



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Frédéric ROCHON

**Sur la topologie de l'espace des opérateurs pseudodifférentiels inversibles d'ordre 0**

Tome 58, n° 1 (2008), p. 29-62.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2008\\_\\_58\\_1\\_29\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2008__58_1_29_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# SUR LA TOPOLOGIE DE L'ESPACE DES OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS INVERSIBLES D'ORDRE 0

par Frédéric ROCHON (\*)

---

RÉSUMÉ. — Les groupes d'homotopie du groupe (stabilisé)  $G^0(X)$  des opérateurs pseudodifférentiels inversibles d'ordre zéro agissant sur une variété compacte sans bord  $X$  sont calculés en termes de la  $K$ -théorie du fibré cosphérique  $S^*X$ . Du même coup, on montre que le sous-groupe des perturbations compactes inversibles de l'identité est faiblement rétractile dans  $G^0(X)$ . Les résultats sont aussi adaptés au cas des opérateurs suspendus. Des applications à la théorie de l'indice et pour le déterminant résiduel de Simon Scott sont aussi données.

ABSTRACT. — The homotopy groups of the (stabilized) group  $G^0(X)$  of invertible pseudodifferential operators of order zero acting on a smooth compact manifold  $X$  are given in terms of the  $K$ -theory of the cosphere bundle  $S^*X$ . At the same time, it is shown that the subgroup of invertible compact perturbations of the identity is weakly retractible in  $G^0(X)$ . The results are also adapted to the case of suspended operators. This gives applications in index theory and for the residue determinant of Simon Scott.

## Introduction

Soit  $X$  une variété compacte et sans bord de classe  $C^\infty$  de dimension supérieure à zéro. Le groupe  $G^0(X)$  des opérateurs pseudodifférentiels inversibles d'ordre zéro agissant sur  $C^\infty(X)$  est un objet important en géométrie et en analyse. En théorie de l'indice, la version suspendue de ce groupe apparaît lorsqu'on veut décrire l'opérateur normal d'un opérateur à cusp fibré totalement elliptique. C'est aussi sur le groupe  $G^0(X)$  (ou

---

*Mots-clés* : opérateurs pseudodifférentiels, groupes d'homotopie,  $K$ -théorie, déterminant résiduel.

*Classification math.* : 58B05, 58B15.

(\*) L'auteur tient à remercier le Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies pour son soutien financier.

un espace relié) que plusieurs fonctionnelles jouant le rôle de déterminant ont été introduites et étudiées, voir par exemple les travaux de Kontsevich et Vishik [10], de Scott [32], de Paycha et Scott [30] et de Friedlander et Guillemin [7]. Dans le cas des opérateurs suspendus, Melrose dans [19] a défini sur le groupe  $G_{\text{sus}}^0(X)$  des opérateurs suspendus inversibles d'ordre zéro une fonctionnelle jouant le rôle de l'invariant  $\eta$  introduit par Atiyah, Patodi et Singer [2]. Cette fonctionnelle a été étudiée entre autres dans les travaux de Moroianu [26], de Lesch, Moscovici et Pflaum [15] et de Melrose et *al.* [19], [21], [24], [22].

Il apparaît donc souhaitable d'avoir une bonne compréhension topologique du groupe  $G^0(X)$ . Dans cet article, on se propose d'utiliser les méthodes développées dans [31] pour étudier la topologie du groupe  $G^0(X)$  des opérateurs pseudodifférentiels inversibles d'ordre zéro. Pour ce faire, on doit dans un premier temps stabiliser la situation, c'est-à-dire permettre à ces opérateurs d'agir sur un fibré vectoriel complexe de rang arbitrairement grand. Dans ce cas, on peut calculer les groupes d'homotopie de ce groupe en termes de la  $K$ -théorie du fibré cosphérique  $S^*X$  de  $X$  (Théorème 4.1). Tout comme dans [31], on remarque qu'il y a une périodicité, à savoir que les groupes d'homotopie pairs et impairs sont isomorphes entre eux. Ce résultat est obtenu en considérant le sous-groupe  $G^{-1}(X) \subset G^0(X)$  des perturbations compactes inversibles de l'identité. Celui-ci, avec le symbole principal, détermine une fibration de Serre à laquelle est associée une longue suite exacte de groupes d'homotopie. En montrant que l'homomorphisme de bord est surjectif, on peut alors obtenir le résultat sans trop de difficulté. Notons que dans le cas où  $X = \mathbb{S}^1$  est un cercle, Melrose dans ([18], §12) a montré qu'il est possible d'obtenir un sous-groupe faiblement contractile de  $G^0(\mathbb{S}^1)$  en imposant certaines contraintes supplémentaires sur le symbole principal (voir plus bas la discussion dans le §4).

Une autre conséquence intéressante de la surjectivité de l'homomorphisme de bord est que le groupe  $G^{-1}(X)$  est faiblement rétractile dans  $G^0(X)$  (Théorème 4.3), c'est-à-dire que si  $M$  est un  $CW$ -complexe avec un nombre fini de cellules (*e.g.* une variété compacte) et si  $f : M \rightarrow G^{-1}(X)$  est une application continue, alors dans  $G^0(X)$ ,  $f$  est homotope à une application constante.

On montre aussi que la méthode peut être adaptée pour calculer les groupes d'homotopie de l'espace des opérateurs pseudodifférentiels inversibles  $l$  fois suspendus. Dans ce cas, les groupes d'homotopie sont exprimés à partir de la  $K$ -théorie du fibré cosphérique

$$S_X^*(X \times \mathbb{R}^l) := (T^*X \times \mathbb{R}^l \setminus \{0\})/\mathbb{R}^+.$$

Ces résultats donnent lieu à une application reliée à la théorie de l'indice pour les opérateurs à cusp fibré. On montre entre autres qu'un opérateur à cusp fibré totalement elliptique ayant un opérateur normal dont le symbole principal est donné par l'identité peut toujours être déformé (après stabilisation) par une famille d'opérateurs totalement elliptiques de sorte que son opérateur normal devienne l'identité, au prix bien entendu de modifier le symbole principal à l'intérieur. Les théorèmes 4.1 et 4.3 peuvent aussi être utilisés pour montrer que le déterminant résiduel de Simon Scott [32] peut être défini globalement sur la composante connexe de l'identité dans  $G^0(X)$  (Théorème 7.7). L'auteur a récemment appris que Jean-Marie Lescure et Sylvie Paycha ont obtenu un résultat similaire dans [16]

L'article est organisé comme suit. Dans le §1, on décrit comment stabiliser le groupe  $G^0(X)$ . La fibration de Serre qui donne lieu à la longue suite exacte de groupes d'homotopie est ensuite introduite dans le §2. Le §3 donne une description de l'homomorphisme de bord en termes d'un indice de famille d'opérateurs, ce qui permet de montrer sa surjectivité. Le calcul des groupes d'homotopie de  $G^0(X)$  est donné dans le §4. Dans le §5, on adapte les résultats au cas des opérateurs suspendus. Dans le §6, on discute d'une application de ces résultats en théorie de l'indice pour les opérateurs à cusp fibré. Enfin, dans le §7, on donne une description topologique du déterminant résiduel de Simon Scott et on montre que ce déterminant admet une définition globale.

*Remerciements.* — L'auteur remercie cordialement Richard Melrose pour plusieurs discussions stimulantes sur le sujet. L'auteur remercie aussi Sergiu Moroianu pour plusieurs remarques et suggestions importantes, notamment concernant le dernier paragraphe de cet article. Enfin, l'auteur tient à remercier la referee pour ses commentaires constructifs et détaillés.

## 1. Stabilisation

Soit  $X$  une variété compacte sans bord de classe  $C^\infty$  de dimension supérieure à zéro et soit  $E \rightarrow X$  un fibré vectoriel complexe sur  $X$ . Dans cet article, on se propose d'étudier la topologie du groupe

$$(1.1) \quad G^0(X; E) := \{P \in \Psi^0(X; E) \mid P \text{ est inversible}\}$$

des opérateurs pseudodifférentiels (classiques polyhomogènes) inversibles d'ordre 0 agissant sur les sections de  $E$ . Plus précisément, on calculera les groupes d'homotopie de ce groupe muni de la topologie induite par celle de  $\Psi^0(X; E)$ . Comme mentionné dans l'introduction, on doit toutefois d'abord

stabiliser la situation, c'est-à-dire permettre au fibré vectoriel  $E$  d'avoir un rang arbitrairement large. De cette façon, la périodicité de Bott entre en jeu et permet d'obtenir un résultat relativement simple. En fait, en théorie de l'indice, c'est vraiment cette situation qui est d'intérêt.

Pour réaliser une telle stabilisation concrètement, soit  $\mathbb{S}^1$  le cercle unité dans  $\mathbb{C}$ . Suivant une idée de Richard Melrose (cf. [18]), considérons à la place de  $G^0(X; E)$  le groupe d'opérateurs

$$(1.2) \quad G^0(X) := \{\text{Id} + Q \mid Q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi^0(X)), \text{Id} + Q \text{ est inversible}\}$$

agissant sur  $\mathcal{C}^\infty(X \times \mathbb{S}^1)$ , un opérateur  $Q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi^0(X))$  agissant sur  $f \in \mathcal{C}^\infty(X \times \mathbb{S}^1)$  par

$$(Qf)(x, \theta) = \int_{\mathbb{S}^1} (Q(\theta, \theta') f_{\theta'})(x) d\theta'$$

où  $\theta \in [0, 2\pi)$  est la coordonnée angulaire usuelle sur  $\mathbb{S}^1$  et la fonction  $f_{\theta'} \in \mathcal{C}^\infty(X)$  est donnée par

$$f_{\theta'}(x) := f(x, e^{i\theta'}), \quad x \in X, \quad \theta' \in [0, 2\pi), \quad e^{i\theta'} \in \mathbb{S}^1.$$

En termes de la base orthonormale de  $L^2(\mathbb{S}^1)$  donnée par les fonctions propres  $\frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  de l'opérateur  $\frac{d}{d\theta}$ , un opérateur  $Q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi^0(X))$  peut être décrit par une matrice  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  avec coefficients

$$(1.3) \quad a_{kl} := \frac{1}{2\pi} \langle e^{-ik\theta}; Q e^{il\theta} \rangle_{L^2(\mathbb{S}^1)} \in \Psi^0(X), \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

décroissant rapidement vers zéro lorsque  $|k| + |l| \rightarrow \infty$ .

Soit  $F \rightarrow X$  un autre fibré vectoriel complexe tel que  $E \oplus F$  s'identifie avec le fibré trivial  $\mathbb{C}^n$  de rang  $n$  (pour  $n$  assez grand). En identifiant  $\mathbb{C}^n$  avec le sous-espace vectoriel de  $L^2(\mathbb{S}^1)$  ayant pour base  $\{1, e^{i\theta}, \dots, e^{i(n-1)\theta}\}$ , on peut alors regarder  $E$  comme un sous-fibré vectoriel de  $X \times L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow X$ , ce qui donne lieu à un plongement<sup>(1)</sup>

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccc} G^0(X; E) & \subset & G^0(X) \\ P & \mapsto & \text{Id} + (P - \text{Id}_E), \end{array}$$

l'opérateur  $\text{Id}_E : X \times L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow X \times L^2(\mathbb{S}^1)$  étant donné par la projection orthogonale sur  $E$ .

C'est un tel plongement qui permet de voir  $G^0(X)$  comme la stabilisation de  $G^0(X; E)$ , puisque dans  $G^0(X)$ , un opérateur peut agir sur un sous-fibré vectoriel de  $X \times L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow X$  de rang arbitrairement large. D'un autre côté, la condition de décroissance rapide sur les coefficients (1.3) permet

<sup>(1)</sup> Ce n'est pas n'importe quelle identification de  $E$  avec un sous-fibré vectoriel de  $X \times L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow X$  qui donne lieu à un tel plongement.

toujours d'approximer un opérateur de  $G^0(X)$  par un autre opérateur de  $G^0(X)$  agissant sur un sous-fibré vectoriel de  $L^2(\mathbb{S}^1)$  de rang fini.

Remarquons que pour définir le groupe  $G^0(X)$ , on aurait pu tout aussi bien prendre une variété compacte sans bord à la place du cercle. Cela aurait donné lieu à la même structure de groupe topologique. À la place de  $G^0(X)$ , on aurait pu aussi prendre la limite télescopique<sup>(2)</sup>

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G^0(X; \underline{\mathbb{C}}^n)$$

définie via les inclusions  $G^0(X; \underline{\mathbb{C}}^n) \subset G^0(X; \underline{\mathbb{C}}^{n+1})$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . À strictement parler, la topologie de cet espace est légèrement différente de celle de  $G^0(X)$ , mais conduit au même type d'homotopie.

