



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Isabelle LIOUSSE

**Nombre de rotation, mesures invariantes et ratio set des homéomorphismes affines par morceaux du cercle**

Tome 55, n° 2 (2005), p. 431-482.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2005\\_\\_55\\_2\\_431\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2005__55_2_431_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# NOMBRE DE ROTATION, MESURES INVARIANTES ET RATIO SET DES HOMÉOMORPHISMES AFFINES PAR MORCEAUX DU CERCLE

par Isabelle LIOUSSE



## Plan.

|  |     |
|--|-----|
| A. Historique, motivations, rappels et énoncés des résultats . . . . .   | 432 |
| B. Preuve du résultat de E. Ghys et V. Sergiescu : «le nombre de rotation d'un homéomorphisme dyadique est rationnel» . . . . .  | 447 |
| C. Discontinuités et sauts des dérivées des itérés d'un homéomorphisme affine par morceaux. Preuve du théorème 1 et de la partie 1 du théorème 2 . . . . .                             | 449 |
| D. Homéomorphismes affines par morceaux dont la mesure invariante est singulière par rapport à la mesure de Haar. Preuves de la partie 2 du théorème 2 et de ses corollaires . . . . . | 451 |
| 1. Condition nécessaire à l'existence d'une mesure invariante équivalente à la mesure de Haar . . . . .  | 451 |
| 2. Bounded geometry . . . . .  | 453 |
| 3. Preuve de la partie 2 du théorème 2 . . . . .   | 461 |
| 3.1. Étude préliminaire et énoncés des propositions 4, 5, 6 et 7 . . . . .   | 461 |
| 3.2. Preuve de la partie 2 du théorème 2 . . . . .   | 463 |
| 3.3. Preuves des propositions 4, 5, 6 et 7 . . . . .   | 464 |
| 4. Preuves des corollaires . . . . .   | 472 |
| E. Le ratio set et la classification des homéomorphismes affines par morceaux  |     |
| 1. Preuves du théorème 3 . . . . .   | 474 |
| 2. Preuves des corollaires . . . . .   | 477 |
| F. Bibliographie . . . . .   | 481 |

**Remerciements.** — Je remercie Livio Flaminio pour ses explications et ses incitations à l'étude du ratio set des homéomorphismes affines par

*Mots-clés* : homéomorphisme affine par morceaux du cercle, nombre de rotation, mesure invariante, ratio set.

*Classification math.* : 37E10, 37A5.

morceaux. Je remercie Pascale Roesch pour avoir lu et corrigé une version préliminaire de ce texte. Je tiens à exprimer au *referee* toute ma reconnaissance pour ses précieuses corrections, questions et suggestions.

## A. Historique, motivations, rappels, énoncés des résultats.

On note  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  le cercle et  $\Pi$  la projection canonique de  $\mathbb{R}$  sur  $S^1$ . On munit  $S^1$  de la distance définie par  $\|x\| = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\tilde{x} + p|$ , où  $\tilde{x}$  est un relevé de  $x \in S^1$  à  $\mathbb{R}$  et de l'orientation induite par l'ordre usuel sur  $\mathbb{R}$ . Dans la suite,  $f$  est un homéomorphisme de  $S^1$  qui préserve l'orientation. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

où  $\tilde{f}$  est un homéomorphisme strictement croissant de  $\mathbb{R}$  tel que  $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1$  appelé *relevé de  $f$*  à  $\mathbb{R}$ ; réciproquement un tel homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  se projette sur un homéomorphisme de  $S^1$  qui préserve l'orientation. Si  $x \in S^1$ , on appelle :

- *orbite de  $x$  pour  $f$*  le sous-ensemble du cercle noté

$$O_f(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\};$$

- *orbite positive de  $x$  pour  $f$*  l'ensemble  $\{f^n(x), n \in \mathbb{N}^*\}$ ;
- *orbite négative de  $x$  pour  $f$*  l'ensemble  $\{f^n(x), n \in \mathbb{Z}^-\}$ ;
- *segment d'orbite de  $x$  pour  $f$*  un ensemble de la forme

$$\{f^n(x), N_0 \leq n \leq N_1\}.$$

Historiquement, l'étude dynamique des homéomorphismes du cercle est initiée par H. Poincaré [Po] dans les années 1880, qui définit *le nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle* par

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{f}^n(x) - x}{n} \pmod{1}.$$

Poincaré montre que cette limite existe et ne dépend ni du choix du point  $x$ , ni du choix du relevé de  $f$ ; on identifie  $\rho(f)$  à son relevé à  $[0, 1[$ . Poincaré montre le

THÉORÈME (Poincaré [Po], 1886). — Soit  $f$  un homéomorphisme de  $S^1$ . Alors,  $\rho(f)$  appartient à  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  si et seulement si  $f$  possède au moins une orbite périodique. Si  $\rho(f)$  n'appartient à  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , alors  $f$  est semi-conjugué à  $R_{\rho(f)}$ , la rotation d'angle  $\rho(f)$ .

La dernière assertion de ce résultat signifie qu'il existe une fonction  $h$  de  $S^1$  dans lui-même, continue, de degré 1, admettant un relevé à  $\mathbb{R}$  croissant et telle que  $h \circ f = R_{\rho(f)} \circ h$ . L'application  $h$  peut être un homéomorphisme; on dit alors que  $f$  est conjugué à la rotation  $R_{\rho(f)}$  et s'écrit

$$f = h^{-1} \circ R_{\rho(f)} \circ h.$$

Il en résulte l'unique ergodicité des homéomorphismes du cercle de nombre de rotation irrationnel. Lorsque  $h$  n'est pas un homéomorphisme,  $f$  présente des intervalles errants c'est-à-dire des intervalles d'intérieurs non vides dont les images par les itérés de  $f$  sont toutes deux à deux disjointes. Poincaré supposait — sans pouvoir trouver d'exemple — que ce phénomène pouvait se produire et ceci quelle que soit la régularité de  $f$ . Il fallut attendre 1932 pour que A. Denjoy construise les premiers exemples et montre le résultat suivant :

THÉORÈME (Denjoy [De]). — Tout  $C^2$ -difféomorphisme de nombre de rotation irrationnel  $\rho$  est conjugué à la rotation  $R_\rho$ .

Denjoy note que la preuve de son théorème s'applique à une classe plus large d'homéomorphismes du cercle : la classe  $P$ .

DÉFINITIONS : classe  $P$ , point de coupure. — Un homéomorphisme  $f$  du cercle préservant l'orientation est de classe  $P$  si  $f$  est dérivable sauf sur un ensemble au plus dénombrable de points dits de coupure qui admettent des dérivées à droite et à gauche et si sa dérivée  $Df : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  a les propriétés suivantes :

- il existe deux constantes  $0 < a < b < +\infty$  telles que :
  - ▷  $a < Df(x) < b$ , pour tout  $x$  où  $Df$  est définie,
  - ▷  $a < Df_+(c) < b$  et  $a < Df_-(c) < b$  en les points de coupure,
- $\log Df_+$  est à variation bornée sur  $S^1$ .

Notons que les homéomorphismes de classe  $P$  forment un sous-groupe du groupe des homéomorphismes préservant l'orientation du cercle.

Exemples d'homéomorphismes préservant l'orientation de classe  $P$ .

- Les  $C^2$ -difféomorphismes sont de classe  $P$ .

• Les exemples les plus simples d'homéomorphismes de classe  $P$  qui ne sont pas des  $C^2$ -difféomorphismes sont les *homéomorphismes affines par morceaux* : un homéomorphisme  $f$  du cercle, préservant l'orientation, est *affine par morceaux* s'il existe une subdivision finie  $(d_i)_{1 \leq i \leq p}$  de  $S^1$  telle  $f$  est dérivable sauf en  $d_i$  et  $Df$  est constante sur chaque  $]d_i, d_{i+1}[$ .

