deux premières entre elles. Notons  $V_1, \dots, V_M$  les composantes géométriquement irréductibles de  $V_{\overline{K}}$ , et notons  $\mathcal{Q}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{P}$  défini par

$$\mathcal{Q} = \{\alpha \in \mathcal{P} \mid \exists i, j, 1 \leq i < j \leq M, \alpha(V_i) = \alpha(V_j)\}.$$

Le cardinal de  $\mathcal{Q}$  est majoré par  $\frac{\log M}{\log 2}$ .

*Démonstration.* — Dans ce contexte il s'agit de la proposition 2.7 de [10] appliquée sur le corps de nombres  $F$ .  $\square$

On conclut ce paragraphe en “rappelant” que les morphismes de Frobenius sur  $A/K$  sont des isogénies admissibles :

**DÉFINITION 2.11.** — Soient  $A$  une variété abélienne et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample sur  $A$ . Suivant Mumford, on dit que  $\mathcal{L}$  est totalement symétrique si  $\mathcal{L}$  est le carré d'un fibré en droites symétrique.

Le théorème de Lefschetz (cf. par exemple le théorème A.5.3.6 de [15]) nous indique que si  $\mathcal{L}$  est un fibré en droites ample, alors  $\mathcal{L}^{\otimes 3}$  est très ample.

**PROPOSITION 2.12.** — Soient  $A/K$  une variété abélienne de type C.M. vérifiant les hypothèses de la proposition D, et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites très ample et totalement symétrique sur  $A$ . Soit  $\alpha_v$  un morphisme de Frobenius sur  $A$  pour la place finie  $v$ . Alors,  $\alpha_v$  est une isogénie admissible pour  $\mathcal{L}$  de poids  $q(\alpha_v)$ .

*Démonstration.* — C'est la proposition 3.3. de [10].  $\square$

### 3. Preuve du théorème 1.6

Dans la suite de ce paragraphe, on va prouver le théorème 1.6. Pour cela nous suivrons la preuve de [10] avec les modifications indiquées dans l'introduction et notamment, d'une part en introduisant dans notre cadre les idées de [2] et d'autre part en utilisant systématiquement l'indice d'obstruction. Ce paragraphe reposant pour une forte part sur les techniques

développées dans [10] nous avons choisi d'insister sur les aspects qui diffèrent mais par contre de renvoyer à cette référence lorsqu'il n'y a pas de modification autre que typographique.

Commençons tout d'abord par quelques réductions.

### 3.1. Réductions

Quitte à faire une extension de degré borné de  $K$  et quitte à prendre une variété abélienne isogène à la variété de départ, on supposera désormais toujours que les hypothèses de la proposition D sont satisfaites. De plus une variété abélienne de type C.M. ayant potentiellement partout bonne réduction, nous supposons également avoir choisi  $K$  de sorte que  $A/K$  a partout bonne réduction. Ceci nous permettra notamment d'appliquer le lemme 2.3. On note

$$\delta_n(\cdot) := \delta_{\mathcal{L}, K_n}(\cdot) \quad \text{et} \quad \delta_n^*(\cdot) := [K_n : K]\delta_n(\cdot).$$

Par ailleurs, comme on travaille avec une variété abélienne  $A/K$  de type C.M., on sait que, quitte à faire au départ une extension bornée de  $K$  (ce que l'on fait) de sorte que les endomorphismes de  $A$  soient tous définis sur  $K$ , l'extension  $K_n/K$  est abélienne (cf. par exemple [4], Th. 9.2 ou [35], Cor. 2 du Th. 5). Enfin, quitte à prendre un multiple de  $n$ , on peut toujours supposer ce  $n$  assez grand (devant les différentes constantes  $c_i := c_i(A/K, \mathcal{L})$  intervenant dans ce qui précède et dans la suite).

### 3.2. L'hypothèse (H)

Soit  $C_0$  une constante (ne dépendant que de  $A/K$  et de  $\mathcal{L}$  : comme dans [10]  $C_0$  sera prise assez grande de sorte à pouvoir appliquer les estimations asymptotiques (via Chebotarev) sur les ensembles  $\mathcal{P}_r$ ). Soit  $P$  un point de  $A(\overline{K})$ . On fixe deux entiers,  $\rho_{\min}$  et  $\rho_{\max}$ , ne dépendant que de  $g$ , que nous expliciterons plus tard mais dont la valeur est fixée une fois pour toute. On pose  $\delta_n^* = \delta_n^*(P)$ . On se donne aussi un point  $Q \in A(\overline{K})$  qui vérifie l'**hypothèse (H)** suivante :

1. Il existe un entier  $\rho \in \{\rho_{\min}, \dots, \rho_{\max}\}$  tel que

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(Q) \leq \frac{c}{\delta_n(Q)} \left( \frac{\log \log \delta_n^*}{C_0 \log \delta_n^*} \right)^{(g+1)\rho}.$$

2. Il existe une constante  $c_g$  telle que  $(g + 1)!(2g.g!)^g \rho_{\min} \geq c_g > 0$ , telle que  $Q = f(\sigma(P))$  où  $f$  est une isogénie de poids au plus  $(C_0 \log \delta_n^*)^{c_g}$  et  $\sigma$  est un élément de  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ .

LEMME 3.1. — Avec les notations précédentes, si  $Q$  vérifie l'hypothèse (H), alors on a

$$\log \delta_n(Q) \leq C_0 \log \delta_n^*(P).$$

Démonstration. — Soit  $X$  une  $K_n$ -variété de dimension  $d < g$  passant par le point  $P$  telle que  $\delta_n(P) = (\text{deg}_{\mathcal{L}_{K_n}} X)^{\frac{1}{g-d}}$ . La variété  $f(\sigma(X))$  est définie sur  $K_n$  et passe par  $Q$ , donc

$$\begin{aligned} \delta_n(Q) &\leq (\text{deg}_{\mathcal{L}_{K_n}} f(X))^{\frac{1}{g-d}} \\ (3.1) \quad &\leq q(f)^{\frac{d}{g-d}} \delta_n(P) \quad \text{par le lemme E point 2} \\ &\leq q(f)^g \delta_n^*(P). \end{aligned}$$

Or le poids  $q(f)$  est par l'hypothèse (H) polynomial en  $C_0 \log \delta_n^*(P)$ . On peut donc conclure en passant au log. □

### 3.3. À propos des paramètres

On note  $Q \in A(\overline{K})$  un point vérifiant l'hypothèse (H) et  $V$  une sous- $K_n$ -variété irréductible de  $A_{K_n}$  de dimension minimale, réalisant  $\delta_n(Q)$ . En utilisant un lemme de Siegel fin, le théorème de Bombieri-Vaaler, nous allons construire une fonction  $F$ , polynôme homogène à coefficients dans  $\mathcal{O}_{K_n}$  de degré  $L$  en les fonctions abéliennes de  $A \times A$ , nul à un ordre  $\geq T_0 + 1$  sur l'image  $i(V)$  de  $V$  dans  $A \times A$ , le long de l'espace tangent à l'origine de la sous-variété abélienne  $B$  de  $A \times A$  définie comme étant l'image de  $A$  par l'application  $i : x \mapsto (x, Nx)$ ,  $N$  étant un paramètre. L'entier  $L$  est le degré de la fonction auxiliaire,  $T_0$  est l'ordre d'annulation au point  $Q$  que l'on rentre dans la machine et à partir duquel on va extrapoler,  $N$  est un paramètre compris entre  $\sqrt{L}$  et  $\sqrt{2L}$ . Pour des raisons techniques (cf. le paragraphe sur l'extrapolation de [10]) on choisit pour  $N$  une puissance de 2. Au vu du résultat que l'on cherche à prouver, on fera intervenir dans le choix des paramètres, des facteurs  $\delta_n(Q)$  et des facteurs polynomiaux en  $\log \delta_n^*$  ou  $\log \log \delta_n^*$ .

D'autres paramètres  $N_i$  correspondant aux degré des isogénies  $\alpha_i$  de Frobenius vont intervenir. On choisit les paramètres de sorte que

$$(3.2) \quad \widehat{h}_{\mathcal{L}}(N\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_g(Q)) \leq c_3.$$

Enfin, on va extrapoler  $g$  fois, utilisant à chaque fois l'extrapolation précédente. On obtient ainsi des ordres d'annulation  $T_i$  chacun étant nécessairement plus petit que le précédent.

Par ailleurs, tous ces paramètres sont choisis polynomiaux en  $\delta_n(Q)$  et en  $\log \delta_n^*$ . De plus, comme  $L$  donc  $N^2$  va être de la forme  $\delta_n(Q)(\log \delta_n^*)^*$  et que on veut comme résultat une minoration du type  $1/\delta_n(Q)(\log \delta_n^*)^{*'}$ , on sait par avance grâce à l'inégalité (3.2) que les  $N_i$  seront choisis polynomiaux en  $\log \delta_n^*$  ou plus petits.

### 3.4. Lemme de Siegel

DÉFINITION 3.2. — Soit  $N$  un entier. Si  $S$  est un sous- $\overline{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel de  $\overline{\mathbb{Q}}^{N+1}$ , on définit la hauteur logarithmique de Schmidt [28] de  $S$ ,  $h_2(S)$  comme suit : sur  $\mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$  on définit

$$h_2(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{d} \left( \sum_{v \in M_K^0} d_v \log \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|_v + \sum_{v \in M_K^\infty} d_v \log \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|_v^2} \right),$$

où  $d$  et  $d_v$  sont respectivement le degré et les degrés locaux de l'extension de  $\mathbb{Q}$  engendrée par les coordonnées  $x_1, \dots, x_n$ ; et où  $M_K^\infty$  et  $M_K^0$  dénote respectivement l'ensemble des places infinies et des places finies de  $K/\mathbb{Q}$ ; et où on choisit comme normalisation de  $|\cdot|_v$  pour  $v \in M_K^0$  divisant  $p$  la suivante :  $|p|_v = p^{-1}$ . Soit  $N$  un entier. On définit alors la hauteur  $h_2$  d'un sous- $\overline{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel  $S$  algébrique de dimension  $s$  de  $\overline{\mathbb{Q}}^{N+1}$  par :

$$h_2(S) = h_2(\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_s),$$

où  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$  est une base de  $S$  sur un corps de nombres quelconque sur lequel  $S$  est défini.

Rappelons le lemme de Siegel que nous allons utiliser : il s'agit du théorème de Bombieri-Vaaler [8]. Il y a ici une différence fondamentale avec l'article de David et Hindry : on veut pouvoir contrôler la dépendance en l'extension  $K_n/K$ .

THÉORÈME F (Bombieri-Vaaler). — Soit  $\mathbb{F}/\mathbb{Q}$  un corps de nombres de degré  $d$ . Soient  $M$  et  $N$  deux entiers strictement positifs et  $S$  un sous- $\mathbb{F}$ -espace vectoriel de  $\mathbb{F}^N$  de dimension  $N - M > 0$ . Il existe un élément non nul  $\mathbf{x}$  dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}^N$  de  $S$  tel que

$$h_2(1, \mathbf{x}) \leq \frac{1}{2d} \log |\text{Disc}(\mathbb{F}/\mathbb{Q})| + \frac{1}{N - M} h_2(S).$$

Avant de poursuivre, faisons quelques brefs rappels concernant la notion de variété projectivement normale.

**DÉFINITION 3.3.** — *On dit qu'une sous-variété  $X$  de  $\mathbb{P}_n$  est projectivement normale si son anneau de coordonnées  $S(X)$  est un anneau normal (i.e. intégralement clos).*

On peut montrer (cf. par exemple Birkenhake-Lange [6], pp. 190–193) que  $X \subset \mathbb{P}_n$  est projectivement normale si et seulement si elle est normale, et pour tout  $d \geq 0$  la flèche naturelle

$$H^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(d)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(d))$$

est surjective.

Concernant les variétés abéliennes plongées de manière projectivement normale, on a le résultat suivant que l'on trouve par exemple dans [6], Th. 3.1, p. 190.

**PROPOSITION 3.4.** — *Soient  $A/K$  une variété abélienne, et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample sur  $A$ . Pour tout  $n \geq 3$ , le fibré  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  définit un plongement projectivement normal de  $A$  dans un espace projectif  $\mathbb{P}_r$ .*

Soient  $A/K$  une variété abélienne sur un corps de nombres, munie d'un fibré en droites symétrique ample  $\mathcal{L}$ . Quitte à travailler avec  $\mathcal{L}^{\otimes 4}$  plutôt qu'avec  $\mathcal{L}$ , on peut supposer que  $\mathcal{L}$  est très ample, totalement symétrique et définit un plongement projectivement normal de  $A$  dans un projectif  $\mathbb{P}_n$ . On note  $\mathcal{M} = \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}$  le fibré en droites sur  $A \times A$  associé à  $\mathcal{L}$ . On va maintenant pouvoir construire la fonction  $F$  recherchée.

Soient  $L$  et  $T$  deux entiers positifs. On note  $\{s_0, \dots, s_l\}$  une base de  $H^0(A \times A, \mathcal{M})$ . On peut, par projective normalité, choisir une base  $\{Q_1, \dots, Q_m\}$  du  $K$ -vectoriel  $H^0(A \times A, \mathcal{M}^{\otimes L})$  telle que tous les  $Q_i$  sont homogènes de degré  $L$  en les  $s_j$ . De plus, on peut aussi voir les  $s_i$  comme des  $(1, 1)$ -formes homogènes de  $K[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  où  $\mathbf{X} = (X_0, \dots, X_n)$ , et  $\mathbf{Y} = (Y_0, \dots, Y_n)$ . Enfin on note  $T_B$  l'espace tangent à l'origine de la sous-variété abélienne  $B = i(A)$  de  $A \times A$  définie par  $y = [N]x$ .

**But :** fabriquer un polynôme,  $F = \sum_{i=1}^m b_i Q_i$ , à coefficients entiers dans  $\mathcal{O}_{K_n}$ , en les fonctions abéliennes de  $A \times A$ , tel que  $F$  est de "petite" hauteur, et tel que  $F$  s'annule à un ordre supérieur à  $T_0 + 1$  sur  $i(V)$ , le long de  $T_B$ .

En notant  $\Theta$  l'application thêta définie sur  $T_{A(\mathbb{C})}$  par la composition

$$T_{A(\mathbb{C})} \xrightarrow{\exp_{A(\mathbb{C})}} A(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{L}}} \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$$

associée à  $\mathcal{L}$ , ceci correspond à trouver une solution de petite hauteur au système d'inconnues les  $b_i$

$$(3.3) \quad \frac{\partial^\kappa F(\Theta(\mathbf{u} + \mathbf{z}), \Theta(N(\mathbf{u} + \mathbf{z})))}{\partial \mathbf{z}^\kappa} \Big|_{\mathbf{z}=0} = 0,$$

pour tout  $|\kappa| \leq T$  et  $\mathbf{u} \in T_{A(\mathbb{C})}$  tels que  $\Theta(\mathbf{u}) \in V(\overline{K})$ .

On reprend le lemme 5.1. de [10] en remplaçant  $K$  par  $K_n$ . On obtient alors directement :

LEMME 3.5. — *Il existe une constante strictement positive  $c_4$  telle que le rang du système (3.3) sur  $K_n$  est majoré par*

$$\mathbf{rg} = c_4 (T_0 \delta_n(Q))^{g-d_0} (LN^2)^{d_0}.$$

On peut maintenant construire la fonction que l'on veut. Étant donné un polynôme  $F$  à coefficients dans  $\overline{K}$ , on note  $h(F)$  la hauteur logarithmique absolue du point projectif défini par 1 et les coefficients de  $F$ .