## 2. La fibration de Serre associée

Un des sous-groupes importants de  $G^0(X)$  est donné par

$$(2.1) \quad G^{-1}(X) := \{ \text{Id} + Q \mid Q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi^{-1}(X)), \text{Id} + Q \text{ est inversible} \},$$

le sous-groupe des perturbations compactes inversibles de l'identité. Il donne lieu à une suite exacte à gauche

$$(2.2) \quad 0 \rightarrow G^{-1}(X) \hookrightarrow G^0(X) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}^\infty(S^*X; G^{-\infty}(\mathbb{S}^1))$$

où  $S^*X := (T^*X \setminus X)/\mathbb{R}^+$  est le *fibré cosphérique*,

$$G^{-\infty}(\mathbb{S}^1) := \{ \text{Id} + A \mid A \in \Psi^{-\infty}(\mathbb{S}^1), \text{Id} + A \text{ est inversible} \}$$

est le groupe des perturbations régularisantes inversibles de l'identité sur  $\mathbb{S}^1$  et

$$\sigma : G^0(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(S^*X; G^{-\infty}(\mathbb{S}^1))$$

est l'application qui, à un opérateur donné, lui associe son symbole principal. L'application  $\sigma$  n'est toutefois pas surjective du fait que la condition d'inversibilité impose certaines restrictions sur les valeurs possibles du symbole principal. En effet, comme le groupe  $G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)$  est un espace classifiant pour la  $K$ -théorie impaire, on obtient une application

$$h : \mathcal{C}^\infty(S^*X; G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)) \rightarrow K^1(S^*X)$$

qui à un élément  $s \in \mathcal{C}^\infty(S^*X; G^{-\infty}(\mathbb{S}^1))$  associe sa classe d'homotopie. Si d'autre part

$$\delta : K^1(S^*X) \rightarrow K_c^0(T^*X) \cong K^0(\overline{T^*X}, S^*X)$$

<sup>(2)</sup> suivant la terminologie de Bott et Tu ([6], p.241)

dénote l'homomorphisme de bord de la suite exacte à six termes associée à la paire  $(\overline{T^*X}, S^*X)$  où  $S^*X \subset \overline{T^*X}$  est vu comme le bord de la *compactification radiale*  $\overline{T^*X}$  du fibré cotangent  $T^*X$ , alors l'indice d'un opérateur  $\text{Id} + Q \in G^0(X)$ , via le théorème d'Atiyah-Singer [4] est donné par

$$\text{ind}_a(\text{Id} + Q) = \text{ind}_t \circ \delta \circ h \circ \sigma(\text{Id} + Q)$$

où  $\text{ind}_t : K_c^0(T^*X) \rightarrow \mathbb{Z}$  est l'indice topologique de Atiyah-Singer. Comme  $\text{Id} + Q$  est par définition un opérateur inversible, son indice est nécessairement zéro, ce qui impose une restriction sur la classe d'homotopie de son symbole principal.

Désignons par  $S_0(X)$  le noyau de l'application

$$\text{ind}_t \circ \delta \circ h : \mathcal{C}^\infty(S^*X; G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

LEMME 2.1. — *L'application  $\sigma$  associée au symbole principal d'un opérateur donne lieu à la suite exacte*

$$0 \rightarrow G^{-1}(X) \hookrightarrow G^0(X) \xrightarrow{\sigma} S_0(X) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* — Par la discussion précédente, on sait que

$$\sigma(G^0(X)) \subset S_0(X)$$

et que la suite est exacte à gauche. Il suffit donc de montrer que l'application  $\sigma$  est surjective. Soit  $p \in S_0(X)$  un élément donné, alors on sait au moins qu'il existe  $P \in \text{Id} + \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi^0(X))$  avec symbole principal donné par :

$$\sigma(P) = p.$$

Cet opérateur n'a *a priori* aucune raison d'être inversible. Toutefois, son indice est nécessairement nul, puisque d'après le théorème d'Atiyah-Singer [4], celui-ci est donné par

$$\text{ind}_a = \text{ind}_t \circ \delta \circ h(p) = 0.$$

Le noyau et le conoyau de  $P$  ont donc la même dimension. Si  $Q : \ker P \rightarrow \ker P^*$  représente un choix d'isomorphisme entre ces derniers, on peut alors, en posant  $Q = 0$  sur le complément orthogonal de  $\ker P$  dans  $L^2(X \times \mathbb{S}^1)$ , interpréter  $Q$  comme étant un élément de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi^{-\infty}(X))$ . De cette façon, on obtient que  $P + Q \in G^0(X)$  est inversible avec symbole principal  $\sigma(P + Q) = p$ , ce qui donne le résultat cherché.  $\square$

La suite exacte du lemme précédent est en fait une fibration localement triviale. Il suffit de choisir une application de quantification

$$q : \mathcal{C}^\infty(S^*X; \text{Id} + \Psi^{-\infty}(\mathbb{S}^1)) \rightarrow \Psi^0(X).$$

Comme  $G^0(X)$  est ouvert dans  $\Psi^0(X)$ , on obtient alors facilement des sections locales de  $\sigma : G^0(X) \rightarrow S_0(X)$  en utilisant l'application de quantification  $q$ . En particulier, cette fibration localement triviale est une fibration de Serre, ce qui veut dire qu'on a une longue suite exacte pour les groupes d'homotopie

$$(2.3) \quad \cdots \pi_k(G^{-1}(X)) \rightarrow \pi_k(G^0(X)) \xrightarrow{\sigma} \pi_k(S_0(X)) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(G^{-1}(X)) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_1(S_0(X)) \xrightarrow{\partial} \pi_0(G^{-1}(X)) \rightarrow \pi_0(G^0(X)) \xrightarrow{\sigma} \pi_0(S_0(X)).$$

C'est par le biais de cette longue suite exacte que nous allons calculer les groupes d'homotopie de  $G^0(X)$ . En effet, on sait que  $G^{-1}(X)$  est un espace classifiant pour la  $K$ -théorie impaire, donc ses groupes d'homotopie sont donnés par

$$(2.4) \quad \pi_k(G^{-1}(X)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k \text{ impair,} \\ \{0\}, & k \text{ pair.} \end{cases}$$

De plus, comme  $G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)$  est aussi un espace classifiant pour la  $K$ -théorie impaire, on peut vérifier que pour  $k > 0$ ,

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \pi_k(S_0(X)) &\cong [S^k(S^*X); G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)] \\ &\cong K^{-k-1}(S^*X) \end{aligned}$$

où  $S^k(S^*X)$  dénote la  $k$ -suspension de  $S^*X$ , alors que pour  $k = 0$ , on a

$$(2.6) \quad \pi_0(S_0(X)) \cong \ker[\text{ind}_t \circ \delta : K^1(S^*X) \rightarrow \mathbb{Z}]$$

essentiellement par définition de  $S_0(X)$ .

Une bonne compréhension de l'homomorphisme de bord

$$\partial : \pi_k(S_0(X)) \rightarrow \pi_{k-1}(G^{-1}(X))$$

nous permettra donc de calculer les groupes d'homotopie de  $G^0(X)$ .

### 3. Caractérisation de l'homomorphisme de bord $\partial$

Dans cette section, nous allons interpréter l'homomorphisme de bord comme étant un indice de famille d'opérateurs de Fredholm. Étant donné une application  $f : \mathbb{S}^k \rightarrow S_0(X)$  envoyant le point de base de  $\mathbb{S}^k$  (choisi au préalable) sur l'application identité, on peut relever celle-ci dans l'espace  $\text{Id} + \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi^0(X))$ , c'est-à-dire qu'il existe une application

$$\tilde{f} : \mathbb{S}^k \rightarrow \text{Id} + \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi^0(X))$$



telle que  $\sigma \circ \tilde{f} = f$ . Comme le symbole principal de la famille d'opérateurs définie par  $\tilde{f}$  est inversible, l'application  $\tilde{f}$  définit une famille d'opérateurs de Fredholm agissant sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} := L^2(X \times \mathbb{S}^1)$  que l'on dénotera

$$\hat{f} : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H})$$

où  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$  représente l'espace des opérateurs (bornés) de Fredholm agissant sur  $L^2(X \times \mathbb{S}^1)$ . En choisissant  $\tilde{f}$  de façon appropriée, on peut toujours supposer que  $\tilde{f}$  envoie le point de base de  $\mathbb{S}^k$  sur l'identité dans  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ . Comme on peut le vérifier aisément, la classe d'homotopie  $[\hat{f}] \in \pi_k(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$  définie par  $\hat{f}$  ne dépend que de la classe d'homotopie  $[f] \in \pi_k(S_0(X))$  associée à  $f$ . De cette façon, on définit donc une application

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} q : \pi_k(S_0(X)) & \rightarrow & \pi_k(\mathcal{F}(\mathcal{H})) \\ [f] & \mapsto & [\hat{f}]. \end{array}$$

D'un autre côté, comme  $G^{-1}(X)$  est un espace classifiant pour la  $K$ -théorie impaire, on a une identification

$$(3.2) \quad \pi_{k-1}(G^{-1}(X)) \cong \tilde{K}^{-1}(\mathbb{S}^{k-1}) \cong \tilde{K}^0(\mathbb{S}^k)$$

où  $\tilde{K}$  dénote la  $K$ -théorie réduite pour un espace muni d'un point de base.

PROPOSITION 3.1. — *Vu comme une application*

$$\partial : \pi_k(S_0(X)) \rightarrow \tilde{K}^0(\mathbb{S}^k)$$

en utilisant l'identification (3.2), l'homomorphisme de bord  $\partial$  est donné par  $\partial = \text{ind} \circ q$  où

$$\text{ind} : \pi_k(\mathcal{F}(\mathcal{H})) \rightarrow \tilde{K}^0(\mathbb{S}^k)$$

est l'indice de famille d'opérateurs de Fredholm tel que défini dans l'appendice de [1].

*Démonstration.* — La preuve est essentiellement la même que dans ([31], proposition 8.15). Nous donnerons tout de même une preuve en référant à [31] pour plus de détails.

Soit  $f : \mathbb{S}^k \rightarrow S_0(X)$  une application représentant la classe d'homotopie  $[f] \in \pi_k(S_0(X))$  et soit  $\tilde{f} : \text{Id} + \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi^0(X))$  un choix de relèvement, de sorte que vu comme une famille d'opérateurs de Fredholm

$$\hat{f} : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H}),$$

on ait  $q([f]) = [\hat{f}]$ . Sans changer la classe d'homotopie de  $f$  et  $\tilde{f}$ , on peut supposer que  $f \equiv \text{Id}$ ,  $\tilde{f} \equiv \text{Id}$  dans une boule ouverte  $B_0^k \subset \mathbb{S}^k$  contenant le point de base de  $\mathbb{S}^k$ . Soit  $\bar{B}_1^k \subset \mathbb{S}^k$  le complément de  $B_0^k$  dans  $\mathbb{S}^k$ . Intuitivement, le résultat n'est pas surprenant puisqu'à la fois l'homomorphisme

de bord  $\partial$  et l'indice de famille  $\text{ind } \phi$  mesurent l'obstruction à relever une application  $f$  dans  $G^0(X)$ .