• L'ensemble des homéomorphismes affines par morceaux est un sous-groupe du groupe des homéomorphismes de classe  $P$  et contient les rotations. Ces homéomorphismes sont apparus dans divers contextes :

- ▷ Le groupe de Thompson peut être représenté comme un sous-groupe du groupe des homéomorphismes affines par morceaux : le sous-groupe formé des homéomorphismes dyadiques (leurs pentes sont des puissances de 2, les discontinuités de leur dérivée ainsi que les images de ces points sont des dyadiques : leurs relevés à  $\mathbb{R}$  sont de la forme  $p/2^q$  avec  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ ). E. Ghys et V. Sergiescu [GhSe] montrent que ce groupe possède une action lisse sur  $S^1$  semi-conjuguée à l'action standard (par les homéomorphismes dyadiques) et avec minimal exceptionnel; ils obtiennent comme corollaire que *le nombre de rotation d'un homéomorphisme dyadique est rationnel*. Nous donnons en section B une preuve élémentaire de ce résultat. Par ailleurs, tout rationnel est le nombre de rotation d'un homéomorphisme dyadique, le lecteur pourra trouver une construction explicite dans [GhSe], proposition 2.1.
- ▷ Les premiers exemples, dus à M. Herman, d'homéomorphismes de classe  $P$  dont la mesure invariante est singulière par rapport à la mesure de Haar sont affines par morceaux.
- ▷ Une famille particulière d'homéomorphismes affines par morceaux a été considérée par d'autres auteurs (cf. [Bo], [CLR], [LM]) dans le contexte des échanges d'intervalles. Ce sont les homéomorphismes  $f$  affines par deux morceaux dont les discontinuités 0 et  $a$  de la dérivée satisfont  $f(a) = 0$ . Leur nombre de rotation se calcule :

$$\rho(f) = \log \lambda_1 / \log \lambda_1 - \log \lambda_2 \pmod{1},$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les pentes de  $f$ . Il en découle un résultat de Boshernitzan [Bo] : « il existe un homéomorphisme du cercle affine par morceaux dont toutes les données (discontinuités de la dérivée, pentes, images des discontinuités) sont rationnelles mais dont le nombre de rotation est irrationnel », qui exprime les limites à une généralisation du corollaire de [GhSe] ci-dessus.

*Remarque 1.* — Les homéomorphismes analytiques ne sont pas de classe  $P$  (ils ne constituent pas non plus un groupe). D’après J.-C. Yoccoz [Yo], ils vérifient la conclusion du théorème de Denjoy mais pas la théorie de Denjoy.

**1. Principaux aspects de la théorie de Denjoy.**

**1.1. Les inégalités de Denjoy-Koksma.** — Soient  $f$  un homéomorphisme de classe  $P$  de nombre de rotation irrationnel  $\alpha$  et  $p/q$  une fraction rationnelle réduite telle que

$$(A_2) \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Pour toute fonction  $\varphi$  à variation bornée sur  $S^1$ , on a

$$\left| \sum_{i=0}^{q-1} \varphi(f^i(x)) - q \int_{S^1} \varphi \, d\mu \right| \leq \text{Var } \varphi,$$

où  $\mu$  est une mesure de probabilité  $f$ -invariante et  $\text{Var } \varphi$  la variation totale de  $\varphi$  sur le cercle. L’existence d’une mesure invariante est garantie par le théorème de Krylov-Bogolubov (voir par exemple [HK]). L’existence d’une suite de fractions vérifiant  $|\alpha - p/q| < 1/q^2$  résulte de l’algorithme des fractions continues.

*Formulaire de fractions continues, définition du type constant.* — Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  un irrationnel; on définit une suite  $a_n$  d’entiers par récurrence de la manière suivante :

$$a_0 = E(\alpha), \quad y_0 = \{\alpha\}, \quad a_1 = E\left(\frac{1}{y_0}\right), \quad y_1 = \left\{\frac{1}{y_0}\right\}$$

puis

$$a_{n+1} = E\left(\frac{1}{y_n}\right) \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \left\{\frac{1}{y_n}\right\},$$

où  $E$  et  $\{.\}$  désignent respectivement la partie entière et la partie fractionnaire  $\{x\} = x - E(x) \in [0, 1[$ . Ceci décrit le *développement en fractions continues* de  $\alpha$ , noté

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Les *réduites*  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$  s'écrivent sous forme de fractions irréductibles  $p_n/q_n$ , où  $p_n$  et  $q_n$  satisfont les relations de récurrence :

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad \text{pour } n \geq 2, \quad p_0 = a_0, \quad p_1 = 1 + a_0 a_1,$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad \text{pour } n \geq 2, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1$$

et la relation de Lagrange

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n.$$

Les fractions  $p_n/q_n$  convergent vers  $\alpha$  (la suite  $|p_n/q_n - \alpha|$  est strictement décroissante vers 0) et satisfont la condition d'approximation  $(A_2)$ .

Les réduites sont exactement les fractions réduites qui satisfont  $(A_2)$ , il en résulte que si un entier  $n$  vérifie  $\|n\alpha\| < \|q_n\alpha\| = |q_n\alpha - p_n|$ , alors on a  $|n| \geq q_{n+1}$ , où

$$\|x\| := \inf_{p \in \mathbb{Z}} |x + p|.$$

Cette propriété s'interprète dynamiquement comme suit. On ordonne l'orbite positive pour  $R_\alpha$  de 0 par l'ordre d'itération. Sur  $S^1$  muni de la distance définie par  $\|\cdot\|$ , la suite  $(q_n)$  se définit par récurrence par  $q_0 = 1$  et  $R_\alpha^{q_{n+1}}(0)$  est le premier point de l'orbite positive de 0 qui revient plus près de 0 que ne l'est  $R_\alpha^{q_n}(0)$ . Notons que les points  $R_\alpha^{q_n}(0)$  et  $R_\alpha^{q_{n+1}}(0)$  ne sont pas situés du même côté de 0. Pour  $n$  pair  $R_\alpha^{q_n}(0)$  est à droite (correspondant au sens positif pour l'orientation de  $S^1$ ).

Un fait classique est que le développement en fractions continues de  $\alpha$  est périodique si et seulement si  $\alpha$  est quadratique. Plus généralement, on dit qu'un irrationnel  $\alpha$  est *de type constant* si  $\sup_n a_n$  est fini.

**1.2. Conséquences des inégalités de Denjoy-Koksma.** — Sous les hypothèses de ces inégalités on a :

1) les *inégalités de Denjoy*

$$e^{-V} \leq Df^q(x) \leq e^V, \quad \text{où } V = \text{Var}(\log Df).$$

2) la propriété

$$\int_{S^1} \log Df \, d\mu = 0$$

qui se démontre en appliquant les inégalités de Denjoy-Koksma à la fonction  $\log Df$ , en passant à l'exponentielle, en intégrant par rapport à la mesure de Haar et en repassant au logarithme. On obtient  $-V \leq -q_n \int_{S^1} \log Df \, d\mu \leq V$  qui n'est possible que si  $\int_{S^1} \log Df \, d\mu = 0$ .

## 2. Mesure invariante ergodique.

Denjoy s'est interrogé sur l'ergodicité par rapport à la mesure de Haar des  $C^2$ -difféomorphismes du cercle ( $f$  est *ergodique par rapport à une mesure  $m$*  si tout ensemble mesurable  $f$ -invariant est de  $m$ -mesure 0 ou 1). Simultanément Herman [He1] et Katok (preuve reproduite dans [HK], 12.7) apportent une réponse positive à cette question. La preuve donnée par Katok s'étend aux homéomorphismes de classe  $P$ ; elle repose sur un lemme de distortion dû à Finzi [Fi].