LEMME 3.6. — *Si  $T_0 \delta_n(Q) < 2L^2$ , alors il existe une fonction  $F$  solution du système (3.3), de hauteur majorée par*

$$h(F) \leq c_5 (\log[K_n : K])^2 + \frac{\mathbf{rg} \times (C_0 T_0 \log(\delta_n(Q)) + L)}{L^{2g}}.$$

*Démonstration.* — Il suffit de reprendre la preuve du lemme 5.4. de [10] et d'appliquer le théorème F en lieu et place du classique lemme de Siegel. Comme  $K_n = K(A[n])$ , on utilise le corollaire 2.4 pour majorer le discriminant apparaissant dans le théorème F. C'est ce discriminant qui nous donne le terme  $c_5 (\log[K_n : K])^2$ . □

### 3.5. Lemme de zéros

Avec les notations précédentes, on pose  $\Sigma = \{\sigma(Q) \mid \sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K_n)\}$ . Pour chaque premier  $p$ , fixons une place  $v_p$  de  $K_n$  au-dessus de  $p$  et notons  $NR_{K_n}$  l'ensemble des telles places  $v_p$  telles que  $v_p|p$  est non-ramifiée dans  $K_n$ . Pour  $r$  compris entre 1 et  $g$ , posons de plus

$$\mathcal{P}_r = \{\text{Id}\} \cup \left\{ \alpha_v \mid v \in NR_{K_n}, \frac{N_r}{2} \leq N(v) \leq N_r \right\},$$

où les  $N_r$  sont des paramètres qui seront spécifiés ultérieurement. Il faut notamment les choisir de sorte que  $\frac{N_i}{\log N_i} \geq 2 \log \delta_n^* \geq \frac{4}{\log 2} \log[K_n : K]$  afin d'être sur que les ensembles  $\mathcal{P}_r$  soient non vides (cf. les points 2 des

lemmes 2.1 et 2.3). En supposant ceci vérifié, le théorème de Chebotarev nous assure alors que

$$\text{card}(\mathcal{P}_r) \geq \frac{c_6 N_r}{\log N_r}.$$

*Notation.* — Si  $\alpha$  est un élément de  $\mathcal{P}_r$  pour un certain entier positif  $r$ , associé au nombre premier  $p$ , on notera  $\tilde{\alpha}$  l'opérateur  $\alpha \circ \Phi_p^{-1}$ , composé d'une isogénie et d'un morphisme de  $\text{Gal}(K_n/K)$ . Par convention, si  $\alpha$  est l'identité, on prendra également l'identité pour  $\tilde{\alpha}$ .

Pour tout entier  $r$  entre 1 et  $g$ , on note alors On convient que  $\Sigma^{(g+1)} = \Sigma$ .

On rappelle une variante (affaiblie) du lemme de zéros démontré dans [10] (Théorème 4.1).

**THÉOREME 3.7** (Lemme de zéros). — *On utilise les notations précédemment introduites. Soient  $A/K$  une variété abélienne de dimension  $g$ , plongée dans un espace projectif  $\mathbb{P}_m$  de façon projectivement normale et  $M$  un entier strictement positif. On se donne une forme  $F \in K_n[X_0, \dots, X_m]$  homogène de degré  $L$ , non-identiquement nulle sur  $A_{K_n}$ . On suppose que  $F$  s'annule à un ordre supérieur à  $1 + M$  le long de  $T_{A_{K_n}}$  en tous les points de  $\Sigma^{(1)}$ . Sous ces hypothèses : il existe un entier  $r \in \{1, \dots, g\}$ , une sous- $K_n$ -variété de  $A_{K_n}$ ,  $V$ , stricte et  $K_n$ -irréductible, de dimension  $d \geq g - r$ , telle que  $V_{\bar{K}}$  contient un élément de  $\Sigma^{(r+1)}$ , incomplètement définie dans  $A$  avec multiplicité supérieure à  $\frac{1}{g}M$  le long de l'espace tangent à l'origine  $T_{A_{K_n}}$  par des formes de degré inférieure à  $2LN_1 \times \dots \times N_{r-1}$ , telle que :*

$$M^{g-d} \text{deg}_{\mathcal{L}_{K_n}} \left( \bigcup_{\alpha \in \mathcal{P}_r} \tilde{\alpha}(V) \right) \leq c_7(LN_1 \times \dots \times N_{r-1})^{g-d}.$$

*Démonstration.* — C'est le théorème 4.1. (version galoisienne) et la scolie 4.8. de [10] appliqués avec

$$K = K_n, \quad \forall i \in \{1, \dots, g\} \quad T_i = \frac{1}{g}M, \quad L = L, \quad \mathcal{V} = T_{A_{K_n}}.$$

Plus précisément, on reprend leur preuve, la seule différence étant la suivante : là où ils introduisent (p.27, paragraphe 4.2.) la suite d'idéaux

$$\mathcal{J}_1 = (P), \quad \mathcal{J}_{r+1} = (\partial_{0,\alpha}^{T_r} \mathcal{J}_r; \alpha \in \mathcal{P}_r),$$

nous introduisons la suite

$$\mathcal{J}_1 = (P), \quad \mathcal{J}_{r+1} = (\partial_{0,\alpha_p}^{T_r} \Phi_p(\mathcal{J}_r); \tilde{\alpha}_p = \alpha_p \circ \Phi_p^{-1} \in \mathcal{P}_r).$$

La preuve est alors la même. □

Comme dans [10], nous aurons également besoin d'un résultat supplémentaire, raffinant l'inégalité de Bézout :



LEMME 3.8. — *Il existe une constante  $c_8$  telle que la propriété suivante est vraie : soient  $V$  une sous- $K_n$ -variété stricte de  $A$ , irréductible sur  $K_n$  et  $F$  une forme de degré  $\mu$  sur  $A$ , définie sur  $K_n$ . On suppose que  $F$  est nulle avec multiplicité supérieure à  $m$  sur une sous- $K_n$ -variété  $V'$  de  $A$ , et on suppose également que les intersections  $V \cdot V'$  et  $V \cdot \mathcal{Z}(F)$  ont une composante  $W$ ,  $K_n$ -irréductible en commun, de codimension 1 dans  $V$ . Dans ce cas, on a l'inégalité*

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W \leq c_8 \frac{(\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V)\mu}{m}.$$

*Démonstration.* — Il s'agit du lemme 4.9. de [10] avec  $K = K_n$ . □

### 3.6. Extrapolation

L'extrapolation suit pour partie ce qui est fait par David et Hindry dans [10]. Ceci dit, il y a tout de même une différence : comme la fonction auxiliaire n'est plus construite à coefficients entiers mais à coefficients dans  $\mathcal{O}_{K_n}$ , on va à la manière des cas non-ramifié de [3] et [24], faire intervenir les automorphismes de Frobenius  $\Phi_p$  de l'extension abélienne  $K_n/K$ . Ceci étant noté, les choses fonctionnent bien ensuite à condition de se restreindre au cas des premiers non-ramifiés dans  $K_n$ . C'est pour cela que l'on définit les ensembles  $\mathcal{P}_r$  tels qu'on les définit. On énonce le lemme qui nous permet d'extrapoler. Notons que l'on utilise ici le fait que l'extension  $K_n/K$  est abélienne.

LEMME 3.9. — *Soient  $x \in \mathcal{O}_{K_n}$ ,  $p$  un nombre premier non-ramifié dans  $K_n$  et  $v$  une valuation sur  $\bar{K}$  étendant  $p$ . En notant  $\Phi_p \in \text{Gal}(K_n/K)$  l'automorphisme de Frobenius associé à  $p$ , on a*

$$|x^p - \Phi_p x|_v \leq p^{-1}.$$

*Démonstration.* — C'est le lemme 3.1. de [3]. □

*Remarque 3.10.* — Notons que c'est cette restriction, le fait de se restreindre à ne travailler qu'avec les premiers non-ramifiés dans  $K_n$ , qui fait apparaître les facteurs  $\log \delta_n^*$  plutôt que  $\log \delta_n(P)$ . Pour corriger ceci, on pourrait s'inspirer de l'article [3] (et [24]), mais, indépendamment des autres complications, il y aurait cette fois-ci non plus  $g$ , mais  $2^g$  étapes d'extrapolation à faire.

On reprend le paragraphe 6 de [10] et on remplace dans le théorème 6.4, le corps  $K(Q)$  par  $K_n(Q)$ . Ceci se fait sans autre changement et on obtient ainsi :

PROPOSITION 3.11. — Pour tout  $i$  compris entre 1 et  $g$ , on fait les hypothèses suivantes sur les paramètres :

$$N^2 \left( \prod_{i=1}^g N_i \right) \widehat{h}_{\mathcal{L}}(Q) \leq c_3,$$

et

$$T_i \log N_{g-i} \geq 2L \text{ et si } i \leq g-1, \\ T_i \log N_{g-i} > 2c_9 (T_{i+1} \log(T_{i+1} + L) + L + h(F)).$$

Dans ce cas, la fonction auxiliaire  $F$  est nulle le long de  $T_{B(\mathbb{C})}$  à un ordre supérieur à  $T_g$  en tout point de  $\Sigma^{(1)}$ .

Démonstration. — Il s’agit de reprendre les calculs de la proposition 6.5. de [10] (elle même basée sur l’extrapolation de Laurent [16]) en passant de  $K$  à  $K_n$ . On conserve donc leurs notations. Il s’agit de la même chose que ce qui est fait dans les propositions 6.1 et 7.1 de [24] dans le cadre des courbes elliptiques. On raisonne par récurrence, on suppose  $F$  nulle à un ordre supérieur à  $T_i$  le long de  $T_{B(\mathbb{C})}$  en tous les points de  $\Sigma^{(g+1-i)}$ , et on va montrer la même chose à au rang  $i + 1$ . Plus exactement, étant donné un point  $R_{g+1-i}$  de  $\Sigma^{(g+1-i)}$ , plutôt que de montrer que  $F$  s’annule en un point  $\tilde{\alpha}_v(R_{g+1-i})$  à un ordre supérieur à  $T_{i+1}$  avec  $\alpha_v \in \mathcal{P}_{g-i}$ , on va montrer, ce qui est équivalent, que  $\Phi_p(F)$  s’annule au point  $\alpha_v(R_{g+1-i})$  au même ordre. Cette reformulation nous permettra d’appliquer le lemme 3.9. Notons que le rang  $i = 0$ , autrement dit l’initialisation de la récurrence, est vrai par construction de  $F$  par le lemme de Siegel.

Soit  $v$  la place de  $K_n$  dans  $NR_{K_n}$  correspondant à  $\alpha_v \in \mathcal{P}_{g-i}$ . Elle est d’uniformisante  $\pi_v$ . Soit  $R$  un point de  $\Sigma^{(g+1-i)}$  défini sur une extension  $K'_n/K_n$ , et soit  $w$  une place de  $K'_n$  au dessus de  $v$ . Notons  $\mathbf{R} = (R_0, \dots, R_n)$  un système de coordonnées projectives de  $R$  dans  $\mathcal{O}_w$ , telles que  $\|\mathbf{R}\|_w = 1$ . Soit  $\partial^\kappa$  un opérateur différentiel d’ordre  $|\kappa| \leq T_{i+1}$  le long de  $T_{B(\mathbb{C})}$ . L’application de l’hypothèse de récurrence (annulation de  $F$  à un ordre supérieur à  $T_i$  le long de  $T_{B(\mathbb{C})}$  en tous les points de  $\Sigma^{(g+1-i)}$ ), et l’application du petit théorème de Fermat dans le cadre des variétés abéliennes conduisant à l’inégalité (20) p.47 de [10] et le lemme 3.9 nous donnent

$$(3.4) \quad \left| \Phi_p(\partial^\kappa F) \left( \mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R}), \mathbf{F}^{(N)} \circ \mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R}) \right) \right|_w \leq |\pi_v|_w^{T_i - |\kappa|},$$

où  $\mathbf{F}_{\alpha_v}$  et  $\mathbf{F}^{(N)}$  sont des formes homogènes de  $\mathcal{O}_K[\mathbf{X}]$  de degré respectifs  $N(v)$  et  $4^{m+1}$ , représentant respectivement l’endomorphisme de Frobenius sur  $A$  associé à  $v$ , et la multiplication par  $N = 2^{m+1}$ .

On veut maintenant sommer sur toutes les places  $w$  au-dessus de  $v$ . Malheureusement, le choix du système de coordonnées projectives pour  $R$  dépend de  $w$ . On est donc obligé d'alourdir les notations pour pallier ce problème. Soient  $S, S_N, S_{\alpha_v}, S_{N,\alpha_v}$  des coordonnées projectives non nulles de  $R, \mathbf{F}^{(N)}(\mathbf{R}), \mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R}), \mathbf{F}^{(N)} \circ \mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})$  respectivement. On note de plus  $S_{w,N}, S_{w,\alpha_v}, S_{w,N,\alpha_v}$  des coordonnées de ces points de valeur absolue  $w$ -adique maximale.

Soit maintenant  $\partial^\kappa$  un opérateur différentiel de longueur minimale pour lequel

$$\Phi_p(\partial^\kappa F)\left(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R}), \mathbf{F}^{(N)} \circ \mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})\right)$$

est non nul. Si  $|\kappa|$  est supérieur à  $T_{i+1}$ , on a gagné. Sinon on applique la formule de Leibniz en utilisant que  $F$  est bihomogène de bidegré  $(L, L)$ . On a donc

$$\begin{aligned} \Phi_p(\partial^\kappa F)\left(\frac{\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})}{S_{\alpha_v}}, \frac{\mathbf{F}^{(N)}(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R}))}{S_{N,\alpha_v}}\right) &= \frac{\Phi_p(\partial^\kappa F)\left(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R}), \mathbf{F}^{(N)}(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R}))\right)}{S_{\alpha_v}^L S_{N,\alpha_v}^L} \end{aligned}$$

Or ceci est égal à

$$\Phi_p(\partial^\kappa F)\left(\frac{\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})}{S_{w,\alpha_v}}, \frac{\mathbf{F}^{(N)}(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R}))}{S_{w,N,\alpha_v}}\right) \cdot \frac{(S_{w,\alpha_v} S_{w,N,\alpha_v})^L}{(S_{\alpha_v} S_{N,\alpha_v})^L}.$$

On récrit alors l'inégalité (3.4) en passant au log, en sommant sur toutes les places  $w$  au-dessus de  $v$  et en notant  $d_w$  les degrés locaux :

$$\begin{aligned} (3.5) \quad \sum_{w|v} d_w \log \left( \left| \Phi_p(\partial^\kappa F)\left(\frac{\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})}{S_{\alpha_v}}, \frac{\mathbf{F}^{(N)}(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R}))}{S_{N,\alpha_v}}\right) \right|_w \right) &\leq (T_i - |\kappa|) \sum_{w|v} d_w \log(|\pi_v|_w) + L \sum_{w|v} d_w \log \left( \frac{|S_{w,\alpha_v} S_{w,N,\alpha_v}|_w}{|S_{\alpha_v} S_{N,\alpha_v}|_w} \right). \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{w|v} d_w \log(|\pi_v|_w) = [K'_n : K_n] \log(|\pi_v|_v) = -\frac{[K'_n : K_n]}{d_v} \log(N(v))$$

De plus, on peut voir que

$$\begin{aligned} \sum_{w|v} d_w \log \left( \frac{|S_{w,\alpha_v} S_{w,N,\alpha_v}|_w}{|S_{\alpha_v} S_{N,\alpha_v}|_w} \right) &\leq [K'_n : K_n] (h_{\mathcal{L}}(\alpha_v(R)) + h_{\mathcal{L}}(N\alpha_v(R))) \\ &\leq [K'_n : K_n] \left( N(v)\widehat{h}_{\mathcal{L}}(R) + N^2 N(v)\widehat{h}_{\mathcal{L}}(R) + c_{14} \right). \end{aligned}$$