En prenant un sous-espace  $V \subset \mathcal{H}$  de codimension finie tel que  $\ker \hat{f}(s) \cap V = \{0\}$  pour tout  $s \in \mathbb{S}^k$ , on peut décrire l'indice de famille de  $\hat{f}$  par

$$\text{ind}(\hat{f}) = [V^\perp] - [\hat{f}(V)^\perp]$$

où  $V^\perp$  et  $\hat{f}(V)^\perp$  sont des fibrés vectoriels sur  $\mathbb{S}^k$ . Comme l'espace  $\overline{B}_1^k$  est contractile et que  $\hat{f}|_{\partial \overline{B}_1^k} \equiv \text{Id}$ , l'indice de la famille d'opérateurs  $\hat{f}$  restreinte à  $\overline{B}_1^k$  est nul. En choisissant  $V$  minutieusement, on peut aussi supposer que  $V^\perp$  et  $\hat{f}(V)^\perp$  sont isomorphes en tant que fibrés vectoriels lorsque restreints à  $\overline{B}_1^k$  (voir [31], lemme 8.14). Soit  $\varphi : V^\perp \rightarrow \hat{f}(V)^\perp$  un choix d'isomorphisme explicite sur  $\overline{B}_1^k$ . En posant que  $\varphi$  agit par zéro sur  $V$ , on obtient une famille d'opérateurs

$$\phi : \overline{B}_1^k \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi^{-\infty}(X)) \cong \Psi^{-\infty}(X \times \mathbb{S}^1).$$

Puisque  $\overline{B}_1^k$  est compact, il existe  $\lambda > 0$  tel que

$$\hat{f}(s) + \lambda \phi(s) \in G^0(X), \quad \forall s \in \overline{B}_1^k.$$

En renormalisant  $\phi$  si nécessaire, on peut donc supposer que  $\tilde{f} + \phi$  est une application de la forme

$$\tilde{f} + \phi : \overline{B}_1^k \rightarrow G^0(X).$$

Puisque  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi^{-\infty}(X)) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi^{-1}(X))$ , cette application est aussi un relèvement de  $f$

$$\sigma(\tilde{f} + \phi) = f \text{ sur } \overline{B}_1^k.$$

De plus, étant donné que  $\tilde{f} \cong \text{Id}$  sur  $\partial \overline{B}_1^k$ , l'application  $\tilde{f} + \phi$  prend valeur dans  $G^{-1}(X)$  lorsque restreinte à  $\partial \overline{B}_1^k$ . D'autre part, par définition de l'homomorphisme de bord (voir [34], §17.1), on a

$$\partial([f]) = [(\tilde{f} + \phi)|_{\partial \overline{B}_1^k}] \in \pi_{k-1}(G^{-1}(X)).$$

Étant donné que  $V^\perp = \tilde{f}(V)^\perp$  canoniquement sur  $\partial \overline{B}_1^k$ , l'application  $\phi$  prend la forme

$$\phi : \partial \overline{B}_1^k \rightarrow \text{End}(V^\perp, V^\perp).$$

Or, clairement, la construction de recollement<sup>(3)</sup> appliquée à  $(\text{Id} + \phi)^{-1}$  donne le fibré vectoriel virtuel  $[\hat{f}(V)^\perp] - [V^\perp]$ . La construction de recollement appliquée à  $(\text{Id} + \phi)$  donne donc  $[V^\perp] - [T(V)^\perp]$  ce qui montre que

$$\partial = \text{ind} \circ q$$

puisque l'identification (3.2) est donnée par la construction de recollement.  $\square$

LEMME 3.2. — *L'homomorphisme de bord  $\partial : \pi_k(S_0(X)) \rightarrow \tilde{K}^0(\mathbb{S}^k)$  est surjectif pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Démonstration.* — Par la proposition précédente, il suffit de montrer que l'application  $\text{ind} \circ q$  est surjective. Montrons d'abord que, dans ce qui correspond en quelque sorte au cas  $k = 0$ ,

$$(3.3) \quad \text{ind} \circ q : \pi_0(S^*X; G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)) \rightarrow \mathbb{Z} \cong K^0(\text{pt}),$$

on a aussi une application surjective. Supposons que  $l \in \mathbb{Z}$  est donné. Soit alors

$$g : \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow G^{-\infty}(\mathbb{S}^1), \quad n = \dim X,$$

une application qui, via la construction de recollement de la série d'identifications

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \pi_{2n-1}(G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)) &\cong \tilde{K}^0(\mathbb{S}^{2n}), && \text{(construction de recollement)} \\ &\cong K^0(\text{pt}), && \text{(périodicité de Bott)} \\ &\cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

correspond à l'entier  $l$ . En regardant la sphère  $\mathbb{S}^{2n-1}$  comme étant donnée par

$$\mathbb{S}^{2n-1} \cong \mathbb{B}^{2n-1} / \partial \mathbb{B}^{2n-1}$$

où  $\mathbb{B}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n-1}$  est la boule fermée de rayon 1, on obtient une fonction

$$\tilde{g} : \mathbb{B}^{2n-1} \rightarrow G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)$$

qui envoie le bord de  $\mathbb{B}^{2n-1}$  sur l'identité. D'autre part, soit

$$i : \mathbb{B}^{2n-1} \hookrightarrow S^*X$$

un plongement de la boule  $\mathbb{B}^{2n-1}$  dans  $S^*X$ . L'application  $\tilde{g}$  définit alors une application

$$\tilde{g} \circ i^{-1} : i(\mathbb{B}^{2n-1}) \rightarrow G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)$$

qui peut être étendue à tout  $S^*X$  par l'identité. Soit

$$f : S^*X \rightarrow G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)$$

---

<sup>(3)</sup> clutching construction en anglais, voir [1] pour une description.

cette extension de  $\tilde{g} \circ i^{-1}$  à tout  $S^*X$ . Il est alors aisé de montrer que l'indice topologique

$$\text{ind}_t \circ \delta([f])$$

associé à la  $K$ -classe  $[f] \in K^1(S^*X)$  de  $f$  est exactement  $l$ , ce qui démontre la surjectivité de (3.3). Fort de ce résultat, le lemme se démontre essentiellement comme dans ([1], proposition A6) en utilisant un opérateur

$$T \in \Psi^0(X; \mathbb{C}^N) \quad (N \in \mathbb{N} \text{ assez grand})$$

elliptique (donc de Fredholm) d'indice  $-1$ . Un tel opérateur existe par la surjectivité de (3.3) que nous venons d'établir.  $\square$

#### 4. Les groupes d'homotopie de $G^0(X)$

La surjectivité de l'homomorphisme de bord  $\partial$  nous permet maintenant de calculer les groupes d'homotopie de  $G^0(X)$ .

**THÉORÈME 4.1.** — *Soit  $X$  une variété compacte sans bord de dimension supérieure à zéro. Les groupes d'homotopie de  $G^0(X)$  sont donnés par*

$$\pi_k(G^0(X)) \cong \begin{cases} \ker[\text{ind}_t \circ \delta : K^1(S^*X) \rightarrow \mathbb{Z}], & k \text{ pair,} \\ K^0(S^*X), & k \text{ impair,} \end{cases}$$

où  $\delta : K^1(S^*X) \rightarrow K_c^0(T^*X)$  est l'homomorphisme de bord et  $\text{ind}_t : K_c^0(T^*X) \rightarrow \mathbb{Z}$  est l'indice topologique d'Atiyah-Singer.

*Démonstration.* — Par le lemme 3.2, l'homomorphisme de bord

$$\partial : \pi_k(S_0(X)) \rightarrow \pi_{k-1}(G^{-1}(X))$$

est surjectif pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . La longue suite exacte 2.3 se décompose donc en courtes suites exactes

$$(4.1) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow \pi_k(G^0(X)) \rightarrow \pi_k(S_0(X)) \rightarrow 0, & \quad k \text{ impair,} \\ 0 \rightarrow \pi_k(G^0(X)) \rightarrow \pi_k(S_0(X)) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0, & \quad k \text{ pair,} \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que  $G^{-1}(X)$  est un espace classifiant pour la  $K$ -théorie impaire,

$$\pi_k(G^{-1}(X)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k \text{ impair,} \\ \{0\}, & k \text{ pair.} \end{cases}$$

Le résultat suit en utilisant l'identification (2.6). Dans le cas où  $k = 0$ , la surjectivité à droite est une conséquence du lemme 2.1 et le résultat est alors obtenu en utilisant l'identification (2.6).  $\square$

*Remarque 4.2.* — Lorsque la variété  $X$  est constituée d'un nombre fini de points, le théorème ne s'applique pas, mais on peut identifier  $G^0(X)$  avec  $G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)$ , qui est un espace classifiant pour la  $K$ -théorie impaire. Les groupes d'homotopie pairs sont donc triviaux alors que les groupes d'homotopie impairs sont isomorphes à  $\mathbb{Z}$  dans ce cas.

Considérons le cas particulier où  $X = \mathbb{S}^1$  est donné par le cercle. Alors le fibré cosphérique

$$S^*\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}_+^1 \sqcup \mathbb{S}_-^1$$

est l'union disjointe de deux cercles. Par suite, la  $K$ -théorie de cet espace est donnée par

$$\begin{aligned} K^0(S^*\mathbb{S}^1) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ K^1(S^*\mathbb{S}^1) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ce qui donne pour les groupes d'homotopie de  $G^0(\mathbb{S}^1)$

$$\pi_k(G^0(\mathbb{S}^1)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k \text{ pair,} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & k \text{ impair.} \end{cases}$$

Lorsque  $X = \mathbb{S}^2$  est la sphère de dimension deux, on peut aussi calculer explicitement les groupes d'homotopies de  $G^0(\mathbb{S}^2)$ . On considère d'abord la suite exacte à six termes associée à la paire  $(\overline{T^*\mathbb{S}^2}, S^*\mathbb{S}^2)$  où  $S^*\mathbb{S}^2$  est vu comme le bord de la compactification radial  $\overline{T^*\mathbb{S}^2}$  du fibré cotangent  $T^*\mathbb{S}^2$ . Après les identifications évidentes

$$(4.2) \quad \begin{aligned} K^i(\overline{T^*\mathbb{S}^2}, S^*\mathbb{S}^2) &\cong K_c^i(T^*\mathbb{S}^2), \\ K^i(\overline{T^*\mathbb{S}^2}) &\cong K^i(\mathbb{S}^2), \end{aligned}$$

cette suite exacte prend la forme

$$(4.3) \quad \begin{array}{ccccc} K_c^0(T^*\mathbb{S}^2) & \longrightarrow & K^0(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{\pi^*} & K^0(S^*\mathbb{S}^2) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K^1(S^*\mathbb{S}^2) & \longleftarrow & K^1(\mathbb{S}^2) & \longleftarrow & K_c^1(T^*\mathbb{S}^2) \end{array}$$

où  $\pi : S^*\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  est la projection de fibré. Par l'isomorphisme de Thom en  $K$ -théorie, on a que

$$(4.4) \quad K_c^j(T^*\mathbb{S}^2) \cong K^j(\mathbb{S}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & j = 0, \\ \{0\}, & j = 1. \end{cases}$$

D'autre part, en regardant  $\mathbb{S}^2$  comme étant  $\mathbb{C}P_1$ , on a que

$$K^0(\mathbb{S}^2) \cong \frac{\mathbb{Z}[t]}{(t-1)^2},$$

l'isomorphisme étant donné par  $[\mathbb{C}] \mapsto 1$  et  $[H] \mapsto t$  où  $H \rightarrow \mathbb{C}P_1$  est le fibré en droite d'hyperplans. Clairement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi^*[\mathbb{C}^n]$  n'est pas nul dans  $K^0(S^*\mathbb{S}^2)$ . En identifiant  $T^*\mathbb{S}^2$  avec  $H \otimes_{\mathbb{C}} H$  et en choisissant une métrique hermitienne sur  $H$  (et donc sur  $H \otimes_{\mathbb{C}} H$ ), on peut alors identifier  $S^*\mathbb{S}^2$  avec  $S(H \otimes_{\mathbb{C}} H)$ , le fibré en cercle unitaire de  $H \otimes_{\mathbb{C}} H$

$$S(H \otimes_{\mathbb{C}} H) := \{v \in H \otimes_{\mathbb{C}} H \mid |v| = 1\}.$$

En ce cas, il devient évident que le fibré en droite  $\pi^*(H \otimes_{\mathbb{C}} H) \rightarrow S^*\mathbb{S}^2$  est trivial sur  $S^*\mathbb{S}^2$ . Ainsi, comme  $([H] - 1)^2 = 0$ , on a que

$$\pi^*(2[H]) = \pi^*([H]^2 - 1) = 0.$$

Cependant,  $\pi^*[H]$  n'est pas trivial puisque d'après la suite de Gysin associée au fibré  $T^*\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , sa classe de Chern est le générateur de  $H^2(S^*\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}_2$ . La suite exacte (4.3) et l'isomorphisme de Thom (4.4) montrent donc que

$$K^0(S^*\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^2, \quad K^1(S^*(\mathbb{S}^2)) \cong \mathbb{Z},$$

et donc que les groupes d'homotopie de  $G^0(\mathbb{S}^2)$  sont donnés par

$$\pi_k(G^0(\mathbb{S}^2)) \cong \begin{cases} \{0\}, & k \text{ pair,} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & k \text{ impair.} \end{cases}$$

Plus généralement, en utilisant l'isomorphisme donné par le caractère de Chern

$$\text{Ch} : K^*(S^*X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow H^*(S^*X, \mathbb{Q}),$$

on peut exprimer les groupes d'homotopie rationnels  $\pi_i(G^0(X)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  de  $G^0(X)$  en termes de la cohomologie paire et impaire de  $S^*X$ . Notons aussi que comme la  $K$ -théorie paire (non-réduite) n'est jamais triviale, on a que pour toute variété compacte  $X$  sans bord, le groupe fondamental de  $G^0(X)$  n'est jamais trivial. En particulier, le groupe  $G^0(X)$  n'est jamais contractile. Toutefois, comme il est montré par Melrose ([18], §12), lorsque  $X = \mathbb{S}^1$  est le cercle, il est possible de définir un sous-groupe  $G^0_{\tau, -\infty}(\mathbb{S}^1)$  de  $G^0(\mathbb{S}^1)$  qui soit faiblement contractile. Ce sous-groupe est obtenu en imposant des conditions supplémentaires sur le symbole principal, à savoir que ce dernier doit être l'identité sur

$$\{s_+\} \sqcup \mathbb{S}^1_- \subset S^*\mathbb{S}^1$$

où  $s_+ \in \mathbb{S}^1_+$  est un point de base choisi au préalable. Avec ces restrictions,  $K^0(S^*\mathbb{S}^1)$  est remplacé par

$$K^0(S^*\mathbb{S}^1, \{s_+\} \sqcup \mathbb{S}^1_-) \cong \tilde{K}^0(\mathbb{S}^1) \cong \{0\},$$

alors que  $K^1(S^*\mathbb{S}^1)$  est remplacé par

$$K^1(S^*\mathbb{S}^1, \{s_+\} \sqcup \mathbb{S}^1_-) \cong \tilde{K}^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Le théorème 4.1 montre alors que les groupes d'homotopie de  $G_T^{0,-\infty}(\mathbb{S}^1)$  sont tous triviaux. En ce sens, le théorème 4.1 peut être vu comme une généralisation du résultat de contractibilité de Melrose [18].