LEMME de Finzi. — Soit  $f$  un homéomorphisme de classe  $P$  de nombre de rotation irrationnel  $\alpha$  et  $V = \text{Var}(\log Df)$ . Pour tout couple de points  $(x, y)$  dans  $[a, f^{q_n}(a)]$  si  $n$  est pair,  $[f^{q_n}(a), a]$  si  $n$  est impair, pour tout  $k$  entier,  $0 \leq k < q_{n+1}$ , on a

$$e^{-V} \leq Df^k(x)/Df^k(y) \leq e^V.$$

Le théorème de Denjoy a comme conséquence dynamique que toutes les orbites d'un homéomorphisme de classe  $P$  et de nombre de rotation irrationnel sont denses. Il a aussi des conséquences ergodiques. Ainsi, le conjugué  $f$  de  $R_\alpha$  par un homéomorphisme  $h$  a pour une unique mesure de probabilité invariante la mesure image par  $h^{-1}$  de la mesure de Haar  $m$  (projetée de la mesure de Lebesgue). Notons-la  $\mu_f$ ; on a  $\mu_f([a, b]) = m([h(a), h(b)])$ . Comme  $h$  est continue  $\mu_f$  est sans atome et comme  $h$  est un homéomorphisme  $\mu_f$  charge les ouverts non vides de  $S^1$ . Plus tard, Arnol'd et Moser ont formulé des questions sur la régularité de la mesure  $\mu_f$ . Est-elle absolument continue par rapport à  $m$ ? Si oui, quelle est la régularité (différentiable, Hölder) de sa densité par rapport à  $m$ ? Avant d'énoncer une des réponses apportées par Herman, signalons quelques remarques utiles.

Remarque 2 : l'unique mesure de probabilité  $f$ -invariante,  $\mu_f$ , est soit singulière soit équivalente à  $m$ . — En effet, la partie absolument continue et la partie singulière de la décomposition de Radon Nikodym de  $\mu_f$  sont des mesures  $f$ -invariantes, par unique ergodicité l'une des deux est nulle. Aussi, une conséquence de l'ergodicité par rapport à  $m$  est que lorsque  $\mu_f$  est absolument continue de densité  $\varphi$  par rapport à  $m$ , elle est équivalente à  $m$  puisque  $\varphi^{-1}(]0, +\infty[)$  est un borélien  $f$ -invariant non négligeable, donc de mesure 1.

THÉORÈME (Herman [He2], voir aussi [KO2] et [KS]). — Soit  $\alpha$  un irrationnel de type constant. Si  $f$  est un  $C^2$ -difféomorphisme du cercle de nombre de rotation  $\alpha$ , alors  $\mu_f$  est absolument continue par rapport à  $m$ .



Si jusqu'ici les propriétés en classe  $C^2$  se vérifiaient en classe P, il n'en est rien pour ce dernier résultat; nous avons déjà signalé l'existence d'une construction par Herman [He1] qui fournit, pour tout irrationnel  $\alpha$ , un homéomorphisme affine par morceaux  $f$  de nombre de rotation  $\alpha$  dont la mesure invariante  $\mu_f$  n'est pas absolument continue par rapport à  $m$ . Plus précisément :

### 3. Les exemples de Herman.

Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux réels positifs fixés. On note  $f_{\lambda_1, \lambda_2}$  l'homéomorphisme affine par morceaux du cercle ayant pour relevé à  $[0, 1[$  l'homéomorphisme  $f$  affine par 2 morceaux tel que  $f(0) = 0$  et dont les deux pentes sont  $Df_+(0) = \lambda_1$  et  $Df_-(1) = \lambda_2$ .

Soit  $\alpha$  irrationnel fixé. Par propriétés de continuité et monotonie du nombre de rotation, il existe un unique  $b = b(\alpha)$  tel que  $\rho(R_b \circ f_{\lambda_1, \lambda_2}) = \alpha$ . On note

$$f_{\alpha, \lambda_1, \lambda_2} := R_{b(\alpha)} \circ f_{\lambda_1, \lambda_2}.$$

Les exemples pour lesquels la mesure invariante n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Haar s'obtiennent via le théorème suivant.

**THÉORÈME** (Herman [He1]). — *Soient  $\alpha \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  fixé; notons  $f$  l'homéomorphisme affine par morceaux  $f_{\alpha, \lambda_1, \lambda_2}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *la mesure  $\mu_f$  est équivalente à la mesure de Haar,*
- 2)  $\log \lambda_2 / (\log \lambda_2 - \log \lambda_1) \in \mathbb{Z}\alpha \pmod{1},$
- 3) *les deux points de coupure de  $f$  sont sur une même orbite,*
- 4)  *$f$  est conjugué à  $R_\alpha$  par un homéomorphisme  $C^\infty$  par morceaux (mais pas affine par morceaux).*

### 4. Énoncé des résultats.

Maintenant, une question naturelle consiste à comprendre ce qui persiste de ce théorème dans le cas général des homéomorphismes, des homéomorphismes de classe P ou dans le cas plus particulier des homéomorphismes affines par morceaux. Dans cette optique, signalons deux résultats où la situation est à l'opposé de la classe  $C^2$ .

Graczyk et Swiatek [GrSw] montrent qu'un homéomorphisme analytique avec un point critique et de nombre de rotation irrationnel de type constant ne peut jamais préserver une mesure absolument continue par rapport à  $m$ .

Dzhalilov et Khanin [DK] montrent qu'un homéomorphisme de classe  $P$  avec exactement un point de coupure et de nombre de rotation irrationnel ne peut jamais préserver une mesure absolument continue par rapport à  $m$ .

*Remarque 3 : le cas affine par morceaux est mixte.* — Contrairement aux deux situations précédentes, il est facile de construire des homéomorphismes affines par morceaux dont la mesure invariante est équivalente à la mesure de Haar. En conjuguant la rotation  $R_\alpha$  avec  $\alpha$  irrationnel par un homéomorphisme affine par morceaux  $h$ , on construit un homéomorphisme affine par morceaux  $f$  de nombre de rotation  $\alpha$  dont la mesure invariante est équivalente à la mesure de Haar. Pour un tel homéomorphisme  $f$  le nombre de discontinuités de  $Df^n$  est majoré par le double du nombre de discontinuités de  $Dh$ . Ainsi, la suite « nombre de discontinuités de  $Df^n$  » est bornée, dans ce cas nous dirons simplement que *le nombre de discontinuités de  $Df^n$  est borné*, sous-entendant par une constante qui ne dépend pas de  $n$ .

Le calcul direct  $Df^n(x) = Df(f^{n-1}(x)) \cdots Df(x)$  montre que les discontinuités de  $Df^n$  sont *a priori* les  $x$  tels que  $x$  ou  $f(x)$ , ou ... ou  $f^{n-1}(x)$  est une discontinuité de  $Df$ . Ainsi, l'ensemble des discontinuités *a priori* de  $Df^n$  est constitué d'un nombre fini de segments d'orbite de longueur  $n$ . Son cardinal tend vers l'infini avec  $n$ , indiquant la particularité de la situation décrite ci-dessus. Pour caractériser les situations où  $Df^n$  est borné, nous introduisons les définitions suivantes.

DÉFINITIONS : sauts, compensation. — Soit  $f$  un homéomorphisme du cercle affine par morceaux dont la dérivée  $Df$  possède  $p$  discontinuités notées  $d_1, \dots, d_p$ . On appelle *saut de  $Df$*  en  $d_i$  le rapport

$$\sigma_f(d_i) := Df_+(d_i)/Df_-(d_i).$$

On dit que  $f$  présente une *compensation de sauts* s'il existe  $\{i_1, \dots, i_s\} \subset \{1, \dots, p\}$  tels que  $\prod_{j=1}^s \sigma_f(d_{i_j}) = 1$ .

Comme  $Df_+(d_i) = Df_-(d_{i+1})$ , tous les sauts de  $Df$  se compensent :

$$\prod_{i=1}^p \sigma_f(d_i) = 1.$$

Ainsi, un produit trivial de strictement moins de  $p$  sauts sera appelé *compensation partielle de sauts*.