C'est l'inégalité (21), p. 49 de [10]. On obtient ainsi, en notant  $G$  le membre de gauche de l'inégalité (3.5) la majoration suivante :

$$\begin{aligned} (3.6) \quad G &\leq -c_{10} T_i [K'_n : K_n] \log N_{g-i} + L [K'_n : K_n] (N(v) \\ &\quad \cdot (N^2 + 1)\widehat{h}_{\mathcal{L}}(R) + c'_{14}) \\ &\leq -c_{10} T_i [K'_n : K_n] \log N_{g-i} + c_{11} L [K'_n : K_n] \\ &\leq -c_{12} T_i [K'_n : K_n] \log N_{g-i}, \end{aligned}$$

par choix des paramètres et par l'hypothèse. Précisément c'est pour obtenir cette dernière inégalité que l'on applique l'hypothèse **(H)**, via l'inégalité (3.2) supposée vérifiée dans les hypothèses de la proposition. Il reste à majorer le terme  $-G$ . Par définition de la hauteur (absolue logarithmique) projective, on a

$$\begin{aligned} \frac{-1}{[K'_n : K_n]} G &\leq h \left( \left( \Phi_p (\partial^\kappa F) \left( \frac{\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})}{S_{\alpha_v}}, \frac{\mathbf{F}^{(N)}(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R}))}{S_{N,\alpha_v}} \right) \right)^{-1} \right) \\ &= h \left( \Phi_p (\partial^\kappa F) \left( \frac{\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})}{S_{\alpha_v}}, \frac{\mathbf{F}^{(N)}(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R}))}{S_{N,\alpha_v}} \right) \right), \end{aligned}$$

ceci ayant un sens grâce à l'hypothèse de non nullité de  $\Phi_p (\partial^\kappa F) (\dots)$ . Il ne reste maintenant plus qu'à majorer cette dernière hauteur. Il s'agit d'un calcul classique (cf. par exemple [10], p. 50). On obtient

$$(3.7) \quad \frac{-1}{[K'_n : K_n]} G \leq c_{13} \left( T_{i+1} \log(T_{i+1} + L) + LN^2 N(v)\widehat{h}_{\mathcal{L}}(R) + h(F) \right).$$

Finalement, en mettant ensemble les inégalités (3.6) et (3.7), on obtient

$$(3.8) \quad T_i \log N_{g-i} \leq c_{14} (T_{i+1} \log(T_{i+1} + L) + L + h(F)).$$

Les hypothèses permettent alors de conclure. □

### 3.7. Choix complet des paramètres

Jusque là on a du imposer les inégalités suivantes sur les paramètres :

$$\forall i, N_i \gg (\log \delta_n^*)^2, N^2 \sim L, \text{ et si } i \leq g - 1,$$

$$T_0 \delta_n(Q) \ll L^2 \ll (T_i \log \log \delta_n^*)^2.$$

De plus,  $L$  étant linéaire en  $\delta_n(Q)$  (cf. le paragraphe 3.3), il en est de même pour les  $T_i$  qui sont strictement décroissants, en fait vérifiant :

$$T_{i+1} \leq T_i \frac{\log \log \delta_n^*}{C_0 \log \delta_n^*}.$$

On doit également avoir  $T_0 \geq \dots \geq T_{g-1} \geq \frac{(\log \delta_n^*)^2}{\log \log \delta_n^*}$ . Ainsi, on a :

$$T_g \simeq T_0 \left( \frac{\log \log \delta_n^*}{C_0 \log \delta_n^*} \right)^g = \delta_n(Q) \frac{T_0}{\delta_n(Q)} \left( \frac{\log \log \delta_n^*}{C_0 \log \delta_n^*} \right)^g.$$

Enfin la dernière chose à vérifier est la suivante :

$$\forall i \in \{1, \dots, g - 1\}, C_0 T_0^{g+1-d_0} \delta_n(Q)^{g-d_0} \log \delta_n^* \ll c T_i L^{2(g-d_0)} \log \log \delta_n^*.$$

On veut (afin d'obtenir un résultat optimal vis à vis de la méthode) que  $L$  soit le plus petit possible, ceci nous permet d'en déduire les valeurs optimales pour les  $T_i$  et pour  $L$  :

$$L = \left[ C_0^{2g} \delta_n(Q) (\log \delta_n^*)^{2g-1} (\log \log \delta_n^*)^{-2g} \right], N = 2^{m+1}, m = \left\lceil \frac{\log L}{2 \log 2} \right\rceil,$$

et, pour tout  $i \in \{1, \dots, g\}$

$$T_0 = \left[ C_0^{3g-\frac{1}{2}} \delta_n(Q) (\log \delta_n^*)^{3g-2} (\log \log \delta_n^*)^{-3g} \right], T_i = \left[ T_0 \left( \frac{\log \log \delta_n^*}{C_0 \log \delta_n^*} \right)^i \right].$$

Par ailleurs on pose

$$\forall i \in \{1, \dots, g\}, N_i = \left( \frac{C_0 \log \delta_n^*}{\log \log \delta_n^*} \right)^{i \cdot i! \rho},$$

pour un certain paramètre  $\rho$  entre  $\rho_{\min}$  et  $\rho_{\max}$ , avec

$$\rho_{\max} = (g + 2)(2g \cdot g!)^g \rho_{\min}$$

et  $\rho_{\min} = 2g + 5$ . Avec ces choix de paramètres on vérifie que l'inégalité (3.2) est bien vérifiée :

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(N\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_g(Q)) \leq c_3.$$

**3.8. Fin de l'extrapolation**

On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : A &\xrightarrow{i} A \times A \hookrightarrow \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \xrightarrow[\text{Segre}]{} \mathbb{P}_{(n+1)^2-1} \\ x &\mapsto (x, [N]x) \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.12. — Soient  $\rho$  compris entre  $\rho_{\min}$  et  $\rho_{\max}$  et  $Q$  un point de  $A(\overline{K})$  vérifiant l'hypothèse (H) pour  $\rho$ . Il existe une  $K_n$ -variété  $V$ ,  $K_n$ -irréductible, stricte de  $A$ , de dimension  $d$ , telle que : il existe un point  $Q_1 \in A(\overline{K})$ , de la forme  $Q_1 = \tilde{\alpha}_{r+1} \circ \dots \circ \tilde{\alpha}_g(Q)$ , pour un certain  $r \in \{1, \dots, g\}$  et certains  $\alpha_i \in \mathcal{P}_i$ ,  $i \in \{r + 1, \dots, g\}$ , tel que  $V$  est de dimension  $d \geq g - r$ , que  $Q_1 \in V(\overline{K})$ , et si  $V$  n'est pas une sous-variété torsion, on a

$$\text{deg}_{\mathcal{L}_{K_n}} V \leq c_{15} \frac{C_0 \log \log \delta_n^*}{N_r} \left( \frac{L^2 N_1 \times \dots \times N_{r-1}}{T_g} \right)^{g-d}.$$

De plus  $V$  est incomplètement définie par des formes de degré au plus

$$c_{16} L N^2 N_1 \times \dots \times N_{r-1}$$

avec multiplicité supérieure à  $\frac{1}{g} T_g$ .

Démonstration. — On applique le théorème 3.7 à la fonction auxiliaire  $F$  construite précédemment, tirée en arrière par  $\varphi$ . Comme  $F$  est une forme bi-homogène de bidegré  $(L, L)$  non-identiquement nulle sur  $A_{K_n} \times A_{K_n}$ , elle n'est pas identiquement nulle sur  $B_{K_n}$  par choix du paramètre  $N$  (on a pris  $N^2 \geq L + 1$ ). De plus la proposition 3.11 nous indique que  $F$  est nulle le long de  $T_{B(\mathbb{C})}$  à un ordre supérieur à  $T_g$  en tous les points de  $\Sigma^{(1)}$ . La forme  $G = F \circ \varphi$ , qui est une forme de degré  $L(N^2 + 1)$  vérifie donc les hypothèses du lemme de zéros. Il suffit de vérifier l'inégalité annoncée pour le degré de  $V$ . On suppose donc que  $V$  n'est pas de torsion.

On note  $\tilde{V}$  une composante irréductible de  $V_{\overline{K}}$ . Comme  $V$  n'est pas une sous-variété de torsion, le point 1 du lemme 2.10 nous dit alors qu'il n'existe pas de triplet  $(\alpha, \beta, \sigma) \in \mathcal{P}_r^2 \times \text{Gal}(\overline{K}/K_n)$  tel que  $\alpha(\tilde{V}) = \beta(\sigma(\tilde{V}))$ . Le choix de  $N_r \geq (\log \delta_n^*)^2$  fait que la suite du calcul de la majoration du degré de  $V$  marche comme dans [10], pp. 54–55, en remplaçant  $K$  par  $K_n$  :

$$\text{deg} \left( \bigcup_{\alpha \in \mathcal{P}_r, \sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K_n)} \tilde{\alpha}(\sigma(\tilde{V})) \right) \geq \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_r} \sum_{i=1}^M \frac{q(\alpha)^d \text{deg}(\sigma_i(\tilde{V}))}{\text{Card}(\text{Ker } \alpha \cap G_{\sigma_i(\tilde{V})})},$$

où l'on a noté  $\sigma_i(\tilde{V})$  les différents conjugués de  $\tilde{V}$ . On poursuit alors comme dans [10], p. 55. Notamment on a

$$|G_{\tilde{V}} : G_{\tilde{V}}^0| \leq \deg \tilde{V} (4L^2 N_1 \times \dots \times N_{r-1})^{g-s} \leq C_0^{\star_1} (\delta_n^{\star})^{\star_2},$$

où  $\star_1$  et  $\star_2$  sont des constantes explicites ne dépendant que de  $g$ . De plus par choix du paramètre  $N_r$ , le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{P}_r$  est supérieur à  $\frac{N_r}{C_0 \log \log \delta_n^{\star}}$ . Finalement tous calculs faits, on obtient

$$\deg \left( \bigcup_{\alpha \in \mathcal{P}_r, \sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K_n)} \tilde{\alpha}(\sigma(\tilde{V})) \right) \geq \frac{c'_{15} N_r \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V}{C_0 \log \log \delta_n^{\star}}.$$

En remplaçant dans l'inégalité fournie par le lemme de zéros, on obtient :

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V \leq c_{15} \frac{C_0 \log \log \delta_n^{\star}}{N_r} \left( \frac{L^2 N_1 \times \dots \times N_{r-1}}{T_g} \right)^{g-d}.$$

Ceci conclut. □

*Remarque 3.13.* — Notons que en remplaçant dans la proposition les paramètres par leur valeur, on obtient,

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V \leq c_{15} \frac{C_0^{(2g+\frac{3}{2}+\rho(r!-1))(g-d)} \delta_n(Q)^{g-d} (\log \delta_n^{\star})^{(2g+\rho(r!-1))(g-d)}}{N_r (\log \log \delta_n^{\star})^{(2g+\rho(r!-1))(g-d)-1}}.$$

**COROLLAIRE 3.14.** — *Avec les notations de la proposition précédente et si  $V$  n'est pas de torsion, on a l'inégalité*

$$\delta_n(Q_1) \leq \frac{C_0^{2g+\frac{3}{2}} (\log \delta_n^{\star})^{2g}}{N_1 (\log \log \delta_n^{\star})^{2g-1}} \delta_n(Q),$$

en particulier,  $\delta_n(Q_1) < \delta_n(Q)$ .

*Démonstration.* — Par définition de l'indice d'obstruction, on a  $\delta_n(Q_1) \leq (\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V)^{\frac{1}{\text{codim}(V)}}$ . Ainsi en appliquant la proposition précédente, on en déduit

$$\delta_n(Q_1) \leq c_{15} \frac{C_0^{2g+\frac{3}{2}+\rho(r!-1)} (\log \delta_n^{\star})^{2g+\rho(r!-1)}}{N_r^{\frac{1}{g-d}} (\log \log \delta_n^{\star})^{2g+\rho(r!-1)}} (\log \log \delta_n^{\star})^{\frac{1}{g-d}} \delta_n(Q).$$

à partir de là le calcul se fait exactement comme celui de la scolie 7.2. de [10] □

**3.9. Descente finale et preuve du théorème principal 1.6**

On va maintenant montrer le théorème. Pour cela on choisit  $P$  un point de  $A(\overline{K})$  et on suppose par l'absurde qu'il ne vérifie pas la conclusion du théorème 1.6 : on suppose donc que

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) < \frac{c}{\delta_n(P)} \left( \frac{\log \log \delta_n^*}{C_0 \log \delta_n^*} \right)^{(g+1)! \rho_{\max}},$$

et on suppose également que  $P$  n'est contenue dans aucune sous- $K_n$ -variété de torsion,  $B$ , stricte de  $A_{K_n}$  telle que

$$\left( \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} B \right)^{\frac{1}{\text{codim } B}} \leq \delta_n(P) (C_0 \log \delta_n^*)^{2g+2(g+2)(g+1)!(2g \cdot g!)^g(2g+5)}.$$

Le point  $P$  vérifie l'hypothèse (H) pour la valeur de  $\rho$  maximale, notée  $\rho_{\max}$ . La descente que l'on va maintenant expliquer est tout à fait similaire au paragraphe 7.3. de [10], à ceci près que l'on travaille sur le corps  $K_n$  et surtout que l'on ne travaille qu'avec les indices d'obstructions.

On définit  $g$  ensembles de premiers correspondant aux isogénies de Frobenius données par les ensembles  $\mathcal{P}_i^{(j)}$ , pour  $i \in \{1, \dots, g\}$  et  $j \in \{1, \dots, g\}$  :

$$\mathcal{P}_i^{(j)} = \{\text{Id}\} \cup \left\{ \alpha_v \mid \frac{N_i^{(j)}}{2} \leq N(v) \leq N_i^{(j)}, \quad v \mid p \text{ non-ramifié dans } K_n \right\},$$

où les  $N_i^{(j)}$  sont définis par la formule :

$$N_i^{(j)} = \left( \frac{C_0 \log \delta_n^*}{\log \log \delta_n^*} \right)^{i \cdot i! \rho_j},$$

avec  $\rho_j = (2g \cdot g!)^{g-j} \rho_{\min}$ .

Nous utiliserons aussi des ensembles exceptionnels  $\mathcal{S}_i^{(j)}$  dont le cardinal est au plus la moitié du cardinal de  $\mathcal{P}_i^{(j)}$ .

On introduit deux autres familles d'ensembles d'isogénies :

$$\forall j \in \{1, \dots, g\} \quad \mathcal{Q}_i = \left\{ \beta_j \mid \beta_j = \alpha_g^{(j)} \circ \dots \circ \alpha_2^{(j)}, \quad \alpha_i^{(j)} \in \mathcal{P}_i^{(j)} \right\}.$$

En appliquant la proposition 3.12 à un point  $Q$ , pour les ensembles  $\mathcal{P}_i^{(j)}$ , on obtient un point  $Q_1 = \beta_j(Q)$  avec  $\beta_j \in \mathcal{Q}_j$ . On pose également  $\mathcal{R}_0 = \{\text{Id}\}$  et

$$\forall i \in \{1, \dots, g\}, \quad \mathcal{R}_i = \{F_i \mid F_i = \beta_i \circ \dots \circ \beta_1, \quad \beta_i \in \mathcal{Q}_i\}.$$

*Notations.* — De même que pour les isogénies  $\alpha$ , on associe aux isogénies  $\beta$  et  $F$  les opérateurs  $\tilde{\beta}$  et  $\tilde{F}$  définis en remplaçant les  $\alpha$  par les  $\tilde{\alpha}$ .

On montre maintenant que l'on peut, partant de  $P$ , extrapoler  $g$  fois.



LEMME 3.15. — Soient  $i \in \{0, \dots, g - 1\}$  un entier et  $F_i$  un élément de  $\mathcal{R}_i$ . Le point  $P_i = \tilde{F}_i(P)$  vérifie l'hypothèse (H) avec  $\rho = \rho_{i+1}$ .