Une autre conséquence intéressante de la surjectivité de l'homomorphisme de bord est la suivante.

**THÉORÈME 4.3.** — *Soit  $X$  une variété compacte sans bord de dimension supérieure à zéro. Soient  $M$  un CW-complexe construit à partir d'un nombre fini de cellules et  $f : M \rightarrow G^{-1}(X)$  une application continue. Si  $i : G^{-1}(X) \hookrightarrow G^0(X)$  dénote l'inclusion canonique, alors l'application  $i \circ f$  est homotope à l'application constante*

$$\begin{aligned} \text{Id} : M &\rightarrow G^0(X) \\ m &\mapsto \text{Id} \end{aligned}$$

dans  $G^0(X)$ .

*Démonstration.* — Puisque l'homomorphisme de bord  $\partial : \pi_k(S_0(X)) \rightarrow \pi_{k-1}(G^{-1}(X))$  est surjectif pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on déduit de la longue suite exacte de groupes d'homotopie que

$$i_* : \pi_k(G^{-1}(X)) \rightarrow \pi_k(G^0(X))$$

est une application triviale, c'est-à-dire envoie tout sur l'élément identité de  $\pi_k(G^0(X))$ . En utilisant la décomposition cellulaire de  $M$ , cela signifie que l'on peut procéder par récurrence pour construire une homotopie entre  $i \circ f$  et  $\text{Id} : M \rightarrow G^0(X)$ .  $\square$

*Remarque 4.4.* — On dira que  $G^{-1}(X)$  est *faiblement rétractile* dans  $G^0(X)$ .

## 5. Le cas des opérateurs suspendus

On peut obtenir un analogue des résultats précédents pour les opérateurs suspendus (suspended operators en anglais) introduits par Melrose [19]. Rappelons d'abord brièvement leur définition. À nouveau, soit  $X$  une variété lisse, compacte et sans bord et  $l \in \mathbb{N}$  un entier. Considérons l'espace  $\Psi^*(X \times \mathbb{R}^l)$  des opérateurs pseudodifférentiels agissant sur la variété non-compacte  $X \times \mathbb{R}^l$ . Cet espace n'est pas une algèbre, mais à tout le moins, chaque opérateur  $A \in \Psi^*(X \times \mathbb{R}^l)$  agit sur les fonctions lisses à support compact

$$A : \mathcal{C}_c^\infty(X \times \mathbb{R}^l) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X \times \mathbb{R}^l).$$

Soit  $T_u : X \times \mathbb{R}^l \rightarrow X \times \mathbb{R}^l$  le difféomorphisme donné par la translation  $T_u(x, t) = (x, t + u)$  dans la deuxième variable et considérons les opérateurs pseudodifférentiels dans  $\Psi^*(X \times \mathbb{R}^l)$  qui sont *invariants par translation*, c'est-à-dire satisfaisant

$$(5.1) \quad T_u^*(Af) = A(T_u^*f), \quad \forall u \in \mathbb{R}^l, f \in \mathcal{C}_c^\infty(X \times \mathbb{R}^l).$$

Le noyau de Schwartz  $K_A$  d'un tel opérateur agit alors par convolution dans la direction de  $\mathbb{R}^l$ ,

$$Af(x, t) = \int_X \int_{\mathbb{R}^l} K_A(x, x', t - s)f(x', s)ds$$

avec  $K_A \in \mathcal{C}^{-\infty}(X^2 \times \mathbb{R}^l; \Omega_R)$  où  $\Omega_R = \pi^*\Omega$  est l'image réciproque du fibré des densités sur  $X$  par la projection

$$\begin{aligned} \pi : X \times X \times \mathbb{R}^l &\rightarrow X \\ (x, x', t) &\mapsto x'. \end{aligned}$$

Sous cette forme, ce noyau est alors singulier seulement sur la sous-variété  $\{x = x', t = 0\}$ . Pour pouvoir composer des opérateurs invariants par translation, on peut aussi imposer une condition de décroissance rapide du noyau à l'infini

$$(5.2) \quad K_A \in \mathcal{C}_c^{-\infty}(X^2 \times \mathbb{R}^l; \Omega_R) + \mathcal{S}(X^2 \times \mathbb{R}^l; \Omega_R),$$

où  $\mathcal{S}(X^2 \times \mathbb{R}^l)$  dénote l'espace de Schwartz des sections à décroissance rapide (avec toutes leurs dérivées) à l'infini.

**DÉFINITION 5.1.** — *Pour chaque  $m \in \mathbb{Z}$  et  $l \in \mathbb{N}$ , on définit l'espace  $\Psi_{\text{sl}}^m(X)$  des opérateurs  $l$  fois suspendus d'ordre  $m$  sur  $X$  comme étant le sous-espace de  $\Psi^m(X \times \mathbb{R}^l)$  constitué des opérateurs invariants par translation qui satisfont la condition de décroissance rapide (5.2).*

Plus généralement, on peut définir l'espace des opérateurs suspendus agissant sur les sections d'un fibré vectoriel complexe  $E \rightarrow X$  par

$$\Psi_{\text{sl}}^m(X; E) := \Psi_{\text{sl}}^m(X) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(X^2)} \mathcal{C}^\infty(X^2; \text{Hom}(E))$$

où  $\text{Hom}(E)$  est le fibré vectoriel sur  $X^2$  ayant pour fibre au-dessus de  $(x, x') \in X^2$

$$\text{Hom}(E)_{(x, x')} = \text{hom}(E_x, E_{x'}).$$

On peut vérifier qu'un opérateur suspendu  $A \in \Psi_{\text{sl}}^m(X; E)$  agit sur les sections à décroissance rapide

$$A : \mathcal{S}(X \times \mathbb{R}^l; E) \rightarrow \mathcal{S}(X \times \mathbb{R}^l; E)$$



pour donner à nouveau des fonctions à décroissance rapide. De là, on peut voir que l'espace des opérateurs suspendus  $\Psi_{\text{sl}}^*(X; E)$  forme une algèbre. En prenant la transformée de Fourier

$$K_{\widehat{A}(\tau)}(y, y') := \int_{\mathbb{R}^l} e^{-it\tau} K_A(y, y', t) dt, \quad \tau \in \mathbb{R}^l,$$

du noyau de Schwartz, on obtient une famille à  $l$  paramètres

$$\widehat{A}(\tau) \in \Psi^m(X; E), \tau \in \mathbb{R}^l$$

d'opérateurs agissant sur  $X$ . Cette famille est appelée *famille indiciale* de  $A$ . Un opérateur suspendu est complètement déterminé par cette dernière et vice-versa. En termes de la composition, un calcul direct montre que

$$(5.3) \quad \widehat{A \circ B}(\tau) = \widehat{A}(\tau) \circ \widehat{B}(\tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^l.$$

Par conséquent, on voit que pour un opérateur suspendu inversible  $A$ , sa famille indiciale  $\widehat{A}(\tau)$  est aussi inversible pour tout  $\tau$ . La réciproque est aussi vraie, mais moins évidente (voir [19]). En quelque sorte, la famille indiciale peut être vue comme un symbole dans la variable  $\tau \in \mathbb{R}^l$  qui est toujours quantifié dans les variables  $(x, \xi) \in T^*X$ .

Les opérateurs suspendus ont aussi un symbole principal qui donne lieu à une suite exacte

$$(5.4) \quad 0 \rightarrow \Psi_{\text{sl}}^{m-1}(X; E) \rightarrow \Psi_{\text{sl}}^m(X; E) \xrightarrow{\sigma_m} \mathcal{C}^\infty(S_X^*(X \times \mathbb{R}); \pi^* \text{hom } E \otimes D_m) \rightarrow 0$$

où  $S^*(X \times \mathbb{R}) = T^*(X \times \mathbb{R}) \setminus 0/\mathbb{R}^+$  et  $S_X^*(X \times \mathbb{R})$  est sa restriction à  $X \times \{0\}$ , alors que  $D_m$  est le fibré en droite sur  $S^*(X \times \mathbb{R})$  défini par les fonctions homogènes de degré  $m$  sur  $T^*(X \times \mathbb{R}) \setminus 0$ .

**DÉFINITION 5.2.** — *Un opérateur suspendu  $A \in \Psi^m(X; E)$  est elliptique si son symbole principal est inversible.*

On peut vérifier via la construction d'un inverse modulo  $\Psi_{\text{sl}}^{-\infty}(X; E)$  que la famille indiciale  $\widehat{A}(\tau)$  d'un opérateur suspendu elliptique  $A \in \Psi_{\text{sl}}^m(X; E)$  est inversible pour tout  $\tau \in \mathbb{R}^l$  tel que  $|\tau| > R$ , où  $R > 0$  est choisi suffisamment grand.

On peut maintenant définir la version stabilisée du groupes des opérateurs suspendus inversibles d'ordre zéro par

$$(5.5) \quad G_{\text{sl}}^0(X) := \{\text{Id} + Q \mid Q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi_{\text{sl}}^0(X)), \text{Id} + Q \text{ est inversible}\}$$

où  $Q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi_{\text{sl}}^0(X))$  agit sur  $f \in \mathcal{S}(X \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{S}^1)$  par

$$(Qf)(x, t, \theta) = \int_{\mathbb{S}^1} (Q(\theta, \theta') f_{\theta'})(x, t) d\theta',$$

la fonction  $f_{\theta'} \in \mathcal{S}(X \times \mathbb{R}^l)$  étant définie par  $f_{\theta'}(x, t) := f(x, t, \theta)$ . De même, on peut définir le sous-groupe des «perturbations compactes inversibles» de l'identité par

$$(5.6) \quad G_{\text{sl}}^{-1}(X) := \{\text{Id} + Q \in G_{\text{sl}}^0(X) \mid Q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi_{\text{sl}}^{-1}(X))\},$$

en ce sens que la famille indiciale d'un opérateur  $A \in \Psi_{\text{sl}}^{-1}(X)$  est constituée d'opérateurs compacts.

LEMME 5.3. — *Le symbole principal donne lieu à une suite exacte*

$$0 \rightarrow G_{\text{sl}}^{-1}(X) \rightarrow G_{\text{sl}}^0(X) \xrightarrow{\sigma} S_{\text{sl}}(X) \rightarrow 0$$

avec

$$S_{\text{sl}}(X) := \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l); G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)), & l \text{ impair,} \\ \ker[\widehat{\text{ind}} : \mathcal{C}^\infty(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l); G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)) \rightarrow \mathbb{Z}], & l \text{ pair,} \end{cases}$$

où  $\widehat{\text{ind}} : \mathcal{C}^\infty(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l); G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)) \rightarrow \mathbb{Z}$  est un indice de famille défini à partir de la famille indiciale (voir (5.8) plus bas).

*Démonstration.* — Étant donné un symbole  $a \in S_{\text{sl}}(X)$ , on peut trouver un opérateur  $A \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1; \Psi_{\text{sl}}^0(X))$  tel que

$$\sigma(A) = a.$$

Cet opérateur  $A$  est donc elliptique et par conséquent sa famille indiciale  $\widehat{A}(\tau)$  est inversible pour tout  $\tau$  satisfaisant  $|\tau| > R$  où  $R$  est une constante positive assez grande. Vue comme une famille d'opérateurs de Fredholm, c'est dire que la famille indiciale  $\widehat{A}$  définit un indice de famille

$$(5.7) \quad \text{ind } \widehat{A} \in K_c^0(\mathbb{R}^l) \cong \widetilde{K}^0(\mathbb{S}^l) \cong \begin{cases} \{0\}, & l \text{ impair,} \\ \mathbb{Z}, & l \text{ pair.} \end{cases}$$

Ainsi, lorsque  $l$  est impair, cet indice est nécessairement trivial et il n'y a aucune obstruction à l'existence d'un opérateur  $Q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \Psi_{\text{sl}}^{-\infty}(X))$  tel que  $\widehat{A}(\tau) + \widehat{Q}(\tau)$  soit inversible pour tout  $\tau \in \mathbb{R}^l$ . On en déduit que  $A + Q \in G_{\text{sl}}^0(X)$  avec  $\sigma(A + Q) = a$ , d'où la surjectivité à droite de la suite exacte lorsque  $l$  est impair.