Il est important de noter que ce sont tous sauts de  $Df$  qui se compensent et non les pentes de  $f$ , sur lesquelles nous avons beaucoup de liberté comme nous le verrons après l'énoncé du théorème 2. D'autre part, les discontinuités de  $Df^{-1}$  sont les  $f(d_i)$  et les sauts de  $Df^{-1}$  en ces points sont  $\sigma_{f^{-1}}(f(d_i)) = (\sigma_f(d_i))^{-1}$ . Ainsi, à toute compensation de sauts de  $Df$  correspond une compensation de sauts de  $Df^{-1}$  : les définitions de compensation sont symétriques. En section C, nous démontrons les :

PROPOSITION 1. — *Soit  $f$  un homéomorphisme du cercle affine par morceaux de nombre de rotation irrationnel  $\alpha$ . Le nombre de discontinuités de  $Df^n$  est borné si et seulement si l'orbite de tout point de coupure de  $f$  contient un autre point de coupure de  $f$  et les sauts de  $Df$  en les points de coupure de  $f$  qui appartiennent à une même orbite se compensent. En particulier, lorsque tous les points de coupure de  $f$  sont sur une même orbite le nombre de discontinuités de  $Df^n$  est borné.*

THÉORÈME 1. — *Soit  $f$  un homéomorphisme du cercle affine par morceaux de nombre de rotation irrationnel  $\alpha$ . Si le nombre de discontinuités de  $Df^n$  est borné alors la mesure de probabilité  $f$ -invariante  $\mu_f$  est équivalente à la mesure de Haar.*

Nous avons récemment amélioré de ce résultat, avec une preuve totalement différente. La simplicité de la preuve du théorème 1 nous incite à l'indiquer ici.

THÉORÈME (voir [Li]). — *Soit  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux de nombre de rotation  $\alpha$  irrationnel. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $f$  est conjugué à la rotation d'angle  $\alpha$  par un homéomorphisme  $C^1$  par morceaux,
- (ii) le nombre de discontinuités de  $Df^n$  est borné,
- (iii)  $f$  est conjugué à un échange de deux intervalles, affine de nombre de rotation  $\alpha$ , par un homéomorphisme affine par morceaux,
- (iv)  $f$  est conjugué à la rotation d'angle  $\alpha$  par un homéomorphisme de classe  $P$  analytique par morceaux.

L'étude de la régularité de  $\mu_f$  serait complète si l'on pouvait montrer que lorsque le nombre de discontinuités de  $Df^n$  n'est pas borné, la mesure  $\mu_f$  est singulière par rapport à  $m$ . Ce que nous faisons sous certaines hypothèses additionnelles qui ne sont peut-être que techniques.

THÉORÈME 2. — Soit  $f$  un homéomorphisme du cercle affine par morceaux de nombre de rotation irrationnel  $\alpha$  et sans compensation partielle de sauts.

1) Le nombre de discontinuités de  $Df^n$  est borné si et seulement si tous les points de coupure de  $f$  sont sur une même orbite.

2) Si le nombre de discontinuités de  $Df^n$  n'est pas borné et que de plus  $\alpha$  est de type constant alors la mesure de probabilité  $f$ -invariante  $\mu_f$  est singulière par rapport à la mesure de Haar.

## 5. Stratégie de preuve de la partie 2 du théorème 2 et observations.

Pour montrer que, lorsque le nombre de discontinuités de  $Df^n$  n'est pas borné, la mesure  $\mu_f$  est singulière par rapport à  $m$  notre stratégie consiste à infirmer la condition nécessaire à l'existence d'une mesure invariante équivalente à la mesure de Haar : «la mesure de Haar de l'ensemble sur lequel  $Df^{-q_n}$  est loin de 1 doit tendre vers 0 avec  $n$ » (voir la proposition 2 en section D.1 pour un énoncé précis).

Il n'est pas difficile de voir que les sauts de  $Df^{-q_n}$  en ses véritables discontinuités sont loin de 1 (cf. section C). Ainsi, dès que  $Df^{-q_n}$  est proche de 1 sur l'un de ses intervalles de continuité sur les deux voisins de cet intervalle  $Df^{-q_n}$  est loin de 1. Par conséquent, si l'on savait que deux intervalles consécutifs de continuité de  $Df^{-q_n}$  sont «comparables» (définition en section D.2) on pourrait montrer que la  $m$ -mesure de l'ensemble sur lequel  $Df^{-q_n}$  est loin de 1 est au moins comparable à celle de son complémentaire. Il en résulte la ruine de notre condition nécessaire et par suite la singularité de  $\mu_f$ .

Comprendre les intervalles de continuité de  $Df^{-q_n}$ , c'est comprendre la manière dont les discontinuités de  $Df^{-q_n}$  sont placées sur  $S^1$ . Le nombre de discontinuités de  $Df^n$  n'étant pas borné, on montre qu'à un nombre fini (qui ne dépend pas de  $n$ ) près les discontinuités de  $Df^{-q_n}$  sont un nombre fini de segments d'orbites de la forme  $\{c, f(c), \dots, f^{q_n-1}(c)\}$ . Depuis Denjoy, on sait placer un tel segment. Pour décrire cela, nous avons choisi la présentation en «tours avec balcons» de Katznelson et Ornstein [KO1]. Il s'agit ensuite de placer dans ces tours les points appartenant aux autres segments d'orbites et contrôler la manière dont ce placement s'effectue : nous devons montrer que les intervalles définis par ces segments d'orbites

sont comparables (ou du moins qu'un nombre significatif le sont). Les hypothèses — peut-être seulement techniques de « type constant » et « sans compensation partielle de sauts » — nous ont été nécessaires pour prouver ceci. Cependant, la dernière hypothèse est générique en un sens que nous précisons.

Fixons  $\alpha$  un irrationnel,  $p \geq 2$  un entier et  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}^{+*})^p$ . Notons  $A_\Lambda^\alpha$  l'ensemble des homéomorphismes affines par au plus  $p$  morceaux, de nombre de rotation  $\alpha$  et dont les pentes sont — après avoir choisi un premier point de coupure —  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  dans cet ordre. Alors  $A_\Lambda^\alpha$  est non vide si et seulement si les  $\log \lambda_i$  ne sont pas tous de même signe ou ne sont pas tous nuls.

En effet,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  est réalisé comme pentes d'un homéomorphisme affine par morceaux si et seulement s'il existe  $(m_1, \dots, m_p) \in ]0, 1[^p$  tels que

$$(\mathcal{P}) \quad \sum m_i = \sum \lambda_i m_i = 1,$$

où les  $m_i$  représentent les longueurs des intervalles de continuité de  $Df$ . Il est clair que la condition  $(\mathcal{P})$  est vérifiée si et seulement si les  $\log \lambda_i$  ne sont pas tous de même signe ou ne sont pas tous nuls. Maintenant, étant donné  $f$  un homéomorphisme du cercle — par propriétés de continuité et monotonie du nombre de rotation — il existe un unique  $b = b(\alpha)$  tel que  $\rho(R_b \circ f) = \alpha$ . Par conséquent, si  $\Lambda$  est réalisé comme pentes d'un homéomorphisme affine par morceaux il est aussi réalisé comme pentes d'un homéomorphisme affine par morceaux de nombre de rotation  $\alpha$ .

Ainsi, dès que  $A_\Lambda^\alpha$  est non vide, un élément  $f$  de  $A_\Lambda^\alpha$  est défini et caractérisé par les données du point de coupure initial  $d_0 \in S^1$  de  $f$  et d'un  $(p)$ -uplet  $(m_1, \dots, m_p) \in ]0, 1[^p$  vérifiant la condition  $(\mathcal{P})$ .