Démonstration. — Par construction des ensembles  $\mathcal{P}_i^{(j)}$  et par choix des  $N_i^{(j)}$ , l'isogénie  $F_i$  vérifie bien le point 2 de l'hypothèse (H). Ainsi il suffit de vérifier l'inégalité sur la hauteur de  $P_i$  pour pouvoir conclure. Or on a

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) = q(F_i)\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P).$$

En posant  $q_i = q(F_i)$ , on constate donc qu'il suffit de majorer convenablement  $q_i$ . Par définition des ensembles  $\mathcal{R}_i$ , on a

$$\begin{aligned} q_i &\leq \prod_{l=1}^i \max \{q(\beta_l) \mid \beta_l \in \mathcal{Q}_l\} \leq \prod_{l=1}^i \prod_{k=2}^g N_k^{(l)} \\ &\leq \left( \frac{C_0 \log \delta_n^*}{\log \log \delta_n^*} \right)^{(g+1)!(2g \cdot g!)^g \rho_{\min}} \end{aligned}$$

On obtient donc, en appliquant le lemme 3.1 (plus précisément en appliquant l'inégalité (3.1) de sa preuve),

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) &\leq \frac{c}{\delta_n(P)} \left( \frac{\log \log \delta_n^*}{C_0 \log \delta_n^*} \right)^{(g+1)!\rho_{\max} - (g+1)!(2g \cdot g!)^g \rho_{\min}} \\ &\leq \frac{c}{\delta_n(P_i)} \left( \frac{\log \log \delta_n^*}{C_0 \log \delta_n^*} \right)^{(g+1)!\rho_{\max} - (g+1)!(2g \cdot g!)^g \rho_{\min}} q_i^g \\ &\leq \frac{c}{\delta_n(P_i)} \left( \frac{\log \log \delta_n^*}{C_0 \log \delta_n^*} \right)^{(g+1)!(\rho_{\max} - (g+1)(2g \cdot g!)^g \rho_{\min})} . \end{aligned}$$

On a choisi  $\rho_{\max} = (g + 2)(2g \cdot g!)^g \rho_{\min}$ , ce qui conclut. □

On passe maintenant à la proposition cruciale, qui va nous permettre d'effectuer la descente. Pour la commodité du lecteur, nous conservons la numérotation de [10].

PROPOSITION 3.16. — Il existe un entier  $k \in \{1, \dots, g\}$ , une suite  $V_0, \dots, V_k$  de sous- $K_n$ -variétés strictes de  $A_{K_n}$  et une suite d'éléments  $F_i = \beta_i \circ \dots \circ \beta_1 \in \mathcal{R}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$  (et  $F_0 = \text{Id}$ ) vérifiant les propriétés suivantes :

1. Les dimensions  $d_i$  de  $V_i$  sont croissantes.
2. La variété  $V_i$  passe par  $P_i = \tilde{F}_i(P)$ .
3. La variété  $\tilde{\beta}_i^{-1}V_i$  contient  $V_{i-1}$  si  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

4. On a la majoration

$$\Delta_i := \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V_i \leq \frac{c_{15}}{N_1^{(i)}} \cdot \left( \frac{\delta_n(P_{i-1}) C_0^{2g+\frac{3}{2}+\rho_{i+1}(g^{l-1})} (\log \delta_n^*)^{2g+\rho_{i+1}(g^{l-1})}}{(\log \log \delta_n^*)^{2g-1+\rho_{i+1}(g^{l-1})}} \right)^{g-d_i}.$$

5. Si  $d_i = d_{i+1}$  et si pour tout  $j < i \leq k - 1$ ,  $d_j < d_{j+1}$ , alors le nombre  $q(\beta_{i+1})$  est premier avec  $|G_{V_i} : G_{V_i}^0|$ .

6. Il existe  $l \in \{0, \dots, k - 1\}$  tel que  $d_l = d_{l+1}$ .

Cette proposition se prouve en deux étapes, tout comme dans l'article de David et Hindry.

3.9.1. Proposition 3.16, première étape

DÉFINITION 3.17. — Soient  $\mathcal{N}$  un ensemble et  $\mathcal{S}$  un sous-ensemble. On dit que  $\mathcal{S}$  est exceptionnel (pour  $\mathcal{N}$ ) si le cardinal de  $\mathcal{S}$  est au plus la moitié du cardinal de  $\mathcal{N}$ .

LEMME 3.18. — Soit  $l \in \{0, \dots, g - 1\}$ . Supposons donnée une suite  $(W_i^{(l)})_{0 \leq i \leq l}$  de sous- $K_n$ -variétés strictes de  $A_{K_n}$  et une suite d'éléments  $F_i = \beta_i \circ \dots \circ \beta_1 \in \mathcal{R}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, l\}$  (et  $F_0 = \text{Id}$ ) vérifiant les propriétés suivantes :

1. Les dimensions  $d_i^{(l)}$  de  $W_i^{(l)}$  sont croissantes en  $i$  à  $l$  fixé.
2. La variété  $W_i^{(l)}$  passe par  $P_i = \tilde{F}_i(P)$ .
3. La variété  $\tilde{\beta}_i^{-1} W_i^{(l)}$  contient  $W_{i-1}^{(l)}$  si  $i \in \{1, \dots, l\}$ .
4. On a la majoration

$$(3.9) \quad \Delta_i^{(l)} := \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_i^{(l)} \leq \frac{c_{15}}{N_1^{(i)}} \cdot \left( \frac{\delta_n(P_{i-1}) C_0^{2g+\frac{3}{2}+\rho_{i+1}(g^{l-1})} (\log \delta_n^*)^{2g+\rho_{i+1}(g^{l-1})}}{(\log \log \delta_n^*)^{2g-1+\rho_{i+1}(g^{l-1})}} \right)^{g-d_i^{(l)}}.$$

Dans ces conditions, il existe un élément  $\tilde{\beta}_{l+1}(Q_{l+1})$  tel que :

5. Le nombre  $q(\beta_{l+1})$  est premier avec  $|G_{W_l^{(l)}} : G_{W_l^{(l)}}^0|$  et il existe une suite de sous- $K_n$ -variétés stricte de  $A$ ,  $(W_i^{(l+1)})_{0 \leq i \leq l+1}$  vérifiant les propriétés précédentes 1, 2, 3, 4 avec  $l$  remplacé par  $l + 1$  et  $F_{l+1} = \beta_{l+1} \circ F_l$ . De plus cette suite vérifie la propriété :

6. Pour tout  $i \in \{0, \dots, l\}$ , on a  $W_i^{(l)} \subset W_i^{(l+1)}$ .

*Démonstration.* — On va appliquer la proposition 3.12 en partant :

1. Du point  $\tilde{F}_l(P)$  ;
2. Des ensembles  $\mathcal{P}_1^{(l+1)}, \dots, \mathcal{P}_g^{(l+1)}$  où l'on choisit comme ensembles exceptionnels les

$$\mathcal{S}_i^{(l+1)} = \left\{ v \in \mathcal{P}_i^{(l+1)} \mid \text{pgcd} \left( N(v), |G_{W_i^{(l)}} : G_{W_i^{(l)}}^0| \right) \neq 1 \right\}.$$

Comme rappelé dans le lemme 2.1, le nombre de premiers divisant un entier positif  $n$  est au plus polynomial en  $\log n$  et le cardinal de la partie discrète des stabilisateurs de  $W_l^{(l)}$  est au plus polynomial en le degré de  $W_l^{(l)}$  d'après le point 3 du lemme E. Ainsi en utilisant la propriété 4, on a

$$\text{Card } \mathcal{S}_i^{(j)} \leq C_0 \log \delta_n^*.$$

Comme tout les  $N_i^{(j)}$  sont de cardinal au moins  $C_0(\log \delta_n^*)^2$ , on est bien assuré que les  $\mathcal{S}_i^{(l+1)}$  sont exceptionnels. Par ailleurs, le lemme 3.15 nous assure que  $P_i$  vérifie l'hypothèse (H). On va donc pouvoir lui appliquer la proposition 3.12 avec  $\rho = \rho_i$ .

Cette proposition nous fournit un élément  $\beta_{l+1} \in \mathcal{Q}_{l+1}$  tel que la propriété 5 soit satisfaite (par le choix même des ensembles exceptionnels). Par ailleurs, on obtient ainsi une sous- $K_n$ -variété,  $W_{l+1}^{(l+1)}$ , stricte de  $A$ ,  $K_n$  irréductible, de dimension  $d_{l+1}^{(l+1)}$ , passant par  $P_{l+1} = \tilde{\beta}_{l+1}(P_l)$ . Si  $W_{l+1}^{(l+1)}$  était de torsion, alors la variété  $\tilde{F}_{l+1}^{-1}W_{l+1}^{(l+1)}$  serait également de torsion. Or cette dernière contient le point  $P$ , et est de degré au plus

$$\begin{aligned} \left( \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} F_{l+1}^{-1}W_{l+1}^{(l+1)} \right)^{\frac{1}{\text{codim } W_{l+1}^{(l+1)}}} &\leq q(F_{l+1}) \left( \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_{l+1}^{(l+1)} \right)^{\frac{1}{\text{codim } W_{l+1}^{(l+1)}}} \\ &\leq q(F_{l+1}) \frac{LN^2 N_1 \times \dots \times N_{g-1}}{T_g}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité venant de ce que la variété  $W_{l+1}^{(l+1)}$  est donnée par le lemme de zéro. En remplaçant les paramètres par leur valeur, on en déduit une contradiction, car  $P$  n'est contenu par hypothèse dans aucune sous- $K_n$ -variété de torsion stricte de degré au plus

$$\left( \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} B \right)^{\frac{1}{\text{codim } B}} \leq \delta_n(P) (C_0 \log \delta_n^*)^{2g + \frac{1}{2} + 2(g+1)!(2g.g!)^g(2g+5)}.$$

Finalement la variété  $W_{l+1}^{(l+1)}$  n'est pas de torsion, et on peut appliquer la proposition 3.12 pour majorer plus finement son degré :

$$\begin{aligned} & \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_{l+1}^{(l+1)} \\ & \leq c_{15} \delta_n(P_l)^{g-d_{l+1}^{(l+1)}} \frac{C_0^{(2g+\frac{3}{2}+\rho_{l+1}(r_{l+1}!-1))(g-d_{l+1}^{(l+1)})} (\log \delta_n^*)^{(2g+\rho(r_{l+1}!-1))(g-d_{l+1}^{(l+1)})}}{N_{r_{l+1}}(\log \log \delta_n^*)^{(2g+\rho_{l+1}(r_{l+1}!-1))(g-d_{l+1}^{(l+1)})-1}} \\ & \leq c_{15} \frac{\delta_n(P_l)^{g-d_{l+1}^{(l+1)}}}{N_1^{(l+1)}} \times \left( \frac{C_0^{2g+\frac{3}{2}} (\log \delta_n^*)^{2g}}{\log \log \delta_n^*^{2g-1}} \right)^{g-d_{l+1}^{(l+1)}}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité s'obtient tout comme l'inégalité du corollaire 3.14 en suivant le calcul de la preuve de la scolie 7.2 de [10]. La variété ainsi construite vérifie bien l'inégalité 3.9.

Comme dans [10] nous construisons maintenant la variété  $W_0^{(l+1)}$ . On va pour cela couper  $W_0^{(l)}$  par des formes définissant incomplètement  $W_{l+1}^{(l+1)}$ , en utilisant l'information sur la multiplicité contenue dans le lemme de zéros : on coupe  $W_0^{(l)}$  par le nombre minimal de formes  $G_1, \dots, G_u$ , choisies parmi les formes définissant incomplètement,  $W_{l+1}^{(l+1)}$  avec multiplicité supérieure à  $T_g$ , données par la proposition 3.12, nulles sur  $W_{l+1}^{(l+1)}$ , tirées en arrière par  $\tilde{F}_{l+1}^{-1}$  de sorte que

$$W_0^{(l)} \cdot \tilde{F}_{l+1}^{-1} \mathcal{Z}(G_1) \cdots \tilde{F}_{l+1}^{-1} \mathcal{Z}(G_u)$$

a la même dimension au point  $P$  que

$$W_0^{(l)} \cdot \tilde{F}_{l+1}^{-1} (W_{l+1}^{(l+1)}).$$

De plus la proposition 3.12 nous assure qu'il existe de telles formes, nulles sur  $W_{l+1}^{(l+1)}$  avec multiplicité supérieure à  $\frac{1}{g} T_g$ , de degré au plus  $2L^2 N_1^{(l+1)} \times \dots \times N_{r_{l+1}-1}^{(l+1)}$ . Ainsi la variété  $W_0^{(l+1)}$  peut être définie par récurrence sur  $u$ . Parmi les composantes isolées de  $W_0^{(l)} \cdot \tilde{F}_{l+1}^{-1} \mathcal{Z}(G_l)$ , on en choisit une, que l'on note  $W_1^{(l+1)}$ , contenant une composante isolée de dimension maximale de

$$W_0^{(l)} \cdot \tilde{F}_{l+1}^{-1} W_{l+1}^{(l+1)},$$

passant par le point  $P$ . On applique maintenant le lemme 3.8 et on obtient

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_1^{l+1} \leq \frac{c_{15}}{T_g} \left( \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_0^{(l)} \right) L^2 N_1^{(l+1)} \times \dots \times N_{r_{l+1}-1}^{(l+1)}.$$

Par récurrence sur  $u$  on obtient une sous- $K_n$ -variété stricte de  $A$ ,  $W_u^{(l+1)} =: W_0^{(l+1)}$ , irréductible sur  $K_n$ , contenant le point  $P$  et vérifiant

$$W_0^{(l+1)} \subset \tilde{F}_{l+1}^{-1} W_{l+1}^{(l+1)},$$

et de degré majoré par

$$\text{deg}_{\mathcal{L}_{K_n}} W_0^{(l+1)} \leq \frac{c_{17}}{T_g^u} \text{deg}_{\mathcal{L}_{K_n}} W_0^{(l)} \left( L^2 N_1^{(l+1)} \times N_{r_{l+1}-1}^{(l+1)} \right)^u.$$

En utilisant le fait que  $\rho_{l+1} \leq \rho_1$  et  $r_{l+1} \leq g$ , on remplace maintenant les paramètres par leur valeur pour obtenir :

$$\text{deg}_{\mathcal{L}_{K_n}} W_0^{(l+1)} \leq c_{17} \delta_n(P_l)^u \left( \frac{C_0^{2g+\frac{3}{2}+\rho_1(g^l-1)} (\log \delta_n^*)^{2g+\rho_1(g^l-1)}}{(\log \log \delta_n^*)^{2g+\rho_1(g^l-1)}} \right)^u.$$

En remplaçant  $\text{deg}_{\mathcal{L}_{K_n}} W_0^{(l)}$  par sa majoration donnée par l'hypothèse de récurrence et en notant que  $u = \dim W_0^{(l)} - \dim W_0^{(l+1)}$ , on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} \text{deg}_{\mathcal{L}_{K_n}} W_0^{(l+1)} &\leq c_{18} \delta_n(P)^{\text{codim}_A(W_0^{(l+1)})} \\ &\cdot \left( \frac{C_0^{2g+\frac{3}{2}+\rho_1(g^l-1)} (\log \delta_n^*)^{2g+\rho_1(g^l-1)}}{(\log \log \delta_n^*)^{2g+\rho_1(g^l-1)}} \right)^{\text{codim}_A(W_0^{(l+1)})}. \end{aligned}$$

Notons que l'on a ici utilisé le corollaire 3.14 pour majorer  $\delta_n(P_l)$  par  $\delta_n(P)$ . Ceci achève la construction au rang  $i = 0$ . De plus, la propriété 6 est bien vérifiée pour  $i = 0$ .