Lorsque  $l$  est pair, l'indice (5.7) ne dépend pas du choix de  $A$  tel que  $\sigma(A) = a$  et donc définit une application

$$(5.8) \quad \widehat{\text{ind}} : \mathcal{C}^\infty(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l); G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Comme dans le lemme 2.1, cet indice mesure exactement l'obstruction à trouver un opérateur  $A \in G_{\text{sl}}^0(X)$  tel que  $\sigma(A) = a$ , ce qui établit la

surjectivité à droite de la suite exacte dans le cas où  $l$  est pair en posant

$$S_{\text{sl}}(X) := \ker \left[ \widehat{\text{ind}} : K^1(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l)) \rightarrow \mathbb{Z} \right].$$

□

À nouveau, on peut vérifier que la suite exacte du lemme précédent est une fibration de Serre, ce qui donne une longue suite exacte de groupes d'homotopie

$$(5.9) \quad \cdots \rightarrow \pi_k(G_{\text{sl}}^{-1}(X)) \rightarrow \pi_k(G_{\text{sl}}^0(X)) \rightarrow \pi_k(S_{\text{sl}}(X)) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(G_{\text{sl}}^{-1}(X)) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_1(S_{\text{sl}}(X)) \xrightarrow{\partial} \pi_0(G_{\text{sl}}^{-1}(X)) \rightarrow \pi_0(G_{\text{sl}}^0(X)) \rightarrow \pi_0(S_{\text{sl}}(X)).$$

Pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $G_{s(2p)}^{-1}(X)$  est un espace classifiant pour la  $K$ -théorie *impaire*, alors que  $G_{s(2p-1)}^{-1}(X)$  est un espace classifiant pour la  $K$ -théorie *paire*. Utilisant le fait que  $G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)$  est un espace classifiant pour la  $K$ -théorie *impaire*, on a aussi que pour  $k > 0$ ,

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \pi_k(S_{\text{sl}}(X)) &\cong [S^k(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l)); G^{-\infty}(\mathbb{S}^1)] \\ &\cong K^{-k-1}(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l)) \\ &\cong \begin{cases} K^0(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l)), & k \text{ impair,} \\ K^1(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l)), & k \text{ pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce résultat est aussi valable pour  $k = 0$  et  $l$  impair, mais pour  $k = 0$  et  $l$  pair, on a plutôt

$$\pi_0(S_{\text{sl}}(X)) \cong \ker[\widehat{\text{ind}} : K^1(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l)) \rightarrow \mathbb{Z}]$$

l'indice (5.8) ne dépendant que de la  $K$ -classe définie par le symbole principal.

On pourra donc calculer les groupes d'homotopie de  $G_{\text{sl}}^0(X)$  en montrant que l'homomorphisme de bord  $\partial$  est surjectif. La preuve est très similaire au cas des opérateurs pseudodifférentiels usuels. Dans un premier temps, on montre que l'homomorphisme de bord correspond à un indice de famille. On montre alors que cet indice de famille est surjectif en utilisant le théorème d'Atiyah-Singer [5] pour les familles d'opérateurs.

L'indice de famille qu'il faut considérer est obtenu en regardant un opérateur suspendu elliptique comme une famille à  $l$  paramètres d'opérateurs de Fredholm inversibles à l'infini. Plus précisément, soit  $f : \mathbb{S}^k \rightarrow S_{\text{sl}}(X)$  une application représentant un élément de  $\pi_k(S_{\text{sl}}(X))$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $f \equiv \text{Id}$  dans un voisinage du point de base  $s_0$  de  $\mathbb{S}^k$ . Soit alors

$$\tilde{f} : \mathbb{S}^k \rightarrow \text{Id} + C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \Psi_{\text{sl}}^0(X))$$

un relèvement de  $f$  dans  $\text{Id} + C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \Psi_{\text{sl}}^0(X))$  tel que  $\tilde{f} \equiv \text{Id}$  dans un voisinage du point de base de  $\mathbb{S}^k$ . Alors la famille indiciale de  $\tilde{f}$ , dénotée  $\hat{f}$ , définit une famille d'opérateurs de Fredholm

$$\hat{f} : \mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H}), \quad \mathcal{H} := L^2(X \times \mathbb{S}^1),$$

inversible à l'infini et sur  $\{s_0\} \times \mathbb{R}^l$  où  $s_0 \in \mathbb{S}^k$  est le point de base de  $\mathbb{S}^k$ . Cela définit donc un indice de famille

$$\text{ind}(\hat{f}) \in \tilde{K}^0(\mathbb{S}^{k+l}).$$

En effet, la condition d'inversibilité assure que  $\hat{f}$  définit un indice sur la  $l$ -suspension de  $\mathbb{S}^k$  en identifiant  $\mathbb{R}^l \cup \{\infty\}$  avec  $\mathbb{S}^l$ ,  $\{\infty\}$  étant le point de base. Cet indice ne dépend pas du choix du relèvement  $\hat{f}$  ou du choix  $f$  du représentant de la classe d'homotopie. On a donc en fait une application

$$(5.11) \quad \text{ind} : \pi_k(S_{\text{sl}}(X)) \rightarrow \tilde{K}^0(\mathbb{S}^{k+l}).$$

D'autre part, on a la série d'identifications

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \pi_{k-1}(G_{\text{sl}}^{-1}(X)) &\cong \pi_{k+l-1}(G^{-1}(X)) \cong \tilde{K}^{-1}(\mathbb{S}^{k+l-1}) \\ &\cong \tilde{K}^0(\mathbb{S}^{k+l}). \end{aligned}$$

LEMME 5.4. — Soit  $p : \pi_{k-1}(G_{\text{sl}}^{-1}(X)) \rightarrow \tilde{K}^0(\mathbb{S}^{k+l})$  l'isomorphisme résultant de l'identification (5.12), alors l'homomorphisme de bord est donné par

$$\partial = p^{-1} \circ \text{ind}$$

où  $\text{ind}$  est l'indice de famille (5.11).

*Démonstration.* — Modulo quelques adaptations mineures, la démonstration est la même que celle de la proposition 3.1. On laisse le soin au lecteur de compléter les détails.  $\square$

LEMME 5.5. — L'homomorphisme de bord

$$\partial : \pi_k(S_{\text{sl}}(X)) \rightarrow \pi_{k-1}(G_{\text{sl}}^{-1}(X))$$

est surjectif.

*Démonstration.* — Par le lemme précédent, il suffit de montrer que l'indice de famille

$$\text{ind} : \pi_k(S_{\text{sl}}(X)) \rightarrow \tilde{K}^0(\mathbb{S}^{k+l})$$

est surjectif. Lorsque  $k+l$  est impair,  $\tilde{K}^0(\mathbb{S}^{k+l}) \cong \{0\}$  et il n'y a rien à montrer. Lorsque  $k+l$  est pair, on procède comme dans le cas  $k=0$  du lemme 3.2, mais cette fois en utilisant l'indice d'Atiyah-Singer [5] pour les familles d'opérateurs.  $\square$

THÉOREME 5.6. — Soit  $X$  une variété compacte sans bord de dimension supérieure à zéro. Lorsque  $l$  est impair, les groupes d'homotopie de  $G_{\text{sl}}^0(X)$  sont donnés par

$$\pi_k(G_{\text{sl}}^0(X)) \cong \begin{cases} K^{-1}(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l)), & k \text{ pair,} \\ \ker [\text{ind}_t \circ \delta_l; K^0(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l)) \rightarrow \mathbb{Z}], & k \text{ impair,} \end{cases}$$

où  $\delta_l : K^0(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l)) \rightarrow K_c^{-1}(T^*X \times \mathbb{R}^l) \cong K^0(T^*X)$  est l'homomorphisme de bord (composé avec la périodicité de Bott) associé à la paire  $(\overline{T^*X \times \mathbb{R}^l}, S_X^*(X \times \mathbb{R}^l))$ , alors que  $\text{ind}_t$  est l'indice topologique de Atiyah-Singer.

Lorsque  $l$  est pair, les groupes d'homotopie de  $G_{\text{sl}}^0(X)$  sont plutôt donnés par

$$\pi_k(G_{\text{sl}}^0(X)) \cong \begin{cases} \ker [\text{ind}_t \circ \delta_l : K^{-1}(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l)) \rightarrow \mathbb{Z}], & k \text{ pair,} \\ K^0(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l)), & k \text{ impair,} \end{cases}$$

où  $\delta_l : K^{-1}(S_X^*(X \times \mathbb{R}^l)) \rightarrow K_c^{-1}(T^*X \times \mathbb{R}^l) \cong K_c^0(T^*X)$  est l'homomorphisme de bord associé à la paire  $(\overline{T^*X \times \mathbb{R}^l}, S_X^*(X \times \mathbb{R}^l))$ .

*Démonstration.* — C'est une conséquence de la surjectivité de l'homomorphisme de bord et de la longue suite exacte (5.9). Dans le cas  $k = 0$ , le résultat est une conséquence de la surjectivité à droite de la suite exacte du lemme 5.3.  $\square$

Comme dans le cas des opérateurs différentiels usuels, la surjectivité de l'homomorphisme de bord a aussi la conséquence suivante.

THÉOREME 5.7. — Soit  $X$  une variété compacte sans bord de dimension supérieure à zéro. Alors le sous-espace  $G_{\text{sl}}^{-1}(X)$  est faiblement rétractile dans  $G_{\text{sl}}^0(X)$  (voir la remarque 4.4).

*Démonstration.* — La démonstration est la même que dans le théorème 4.3.  $\square$

## 6. Une application reliée à la théorie de l'indice

Ce dernier résultat donne lieu à une application intéressante en théorie de l'indice pour les opérateurs à cusp fibré (fibred cusp operators dans la terminologie de Melrose). Ceux-ci ont été introduits par Mazzeo et Melrose dans [17]. Par courtoisie pour le lecteur, rappelons d'abord brièvement leur définition et leurs propriétés de base. On réfère à l'article de Mazzeo et Melrose [17] ainsi qu'à [12] et [31] pour de plus amples détails.

Soit  $M$  une variété compacte avec bord  $\partial M$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Supposons que son bord soit muni d'une structure de fibration de classe  $\mathcal{C}^\infty$  localement triviale,

$$(6.1) \quad \begin{array}{ccc} Z & \text{---} & \partial M \\ & & \downarrow \Phi \\ & & Y \end{array}$$

et soit  $x \in \mathcal{C}^\infty(M)$  une fonction de définition du bord, c'est-à-dire que  $\partial M = \{x = 0\}$ ,  $x > 0$  sur  $M \setminus \partial M$  et la différentielle  $dx$  est différente de zéro partout sur le bord  $\partial M$ .

DÉFINITION 6.1. — *Un champ de vecteur à cusp fibré  $V \in \mathcal{C}^\infty(M; TM)$  est un champ de vecteur sur  $M$  qui est tangent aux fibres de la fibration  $\Phi : \partial M \rightarrow Y$  et tel que  $Vx \in x^2\mathcal{C}^\infty(M)$ . On dénote par  $\mathcal{V}_\Phi(M)$  l'ensemble des champs de vecteurs à cusp fibré de  $M$ .*

Soient  $(x, y, z)$  des coordonnées dans un voisinage de  $p \in \partial M$ ,  $x$  étant la fonction de définition du bord et  $y$  et  $z$  étant des coordonnées locales sur  $Y$  et  $Z$  respectivement, où on assume que la fibration  $\Phi$  est triviale dans le voisinage du point  $p$  considéré. Dans ces coordonnées, un champ de vecteur à cusp fibré prend la forme suivante

$$(6.2) \quad V = ax^2 \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1}^l b_i x \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^k c_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

avec  $l = \dim Y$ ,  $k = \dim Z$  et où  $a, b_i, c_i$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

En utilisant le crochet de Lie pour les champs de vecteur, un calcul direct montre que  $\mathcal{V}_\Phi(M)$  est en fait une algèbre de Lie. On définit l'espace des opérateurs différentiels à cusp fibré comme étant la  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -algèbre universelle enveloppante de l'algèbre de Lie  $\mathcal{V}_\Phi(M)$ . L'espace des opérateurs différentiels à cusp fibré d'ordre  $m$  est donc l'espace des opérateurs différentiels engendrés par  $\mathcal{C}^\infty(M)$  et la composition d'au plus  $m$  éléments de  $\mathcal{V}_\Phi(M)$ . Dans les coordonnées locales  $(x, y, z)$ , un opérateur à cusp fibré  $P$  d'ordre  $m$  est de la forme

$$(6.3) \quad P = \sum_{|\alpha|+|\beta|+q \leq m} p_{\alpha,\beta,q} \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x}\right)^q \left(x \frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\beta$$

où les  $p_{\alpha,\beta,q}$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Plus généralement et à un niveau intuitif, on obtient un opérateur pseudodifférentiel à cusp fibré  $P$  en permettant à  $P$  d'être une «fonction» plus générale qu'un polynôme dans les «variables»  $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $x \frac{\partial}{\partial y}$  et  $\frac{\partial}{\partial z}$ . Sans entrer

dans les détails, disons qu'une définition rigoureuse de ces opérateurs passe par la description de leurs noyaux de Schwartz, qui sont des distributions sur une version éclatée (au sens de Melrose) du produit cartésien  $M \times M$ . On dénote par  $\Psi_{\Phi}^m(M; E, F)$  l'espace des opérateurs pseudodifférentiels à cusp fibré d'ordre  $m$  agissant sur les sections du fibré vectoriel  $E \rightarrow M$  pour donner des sections du fibré vectoriel  $F \rightarrow M$ .