L'ensemble des  $p$ -uplets  $R = (r_1, \dots, r_p)$  qui vérifient la propriété « les  $r_i$  sont soit tous nuls, soit ne sont pas tous de même signe » — représentant les réels pouvant être réalisés comme logarithmes des pentes d'homéomorphismes affines par morceaux du cercle — n'est pas ouvert. Mais si on lui retire le fermé Lebesgue-négligeable constitué des hyperplans  $r_i = 0$ , nous obtenons un ouvert  $G$  que nous munissons de la topologie induite par la topologie usuelle sur  $\mathbb{R}^p$  et de la mesure trace de la mesure de Lebesgue de dimension  $p$ . Nos conditions de généricité sont relatives à cet ouvert  $G$ .

## 6. Corollaires.

Nous tirons les corollaires suivants du théorème 2 :

COROLLAIRE 0 (reformulation du théorème 2 et corollaire de [Li]). —

Soit  $f$  un homéomorphisme du cercle affine par morceaux de nombre de rotation irrationnel de type constant  $\alpha$  et sans compensation partielle de sauts, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) La mesure de probabilité  $f$ -invariante  $\mu_f$  est absolument continue par rapport à la mesure de Haar.
- (ii) Le nombre de discontinuités de  $Df^n$  est borné.
- (iii) Les points de coupure de  $f$  sont sur une même orbite.
- (iv)  $f$  est conjugué à  $R_\alpha$  par un homéomorphisme analytique par morceaux.

COROLLAIRE 1 (généricité de la singularité de la mesure invariante).

Soient  $\alpha$  un irrationnel de type constant et  $p \geq 2$  un entier. Il existe  $S$  un  $G_\delta$ -dense de  $G$  de mesure de Lebesgue pleine tel que si  $\log \Lambda \in S$  alors la mesure de probabilité invariante par  $f \in A_\Lambda^\alpha$  est singulière par rapport à la mesure de Haar. Précisément,  $S$  est l'ensemble des  $(r_1, \dots, r_p) \in G$  rationnellement indépendants et tels que  $\alpha$  ne s'écrit pas comme le rapport de deux éléments du  $\mathbb{Q}$  sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

COROLLAIRE 2 (étude complète de la régularité de  $\mu_f$  dans le cas où  $f$  a au plus trois orbites de points de coupure). — Soit  $f$  un homéomorphisme du cercle affine par morceaux de nombre de rotation  $\alpha$  de type constant ayant au plus trois orbites de points de coupure, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) la mesure  $\mu_f$  est absolument continue par rapport à la mesure de Haar,
- (ii) le nombre de discontinuités de la dérivée de  $f^n$  est borné,
- (iii) le produit des sauts de  $Df$  sur chaque orbite de points de coupure de  $f$  est 1,
- (iv)  $f$  est conjugué à la rotation d'angle  $\alpha$  par un homéomorphisme de classe  $P$  analytique par morceaux,
- (v)  $f$  est conjugué à un échange de deux intervalles, affine de nombre de rotation  $\alpha$ , par un homéomorphisme affine par morceaux.

## 7. Ratio set.

Une autre manière d'aborder et d'affiner les problèmes de régularité de  $\mu_f$  par rapport à la mesure de Haar consiste à considérer l'action de  $f$  sur la mesure de Haar. Un homéomorphisme affine par morceaux  $f$  — plus généralement de classe P — préserve la classe de la mesure de Haar et lorsque le nombre de rotation de  $f$  est irrationnel, cette mesure est  $f$ -ergodique. Une telle donnée est appelée *transformation ergodique non singulière*. Précisément ce terme recouvre la donnée d'une transformation  $T$  mesurable inversible de  $(X, B)$  un espace borélien standard et d'une mesure  $\mu$  de probabilité sur  $(X, B)$  non atomique, quasi-invariante par  $T$  (i.e. la mesure image de  $\mu$  par  $T$  est équivalente à  $\mu$ ) et ergodique. Une classification, à équivalence orbitale près, de ces transformations fut initiée par Dye [Dy] et poursuivie par Krieger [Kr].

Deux triplets  $(X, T, \mu)$  et  $(X', T', \mu')$  de transformations ergodiques non singulières sont dits *orbitalement équivalents* s'il existe une bijection bimesurable  $\phi$  de  $X$  sur  $X'$  telle que la mesure image de  $\mu$  par  $\phi$  est  $\mu'$  et  $\phi$  envoie la  $T$ -orbite de  $x$  sur la  $T'$ -orbite de  $\phi(x)$ . La notion clé pour la classification de Krieger est le ratio set  $R(T)$  d'une transformation ergodique non singulière, défini comme suit.

**DÉFINITION** (ratio set d'une transformation ergodique non singulière  $(X, T, \mu)$  d'après [KW]). — Le réel  $r$  (resp.  $\infty$ ) appartient à  $R(T)$  le *ratio set* de  $T$  (relativement à  $\mu$ ) si, pour tout borélien  $A$  tel que  $\mu(A) > 0$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un borélien  $B \subset A$  avec  $\mu(B) > 0$  et  $k$  un entier tels que :

- (i)  $T^k(B) \subset A$  et
- (ii)  $|(d\mu T^k/d\mu)(x) - r| < \epsilon$  (resp.  $|(d\mu T^k/d\mu)(x)| \geq \epsilon$ ) pour tout  $x \in B$ , où  $d\mu T^k/d\mu$  est la dérivée de Radon Nikodym de  $\mu T^k$  mesure image par  $T^{-k}$  de  $\mu$ .

*Propriétés du ratio set et classification en types.* — On peut montrer que  $R(T) \cap ]0, +\infty[$  est un semi-groupe multiplicatif fermé de  $]0, +\infty[$  et que seules les possibilités suivantes se présentent. On dit que  $T$  est de type :

- (II) lorsque  $R(T) = \{1\}$ ;
- (III<sub>0</sub>) lorsque  $R(T) = \{0, 1, +\infty\}$ ;
- (III <sub>$\lambda$</sub> ) lorsque  $R(T) = \{0, \lambda^n : n \in \mathbb{Z}, +\infty\}$ , où  $\lambda \in ]0, 1[$ ;
- (III<sub>1</sub>) lorsque  $R(T) = [0, +\infty[$ ;

La transformation  $T$  est de type (II) si et seulement si  $T$  préserve une mesure  $\sigma$ -finie équivalente à  $\mu$ . Krieger montre que deux transformations orbitalement équivalentes ont même type, la réciproque est fautive et le type (II) se décompose en deux sous-types :

(II<sub>1</sub>) lorsque la mesure équivalente à  $\mu$  préservée par  $T$  est finie ;

(II<sub>∞</sub>) dans le cas contraire.

Dye montra que deux transformations de type (II<sub>1</sub>) (resp. (II<sub>∞</sub>)) sont orbitalement équivalentes. Ce résultat fut complété par Krieger : deux transformations de type (III<sub>λ</sub>) pour  $\lambda \in ]0, 1]$  sont orbitalement équivalentes. Le type (III<sub>0</sub>) reste un invariant incomplet. Katznelson [Ka2] mentionne que toute transformation non singulière ergodique est orbitalement équivalente à un homéomorphisme du cercle agissant sur la mesure de Haar. En particulier, tout type est représenté par un triplet  $(S^1, f, m)$ .

Lorsque  $f$  est un homéomorphisme affine par morceaux du cercle, la dérivée de Radon Nikodym de la mesure image par  $f^{-k}$  de  $m$  est  $Df^k$ .

Le cas (II<sub>1</sub>) correspond au cas où  $\mu_f$  est équivalente à la mesure de Haar. En conjuguant une rotation irrationnelle par un homéomorphisme affine par morceaux on obtient de tels exemples.

Les exemples de Herman sont de type (III) (c'est ainsi que Herman les présente).