On se donne maintenant un entier  $m \in \{0, \dots, l - 1\}$  et on suppose les variétés  $W_i^{(l+1)}$  construites pour  $i \in \{0, \dots, m\}$ . On veut construire les variétés  $W_m^{(l+1)}$  comme précédemment. De fait ceci marche effectivement de la même façon et est détaillé dans [10], pp. 66–67.  $\square$

Le lemme 3.18 nous permet d'obtenir le résultat suivant :

LEMME 3.19. — *Soit  $u$  un entier compris entre 0 et  $g - 1$ . S'il existe un élément de  $F_u = \beta_u \circ \dots \circ \beta_1 \in \mathcal{R}_u$  et une suite de sous- $K_n$ -variétés  $W_i^{(u)}$  strictes de  $A$ , vérifiant les hypothèses du lemme 3.18, alors, il existe un élément*

$$F_g = \beta_g \circ \dots \circ \beta_{u+1} \circ F_u \in \mathcal{R}_g$$

et des sous- $K_n$ -variétés strictes  $(W_i^{(j)})_{0 \leq i \leq j, u \leq g}$  stricte de  $A$  telles que : pour tout  $l \in \{u, \dots, g\}$ , la suite  $(W_i^{(l)})_{0 \leq i \leq l}$  vérifie les propriétés 1, 2, 3 et 4 du lemme 3.18 pour  $F_l = \beta_l \circ \dots \circ \beta_1$  et telles que de plus les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

- 5'. Pour tout  $l \in \{u, \dots, g - 1\}$ , le nombre  $q(\beta_{l-1})$  est premier avec  $|G_{W_l^{(l)}} : G_{W_l^{(u)}}^0|$ .

6'. Pour tout  $i \in \{0, \dots, g\}$  et pour tout  $l \in \{u, \dots, g - 1\}$ , on a

$$W_i^{(l)} \subset W_i^{(l+1)}.$$

De plus, pour  $F_0 = \text{Id}$ , il existe une telle sous-variété  $W_0^{(0)}$ .

*Démonstration.* — Soient  $W_0^{(0)}$  une sous- $K_n$ -variété stricte de  $A$  passant par  $P_0 = P$ , de dimension minimale et réalisant  $\delta_n(P)$ , i.e. telle que

$$\delta_n(P)^{\text{codim } W_0^{(0)}} = \text{deg}_{\mathcal{L}_{K_n}} W_0^{(0)}.$$

On note  $d_0^{(0)}$  sa dimension et on pose  $F_0 = \text{Id}$ . La variété  $W_0^{(0)}$  vérifie les propriétés 2 et 4 du lemme 3.18. De plus, pour  $l = 0$ , les deux autres conditions sont vides, donc vérifiées. On applique le lemme 3.18 et on obtient des variétés  $W_0^{(1)}, W_1^{(1)}$  ainsi qu'un élément  $F_1 \in \mathcal{R}_1$ . Par récurrence sur  $l$  on obtient alors le lemme. De même lorsque l'on part d'un entier positif  $u$  quelconque, la même récurrence permet de conclure. □

### 3.9.2. Proposition 3.16, seconde étape

Cette seconde étape, qui est purement combinatoire, se reprend mot pour mot dans la seconde étape de la descente de [10], pp. 68–71. Pour ne pas alourdir ce papier plus que de raison, nous l'omettons ici. Cette étape permet de prouver la proposition 3.16.

## 3.10. Conclusion

Soit  $i$  le plus petit entier compris entre 0 et  $k$  tel que  $d_i = d_{i+1}$  dans la proposition 3.16. La propriété 3 de cette proposition nous assure que  $V_i$  est une composante isolée de  $\tilde{\beta}_{i+1}^{-1} V_{i+1}$ . De plus, la variété  $\tilde{\beta}_{i+1}^{-1} V_{i+1}$  est stable par translation par les points de  $\text{Ker } \beta_{i+1}$ . Ainsi pour tout élément  $\xi$  de ce noyau, la variété  $V_i + \xi$  est une composante isolée de  $\tilde{\beta}_{i+1}^{-1} V_{i+1}$ . Par la propriété 5 de la proposition 3.16, le nombre  $q(\beta_{i+1})$  est premier avec le cardinal de la partie discrète du stabilisateur de  $V_i$ . Ainsi, en notant  $s_i$  la dimension de ce stabilisateur, on en déduit que le nombre de telles composantes est

$$q(\beta_{i+1})^{g-s_i}.$$

En comparant les degrés, on obtient l'inégalité

$$q(\beta_{i+1}) \text{deg}_{\mathcal{L}_{K_n}} V_i \leq \text{deg}_{\mathcal{L}_{K_n}} (\beta_{i+1}^{-1} V_{i+1}).$$

La variété  $V_i$  passe par construction par le point  $P_i$ , donc son degré sur  $K_n$  est minoré par

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V_i \geq \delta_n(P_i)^{g-d_i}.$$

La propriété 4 de la proposition 3.16 (majoration de  $\Delta_i$ ) nous donne alors

$$q(\beta_{i+1})^{g-s_i} \delta(P_i)^{g-d_i} \leq q(\beta_{i+1})^{g-d_i} \cdot \frac{\delta_n(P_i)^{g-d_i}}{N_1^{(i+1)}} \left( C_0^{2g+\frac{3}{2}+\rho_{i+2}(g!-1)} (\log \delta_n^*)^{2g+\rho_{i+2}(g!-1)} \right)^{g-d_i}.$$

En simplifiant par  $\delta_n(P_i)$  et en remplaçant  $N_1^{(i)}$  par sa valeur, on obtient

$$\frac{\left( C_0^{2g+\frac{3}{2}+\rho_{i+2}(g!-1)} (\log \delta_n^*)^{2g+\rho_{i+2}(g!-1)} \right)^{g-d_i} (\log \log \delta_n^*)^{\rho_{i+1}}}{C_0^{\rho_{i+1}} (\log \delta_n^*)^{\rho_{i+1}}} \geq 1.$$

Ainsi, on en déduit une contradiction si

$$\left( 2g + \frac{3}{2} + \rho_{i+2}(g! - 1) \right) (g - d_i) < \rho_{i+1}.$$

Or, par construction on a

$$\rho_{i+1} \geq (2g \cdot g!) \rho_{i+2}.$$

Ainsi, si  $\rho_{\min} = 2g + 5$  on peut conclure. Le choix de  $\rho_{\min}$  nous permet donc de finir la preuve.  $\square$

#### 4. Preuve du théorème 1.13

La preuve repose essentiellement sur trois points :

1. En relisant la preuve de Rémond, on peut dans le cas C.M. utiliser une estimation du cardinal des points de torsion meilleure que celle qu'il utilise : là où il utilise une estimation de Masser, on peut dans notre cas utiliser le corollaire 1.13 de [22].
2. Dans une variété abélienne  $A^n$ , avec  $A$  simple, les sous-groupes algébriques sont de dimension un multiple de la dimension de  $A$ .
3. Notre résultat (Théorème 1.6) sur le problème de Lehmer permet de gagner 1 dans l'estimation finale.

4.1. Préliminaires

Notons tout d'abord que le problème que l'on considère est stable par isogénies. Dans la suite on se restreint donc au cas d'une variété abélienne de type C.M. produit de variétés abéliennes géométriquement simples,  $A = \prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$ , les  $A_i$  étant de dimension  $g_i$  et deux à deux non isogènes. Par ailleurs, on fixe une courbe  $X$  qui est transverse dans  $A$ . Rémond obtient également dans le cas C.M., en appliquant la théorème A de David-Hindry, le résultat inconditionnel suivant (c'est le corollaire 1.2, p. 529, de [25]) :

THÉORÈME G (Rémond). — *L'ensemble  $X(\overline{K}) \cap A^{[r]}$  est fini dès que*

$$r \geq 2 + \sum_{i=1}^m g_i.$$

En relisant la preuve de Rémond, on constate en fait qu'il prouve un résultat un peu plus fin. On donne pour cela une notation en suivant [22] :

*Notation.* — Soit  $A/K_0$  une variété abélienne, on note

$$\gamma(A) = \inf \left\{ b > 0 \mid \exists C(A) > 0 \forall K/K_0 \text{ finie}, \right. \\ \left. |(A(K)_{\text{tors}})| \leq C(A/K_0)[K : K_0]^b \right\}.$$

PROPOSITION H (Rémond). — *L'ensemble  $X(\overline{K}) \cap A^{[r]}$  est fini dès que*

$$r > 1 + \sum_{i=1}^m \gamma(A_i).$$

Dans sa preuve du théorème G ci-dessus, il utilise la majoration due à Masser [18]

$$\text{Card}(A_i(K)_{\text{tors}}) \ll D^{g_i + \varepsilon}$$

avec  $\varepsilon$  assez petit. En prenant le produit, on voit que  $\gamma(A) \leq \sum_{i=1}^m g_i + \varepsilon$  d'où, vue la proposition H, le choix de  $r$  dans le théorème G. Précisément, dans son article l'utilisation du résultat de Masser est faite dans le corollaire 5.1, page 540, de [25].

Il y a donc deux manières de raffiner ce résultat. La première consiste à remplacer le terme  $1 + \sum \gamma(A_i)$  par un terme plus petit. Le théorème principal de notre article (le théorème 1.6) nous permet précisément d'améliorer ceci (en remplaçant  $1 + \sum \gamma(A_i)$  par  $\sum \gamma(A_i)$ ). C'est l'objet de la proposition 4.1 ci-après . La seconde amélioration possible consiste à obtenir une majoration plus précise que celle de Masser pour l'exposant  $\gamma(A)$  dans le cas d'une variété abélienne simple de type C.M. C'est ensuite la conjonction de ces deux améliorations ainsi qu'une remarque qui nous permettra



de prouver le théorème 1.13. Nous expliquons ceci dans le paragraphe 4.3. Passons maintenant à l'énoncé et la preuve de la première amélioration.

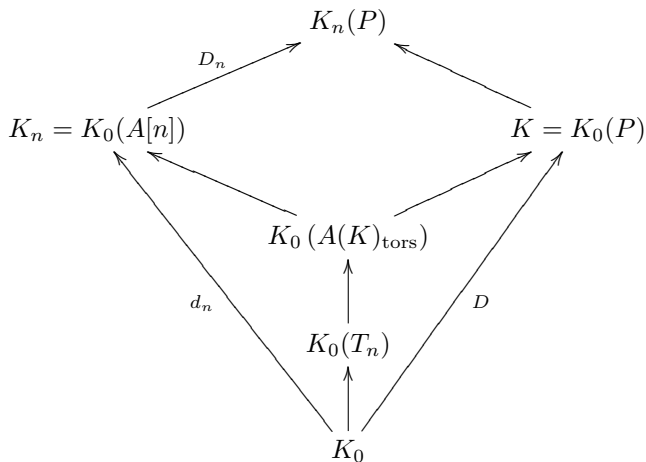
## 4.2. La première amélioration

On commence par donner l'énoncé, et on consacre le reste du paragraphe à sa preuve. Pour simplifier la vérification au lecteur, on s'efforce de conserver les notations de [25]. Ainsi on notera dans ce qui suit,  $r'$  ce que l'on notait  $r$  précédemment. Par ailleurs on note  $K_0$  le corps de base,  $K = K_0(P)$  une extension de degré  $D = [K : K_0]$  de  $K_0$  (cf. [25], pp. 538–539).

PROPOSITION 4.1. — *Soient  $A/K_0$  une variété abélienne de type C.M. et  $X$  une courbe transverse dans  $A$ . L'ensemble  $X(\overline{K_0}) \cap A^{[r']}$  est fini dès que*

$$r' > \sum_{i=1}^m \gamma(A_i).$$

On introduit également la notation  $K_n = K_0(A[n])$  où  $n$  est le plus grand ordre des points de torsion de  $A(K)$ , et on pose  $D_n = [K_n(P) : K_n]$ . Notons  $T_n$  un point d'ordre  $n$  de  $A(K)$ . On a le diagramme suivant :



Rappelons un lemme classique dont nous avons besoin.

LEMME 4.2. — *Soient  $n$  un entier positif et  $A/K_0$  une variété abélienne de dimension  $g$ . On a*

$$d_n := [K_0(A[n]) : K_0] \leq n^{4g^2}.$$

*Démonstration.* — Soit  $n \geq 1$  un entier. La représentation naturelle

$$\rho : \text{Gal}(\overline{K_0}/K_0) \rightarrow \text{Aut}(A[n])$$

nous donne une injection de  $\text{Gal}(K_0(A[n])/K_0)$  dans  $\text{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ . Ceci conclut.  $\square$

**COROLLAIRE 4.3.** — *Il existe deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  strictement positives ne dépendant que de  $A/K_0$ , telles que l'on a l'inégalité*

$$d_n \leq c_1 D^{c_2}.$$

*Démonstration.* — En utilisant l'inégalité du lemme 4.2, on majore  $d_n$  par une puissance de  $n$ . Par ailleurs, on sait (en utilisant par exemple les résultats transcendants de Masser [18], ou algébrique de Silverberg [32] dans notre cas) que l'on peut majorer  $n$  par une puissance du degré de  $[K_0(T_n) : K_0] \leq D$ . Ceci permet de conclure.  $\square$

*Preuve de la proposition 4.1.* — Ceci se fait selon les deux étapes suivantes :

**Étape 1 :** On montre que si  $r' > \sum_{i=1}^m \gamma(A_i)$  alors on peut majorer  $D$  en fonction de  $D_n$ .

**Étape 2 :** En reprenant le paragraphe 7, pp. 545–547, de [25] en travaillant sur  $K_n$  plutôt que sur  $K^t$ , on montre que  $D_n$  est borné dès que  $r' \geq 2$ .

Ainsi la conjonction des deux étapes entraîne que  $D$  est borné pour  $r' > \sum_{i=1}^m \gamma(A_i) \geq 1$ . De plus le lemme 3.3, p. 535, de [25] nous dit que l'ensemble  $X(\overline{K}) \cap A^{[r']}$  (et même l'ensemble  $X(\overline{K}) \cap A^{[1]}$ ) est de hauteur bornée. Le théorème de Northcott nous permet alors de conclure concernant la finitude de  $X(\overline{K}) \cap A^{[r']}$ . Ceci conclut donc la preuve de la proposition 4.1 modulo les étapes 1 et 2 précédentes. Notons à titre de remarque que nous n'avons pas besoin ici d'appliquer le lemme 7.1 de [25] utilisant le théorème de Raynaud (ex-conjecture de Manin-Mumford).

Il nous reste, pour compléter la preuve de la proposition 4.1, à prouver les deux étapes précédentes. C'est ce qu'on fait dans les deux sous-paragraphes suivants. Dans ces deux étapes, on appliquera notre théorème 1.6 en direction du problème de Lehmer relatif, en conjonction avec le corollaire 4.3 afin de majorer  $d_n D_n$  par une puissance de  $D$ .

#### 4.2.1. Rappels de notations de [25]

On travaille sur une variété abélienne de type C.M.,  $A = \prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$  définie sur un corps de nombres  $K_0$ . On note  $X$  la courbe transverse incluse dans  $A$ .

Comme dans [25], Paragraphe 5, p. 538, on note

$$P = (P_{1,1}, \dots, P_{1,n_1}, \dots, P_{i,1}, \dots, P_{i,n_i}, \dots, P_{m,n_m})$$

le point de degré  $D = [K_0(P) : K_0]$  sur  $K_0$  avec lequel on travaille (dans [25] il s'agit du point  $P' = f(P)$  où  $f$  est une isogénie fixe entre la variété abélienne ambiante et le produit  $\prod A_i^{n_i}$  : dans notre situation on a  $f = \text{Id}$ ). Pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , nous introduisons de plus deux  $\text{End}(A_i)$ -modules :

1.  $N_i$  est le sous- $\text{End}(A_i)$ -module de  $\text{Hom}(A, A_i)$  des morphismes nuls en  $P$ .
2.  $\Gamma_i$  est le sous- $\text{End}(A_i)$ -module de  $A_i(\overline{K})$  engendré par les points  $P_{i,1}, \dots, P_{i,n_i}$ .