Étant donné des fibrés vectoriels complexes  $E, F$  et  $G$  sur  $M$ , les opérateurs à cusp fibré satisfont la propriété de composition usuelle

$$\Psi_{\Phi}^m(M; F, G) \circ \Psi_{\Phi}^n(M; E, F) \subset \Psi_{\Phi}^{m+n}(M; E, G).$$

De plus, lorsqu'un opérateur à cusp fibré est inversible, son inverse est aussi un opérateur à cusp fibré. Dans [17], Mazzeo et Melrose donne une caractérisation élégante et précise des opérateurs à cusp fibré qui sont de Fredholm lorsqu'agissant sur des espaces de Sobolev adaptés à ce contexte. Il y a d'abord une notion de symbole principal. Celle-ci est obtenue en remplaçant le fibré tangent  $TM$  par le fibré tangent à cusp fibré  ${}^{\Phi}TM \rightarrow M$ , qui est défini de sorte qu'on ait une identification canonique

$$\mathcal{C}^{\infty}(M; {}^{\Phi}TM) = \mathcal{V}_{\Phi}(M).$$

Le fibré  ${}^{\Phi}TM$  est isomorphe au fibré tangent  $TM$ , mais pas d'une façon canonique. Soit alors  ${}^{\Phi}S^*M := ({}^{\Phi}TM \setminus M)/\mathbb{R}^+$  le fibré cosphérique à cusp fibré de  $M$ , où  ${}^{\Phi}T^*M$  est le fibré dual de  ${}^{\Phi}TM$ . Soit aussi  $\mathcal{R}^m \rightarrow {}^{\Phi}S^*M$  le fibré trivial en droites complexes dont les sections sont données par les fonctions sur  ${}^{\Phi}T^*M \setminus M$  qui sont homogènes de degré  $m$ . Il est alors possible de définir une application symbolique

$$\sigma_m : \Psi_{\Phi}^m(M; E, F) \rightarrow \mathcal{C}^{\infty}({}^{\Phi}S^*M; \text{hom}(E, F) \otimes \mathcal{R}^m)$$

qui donne lieu à la suite exacte

$$0 \rightarrow \Psi_{\Phi}^{m-1}(M; E, F) \longrightarrow \Psi_{\Phi}^m(M; E, F) \xrightarrow{\sigma_m} \mathcal{C}^{\infty}({}^{\Phi}S^*M; \text{hom}(E, F) \otimes \mathcal{R}^m) \rightarrow 0.$$

**DÉFINITION 6.2.** — *On dit qu'un opérateur  $P \in \Psi_{\Phi}^m(M; E, F)$  est elliptique si son symbole principal  $\sigma_m(P)$  est inversible.*

Vu la présence d'un bord  $\partial M$ , il n'est pas suffisant de demander qu'un opérateur soit elliptique pour qu'il soit du même coup de Fredholm. Cela découle du fait qu'un opérateur  $P \in \Psi_{\Phi}^{-1}(M; E, F)$  d'ordre  $-1$  n'est pas nécessairement compact. Cet opérateur doit aussi satisfaire une certaine

condition de décroissance au bord. Mazzeo et Melrose ont décrit cette condition grâce à l'introduction d'une autre suite exacte,

$$0 \rightarrow x\Psi_{\Phi}^m(M; E, F) \longrightarrow \Psi_{\Phi}^m(M; E, F) \xrightarrow{N_{\Phi}} \Psi_{\Phi-s}^m(\partial M; E, F) \rightarrow 0,$$

où  $N_{\Phi} : \Psi_{\Phi}^m(M; E, F) \rightarrow \Psi_{\Phi-s}^m(\partial M; E, F)$  est l'application normale et  $N_{\Phi}(P)$  est appelé l'opérateur normal de  $P$  (parfois aussi la famille indiciale de  $P$ ). Soit  ${}^{\Phi}NY \cong TY \times \mathbb{R}$  le fibré noyau associé à la restriction canonique

$${}^{\Phi}T_{\partial M}M \rightarrow T_{\partial M}M.$$

Alors  $\Psi_{\Phi-s}^m(\partial M; E, F)$  dénote l'espace des opérateurs  ${}^{\Phi}NY$ -suspendus d'ordre  $m$ . Un élément de  $\Psi_{\Phi-s}^m(\partial M; E, F)$  est une famille d'opérateur  $(l+1)$ -suspendus paramétrisée par  $Y$  où  $l := \dim Y$ . Pour un  $y \in Y$  fixé, un élément de  $\Psi_{\Phi-s}^m(\partial M; E, F)$  définit donc un opérateur dans  $\Psi_{s(l+1)}^m(\Phi^{-1}(y); E, F)$  lorsqu'on identifie la fibre  ${}^{\Phi}N_y Y$  avec  $\mathbb{R}^{l+1}$ . L'opérateur normal joue en quelque sorte le rôle d'un symbole principal qui caractérise le comportement asymptotique de l'opérateur près du bord. L'opérateur normal est symbolique et local par rapport à la variable  $y \in Y$ , mais est toujours quantifié par rapport à la variable  $z \in Z$ . L'application normale est un homomorphisme d'algèbre,

$$N_{\Phi}(A \circ B) = N_{\Phi}(A) \circ N_{\Phi}(B)$$

pour  $A \in \Psi_{\Phi}^k(M; F, G)$  et  $B \in \Psi_{\Phi}^m(M; E, F)$ .

DÉFINITION 6.3. — *Un opérateur à cusp fibré  $A \in \Psi_{\Phi}^m(M; E, F)$  est dit totalement elliptique (fully elliptic dans la terminologie de Melrose) s'il est elliptique et si son opérateur normal  $N_{\Phi}(A)$  est inversible.*

Soit  $L^2(M; E)$  l'espace des sections du fibré  $E \rightarrow M$  de carré absolument intégrable par rapport à un choix de métrique sur  $E$  et un choix de forme volume sur  $M$ . Pour  $l \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}_0$ , considérons les espaces de Sobolev

$$(6.4) \quad x^l H_{\Phi}^m(M; E) := \{u \in x^l L^2(M; E) \mid Pu \in x^l L^2(M; E), \forall P \in \Psi_{\Phi}^m(M; E)\},$$

$$x^l H_{\Phi}^{-m}(M; E) := \left\{ u \in C^{-\infty}(M; E) \mid u \in \sum_{i=1}^N P_i u_i, \right. \\ \left. u_i \in x^l L^2(M; E), P_i \in \Psi_{\Phi}^m(M; E) \right\}.$$

Pour ces espaces de Sobolev, Mazzeo et Melrose ont donné la caractérisation suivante des opérateurs à cusp fibré qui sont de Fredholm.



PROPOSITION 6.4. — *Pour  $m \in \mathbb{Z}$ , un opérateur  $P \in \Psi_{\Phi}^m(M; E, F)$  donne lieu à un opérateur borné*

$$P : x^l H_{\Phi}^{m'}(M; E) \rightarrow x^l H_{\Phi}^{m'-m}(M; F)$$

*qui est de Fredholm si et seulement si  $P$  est totalement elliptique.*

L'étude de l'indice des opérateurs à cusp fibré qui sont de Fredholm a été l'objet de plusieurs travaux depuis la parution de l'article de Mazzeo et Melrose [17], notamment par Nye et Singer [28], Lauter et Moroianu [12], [11], [13], Melrose et l'auteur [23], Moroianu [25] ainsi que Leichtnam, Mazzeo et Piazza [14].

Rappelons que la définition des opérateurs à cusp fibré donne lieu à deux extrêmes. D'abord, on a le cas où la base  $Y$  de la fibration  $\Phi : \partial M \rightarrow Y$  n'est constituée que d'un seul point. Les opérateurs associés à une telle fibration sont appelés opérateurs cuspidaux (cusp operators dans la terminologie de Melrose). L'opérateur normal  $N_{\Phi}(P)$  d'un opérateur cuspidal  $P \in \Psi_{\Phi}^m(M; E, F)$  est un élément de  $\Psi_{s(1)}^m(M; E, F)$ , c'est-à-dire que c'est un opérateur suspendu dans le sens usuel. Intuitivement,  $N_{\Phi}(P)$  peut être interprété comme la partie de l'opérateur  $P$  asymptotiquement invariante par translation dans la direction normale au bord. Dans [21], Melrose et Nistor ont obtenu une formule pour l'indice des opérateurs cuspidaux qui généralise le théorème d'indice de Atiyah, Patodi et Singer [2]. L'autre cas extrême est obtenu en demandant que  $Y = \partial M$  et que la fibration soit simplement donnée par l'identité  $\text{Id} : \partial M \rightarrow \partial M$ . Les opérateurs qu'on obtient ainsi sont appelés opérateurs de diffusion (scattering operators dans la terminologie de Melrose). Comme la fibre de la fibration est de dimension nulle, l'opérateur normal est complètement symbolique pour un opérateur de diffusion. Dans ce cas, l'indice peut-être décrit à l'aide d'un élément de  $K_c^0(T^*M, T^*M|_{\partial M})$  et la formule qu'on obtient (voir [20], théorème 6.4), est très similaire à celle du théorème d'Atiyah et Singer.

Le cas général est à mi-chemin entre ces deux extrêmes. Lorsqu'on veut étudier l'indice des opérateurs à cusp fibré, une des difficultés importantes est de comprendre l'interaction subtile qu'il y a entre le symbole principal et l'opérateur normal. On en vient au résultat principal de ce paragraphe. Il consiste à montrer que, étant donné un opérateur totalement elliptique  $P \in \Psi_{\Phi}^m(M; E, F)$ , on peut toujours choisir modulo certaines déformations comment quantifier le symbole de l'opérateur normal de  $P$  en demandant que celui-ci soit inversible et sans changer l'indice de  $P$ .

COROLLAIRE 6.5. — *Soit  $P \in \Psi_{\Phi}^0(M; E, F)$  un opérateur à cusp fibré totalement elliptique. Si un élément inversible  $p_1 \in \Psi_{\Phi-s}^0(\partial M; E, F)$  est tel*

que son symbole principal  $\sigma_0(p_1)$  est égal à celui de

$$p_0 := N(P) \in \Psi_{\Phi-s}(\partial M; E, F),$$

l'opérateur normal de  $P$ , alors, possiblement après stabilisation des fibrés vectoriels  $E$  et  $F$ , il existe une famille lisse à un paramètre  $P_t \in \Psi_{\Phi}^0(M; E, F)$ ,  $t \in [0, 1]$ , d'opérateurs totalement elliptiques tels que  $P_0 = P$  et  $N(P_1) = p_1$ .