Les homéomorphismes affines par morceaux du 2) du théorème 2 sont de type (III). En effet, la propriété — indiquée dans la proposition 2 (section D) — qui est mise en défaut sous les hypothèses du théorème 2, 2) est une condition nécessaire à l'existence d'une mesure  $\sigma$ -finie (pas nécessairement finie) invariante équivalente à la mesure de Haar. On en déduit, par exemple, le

*THÉORÈME 2'. — Soit  $f$  un homéomorphisme du cercle affine par morceaux de nombre de rotation irrationnel de type constant  $\alpha$ . Si les logarithmes des pentes de  $f$  sont rationnellement indépendants et si  $\alpha$  ne s'écrit pas comme le rapport de deux éléments du  $\mathbb{Q}$  sous-espace vectoriel qu'ils engendrent alors  $f$  agissant sur la mesure de Haar est de type (III).*

Les prochains résultats fournissent des exemples de type (III<sub>1</sub>) et (III<sub>λ</sub>). Nous ne connaissons pas d'homéomorphisme affine par morceaux du cercle de type (II<sub>∞</sub>) ou (III<sub>0</sub>). Un résultat général de la classification des transformations non singulières ergodiques indique que :



• si  $T$  est de type  $(III_0)$  alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une mesure  $\nu_\epsilon$  dans la classe d'équivalence de  $\mu$  pour laquelle

$$d\nu_\epsilon T^{-1}/d\nu_\epsilon \in ]0, \epsilon] \cup \{1\} \cup [1/\epsilon, +\infty[$$

• si  $T$  est de type  $(III_\lambda)$  pour  $\lambda \in ]0, 1[$  alors il existe une mesure  $\nu$  dans la classe d'équivalence de  $\mu$  pour laquelle  $d\nu T^{-1}/d\nu \in \{\lambda^p, p \in \mathbb{Z}\}$ .

La réciproque de ce dernier point est fautive puisqu'en conjuguant une rotation irrationnelle par un homéomorphisme affine par morceaux dont les pentes sont toutes puissances d'un même scalaire  $\lambda$ , on obtient un homéomorphisme affine par morceaux de type  $(II_1)$  pour lequel  $dmf^{-1}/dm \in \{\lambda^p, p \in \mathbb{Z}\}$ . Mais il est clair qu'un homéomorphisme affine par morceaux dont les pentes sont toutes puissances d'un même scalaire ne peut être de type  $(III_1)$ . Cependant, nous montrons le résultat un peu surprenant qu'un homéomorphisme affine par morceaux dont les pentes sont toutes puissances impaires d'un même scalaire est  $(III_\lambda)$ . Ce résultat est un corollaire d'une propriété reliant le ratio set au comportement asymptotique des suites  $Df^{q_n}(x)$ .

**THÉORÈME 3.** — *Soit  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux du cercle de nombre de rotation  $\alpha$  irrationnel. S'il existe un ensemble fini  $W \subset ]0, +\infty[$  et une sous-suite  $q_{s_n}$  de la suite des dénominateurs des réduites du développement en fractions continues de  $\alpha$  tels que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $n_\epsilon$  tel que*

$$\{Df^{q_{s_n}}(x), x \in S^1, n \geq n_\epsilon\} \subset W_\epsilon = \bigcup_{w \in W} [w - \epsilon, w + \epsilon],$$

le  $\epsilon$ -voisinage de  $W$ , alors le ratio set de  $f$  contient au moins un point inférieur ou égal à 1 et un point supérieur ou égal à 1 de  $W$ .

**Remarque 4.** — Le ratio set de  $f$  contenant toujours 1, la situation du théorème 3 est intéressante lorsque 1 n'appartient pas à  $W$ . Ainsi, l'existence d'un tel ensemble  $W$  ne contenant pas 1 a pour conséquence que le ratio set de  $f$  contient un nombre autre que 1, 0 et  $\infty$  et par suite que l'homéomorphisme  $f$  est de type  $(III_1)$  ou  $(III_\lambda)$ , sa mesure invariante est singulière par rapport à la mesure de Haar. Si, de plus, on peut garantir que deux éléments distincts de  $W$  ne sont jamais puissances d'un même scalaire alors le ratio set de  $f$  contient deux points  $\mu_1 < 1$  et  $\mu_2 > 1$  de  $W$  qui ne sont pas puissances d'un même scalaire et donc  $f$  est  $(III_1)$ .

**COROLLAIRE 3.** — *Soit  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux du cercle de nombre de rotation  $\alpha$  irrationnel dont les pentes sont toutes*

des puissances impaires d'un réel  $\lambda \in ]0, 1[$  alors  $f$  est de type  $(III_{\lambda^s})$ , pour un certain  $s \in \mathbb{N}^*$ .

**COROLLAIRE 4.** — Soit  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux du cercle, de nombre de rotation  $\alpha$  irrationnel et dont les pentes appartiennent à l'ensemble  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ . Notons  $\mu_i = \mu_f(\{Df = \lambda_i\})$  et  $\{-q_n\mu\}$  la suite de  $[0, 1]^p$  dont la  $i$ -ème coordonnée est la suite  $\{-q_n\mu_i\}$ , où  $\{x\} = x - E(x) \in [0, 1[$  représente la partie fractionnaire de  $x$ .

Si  $b = (b_1, \dots, b_p)$  est valeur d'adhérence de la suite  $\{-q_n\mu\}$ , le ratio set de  $f$  contient au moins un point inférieur ou égal à 1 et un point supérieur ou égal à 1 de l'ensemble fini  $W = \{\prod_{i=1}^p (\lambda_i)^{b_i+r_i} : r_i \in \mathbb{Z}, |r_i| \leq N_i\}$ , où  $N_i = \text{var } \mathbb{I}_{\{Df=\lambda_i\}}$  et  $\mathbb{I}_A$  est la fonction indicatrice de  $A$ .

*Notation.* — Notons  $A_{\lambda_1, \lambda_2}^\alpha$  l'ensemble des homéomorphismes du cercle affines par morceaux de nombre de rotation  $\alpha$  et dont la dérivée (ayant un nombre quelconque de discontinuités) prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ . Par les arguments préliminaires au corollaire 1, cet ensemble est non vide si et seulement si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ne sont pas tous les deux strictement inférieurs à 1 ou tous les deux strictement supérieurs à 1.

**COROLLAIRE 5.** — Soit  $\alpha$  irrationnel, il existe un sous-ensemble  $S$  de  $]0, 1[ \times ]1, +\infty[$  de mesure de Lebesgue pleine, tel que si  $(\lambda_1, \lambda_2)$  appartient à  $S$ , alors  $f \in A_{\lambda_1, \lambda_2}^\alpha$  est de type  $(III_1)$ .

## B. Le nombre de rotation d'un homéomorphisme dyadique est rationnel.

**DÉFINITION.** — Un homéomorphisme  $f$  est *dyadique* si :

- $f$  est un homéomorphisme affine par morceaux de  $S^1$ ,
- $Df$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{2^p, p \in \mathbb{Z}\}$ ,
- les discontinuités de  $Df$  et leurs images par  $f$  sont des nombres dyadiques : leurs relevés à  $\mathbb{R}$  sont de la forme  $m/2^n$  avec  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ .

Soit  $f$  un homéomorphisme dyadique,  $f$  est identifié à la bijection  $\tilde{f} \pmod{1}$  de  $[0, 1[$ . Pour tout  $x \in [0, 1[$ , on a

$$f(x) = 2^{r(x)}x + \frac{p(x)}{2^{k(x)}},$$

avec  $r(x) \in \mathbb{Z}$ ,  $p(x) \in \mathbb{Z}$  et  $k(x) \in \mathbb{N}$  qui sont des fonctions bornées.

D'autre part, il est facile de voir que l'orbite de 0 est constituée de nombres dyadiques. Nous écrivons pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$f^n(0) = \frac{M_n}{2^{N_n}},$$

avec  $N_n \in \mathbb{N}$  et  $M_n \in \mathbb{N}$  est impair ou nul.