Pour tout  $i$ , l'espace vectoriel réel  $\Gamma_i \otimes \mathbb{R}$  est naturellement muni d'une structure euclidienne en utilisant la hauteur de Néron-Tate. On note (suivant [25], p. 539)

$$\nu_i = \text{Vol}(\Gamma_i \otimes \mathbb{R} / (\Gamma_i / (\Gamma_i)_{\text{tors}}))$$

le volume pour cette norme.

Avec les notations de [25], on prend  $r = 2$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , on note  $s_i$  le rang du  $\text{End}(A_i)$ -module  $\Gamma_i$ , et on introduit les deux nombres

$$t = \sum_{i=1}^m (n_i - s_i), \quad \text{et} \quad q = \sum_{i=1}^m g_i (n_i - s_i).$$

L'entier positif  $q$  est introduit dans [25], Proposition 6.1, p. 543, et la ligne la précédant. L'entier positif  $t$  est quant à lui introduit à la deuxième ligne de la preuve de la proposition 6.1 de [25].

Enfin les morphismes  $\psi_j$  intervenant dans la suite sont des éléments de  $N_i$  apparaissant dans la preuve de la proposition 6.1 de [25].

#### 4.2.2. Preuve de l'étape 1

En utilisant les notations et la preuve de la proposition 6.1, pp. 543–544 de [25], on a

$$(4.1) \quad D \ll \left( \prod_{j=1}^t \|\psi_j\|^{2 \text{rg} \psi_j} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

(Notons que cette inégalité a été introduite pour la première fois dans ce contexte, dans le cadre de  $\mathbb{G}_m^n$ , dans l'article [7]).

Détaillons un peu l'obtention de cette inégalité (4.1) : dans [25], p. 544, Rémond montre d'abord que  $P$  est un point isolé de  $X \cap V$  (où  $V$  est une variété auxiliaire définie sur  $K_0$ , introduite p. 544 ligne 1). Ceci implique que

$$D \leq \deg X \cap V.$$

Par le théorème de Bézout, et  $X$  étant fixe, on obtient donc

$$D \leq \deg X \deg V \ll \deg V.$$

Il reste à majorer le degré de  $V$  : c'est ce qui est fait dans la seconde partie de la page 544 de [25]. Précisément Rémond obtient

$$\deg V \ll \left( \prod_{j=1}^t \|\psi_j\|^{2 \operatorname{rg} \psi_j} \right)^{\frac{r-1}{q}}.$$

Or nous avons déjà rappelé que dans notre situation nous prenons  $r = 2$  (attention à ne pas confondre  $r$  et  $r'$  dans les notations de [25]). Ceci conclut donc la preuve de l'inégalité (4.1).

Comme expliqué au début de la preuve de la proposition 6.1 de [25], la famille de morphismes notée  $\varphi_{i,j}$  dans la proposition 5.3 de [25] n'est autre que la famille  $\psi_i$  pour  $1 \leq i \leq t$ . On peut donc maintenant relire la proposition 5.3 de [25] et on obtient :

$$(4.2) \quad \prod_{j=1}^t \|\psi_j\|^{2 \operatorname{rg} \psi_j} \ll \prod_{i=1}^m \operatorname{vol}(N_i \otimes \mathbb{R}/N_i) \ll \prod_{i=1}^m (|A_i(K)_{\text{tors}}| v_i^{-1}).$$

Explicitons ceci : le terme de gauche de l'inégalité est exactement le terme de gauche de l'inégalité de la proposition 5.3 de [25]. En effet, les  $\varphi_{i,j}$  sont des morphismes non nuls à valeurs dans les variétés abéliennes simples  $A_i$  de dimension  $g_i$ . Donc  $g_i = \operatorname{rg} \varphi_{i,j}$  ce qui donne bien le membre de gauche de l'inégalité. Le membre de droite de (4.2) s'obtient en suivant la preuve de la proposition 5.3 de [25] : plus précisément, dans [25], le volume  $\operatorname{vol}(N_i \otimes \mathbb{R}/N_i)$  apparaît avec un exposant  $2g_i/d_i$ . Mais nous sommes dans le cas particulier de variétés abéliennes de type C.M., donc  $2g_i/d_i = 1$ . La dernière inégalité correspond à la fin de la preuve de la proposition 5.3 de [25] : on applique ses formules (1) et (2), p. 539 et on utilise que le point  $P$  est de hauteur bornée.

En utilisant la définition de  $\gamma(A_i)$  on a

$$|A_i(K)_{\text{tors}}| \ll D^{\gamma(A_i)+\varepsilon},$$

ceci étant valable pour tout  $\varepsilon$ , le signe  $\ll$  dépendant de  $\varepsilon$  (nous choisirons à la fin  $\varepsilon$  suffisamment petit). Avec l'inégalité (4.2), ceci nous donne

$$(4.3) \quad D \ll \left[ \prod_{i=1}^m (|A_i(K)_{\text{tors}}| v_i^{-1}) \right]^{\frac{1}{q}} \ll \left( D^{\sum_{i=1}^m \gamma(A_i) + \varepsilon} \prod_{i=1}^m v_i^{-1} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

*Conclusion de la preuve de l'étape 1 : application de notre théorème 1.6.* En appliquant notre théorème 1.6, on peut maintenant relire la proposition 5.2, page 541, de [25] : grâce au théorème 1.6 on améliore l'estimation faisant intervenir la minoration de la hauteur des points  $Q_{i,j}$ . On obtient ainsi (rappelons à nouveau que dans notre cas de type C.M.,  $g_i/d_i = 1/2$ ) :

$$(4.4) \quad \prod_{i=1}^m v_i^{\frac{1}{2}} \geq c_8 D_n^{-\frac{1}{2}} D^{-\frac{\varepsilon}{5}}.$$

Détaillons l'obtention de cette inégalité : on suit la preuve de la proposition 5.3 de [25]. Comme il l'explique, son appendice fournit une famille  $Q_{i,j}$  telle que

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{s_i} \widehat{h}(Q_{i,j})^{\frac{g_i}{2}} \ll \prod_{i=1}^m v_i^{\frac{g_i}{d_i}} = \prod_{i=1}^m v_i^{\frac{1}{2}}.$$

Ensuite, là où il applique la conjecture de Lehmer relatif, nous appliquons notre théorème 1.6, obtenant ainsi

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{s_i} \widehat{h}(Q_{i,j})^{\frac{g_i}{2}} \gg D_n^{-\frac{1}{2}} (\log d_n D_n)^{-\kappa(g)}.$$

Il ne reste plus qu'à estimer le terme logarithmique, ce qui se fait précisément en appliquant notre corollaire 4.3.

En regroupant les inégalités (4.2) et (4.4), on obtient finalement que  $D$  est majoré polynomialement en fonction de  $D_n$  si et seulement si

$$q > \sum_{i=1}^m \gamma(A_i).$$

Or par construction de  $q$ , on sait que  $q \geq r'$ , donc en prenant  $r' > \sum_{i=1}^m \gamma(A_i)$  on a bien la conclusion voulue. Ceci achève la preuve de l'étape 1 intervenant dans la démonstration de la proposition 4.1.  $\square$

### 4.2.3. Preuve de l'étape 2

On reprend ce qui est fait au paragraphe 7 de l'article [25] de Rémond, en remplaçant  $K_{\text{tors}}$  et  $D_{\text{tors}}$  par  $K_n$  et  $D_n$ . Tout marche pareil : les points de torsion intervenant sont des points de  $A(K)_{\text{tors}}$ , donc en particulier définis

sur  $K_n$ . Ceci entraîne que  $D_n$  est borné dès que  $r' \geq 2$  et conclut donc la preuve de notre proposition 4.1.

### 4.3. Conclusion

Nous expliquons maintenant comment conclure la preuve du théorème 1.13. Comme indiqué auparavant, nous avons besoin pour conclure d'un raffinement des bornes sur la torsion dans les variétés abéliennes de type C.M. Dans cette direction, nous obtenons dans le corollaire 1.13 de [22] le résultat suivant :

**THÉORÈME 4.4** ([22]). — *Soit  $A/K_0$  une variété abélienne de dimension  $g$ , simple et de type C.M. On a*

$$\gamma(A) \leq \frac{2g}{2 + \log_2 g}$$

où  $\log_2$  dénote le logarithme en base 2.

Si  $A$  est (isogène à) une puissance d'une courbe elliptique C.M., alors le théorème précédent et la proposition 4.1 permettent de conclure. On suppose désormais que  $A$  est (isogène à) une puissance d'une variété abélienne simple de type C.M.  $A_1$  de dimension  $g_1$  supérieure à 2.

On constate que dès que  $g_1$  est strictement supérieur à 1, le théorème 4.4 entraîne en particulier  $\gamma(A_1) < g_1$  ce qui est meilleur que la borne de Masser. Néanmoins en appliquant la proposition 4.1, ceci ne permet *a priori* que d'obtenir la finitude de l'ensemble

$$A^{[g_1]} \cap X(\overline{K_0}).$$

On utilise donc pour conclure le lemme trivial suivant :

**LEMME 4.5.** — *Soit  $G$  un sous-schéma en groupes de  $A = \prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$ , les  $A_i$  étant de dimensions respectives  $g_i$ . Si  $G$  est strictement inclus dans  $A$ , alors sa codimension vérifie*

$$\text{codim}(G) \geq \min_{1 \leq i \leq m} g_i.$$

*Démonstration.* — Soit  $G^0$  la composante connexe de l'identité de  $G$ . C'est une sous-variété abélienne de  $A$ . Elle est donc isogène à un produit de  $A_i^{s_i}$ . Comme  $G$  est strictement inclus dans  $A$ , il existe  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $s_i \leq n_i - 1$ . Ceci conclut.  $\square$

COROLLAIRE 4.6. — Soit  $A = \prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$ , les  $A_i$  étant de dimensions respectives  $g_i$ . On suppose que  $A$  est de dimension supérieure à 2. On note  $A^{[r]} = \bigcup_{\text{codim}(G) \geq r} G(\overline{K})$ , et on note  $g_{\min} = \min_{1 \leq i \leq m} g_i$ . On a

$$A^{[2]} = A^{[\max\{g_{\min}, 2\}]}.$$

*Démonstration.* — C'est évident par le lemme précédent.  $\square$

On termine maintenant la preuve du théorème 1.13 : soit  $A_1/K_0$  une variété abélienne de type C.M. de dimension  $g_1 \geq 2$ . Soit  $n \geq 1$  un entier et soit  $X$  une courbe transverse dans  $A = A_1^n$ . On sait par ce qui précède que  $A^{[g_1]} \cap X(\overline{K}_0)$  est fini. Le corollaire 4.6 permet donc de conclure : l'ensemble  $A^{[2]} \cap X(\overline{K}_0)$  est fini.  $\square$

*Remarque 4.7.* — Notons que dans le théorème 1.13, le cas le plus difficile est le cas où  $A_1$  est de dimension 2. En effet, si  $A_1$  est de dimension supérieure à 3, notre théorème 4.4 permet de conclure sans avoir à utiliser le raffinement sur le problème de Lehmer. Par contre en dimension 2, on peut voir que  $\gamma(A_1) = \frac{4}{3}$  (cf. la proposition 1.18 de [22]) et dans ce cas, l'utilisation de notre théorème 1.6 est indispensable.

## 5. Preuve du théorème 1.10

### 5.1. Une petite réduction géométrique

LEMME 5.1. — Soient  $X/K$  est une variété projective de dimension  $g$  et  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_g$  des fibrés en droites amples. On a l'inégalité

$$(\mathcal{L}_1^g) \cdots (\mathcal{L}_g^g) \leq (\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_g)^g.$$

*Démonstration.* — Il s'agit d'une généralisation en dimension  $g$  d'un résultat bien connu pour les surfaces, découlant du théorème de l'indice de Hodge. Cette généralisation est elle même bien connue des spécialistes (cf. par exemple l'exercice 6, p. 50 de [12]). Ceci se prouve par récurrence sur  $g$  en se ramenant en dimension inférieure (jusqu'à la dimension 2) grâce au théorème de Bertini.  $\square$

On note  $N$  la forme quadratique définie positive sur  $\text{End}(A) \otimes \mathbb{R}$  déduite de l'involution de Rosati (correspondant au fibré ample  $\mathcal{L}$ ). On note  $\|\cdot\| = \sqrt{N(\cdot)}$  la norme qui s'en déduit.

COROLLAIRE 5.2. — Soit  $\alpha$  une isogénie de  $A/K$ . On note  $n$  son degré, et  $[n]$  l'isogénie correspondante. On a

$$\|[n]\| \leq (\mathcal{L}^g)^{\frac{g-1}{2}} \|\alpha\|^g.$$

*Démonstration.* — Rappelons que par définition (cf. [19], p. 192 avec un facteur de renormalisation  $2g$ ), on a

$$N(\alpha) = \frac{1}{\mathcal{L}^g} (\alpha^* \mathcal{L} \cdot \mathcal{L}^{g-1}), \text{ et } n = \deg \alpha = \frac{1}{\mathcal{L}^g} (\alpha^* \mathcal{L})^g.$$

On applique le lemme 5.1 précédent avec  $\mathcal{L}_1 = \alpha^* \mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}$  pour  $i \geq 2$ . On en déduit

$$n \leq \frac{1}{\mathcal{L}^g} (\alpha^* \mathcal{L})^g (\mathcal{L}^g)^{g-1} \leq \frac{1}{\mathcal{L}^g} (\alpha^* \mathcal{L} \cdot \mathcal{L}^{g-1})^g = (\mathcal{L}^g)^{g-1} N(\alpha)^g.$$

Le degré de l'isogénie  $[n]$  se calcule explicitement : c'est le poids  $q([n]) = n^2$  de cette isogénie admissible. Ceci permet de conclure.  $\square$

### 5.2. Preuve du théorème 1.10

Soit  $A/K$  une variété abélienne simple de type C.M. de dimension  $g$ . On note que pour tout entier  $n \geq 1$  et pour tout entier positif  $r$ , on a  $K(A^n[r]) = K(A[r])$ . On donne tout d'abord un résultat de comparaison de degré dont nous aurons besoin dans la suite.

LEMME 5.3. — *Il existe une constante strictement positive  $c_1$ , ne dépendant que de  $A/K$  et  $n$ , telle pour tout entiers positifs  $m$  et  $r$ , en notant  $K_m = K(A[m])$ ,  $K_{mr} = K(A[mr])$  et  $T$  un point de torsion de  $A^n$  d'ordre exactement  $r$ , on a*

$$\deg(K_m(T)/K) \leq \deg(K_{mr}/K) \leq c_1 \deg(K_m(T)/K)^{16g^2}.$$

*Démonstration.* — Il suffit bien sûr de montrer l'inégalité de droite. On note  $g$  la dimension de  $A$  et on distingue pour cela deux cas. Si  $r \geq m$ , alors

$$\begin{aligned} \deg(K_m(T)/K) &\geq \deg(K(T)/K) \geq c_1 r^{\frac{1}{2}} \text{ d'après le (1.1) de Silverberg [32]} \\ &\geq c_1 (rm)^{\frac{1}{4}} \geq c_1 \deg(K_{mr}/K)^{\frac{1}{16g^2}} \text{ d'après le lemme 4.2.} \end{aligned}$$

Par ailleurs, dans l'autre cas, si  $m \geq r$ , on a

$$\deg(K_m(T)/K) \geq \deg(K_m/K) \geq c_1 m^{\frac{1}{2}} \geq c_1 (mr)^{\frac{1}{4}} \geq c_1 \deg(K_{mr}/K)^{\frac{1}{16g^2}}$$

par le même argument. Ceci conclut.  $\square$

On passe maintenant à la preuve du théorème 1.10. Pour cela on raisonne par récurrence sur la dimension  $n$ . Si  $n = 1$ , il s'agit du théorème 1.6. On suppose donc le résultat vrai au rang  $n - 1 \geq 1$  et on veut le montrer au rang  $n$ . On suppose par l'absurde que le résultat est faux en dimension  $n$ .