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que  $p_0^{-1} \circ p_1 \in G_{\Phi-s}^{-1}(\partial M; E)$ . Or, dans un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $Y$  où la fibration  $\Phi$  et le fibré vectoriel  $T^*\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  sont triviaux, un opérateur  $A \in \Psi_{\Phi-s}^0(\Phi^{-1}(\mathcal{U}); E)$  peut être vu comme une famille d'opérateurs  $(l+1)$ -suspendus

$$A : \mathcal{U} \rightarrow \Psi_{s(l+1)}^0(Z; E)$$

où  $l = \dim Y$ . En choisissant une décomposition cellulaire de  $Y$  telle que chaque cellule soit contenue dans un ouvert trivialisant à la fois la fibration  $\Phi$  et le fibré  $T^*Y$ , on peut alors procéder par récurrence en utilisant le théorème précédent pour construire une homotopie entre  $p_0^{-1}p_1$  et l'identité dans  $G_{\Phi-s}^0(\partial M; E)$  (possiblement en stabilisant  $E$ ). Par composition avec  $p_0$ , cela donne une homotopie entre  $p_0$  et  $p_1$  donnée par  $p_t \in \Psi_{\Phi-s}^0(\partial M; E, F)$  inversible pour tout  $t \in [0, 1]$ . Il est alors facile de relever cette homotopie parmi les opérateurs totalement elliptiques pour obtenir le résultat désiré.  $\square$

Ce résultat permet de réduire l'étude de l'indice à des opérateurs totalement elliptiques  $P$  dont l'opérateur normal satisfait certaines conditions, par exemple tel que le symbole total<sup>(4)</sup> soit identiquement nul sauf pour le symbole principal  $\sigma(N_{\Phi}(P))$ .

## 7. Une description topologique du déterminant résiduel

Le déterminant résiduel (residue determinant en anglais) a été introduit par Simon Scott dans [32]. C'est une fonctionnelle qui joue le rôle de déterminant pour les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre entier. Sa définition utilise la trace résiduelle introduite par Guillemin [9] et Wodzicki [37].

**DÉFINITION 7.1.** — Soit  $A \in \Psi^m(X; E)$  un opérateur pseudodifférentiel inversible d'ordre  $m \in \mathbb{Z}$ , alors son déterminant résiduel est donné par

$$\det_R(A) := \exp(\mathrm{Tr}_R(\log A))$$

<sup>(4)</sup> Bien défini après avoir fixé un choix de quantification.

pourvu que le logarithme  $\log A$  de  $A$  soit défini, où  $\text{Tr}_R$  est la trace résiduelle de Guillemin et Wodzicki.

Derrière cette définition se cachent deux détails analytiques importants. D'abord, pour pouvoir définir le logarithme de  $A$ , il faut supposer que  $A$  possède un angle principal  $\theta$ , c'est-à-dire un angle  $\theta$  tel que le symbole principal

$$\sigma_m(A) \in C^\infty(S^*X; \text{hom}(E, E))$$

ne possède aucune valeur propre contenue dans la coupure spectrale

$$R_\theta = \{re^{i\theta} \mid r \geq 0\}.$$

Quoique la définition du logarithme de  $A$  dépend du choix de l'angle principal, il s'avère que le déterminant résiduel quant à lui ne dépend pas de ce choix (voir [32]). On doit aussi invoquer le résultat de Okikiolu [29] pour donner un sens à la trace résiduelle de  $\log A$ , qui est un opérateur pseudodifférentiel logarithmique.

Lorsqu'on se restreint aux opérateurs pseudodifférentiels inversibles d'ordre 0, on peut toutefois utiliser une version infinitésimale de la définition 7.1 qui contourne ces difficultés analytiques.

**DÉFINITION 7.2** (version infinitésimale). — Soit  $\mathcal{U} \subset G^0(X)$  un ouvert simplement connexe contenant l'identité, alors pour  $A \in \mathcal{U}$ , le déterminant résiduel est donné par

$$\det_R(A) := \exp \left( \int_0^1 \text{Tr}_R \left[ \gamma^{-1}(t) \frac{d\gamma}{dt}(t) \right] dt \right)$$

où  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$  est une application différentiable telle que  $\gamma(0) = \text{Id}$  et  $\gamma(1) = A$ .

**LEMME 7.3.** — Le déterminant résiduel ne dépend pas du choix de l'application différentiable  $\gamma$ . De plus, pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{U}$  suffisamment près de l'identité, on a que

$$\det_R(A \circ B) = \det_R(A) \det_R(B).$$

*Démonstration.* — Comme on suppose que  $\mathcal{U}$  est simplement connexe, par le théorème de Stokes, il suffit de vérifier que la 1-forme  $\text{Tr}_R[A^{-1}dA]$  définie sur  $G^0(X)$  est fermée pour voir que la définition ne dépend pas du choix de l'application  $\gamma$ . Or,

$$\begin{aligned} d \text{Tr}_R(A^{-1}dA) &= \text{Tr}_R(d(A^{-1}dA)) = \text{Tr}_R(-A^{-1}dAA^{-1}dA) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr}_R([A^{-1}dA, A^{-1}dA]) = 0, \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant du fait que la trace résiduelle est vraiment une trace, à savoir qu'elle donne zéro lorsqu'évaluée sur un commutateur. Cette propriété permet aussi de montrer que le déterminant résiduel est multiplicatif. Si  $A, B \in \mathcal{U}$  sont suffisamment près de l'identité, alors il existe des applications différentiables  $\gamma, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$  avec  $\gamma(0) = \beta(0) = \text{Id}$ ,  $\gamma(1) = A$  et  $\beta(1) = B$  telles que  $\gamma\beta$  prenne aussi valeur dans  $\mathcal{U}$ . On a alors que

$$\begin{aligned} \log \det_R(AB) &= \int_0^1 \text{Tr}_R \left[ (\gamma\beta)^{-1} \frac{d(\gamma\beta)}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^1 \text{Tr}_R \left[ \beta^{-1} \gamma^{-1} \left( \frac{d\gamma}{dt} \beta + \gamma \frac{d\beta}{dt} \right) \right] dt \\ &= \int_0^1 \text{Tr}_R \left[ \gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt} \right] dt + \int_0^1 \text{Tr}_R \left[ \beta^{-1} \frac{d\beta}{dt} \right] dt \\ &= \text{Tr}_R(A) + \text{Tr}_R(B), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que  $\det_R(AB) = \det_R(A) \det_R(B)$ .  $\square$

Pour  $\theta \in (0, 2\pi)$ , considérons l'ouvert

$$\mathcal{U}_\theta := \{A \in G^0(X; E) \mid \theta \text{ est un angle principal pour } A\} \subset G^0(X; E).$$

LEMME 7.4. — *Les définitions 7.1 et 7.2 sont équivalentes sur un voisinage de l'identité dans  $\mathcal{U}_\theta$ .*

*Démonstration.* — Par le lemme 7.3, en choisissant notre voisinage suffisamment petit, on a un déterminant multiplicatif dans les deux cas. Il suffit alors de vérifier que la différentielle de leur logarithme sur le plan tangent à l'identité est la même. Pour la définition 7.2, on voit directement que

$$d \log \det_R|_{\text{Id}} = \text{Tr}_R.$$

Pour calculer la différentielle du logarithme du déterminant dans le cas de la définition 7.1, choisissons le voisinage  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_\theta$  de l'identité suffisamment petit de sorte qu'on ait pour  $A \in \mathcal{U}$

$$\log_\theta A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\gamma - 1)^n}{n}.$$

Si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$  est une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $\gamma(0) = \text{Id}$  et  $\gamma(1) = A$ , on aura alors que

$$\begin{aligned} \text{Tr}_R \left( \frac{d}{dt} \log_\theta \gamma \right) &= \text{Tr}_R \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\gamma - 1)^{n-1} \frac{d\gamma}{dt} \right) \\ &= \text{Tr}_R \left( \gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt} \right), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\mathrm{Tr}_R(\log_\theta A) = \mathrm{Tr}_R \left( \int_0^1 \gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt} dt \right) = \int_0^1 \mathrm{Tr}_R \left( \gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt} \right) dt,$$

ce qui montre que la différentiel du logarithme du déterminant est aussi donné par  $\mathrm{Tr}_R$  lorsqu'on utilise la définition 7.1.  $\square$

En quelque sorte, la version infinitésimale de la définition du déterminant résiduel remplace la condition de l'existence d'un angle principal par une condition topologique sur le domaine de définition. De ce point de vue, on est amené à se poser la question suivante.

*Question 7.5.* — Est-il possible d'étendre la définition du déterminant résiduel à toute la composante connexe  $G_{\mathrm{Id}}^0(X)$  de l'identité dans  $G^0(X)$  par

$$(7.1) \quad \det_R(A) = \exp \left[ \int_0^1 \mathrm{Tr}_R \left( \gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt} \right) dt \right]$$

où  $\gamma$  est une application différentiable telle que  $\gamma(0) = \mathrm{Id}$ ,  $\gamma(1) = A$  ?

Comme le lecteur l'aura deviné, cette question est purement topologique. Il suffit de vérifier que cette définition du déterminant résiduel ne dépend pas du choix de l'application différentiable  $\gamma$ . On aura une telle indépendance de choix si et seulement si l'homomorphisme de groupe

$$(7.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{A}_R : \pi_1(G^0(X)) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ [\gamma] & \mapsto & \int_{S^1} \mathrm{Tr}_R \left[ \gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt} \right] dt \end{array}$$

prend seulement valeur dans  $2\pi i\mathbb{Z}$ . En fait, on va montrer que l'homomorphisme de groupe (7.2) est toujours trivial. L'idée centrale de l'argument que l'on va présenter a été suggérée à l'auteur par Sergiu Moroianu (voir aussi le paragraphe 8 de [27] pour une situation similaire). Via l'identification  $\nu : \pi_1(G^0(X)) \rightarrow K^0(S^*X)$ , on peut voir l'homomorphisme de groupe  $\mathrm{A}_R$  comme une application

$$\mathrm{A}_R : K^0(S^*X) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Or, par le biais de la suite exacte à six termes

$$(7.3) \quad \begin{array}{ccccc} K_c(T^*X) & \longrightarrow & K^0(X) & \xrightarrow{\pi^*} & K^0(S^*X) \\ \uparrow & & & & \downarrow \delta \\ K^1(S^*X) & \longleftarrow & K^1(X) & \longleftarrow & K_c^1(T^*X) \end{array}$$

associée à la paire d'espaces  $(\overline{T^*X}, S^*X)$ , on a une inclusion

$$(7.4) \quad \pi^*(K^0(X)) \subset K^0(S^*X).$$

LEMME 7.6. — *Pour tout  $[\gamma] \in \pi_1(G^0(X))$  tel que  $\nu([\gamma]) \in \pi^*(K^0(X))$ , on a  $A_R([\gamma]) = 0$ .*

*Démonstration.* — Comme  $G^{-\infty}(S^1)$  est un espace classifiant pour la  $K$ -théorie impaire, on a l'identification

$$K^0(X) \cong K^{-2}(X) \cong [(S^1(X^+), \text{pt}); (G^{-\infty}(S^1, \text{Id})]$$

et l'application  $\pi^* : K^{-2}(X) \rightarrow K^{-2}(S^*X)$  est alors induite par l'image réciproque associée à la projection

$$\pi : S^1(S^*X^+) \rightarrow S^1(X^+)$$

où  $X^+ = X \cup \text{pt}$  est l'union disjointe de  $X$  avec un point. En faisant appel au théorème 4.3 cela montre que lorsque  $\nu([\gamma]) \in \pi^*(K^0(X))$ , on peut choisir  $\gamma \in C^\infty([0, 1]; G^0(X))$  représentant  $[\gamma] \in \pi_1(G^0(X))$  de sorte que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\gamma(t) \in G^0(X)$  soit simplement donné par un isomorphisme de fibrés vectoriels. En ce cas, le terme d'ordre  $-\dim X$  du symbole total (full symbol en anglais) de  $\gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt}$  est nul, ce qui signifie que

$$\text{Tr}_R \left( \gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$$

pour tout  $t \in [0, 1]$  étant donné la formule bien connue

$$(7.5) \quad \text{Tr}_R(A) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_X \int_{|\xi|=1} \text{tr } \sigma(A)_{-n}(x, \xi) dS(\xi) dx, \quad n = \dim X.$$

exprimant le trace résiduelle en termes de la partie d'ordre  $-n$  du symbole total. La définition de ce terme d'ordre  $-n$  n'est pas naturelle et dépend d'un choix de quantification, mais il s'avère que la formule (7.5) est indépendante d'un tel choix.