S'il existe un entier  $n$  non nul pour lequel  $M_n$  est nul alors  $f^n(0) = 0$ , l'orbite de 0 est périodique et le nombre de rotation de  $f$  rationnel. Nous supposons dans la suite que pour tout  $n$  entier non nul  $M_n$  est impair.

*Fait 1 :  $N_n \rightarrow +\infty$  ou bien l'orbite de 0 est périodique.*

Si la suite  $N_n$  ne tend pas vers  $+\infty$ , alors il existe une sous-suite  $N_{s_n}$  bornée par un certain  $B$ . Dans ce cas, la suite  $f^{s_n}(0)$  de points de l'orbite de 0 est contenue dans l'ensemble fini  $\{p/2^k, 0 \leq p \leq 2^B \text{ et } 0 \leq k \leq B\}$ , ce qui n'est possible que lorsque l'orbite de 0 est périodique.

*Fait 2 : si  $N_n \rightarrow +\infty$ , alors  $Df^n(0) \rightarrow 0$ .*

En effet, supposons  $N_n \rightarrow +\infty$  et calculons

$$\begin{aligned} f^{n+1}(0) &= f(f^n(0)) = 2^{r(f^n(0))} \frac{M_n}{2^{N_n}} + \frac{p(f^n(0))}{2^{k(f^n(0))}} \\ &= \frac{M_n}{2^{N_n - r(f^n(0))}} + \frac{p(f^n(0))}{2^{k(f^n(0))}}. \end{aligned}$$

Puisque la suite  $N_n$  tend vers  $+\infty$  et que  $r$  et  $k$  sont bornées, il existe un entier  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ , on ait  $N_n - r(f^n(0)) > k(f^n(0))$ . Il en résulte que

$$f^{n+1}(0) = \frac{M_n + 2^{N_n - r(f^n(0)) - k(f^n(0))} p(f^n(0))}{2^{N_n - r(f^n(0))}} = \frac{M_{n+1}}{2^{N_{n+1}}}.$$

Puisque  $M_n$  est impair et  $N_n - r(f^n(0)) > k(f^n(0))$ , on peut identifier numérateurs et dénominateurs de ces fractions. On obtient

$$M_{n+1} = M_n + 2^{N_n - r(f^n(0)) - k(f^n(0))} p(f^n(0))$$

et surtout  $N_{n+1} = N_n - r(f^n(0))$ , pour tout  $n \geq n_0$ . Ainsi, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$N_{n_0+p} = N_{n_0} - (r(f^{n_0}(0)) + \dots + r(f^{n_0+p-1}(0))).$$

Donc  $r(f^{n_0}(0)) + \dots + r(f^{n_0+p-1}(0))$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $p \rightarrow +\infty$ . Finalement,  $r(0) + r(f(0)) + \dots + r(f^n(0))$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Or  $Df^n(0) = 2^{r(0)+r(f(0))+\dots+r(f^n(0))}$ , donc  $Df^n(0)$  tend vers 0.

*Conclusion* : si le nombre de rotation de  $f$  est irrationnel l'orbite de 0 n'est pas périodique et les inégalités de Denjoy s'appliquent à  $f$ , on a  $Df^{q_n}(0) \geq e^{-\text{Var} \log Df}$ . Ce qui contredit les faits 1 et 2. Le nombre de rotation de  $f$  dyadique est rationnel.

**C. Discontinuités, sauts de  $Df^n$ ,  
 preuve de la proposition 1, du théorème 1  
 et de la partie 1 du théorème 2.**

Soit  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux du cercle; nous notons  $\mathcal{D}f$  l'ensemble des discontinuités de  $Df$ . La dérivée de l'itéré  $n$ -ième de  $f$  est

$$Df^n(x) = Df(x) \times Df(f(x)) \times \dots \times Df(f^{n-1}(x)).$$

Il en est de même pour les dérivées à droite et à gauche de  $f^n$  et le saut de  $Df^n$  en  $x$  est

$$\sigma_{f^n}(x) = \sigma_f(x) \times \sigma_f(f(x)) \times \dots \times \sigma_f(f^{n-1}(x)).$$

Par conséquent, pour que  $x$  soit une discontinuité de  $Df^n$  il est nécessaire que l'un des points  $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$  soit dans  $\mathcal{D}f$ , c'est-à-dire que  $x$  soit l'un des points  $f^{-k}(c_i)$ , où  $k$  est un entier compris entre 0 et  $n - 1$  et  $c_i$  est une discontinuité de  $Df$ . Mais tous ces points ne sont pas nécessairement des discontinuités. Les valeurs possibles pour les sauts de  $Df^n$  sont

$$\sigma_{f^n}(x) = \prod_{c \in \mathcal{D}f \cap \{x, \dots, f^{n-1}(x)\}} \sigma_f(c).$$

L'ensemble  $\mathcal{D}f$  étant fini et indépendant de  $n$ , il existe un ensemble fini dans lequel toutes les fonctions  $\sigma_{f^n}$  prennent leurs valeurs.

*Preuve de la proposition 1.* — Supposons que le cardinal de  $\mathcal{D}f^n$  soit borné par une constante  $M$ . Soit  $c$  un point de coupure de  $f$ . Pour tout entier  $n > M$ , au moins un point parmi les  $n$  points  $c, f^{-1}(c), \dots, f^{-n+1}(c)$  n'est pas un point de  $\mathcal{D}f^n$ . Autrement dit, le saut de  $Df^n$  en ce point vaut 1. Ce point s'écrit  $f^{-K}(c)$  avec  $0 \leq K < n$  et

$$\sigma_{f^n}(f^{-K}(c)) = \sigma_f(f^{-K}(c)) \times \dots \times \sigma_f(c) \times \dots \times \sigma_f(f^{n-K-1}(c)) = 1.$$

Comme  $\sigma_f(c) \neq 1$ , l'orbite de  $c$  contient nécessairement un autre point de coupure de  $f$ .

Soient  $c_0$  un point de coupure de  $f$  et  $\mathcal{S} = \{c_0, \dots, f^N(c_0)\}$  un segment de l'orbite de  $c$  contenant tous les points de coupure de  $f$  situés sur l'orbite de  $c$ . Le produit des sauts de  $Df$  sur l'orbite de  $c$  est égal au produit des sauts de  $Df$  sur  $\mathcal{S}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $0 \leq k < n - 1 - N$ , le segment  $\{f^{-k}(c_0), \dots, c_0, \dots, f^{n-k-1}(c_0)\}$  contient  $\mathcal{S}$  et

$$\sigma_{f^n}(f^{-k}(c_0)) = \sigma_f(f^{-k}(c_0)) \times \dots \times \sigma_f(c_0) \times \dots \times \sigma_f(f^{n-k-1}(c_0))$$

est égal au produit des sauts de  $Df$  sur  $\mathcal{S}$ . Par conséquent, si ce produit n'est pas 1, le nombre de discontinuités de  $Df^n$  est au moins  $n - 1 - N$  et tend vers l'infini avec  $n$ .