Ainsi, il existe un point  $P = (x_1, \dots, x_n) \in A^n(\overline{K})$  et une sous-variété  $V$  de  $A^n$  définie sur  $K_m = K(A[m])$  tels que

$$(5.1) \quad \widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P) < C_0(n)^{-1} D_{\text{inc}}^{-1} \left( \frac{\log \log [K_m : K] D_{\text{inc}}}{\log [K_m : K] D_{\text{inc}}} \right)^{\kappa(n)}.$$

Comme le point  $P$  est un point  $\overline{K}$ -rationnel de  $V$ , on a nécessairement  $\delta_{\mathcal{L}, K_m}(P) \leq D_{\text{inc}}$ . Ainsi l'inégalité 5.1 précédente nous donne :

$$(5.2) \quad \widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P) < C_0(n)^{-1} \delta_{\mathcal{L}, K_m}(P)^{-1} \left( \frac{\log \log [K_m : K] \delta_{\mathcal{L}, K_m}(P)}{\log [K_m : K] \delta_{\mathcal{L}, K_m}(P)} \right)^{\kappa(n)}.$$

On voit ainsi que l'on est bien dans la seconde partie de l'alternative du théorème 1.6. Ainsi, il existe une sous-variété de torsion stricte  $B/K_m$  de  $A^n$  dont le degré est majoré par

$$(5.3) \quad \deg_{\mathcal{L}} B^{\frac{1}{\text{codim } B}} \leq c(A/K, \mathcal{L}, n) D_{\text{inc}} (\log [K_m : K] D_{\text{inc}})^{-2n-2\kappa(n)}.$$

On écrit

$$B_{\overline{K}} = \bigcup_{\sigma \in \text{Gal}(K_m(T)/K_m)} (H + \sigma(T)),$$

où  $H$  est la composante connexe de l'origine de  $B$  et  $T$  est un point de torsion de  $A^n$  d'ordre un certain entier positif  $r$ .

On note

$$\Lambda = \{\varphi \in \text{Hom}(A^n, A) \mid H \subset \text{Ker } \varphi\}.$$

Rappelons que l'on note  $N$  la forme quadratique définie positive sur  $\text{End}(A) \otimes \mathbb{R}$  déduite de l'involution de Rosati (correspondant au fibré ample  $\mathcal{L}$ ), et  $\|\cdot\| = \sqrt{N(\cdot)}$  la norme qui s'en déduit. En utilisant l'isomorphisme  $\text{Hom}(A^n, A) \simeq \text{End}(A)^n$ , on munit  $\text{Hom}(A^n, A) \otimes \mathbb{R}$  de la norme

$$(f_1, \dots, f_n) \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} \|f_i\|.$$

On note encore  $\|\cdot\|$  cette norme. On note également  $\text{Vol}(\Lambda)$  le volume, pour la norme précédente, de  $(\Lambda \otimes \mathbb{R})/\Lambda$ . Par le théorème 2 de [5] on sait qu'il existe un élément  $\varphi$  non nul de  $\Lambda$  tel que

$$\|\varphi\| \leq c_3(\deg_{\mathcal{L}} H)^{c_4}.$$

En utilisant le corollaire 5.2, on voit que quitte à modifier  $c_4$ , on peut en fait supposer que  $\varphi = (m_1, \dots, m_n)$  où les  $m_i$  sont les isogénies admissibles "multiplication par  $m_i$ ". (Il suffit de remplacer chacune des composante  $\varphi_i$  de  $\varphi$  par  $m_i = \widehat{\varphi}_i \circ \varphi_i$  où  $\widehat{\varphi}_i$  est l'isogénie duale de  $\varphi_i$ ). Enfin, quitte à renuméroter, on peut supposer que

$$\|\varphi\| = m_n.$$

On pose maintenant  $H'$  la composante connexe de l'origine de  $\text{Ker } \varphi$ . Par construction  $H'$  contient  $H$  (car  $H$  est une variété abélienne contenue dans  $\text{ker } \varphi$ ). De plus  $A$  étant simple, la variété abélienne  $H'$  est paramétrée par

$$\Phi: A^{n-1} \rightarrow A^n, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \left( m_n(x_1), \dots, m_n(x_{n-1}), -\sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_i) \right).$$

Quitte à remplacer  $T$  par  $\sigma(T)$ , on peut supposer que  $P \in H + T$ . On se donne maintenant  $y \in \Phi^{-1}(P - T)$  et  $V' = \Phi^{-1}(V - T)$ .

LEMME 5.4. — *Avec les notations précédentes, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1.  $V' \subsetneq A^{n-1}$ .
2.  $V'$  est incomplètement définie sur  $K_{mr}$  dans  $A^{n-1}$  par des équations de degré inférieur à  $2^n \|\varphi\|^2 D_{\text{inc}}$ .
3.  $y \in (V')^*$ .
4.  $\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P) \geq \|\varphi\|^2 \widehat{h}_{\mathcal{L}_{n-1}}(y)$ .

*Démonstration.* — Les points 1 et 3 sont faciles. Pour le point 2, les composantes de  $\Phi$  étant admissibles, on voit (cf. [14], Lemme 6 (iii)) que  $V'$  est incomplètement définie par des équations de degré majoré par

$$\max \left\{ m_n^2, \left\| \sum_{i=1}^{n-1} m_i \right\|^2 \right\} D_{\text{inc}} \leq 2^n m_n^2 D_{\text{inc}} = 2^n \|\varphi\|^2 D_{\text{inc}}.$$

La minoration de hauteur découle des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P) &= \widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P - T) = \widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(\Phi(y)) = \sum_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(\Phi_i(y)) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(\Phi_i(y)) = \sum_{i=1}^{n-1} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(m_n(y_i)) \\ &\geq m_n^2 \widehat{h}_{\mathcal{L}_{n-1}}(y) = \|\varphi\|^2 \widehat{h}_{\mathcal{L}_{n-1}}(y). \end{aligned}$$

Ceci conclut. □

Ce lemme nous permet de terminer la preuve par récurrence : par hypothèse de récurrence, il existe une constante  $c(A/K, \mathcal{L}, n - 1)$  strictement positive telle que

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^{-2} \widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P) &\geq \widehat{h}_{\mathcal{L}_{n-1}}(y) \\ &\geq \frac{c(A/K, \mathcal{L}, n - 1)^{-1}}{2^n \|\varphi\|^2 D_{\text{inc}}} \left( \frac{\log \log ([K_{mr} : K]n \|\varphi\|^2 D_{\text{inc}})}{\log ([K_{mr} : K]n \|\varphi\|^2 D_{\text{inc}})} \right)^{\kappa(n-1)}. \end{aligned}$$

En utilisant la majoration de  $\|\varphi\|$  en fonction de  $\deg_{\mathcal{L}} H$ , en utilisant le lemme 5.3 et en utilisant également l'identité

$$\deg_{\mathcal{L}} B = [K_m(T) : K_m] \deg_{\mathcal{L}} H,$$

on obtient :

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L}, n-1)^{-1} c_5}{nD_{\text{inc}}} (\log([K_m : K]n \deg_{\mathcal{L}} BD_{\text{inc}}))^{-\kappa(n-1)}.$$

On utilise maintenant l'inégalité (5.3) et le fait que  $\kappa(n) - \kappa(n-1) > 0$  pour conclure.

## Annexe A. Appendice

On montre ici que la première partie de la conjecture de Lehmer abélienne 1.1 (minoration des points engendrant la variété abélienne en terme de l'indice d'obstruction), formulée dans [10] entraîne la seconde partie de cette conjecture (minoration des points non de torsion en fonction du degré du point et de la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant le point). De même pour le résultat non-conjectural, ce qui permet d'améliorer le précédent meilleur résultat connu, dû à Masser [17], pour la minoration des points d'ordre infini sur les variétés abéliennes de type C.M. Par ailleurs on montre que la conjecture de Lehmer abélienne entraîne la conjecture de Lehmer abélienne multihomogène *a priori* plus forte, telles qu'elles sont énoncées dans [10]. On montre également que toute avancée en direction de la conjecture de Lehmer entraîne une avancée similaire en direction de la conjecture multihomogène. En utilisant le résultat principal de [10] on en déduit, en direction de la conjecture multihomogène, une minoration optimale aux puissances de log près dans le cas des variétés abéliennes de type C.M.

### A.1. Sur la conjecture de Lehmer sur les variétés abéliennes

En utilisant le théorème de David et Hindry [10], on obtient un résultat, optimal aux puissances de log près en direction de l'inégalité (1.2) du problème de Lehmer abélien (Conjecture 1.1).

**THÉORÈME A.1.** — *Si  $A/K$  est de type C.M., alors il existe une constante strictement positive  $c(A/K, \mathcal{L})$  telle que pour tout point  $P \in A(\overline{K})$  d'ordre infini, on a*

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L})}{D^{\frac{1}{g_0}}} (\log 2D)^{-\kappa(g_0)},$$

où  $D = [K(P) : K]$ , où  $g_0$  est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique de  $A$  contenant  $P$  et où  $\kappa(g_0) = (2g_0(g_0 + 1))^{g_0+2}$ .

*Démonstration.* — C’est une conséquence immédiate du corollaire 2 de [23] appliqué à la variété  $V = \overline{\{P\}}$  image schématique de  $P$  dans  $A$  sur  $K$ . On peut faire une preuve directe (ce qui permet d’utiliser le résultat principal de [10] sans avoir à faire intervenir en plus leur remarque utilisant l’indice d’obstruction<sup>(2)</sup>) : on commence par le cas où  $A = \prod_{i=1}^n A_i^{r_i}$ , les  $A_i$  étant des variétés abéliennes simples deux à deux non-isogènes et où  $\mathcal{L}$  est le fibré en droites ample et symétrique associé au plongement

$$A = \prod_{i=1}^n A_i^{r_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{n_i}^{r_i} \xrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}_N,$$

les  $A_i$  étant plongées dans  $\mathbb{P}_{n_i}$  par des fibrés en droites  $\mathcal{L}_i$  très amples et symétriques. On note  $G$  le plus petit sous-groupe algébrique contenant  $V$ . On note  $G^0$  la composante connexe de l’identité de  $G$ . C’est une sous-variété abélienne de  $A$  et elle est donc isogène à  $B = \prod_{i=1}^n A_i^{s_i}$  où  $0 \leq s_i \leq r_i$ . On note alors  $\pi : A \rightarrow B$  une projection naturelle obtenue par oubli de certaines coordonnées, de sorte que  $\pi|_G$  est une isogénie. Montrons que l’on est dans les conditions d’application du théorème principal de [10] en prenant comme variété abélienne  $B$  et comme point  $\pi(P)$ .

Si  $\pi(P)$  est d’ordre fini modulo une sous-variété abélienne stricte de  $B$ , en notant  $H$  le plus petit sous-groupe algébrique contenant  $\pi(P)$ , on a  $\dim H < \dim B$ . Ainsi  $G_1 = G \cap \pi^{-1}(H)$  est un sous-groupe algébrique strict de  $G$  (car  $\pi|_G$  est une isogénie), contenant  $V$ . Ceci est absurde.

Si  $\pi(P)$  est d’ordre fini, comme  $\pi$  est une isogénie, le point  $P$  est aussi d’ordre fini. Ceci est absurde.

Finalement,  $\pi(P)$  est un point d’ordre infini modulo toute sous-variété abélienne de  $B$ . On peut donc appliquer le théorème principal de [10]. Par ailleurs, la hauteur et le degré sont définis relativement aux plongements

$$A = \prod_{i=1}^n A_i^{r_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{n_i}^{r_i} \xrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}_N \quad \text{et} \quad B = \prod_{i=1}^n A_i^{s_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{n_i}^{s_i} \xrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}_{N_B}.$$

De plus l’application  $\bar{\pi} : \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{n_i}^{r_i} \rightarrow \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{n_i}^{s_i}$  est la projection linéaire définie par oubli de coordonnées. Dans ce cas, et pour ces plongements (en notant  $\hat{h}_{N_B}$  la hauteur de Néron-Tate de  $B$  et  $\hat{h}_N$  celle de  $A$  dans ces plongements), on a

$$\hat{h}_{N_B}(\pi(P)) \leq \hat{h}_N(P) \quad \text{et} \quad \deg \pi(P) \leq \deg P.$$

<sup>(2)</sup> remarque maintenant justifiée par le présent article.

Ceci nous donne

$$\begin{aligned}
 \widehat{h}_N(P) &\geq \widehat{h}_{N_B}(\pi(P)), \quad \text{d'où par le théorème de [10],} \\
 &\geq \frac{c(B, N_B)}{(\deg \pi(P))^{\frac{1}{g_0}}} (\log 2 \deg \pi(P))^{-\kappa(g_0)} \\
 &\geq \frac{c(B, N_B)}{(\deg P)^{\frac{1}{g_0}}} (\log 2 \deg P)^{-\kappa(g_0)}. \\
 &\geq \frac{c'(A, N)}{(\deg P)^{\frac{1}{g_0}}} (\log 2 \deg P)^{-\kappa(g_0)},
 \end{aligned}$$

où on a pris pour  $c'(A, N)$  le minimum des  $c(B, N_B)$  quand  $s_i$  varie dans  $\llbracket 0, r_i \rrbracket$ .

Dans le cas général, la variété abélienne  $A$  est donnée avec une isogénie  $\rho$  vers la variété abélienne  $B = \prod_{i=1}^n A_i^{r_i}$ . Soit  $P$  d'ordre infini de la variété abélienne de  $A$ . Le point  $Q = \rho(P)$  est un point d'ordre infini de la variété abélienne de  $B$ . Il résulte facilement de la preuve de la proposition 14 de [20] qu'il existe  $c'(A, \mathcal{L})$  tel que

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq c'(A, \mathcal{L}) \widehat{h}_M(Q).$$

Ainsi en appliquant le résultat précédent, on en déduit presque l'inégalité voulue : il faut encore remplacer le degré  $\deg Q$  par  $\deg P$ . Or  $\deg Q \leq \deg P$ . Ceci permet de conclure.  $\square$

*Remarque A.2.* — Ce résultat améliore le meilleur résultat précédemment connu, dû à Masser qui obtient dans [17], pour tout point  $P$  d'ordre infini de  $A(\overline{K})$  :

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L})}{D^2 \log 2D}.$$

En faisant la même preuve et en appliquant la partie (1.1) de la conjecture 1.1 au lieu du théorème de [10], on obtient le

**COROLLAIRE A.3.** — *La partie (1.1) de la conjecture 1.1 entraîne sa partie (1.2).*

*Remarque A.4.* — Si au lieu du théorème de David-Hindry, on applique la conjecture 1.4 sur le problème de Lehmer relatif, on peut partout remplacer le symbole  $D$  par  $D_{\text{tors}}$  dans ce qui précède.

**A.2. Sur la conjecture de Lehmer multihomogène sur les variétés abéliennes**

Soit  $A/K$  une variété abélienne de dimension  $g$ . Quitte à augmenter un peu  $K$  (cf. par exemple [23], Lemme 1), on peut supposer (et on suppose) que tous les endomorphismes de  $A$  sont définis sur  $K$ . On note  $\widehat{h}_{\mathcal{L}}$  la hauteur de Néron-Tate sur  $A(\overline{K})$  associée à un diviseur ample et symétrique  $\mathcal{L}$ . Pour tout entier positif  $n$  on pose  $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}^{\otimes n}$  fibré en droites symétrique ample sur  $A^n$  et on note  $\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}$  la hauteur de Néron-Tate associée. On commence par un lemme.