On obtient donc

$$A_R([\gamma]) = \int_0^1 \text{Tr}_R \left( \gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt} \right) dt = 0.$$

□

Revenant à la suite exacte à six termes (7.3), rappelons que l'homomorphisme de bord  $\delta : K^0(S^*X) \rightarrow K_c^1(T^*X)$  est toujours surjectif (voir par exemple p.81 dans [3]). Toujours selon [3] (p.81), on peut représenter un élément de  $K_c^{-1}(T^*X)$  par un lacet

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \sigma_t &= \text{Id } \cos t + i\sigma \sin t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ &= \text{Id}(\cos t + i \sin t), & \pi \leq t \leq 2\pi, \end{aligned}$$

où  $\sigma \in \mathcal{C}^\infty(S^*X; G^{-\infty}(\mathbb{S}^1))$  est un symbole auto-adjoint. On peut aussi supposer via l'identification (1.4) que le symbole  $\sigma$  est en fait un élément de

$$\mathcal{C}^\infty(S^*X; \text{Hom}(\pi^*E, \pi^*E))$$

pour un certain fibré vectoriel complexe  $E \rightarrow X$  où  $\pi : S^*X \rightarrow X$  est la projection de fibré. Soit  $A \in \Psi^1(X; E)$  un opérateur auto-adjoint inversible d'ordre 1 dont le symbole est donné par  $\sigma$ . Le spectre de  $A$  est donc discret et contenu dans  $\mathbb{R}$ . Comme l'opérateur  $A$  est inversible, les projections  $P_+$  et  $P_-$  sur les espaces propres positifs et négatifs sont des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre zéro, comme on peut le voir en les définissant à la manière de Seeley [33] par des intégrales de contour dans le plan complexe utilisant le résolvant de  $A$ . Ainsi,

$$|A| := P_+A - P_-A \in \Psi^1(X; E)$$

est un opérateur pseudodifférentiel inversible d'ordre 1. Son symbole est donné par  $|\sigma| = \sqrt{\sigma^2}$ , un symbole auto-adjoint dont les valeurs propres sont toutes positives pour tout  $x \in S^*X$ . Le symbole  $|\sigma|$  est donc homotope au symbole identité dans l'espace des symboles auto-adjoints inversibles. Considérons donc l'opérateur

$$A_0 := |A|^{-1}A \in \Psi^0(X; E).$$

Clairement, on a que  $A_0^2 = \text{Id}$  et le spectre de  $A_0$  est contenu dans  $\{-1, 1\}$ . En fait, si  $f \in \mathcal{C}^\infty(X; E)$  est une section propre de  $A$ ,

$$Af = \lambda f, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

alors  $f$  est aussi une section propre de  $A_0$  avec

$$A_0f = \frac{\lambda}{|\lambda|}f.$$

Quant à lui, le symbole  $\sigma(A_0)$  de  $A_0$  est homotope au symbole  $\sigma$  dans l'espace des symboles auto-adjoints inversibles. L'élément de  $K_c^{-1}(T^*X)$  représenté par le lacet (7.6) peut donc aussi être représenté par  $\sigma(\gamma_t)$  où

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \gamma_t &= \text{Id} \cos t + iA_0 \sin t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ &= \text{Id}(\cos t + i \sin t), & \pi \leq t \leq 2\pi, \end{aligned}$$

**THÉORÈME 7.7.** — *Pour toute variété compacte sans bord  $X$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , l'homomorphisme de bord*

$$A_R : \pi_1(G^0(X)) \rightarrow \mathbb{C}$$

est trivial. La définition (7.2) du déterminant résiduel peut donc toujours être étendue globalement à toute la composante connexe  $G_{\text{Id}}^0(X)$  de l'identité dans  $G^0(X)$  pour donner lieu à un déterminant multiplicatif.

*Démonstration.* — Soit  $[\gamma] \in \pi_1(G^0(X))$ . On veut montrer que  $A_{\mathbb{R}}([\gamma]) = 0$ . Par le lemme 7.6, le théorème 4.3 et la discussion qui précède, on peut supposer que  $[\gamma]$  est représenté par un lacet de la forme (7.7). Pour  $t \in [\pi, 2\pi]$ ,

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(t) \frac{d\gamma}{dt} &= \text{Id}(\cos t - i \sin t)(-\sin t + i \cos t) \\ &= i(\text{Id}) \end{aligned}$$

est un multiple de l'identité, donc

$$\text{Tr}_R \left( \gamma^{-1}(t) \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$$

dans ce cas, puisque comme dans la preuve du lemme 7.6, la partie d'ordre  $-n$  du symbole total est nulle. Ainsi, on a que

$$A_{\mathbb{R}}([\gamma]) = \int_0^\pi \text{Tr}_R \left( \gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt} \right) dt.$$

Par définition de la trace résiduelle, cette quantité est donnée par le résidu en  $s = 0$  de l'extension méromorphe à tout le plan complexe de la fonction holomorphe

$$s \mapsto \xi(s) := \int_0^\pi \text{Tr} \left( |A|^{-s} \gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt} \right) dt, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \text{Re } s \gg 0.$$

Comme  $A_0^{-1} = A_0$ , on a pour  $t \in [0, \pi]$  que

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} \frac{d\gamma}{dt} &= (\text{Id} \cos t + iA_0 \sin t)^{-1}(-\text{Id} \sin t + iA_0 \cos t) \\ &= (\text{Id} \cos t - iA_0 \sin t)(-\text{Id} \sin t + iA_0 \cos t) \\ &= \text{Id}(-\cos t \sin t + \cos t \sin t) + iA_0(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= iA_0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $\text{Re } s \gg 0$ , on a

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \int_0^\pi \text{Tr}(|A|^{-s} iA_0) dt \\ &= i\pi \text{Tr}(|A|^{-s} A_0) = i\pi \text{Tr}(|A|^{-s-1} A) \\ &= i\pi \sum_{\lambda \in \text{spec}(A)} |\lambda|^{-s-1} \lambda \\ &= i\pi \eta(A, s) \end{aligned}$$



où  $\eta(A, s)$  est la fonctionnelle de Atiyah Patodi et Singer [2] associée à l'opérateur auto-adjoint inversible  $A \in \Psi^1(X; E)$ . D'après les résultats de Gilkey [8] et Wodzicki [35], [36], la fonctionnelle  $\eta(A, s)$  n'a pas de pôle à  $s = 0$ , d'où l'on conclut que  $\text{A}_R([\gamma]) = 0$ . Le déterminant résiduel est donc défini globalement sur  $G_{\text{Id}}^0(X)$  et la seconde partie de la démonstration du lemme 7.3 montre alors que c'est un déterminant multiplicatif.  $\square$

Plus généralement, pour  $n \in \mathbb{Z}$  et  $E \rightarrow X$  un fibré vectoriel complexe, on peut considérer l'espace

$$G^n(X; E) := \{A \in \Psi^n(X; E) \mid A \text{ est inversible}\}$$

des opérateurs inversibles d'ordre  $n$ . La composition d'opérateurs induit une structure de groupe sur

$$G^*(X; E) := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} G^n(X; E).$$

**COROLLAIRE 7.8.** — *Soit  $P \in \Psi^1(X; E)$  un choix d'opérateur auto-adjoint inversible dont les valeurs propres sont toutes positives. Alors pour  $n \in \mathbb{Z}$ , le déterminant résiduel admet une définition globale sur la composante connexe  $G_P^n(X; E)$  de  $P^n$  dans  $G^n(X; E)$ .*

*Démonstration.* — Clairement,  $P^n$  possède un angle principal. On peut donc définir  $\det_R(P^n)$  en utilisant la définition 7.1. Pour  $A \in G_P^n(X; E)$  quelconque, on a alors que  $AP^{-n} \in G_{\text{Id}}^0(X; E)$  et on pose donc

$$\det_R(A) = \det_R(AP^{-n}) \det_R(P^n).$$

$\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. F. ATIYAH, *K-theory*, Benjamin, 1967.
- [2] M. F. ATIYAH, V. K. PATODI & I. M. SINGER, « Spectral asymmetry and Riemann geometry, I », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc* **77** (1975), p. 43-69.
- [3] M. F. ATIYAH, V. K. PATODI & I. M. SINGER, « Spectral asymmetry and Riemann geometry, III », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc* **79** (1976), p. 71-99.
- [4] M. F. ATIYAH & I. M. SINGER, « The index of elliptic operators : I », *Ann. of Math.* **87** (1968), p. 484-530.
- [5] ———, « The index of elliptic operators. IV », *Ann. of Math. (2)* **93** (1971), p. 119-138.
- [6] R. BOTT & L. W. TU, *Differential forms in algebraic topology*, n° 82, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [7] L. FRIEDLANDER & V. GUILLEMIN, « Determinants of zeroth order operators », preprint, math.SP/0601743, 2006.

- [8] P. B. GILKEY, « The residue of the global  $\eta$  function at the origin », *Adv. in Math.* **40** (1981), n° 3, p. 290-307.
- [9] V. GUILLEMIN, « A new proof of Weyl's formula on the asymptotic distribution of eigenvalues », *Adv. Math.* **102** (1985), p. 184-201.
- [10] M. KONTSEVICH & S. VISHIK, « Geometry of determinants of elliptic operators », *Func. Anal. on the Eve of the XXI century, Vol I, Pgress in mathematics* **131** (1994), p. 173-197.
- [11] R. LAUTER & S. MOROIANU, « Fredholm theory for degenerate pseudodifferential operators on manifold with fibred boundaries », *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), p. 233-283.
- [12] ———, « Homology of pseudodifferential operators on manifolds with fibred cusps », *T. Am. Soc.* **355** (2003), p. 3009-3046.
- [13] ———, « An index formula on manifolds with fibred cusp ends », *J. Geom. Analysis* **15** (2005), p. 261-283.
- [14] E. LEICHTNAM, R. MAZZEO & P. PIAZZA, « The index of Dirac operators on manifolds with fibred boundary », à paraître dans les Proceedings of the Joint BeNeLux-Fra Conference in Mathematics, Ghent, May 20-22, 2005, Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin.
- [15] M. LESCH, H. MOSCOVICI & M. PFLAUM, « Relative pairing in cyclic cohomology and divisor flows », preprint, math.KT/0603500, 2006.
- [16] J.-M. LESCURE & S. PAYCHA, « Uniqueness of multiplicative determinants on elliptic pseudodifferential operators », à paraître dans les Proceedings of the London Mathematical Society.
- [17] R. MAZZEO & R. B. MELROSE, « Pseudodifferential operators on manifolds with fibred boundaries », *Asian J. Math.* **2** (1999), n° 4, p. 833-866.
- [18] R. B. MELROSE, « Lectures on microlocal analysis », Fall 2005, <http://www-math.mit.edu/~rbm/18.157-F05.html>.
- [19] ———, « The eta invariant and families of pseudodifferential operators », *Math. Res. Lett.* **2** (1995), n° 5, p. 541-561.
- [20] ———, *Geometric scattering theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [21] R. B. MELROSE & V. NISTOR, « Homology of pseudodifferential operators I. Manifold with boundary », Preprint.
- [22] R. B. MELROSE & F. ROCHON, « Boundaries, eta invariant and the determinant bundle », preprint, math.DG/0607480, 2006.
- [23] ———, « Index in K-theory of families of fibred cusp operators », *K-theory* **37** (2006), p. 25-104.
- [24] ———, « Periodicity and the determinant bundle », math.DG/0606382, à paraître dans Commun. Math. Phys., 2006.
- [25] S. MOROIANU, « Fibred cusp versus d-index theory », à paraître dans Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova.
- [26] ———, « K-theory of suspended pseudo-differential operators », *K-theory* **28** (2003), p. 167-181.
- [27] ———, « Homology of adiabatic pseudo-differential operators », *Nagoya Math. J* **175** (2004), p. 171-221.
- [28] T. M. W. NYE & M. A. SINGER, « An  $L^2$ -index theorem for Dirac operators on  $S^1 \times \mathbb{R}^3$  », *Journal of Functional Analysis* **177** (2000), p. 203-218.
- [29] K. OKIKIOLU, « The multiplicative anomaly for determinants of elliptic operators », *Duke Math. J.* **79** (1995), p. 723-750.

- [30] S. PAYCHA & S. SCOTT, « A Laurent expansion for regularized integrals of holomorphic symbols », preprint, à paraître dans *Geom. and Funct. Anal.*
- [31] F. ROCHON, « Bott periodicity for fibred cusp operators », *J. Geom. Anal.* **15** (2005), n° 4, p. 685-722.
- [32] S. SCOTT, « The residue determinant », *Comm. Part. Diff. Eqn.* **30** (2005), p. 483-507.
- [33] R. T. SEELEY, « Complex powers of an elliptic operator », (*Proc. Sympos. Pure Math., Vol. X*) *Amer. Math. Soc.* (1966), p. 288-307.
- [34] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, New Jersey, 1999.
- [35] M. WODZICKI, « Spectral asymmetry and zeta functions », *Invent. math.* **66** (1982), p. 115-135.
- [36] ———, « Local invariants of spectral asymmetry », *Invent. math.* **75** (1984), p. 143-177.
- [37] ———, « Non-commutative residue, Chapter I. Fundamentals », *K-theory, Arithmetic and Geometry Springer Lecture notes* **1289** (1987), p. 320-399.

Manuscrit reçu le 8 décembre 2006,  
révisé le 22 janvier 2007,  
accepté le 20 février 2007.

Frédéric ROCHON  
State University of New York  
Department of Mathematics  
Stony Brook (USA)  
rochon@math.sunysb.edu