LEMME A.5. — Soit  $(P_1, \dots, P_n)$  un point de  $A^n(\overline{K})$ . On a

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P_1, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i).$$

Démonstration. — C’est une conséquence formelle des propriétés de fonctorialité des hauteurs de Weil et de la définition de la hauteur de Néron-Tate. □

En utilisant ce lemme, on démontre le résultat suivant :

THÉORÈME A.6. — Si  $A/K$  est de type C.M., alors, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  il existe une constante  $c(A/K, \mathcal{L}, n) > 0$  telle que pour tout point  $(P_1, \dots, P_n) \in A^n(\overline{K})$  d’ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de  $A^n$ , on a :

$$\prod_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L}, n)}{D^{\frac{1}{g}}} (\log 2D)^{-n\kappa(g)},$$

où  $D = [K(P_1, \dots, P_n) : K]$ .

Démonstration. — Soient  $a_1, \dots, a_n$  des entiers strictement positifs et  $Q_1, \dots, Q_n$  des points de  $A(\overline{K})$  tels que pour tout  $i$ ,  $P_i = a_i Q_i$ . On a

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(Q_1, \dots, Q_n) = \sum_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(Q_i) = \sum_{i=1}^n a_i^{-2} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i),$$

et

$$[K(Q_1, \dots, Q_n) : K]^{\frac{1}{ng}} \leq \left( a_1^{2g} \times \dots \times a_n^{2g} D \right)^{\frac{1}{ng}}.$$

Le théorème de David-Hindry nous donne alors

$$\sum_{i=1}^n a_i^{-2} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L}, n)}{\left( \prod_{i=1}^n a_i^{\frac{2}{n}} \right) D^{\frac{1}{gn}}} \left( \log \left( \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) D \right) \right)^{-\kappa(g)}.$$

On pose maintenant, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$x_i = \frac{13\widehat{h}(P_i)}{4 \min_j \widehat{h}(P_j)}, \text{ et } a_i = \lfloor \sqrt{x_i} \rfloor.$$

Pour tout  $i$ , on a  $x_i \geq \frac{13}{4}$  et  $x_i \geq a_i^2 \geq \frac{x_i}{3}$ . Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n a_i^{-2} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \leq \frac{3 \times 4}{13} n \min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j),$$

et

$$\prod_{i=1}^n a_i^2 \leq \left( \frac{13}{4 \min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j)} \right)^n \prod_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j) &\geq c_{10}(A/K, \mathcal{L}, n) \sum_{i=1}^n a_i^{-2} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \\ &\geq \frac{c_{11}(A/K, \mathcal{L}, n)}{\left( \prod_{i=1}^n a_i^{\frac{2}{n}} \right) D^{\frac{1}{gn}}} \left( \log 2D \prod_{i=1}^n a_i \right)^{-\kappa(g)} \\ &\geq \frac{4c_{11}(A/K, \mathcal{L}, n) \min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j)}{13 \prod_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i)^{\frac{1}{n}} D^{\frac{1}{gn}}} \left( \log 2D \prod_{i=1}^n a_i \right)^{-\kappa(g)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a la majoration

$$\log \prod_{i=1}^n a_i \leq n \log \left( \frac{13}{2 \min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j)} \right) + 2 \log \prod_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i).$$

Or on peut toujours supposer que les  $\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i)$  sont inférieurs à 1, donc,

$$\log \prod_{i=1}^n a_i \leq n \log \left( \frac{13}{2 \min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j)} \right).$$

Ainsi,

$$\log \left( 2D \prod_{i=1}^n a_i \right) \leq n \log \left( \frac{13D^{\frac{1}{n}}}{2 \min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j)} \right).$$

On en déduit que

$$\prod_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{c_1(A/K, n)}{D^{\frac{1}{ng}}} \left( \log \frac{D^{\frac{1}{n}}}{\min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j)} \right)^{-\kappa(g)}.$$

Le point  $(P_1, \dots, P_n)$  étant d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne, les points  $P_i$  sont en particulier d'ordre infini sur  $A$ . Le résultat

inconditionnel de Masser sur la minoration de la hauteur des points sur les variétés abéliennes (Théorème de [18]) nous donne donc :

$$\log \frac{D^{\frac{1}{n}}}{\min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j)} \leq c_2(A/K, \mathcal{L}, n) \log 2D.$$

Ainsi, on en déduit

$$\prod_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \geq \frac{c_3(A/K, \mathcal{L}, n)}{D^{\frac{1}{g}}} (\log 2D)^{-n\kappa(g)}$$

ce qui conclut. □

*Remarque A.7.* — Si au lieu de faire appel au théorème 1.5. de [10] dans la preuve du théorème A.6 on applique la conjecture 1.1, alors on en déduit le résultat suivant :

**THÉORÈME A.8.** — *Soient  $A/K$  une variété abélienne de dimension  $g$  sur le corps de nombres  $K$  et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites symétrique ample sur  $A$ . Si la conjecture 1.1 est vraie pour  $(A/K, \mathcal{L})$  alors, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  il existe une constante  $c(A/K, \mathcal{L}, n) > 0$  telle que pour tout point  $(P_1, \dots, P_n) \in A^n(\overline{K})$  d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de  $A^n$ , on a :*

$$\prod_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L}, n)}{D^{\frac{1}{g}}},$$

où  $D = [K(P_1, \dots, P_n) : K]$ .

*Remarque A.9.* — Les mêmes remarques qu'au paragraphe A.1 précédent, concernant le remplacement de  $D$  par  $D_{\text{tors}}$  s'appliquent.

*Remarque A.10.* — En fait dans leur article [10], les auteurs formulent également une conjecture multihomogène du problème de Lehmer abélien. Plutôt que de supposer le point  $(P_1, \dots, P_n)$  d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de  $A^n$ , ils supposent les points  $P_i$  linéairement indépendants dans  $A$ . Précisément ils donnent la conjecture 1.6 suivante :

**CONJECTURE A.11** (David-Hindry). — *Soient  $A/K$  une variété abélienne de dimension  $g$  sur un corps de nombres et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites symétrique ample sur  $A$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  il existe une constante  $c(A/K, \mathcal{L}, n) > 0$  telle que pour tout  $n$ -uplet  $(P_1, \dots, P_n)$  de points d'ordre infini dans  $A(\overline{K})$ ,  $\text{End}(A)$ -linéairement indépendants, on a :*

$$\prod_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L}, n)}{D^{\frac{1}{g}}},$$



où  $D = [K(P_1, \dots, P_n) : K]$ .

Dans la formulation de la conjecture A.11 qu'ils donnent, David-Hindry écrivent "linéairement indépendants" sans préciser s'il s'agit de  $\mathbb{Z}$ -linéairement ou de  $\text{End}(A)$ -linéairement indépendants. Il paraît préférable de préciser. En effet, si on comprend l'assertion "linéairement indépendants" comme  $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants, alors la conjecture A.11 est fautive comme le montre l'exemple suivant : on prend  $E/K$  une courbe elliptique à multiplication complexe par un corps quadratique imaginaire contenu dans  $K$ . On se donne  $\alpha \in \text{End}(E)$  un endomorphisme qui n'est pas la multiplication par un entier, on se donne également un point  $P_1$  d'ordre infini dans  $E(\overline{K})$  et pour tout  $n \geq 1$ , on choisit des points  $P_n$  tels que  $nP_n = P_1$ . Enfin on pose  $Q_n = \alpha(P_n)$ . Puisque  $P_1$  est d'ordre infini, les points  $P_n$  et  $Q_n$  sont  $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants. De plus on a

$$\widehat{h}(P_n)\widehat{h}(Q_n) = \frac{N(\alpha)}{n^4}\widehat{h}(P_1)^2,$$

et

$$D_n := [K(P_n, Q_n) : K] = [K(P_n) : K] \leq cn^2.$$

Donc,

$$\widehat{h}(P_n)\widehat{h}(Q_n) \leq \frac{c'}{D_n^2}.$$

Ceci montre que l'hypothèse " $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants" est insuffisante.

Par contre en supposant les points  $\text{End}(A)$ -linéairement indépendants, la situation est bien meilleure. Précisément, on a le

**THÉOREME A.12.** — *La conjecture 1.1 entraîne la conjecture A.11.*

*Démonstration.* — Soit  $n > 0$  un entier. Au vu du théorème A.8, la seule chose à prouver, est de montrer que l'hypothèse (i) : "les points  $(P_1, \dots, P_n)$  sont  $\text{End}(A)$ -linéairement indépendants", entraîne l'hypothèse (ii) : "le point  $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$  est d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de  $A^n$ ." On va plutôt montrer que non(ii) implique non(i). Si non(ii) est vraie, alors, il existe un endomorphisme  $\varphi$ , non-nul, de  $A^n$  tel que  $\varphi(\mathbf{P}) = 0$ . Or on peut écrire  $\varphi(\mathbf{P}) = (\varphi_1(\mathbf{P}), \dots, \varphi_n(\mathbf{P}))$ , où les  $\varphi_i$  sont des morphismes de  $A^n$  vers  $A$  non tous nuls. On suppose par exemple que  $\varphi_1$  est non-nul. En notant  $\psi_i$  la restriction de  $\varphi_1$  à la  $i$ -ème composante de  $A^n$ , on obtient ainsi  $n$  endomorphismes de  $A$ ,  $\psi_1, \dots, \psi_n$ , non tous nuls et tels que

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(P_i) = \varphi_1(\mathbf{P}) = 0.$$

Autrement dit, les points  $P_1, \dots, P_n$  sont  $\text{End}(A)$ -linéairement dépendants.  $\square$

Enfin la même preuve permet de constater que le théorème A.8 entraîne un énoncé analogue en remplaçant l'hypothèse "d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte" par "End( $A$ )-linéairement indépendants". Ce dernier résultat à également été montré par Viada [34], Proposition 4 dans le cas particulier où  $A$  est une courbe elliptique.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. AMOROSO & S. DAVID, « Le problème de Lehmer en dimension supérieure », *J. Reine Angew. Math.* **513** (1999), p. 145-179.
- [2] ———, « Distribution des points de petite hauteur dans les groupes multiplicatifs », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **3** (2004), n° 2, p. 325-348.
- [3] F. AMOROSO & U. ZANNIER, « A relative Dobrowolski lower bound over abelian extensions », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **29** (2000), n° 3, p. 711-727.
- [4] M. H. BAKER & J. H. SILVERMAN, « A lower bound for the canonical height on abelian varieties over abelian extensions », *Math. Res. Lett.* **11** (2004), n° 2-3, p. 377-396.
- [5] D. BERTRAND, « Minimal heights and polarizations on abelian varieties », Preprint of the MSRI, Berkeley, California, June, 1987.
- [6] C. BIRKENHAKE & H. LANGE, *Complex abelian varieties*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 302, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xii+635 pages.
- [7] E. BOMBIERI, D. MASSER & U. ZANNIER, « Intersecting a curve with algebraic subgroups of multiplicative groups », *Internat. Math. Res. Notices* (1999), n° 20, p. 1119-1140.
- [8] E. BOMBIERI & J. VAALER, « On Siegel's lemma », *Invent. Math.* **73** (1983), n° 1, p. 11-32.
- [9] E. BOMBIERI & U. ZANNIER, « Heights of algebraic points on subvarieties of abelian varieties », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **23** (1996), n° 4, p. 779-792 (1997).
- [10] S. DAVID & M. HINDRY, « Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M », *J. Reine Angew. Math.* **529** (2000), p. 1-74.
- [11] S. DAVID & P. PHILIPPON, « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes. II », *Comment. Math. Helv.* **77** (2002), n° 4, p. 639-700.
- [12] O. DEBARRE, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001, xiv+233 pages.
- [13] E. DOBROWOLSKI, « On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial », *Acta Arith.* **34** (1979), n° 4, p. 391-401.
- [14] M. HINDRY, « Autour d'une conjecture de Serge Lang », *Invent. Math.* **94** (1988), n° 3, p. 575-603.
- [15] M. HINDRY & J. H. SILVERMAN, *Diophantine geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 201, Springer-Verlag, New York, 2000, An introduction, xiv+558 pages.
- [16] M. LAURENT, « Minoration de la hauteur de Néron-Tate », in *Seminar on number theory, Paris 1981-82 (Paris, 1981/1982)*, Progr. Math., vol. 38, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, p. 137-151.

- [17] D. W. MASSER, Lettre à Daniel Bertrand du 10 novembre 1986.
- [18] ———, « Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height on an abelian variety », *Compositio Math.* **53** (1984), n° 2, p. 153-170.
- [19] D. MUMFORD, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970, viii+242 pages.
- [20] P. PHILIPPON, « Sur des hauteurs alternatives. III », *J. Math. Pures Appl.* (9) **74** (1995), n° 4, p. 345-365.
- [21] R. PINK, « A common generalization of the conjectures of André-Oort, Manin-Mumford, and Mordell-Lang », Prépublication de 2005 disponible à l'adresse <http://www.math.ethz.ch/~pink/ftp/AOMMML.pdf>.
- [22] N. RATAZZI, « Borne sur la torsion dans les variétés abéliennes de type C.M », À paraître (2008) aux Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.
- [23] ———, « Densité de points et minoration de hauteur », *J. Number Theory* **106** (2004), n° 1, p. 112-127.
- [24] ———, « Théorème de Dobrowolski-Laurent pour les extensions abéliennes sur une courbe elliptique à multiplication complexe », *Int. Math. Res. Not.* (2004), n° 58, p. 3121-3152.
- [25] G. RÉMOND, « Intersection de sous-groupes et de sous-variétés. I », *Math. Ann.* **333** (2005), n° 3, p. 525-548.
- [26] ———, « Intersection de sous-groupes et de sous-variétés. II », *J. Inst. Math. Jussieu* **6** (2007), n° 2, p. 317-348.
- [27] G. RÉMOND & E. VIADA, « Problème de Mordell-Lang modulo certaines sous-variétés abéliennes », *Int. Math. Res. Not.* (2003), n° 35, p. 1915-1931.
- [28] W. M. SCHMIDT, *Diophantine approximations and Diophantine equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1467, Springer-Verlag, Berlin, 1991, viii+217 pages.
- [29] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VIII, Actualités Sci. Indust., No. 1296. Hermann, Paris, 1962, 243 pages.
- [30] J.-P. SERRE & J. TATE, « Good reduction of abelian varieties », *Ann. of Math.* (2) **88** (1968), p. 492-517.
- [31] G. SHIMURA & Y. TANIYAMA, *Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory*, Publications of the Mathematical Society of Japan, vol. 6, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1961, xi+159 pages.
- [32] A. SILVERBERG, « Torsion points on abelian varieties of CM-type », *Compositio Math.* **68** (1988), n° 3, p. 241-249.
- [33] G. TENENBAUM, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, second éd., Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 1, Société Mathématique de France, Paris, 1995, xv+457 pages.
- [34] E. VIADA, « The intersection of a curve with algebraic subgroups in a product of elliptic curves », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5) **2** (2003), n° 1, p. 47-75.
- [35] W. C. WATERHOUSE, « Abelian varieties over finite fields », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **2** (1969), p. 521-560.
- [36] B. ZILBER, « Exponential sums equations and the Schanuel conjecture », *J. London Math. Soc.* (2) **65** (2002), n° 1, p. 27-44.

Manuscrit reçu le 5 février 2007,  
révisé le 7 septembre 2007,  
accepté le 11 janvier 2008.

Nicolas RATAZZI  
Université Paris-Sud 11  
Bâtiment 425 Mathématiques  
91405 Orsay Cedex (France)  
nicolas.ratazzi@math.u-psud.fr