Réciproquement, si le produit des sauts de  $Df$  le long de chaque orbite de points de coupure vaut 1, il existe une partition de l'ensemble des points de coupure de  $f$  en ensembles  $\mathcal{C}_1 = \{c_1^1, \dots, c_{s_1}^1\}, \dots, \mathcal{C}_p = \{c_1^p, \dots, c_{s_p}^p\}$  tels que pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$  :

- $\mathcal{C}_i$  est contenu dans une orbite, on écrit  $c_i = c_1^i$  et  $c_{s_i}^i = f^{-N_i}(c_i)$ ,
- l'orbite positive de  $c_i$  et l'orbite négative de  $c_{s_i}^i$  ne contiennent pas de point de coupure de  $f$  (en particulier les orbites contenant deux  $\mathcal{C}_i$  distincts sont disjointes),
- le produit des sauts en les points de  $\mathcal{C}_i$  vaut 1.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , les discontinuités de  $Df^n$  sont des  $f^{-k}(c_i)$  avec  $k = 0, \dots, n + N_i - 1$  et  $i = 1, \dots, p$ . Les sauts de  $f^n$  en ces points sont

$$\sigma_{f^n}(f^{-k}(c_i)) = \sigma_f(f^{-k}(c_i)) \times \dots \times \sigma_f(c_i) \times \dots \times \sigma_f(f^{n-k-1}(c_i)).$$

Si  $k \geq N_i$  et  $n-k-1 \geq 0$  alors le segment d'orbite  $\{f^{-k}(c_i), \dots, f^{n-k-1}(c_i)\}$  contient  $\mathcal{C}_i$  et ce saut vaut 1. Ainsi, pour que  $f^{-k}(c_i)$  soit une discontinuité de  $Df^n$  il faut que  $0 \leq k < N_i$  ou  $n-1 < k \leq n + N_i - 1$ . Par conséquent, le nombre de discontinuités de  $Df^n$  qui proviennent de l'orbite de  $c_i$  est au plus  $2N_i$ . On en déduit une borne de  $2(N_1 + \dots + N_p)$  pour le nombre de discontinuités de  $Df^n$ . En remplaçant  $f$  par  $f^{-1}$ , on obtient l'analogie pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

Le produit de tous les sauts de  $Df$  pour  $f$  affine par morceaux vaut 1. Ainsi, lorsque les points de coupure de  $f$  sont sur une même orbite la condition nécessaire et suffisante pour que le nombre de discontinuités de  $Df^n$  soit borné est vérifiée.  $\square$

Comme corollaire de cette section, nous pouvons énoncer la

PROPOSITION 0. — *Soit  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux du cercle.*

(a) *Il existe un ensemble fini  $F$  dans lequel toutes les fonctions  $\sigma_{f^n}$  prennent leurs valeurs.*

(b) *Si le produit des sauts de  $Df$  le long d'une de ses orbites de points de coupure vaut 1 alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , le nombre de discontinuités de  $Df^n$  appartenant à cette orbite est au plus  $2N_i$ , où  $N_i$  est le nombre de points de coupure de  $f$  sur cette orbite.*

*Preuve du théorème 1.* — Supposons que le nombre de discontinuités de  $Df^n$  soit borné pour tout  $n$  par une constante  $M$  et montrons que  $Df^n(x)$

est bornée indépendamment de  $n$  et de  $x$ . En effet, la fonction  $Df^n$  a au plus  $M$  sauts tous contenus dans l'ensemble  $F$  de la proposition 0. Notons  $\lambda$  la valeur de  $Df^n$  sur l'un de ses intervalles de continuité; on a

$$\lambda(\min F)^M \leq Df^n \leq \lambda(\max F)^M.$$

Puisque  $F$  est fini et indépendant de  $n$ , pour que  $Df^n$  soit bornée, il suffit que  $\lambda$  le soit. Or  $\int_{S^1} Df^n dm = 1$ , en intégrant l'inégalité ci-dessus, on obtient  $\lambda(\min F)^M \leq 1 \leq \lambda(\max F)^M$ . Il en résulte que  $\lambda$  et  $Df^n$  sont bornées indépendamment de  $n$  et  $x$ .

Finalement, la fonction  $\phi(x) = \sup\{Df^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$  est bien définie, positive, dans  $L^1(m)$  et vérifie l'équation de Perron  $(\phi \circ f)Df = \phi$ , indiquant que la mesure de densité  $\phi$  par rapport à  $m$  est  $f$ -invariante. Par unique ergodicité de  $f$ , il s'agit d'un multiple de  $\mu_f$ . □

*Preuve la partie 1) du théorème 2.* — D'après la proposition 1, le nombre de discontinuités de  $Df^n$  est borné si et seulement s'il existe une partition de l'ensemble des points de coupure de  $f$  en ensembles finis  $\mathcal{C}_i$  tels que chaque  $\mathcal{C}_i$  est contenu dans une orbite et le produit des sauts de  $Df$  sur chacun des  $\mathcal{C}_i$  vaut 1. Sans compensation partielle de sauts, aucun produit partiel de sauts de  $Df$  ne peut valoir 1. Ceci indique que la partition ci-dessus n'est constituée que d'un seul  $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_1$ , ce qui signifie que tous les points de coupure de  $f$  sont sur une même orbite. □

## D. Homéomorphismes affines par morceaux dont la mesure invariante est singulière par rapport à la mesure de Haar.

### 1. Condition nécessaire à l'existence d'une mesure invariante équivalente à la mesure de Haar.

Il est important de noter que cette mesure invariante équivalente à la mesure de Haar ne sera pas obligatoirement finie mais juste  $\sigma$ -finie. Ainsi, dès que cette condition est mise en défaut, l'homéomorphisme  $f$  est de type (III).

PROPOSITION 2. — *Soit  $f$  un homéomorphisme de classe  $P$  de nombre de rotation irrationnel. Si  $f$  possède une mesure invariante équivalente à la mesure de Haar alors pour tout  $\delta > 0$  la  $m$ -mesure des ensembles  $\{x : |Df^{q_n}(x) - 1| > \delta\}$  converge vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.*

*Remarque.* — Si l'on change  $f$  en  $f^{-1}$ , le nombre de rotation  $\alpha$  devient  $-\alpha$  et les  $q_n$  ne changent pas, la  $m$ -mesure des ensembles  $\{x : |Df^{-q_n}(x) - 1| > \delta\}$  converge aussi 0.

*Preuve de la proposition 2.* — Soit  $f$  un homéomorphisme de classe  $P$ , de nombre de rotation irrationnel et possédant une mesure invariante équivalente à la mesure de Haar. La densité de cette mesure par rapport à la mesure de Haar est une fonction mesurable  $\varphi$  telle que la mesure  $m(\varphi^{-1}(]0, +\infty[))$  est strictement positive et  $(\varphi \circ f)Df = \varphi$ .

*Fait 1 :*  $f^{q_n}(x)$  converge uniformément vers  $x$ .

En effet,  $\|R_\alpha^{q_n}(x) - x\| = |q_n\alpha - p_n| \leq 1/q_n$  ne dépend pas de  $x$  et tend vers 0. De plus, par le théorème de Denjoy,  $f$  est conjuguée à  $R_\alpha$  par un homéomorphisme  $h$  et donc

$$\|f^{q_n}(x) - x\| = \|h \circ R_\alpha^{q_n} \circ h^{-1}(x) - x\| = \|h(R_\alpha^{q_n}(y)) - h(y)\|.$$

Ceci et la continuité — nécessairement uniforme — de  $h$  sur  $S^1$  suffisent pour conclure.

*Fait 2 :*  $\int |\psi \circ f^{q_n} - \psi| dm$  converge vers 0, pour toute fonction  $m$ -intégrable  $\psi$  de  $S^1$  dans  $\mathbb{C}$ .

Vérifions ceci pour une fonction  $\psi$  continue sur  $S^1$ . Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Puisque  $\psi$  est uniformément continue sur  $S^1$  et que  $f^{q_n}(x)$  converge uniformément vers  $x$ , il existe un entier  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on a  $\sup\{|\psi \circ f^{q_n}(x) - \psi(x)|, x \in S^1\} \leq \varepsilon$ . En particulier,  $\int |\psi \circ f^{q_n} - \psi| dm$  tend vers 0.

Supposons maintenant que  $\psi$  n'est que  $m$ -intégrable. Soit  $(\psi_k)$  une suite de fonctions continues qui converge dans  $L^1(m)$  vers  $\psi$ . Notons  $|\cdot|_1$  la norme dans  $L^1(m)$ . On a

$$\begin{aligned} |\psi \circ f^{q_n} - \psi|_1 &\leq |\psi \circ f^{q_n} - \psi_k \circ f^{q_n}|_1 + |\psi_k \circ f^{q_n} - \psi_k|_1 + |\psi_k - \psi|_1 \\ &\leq |\psi_k \circ f^{q_n} - \psi_k|_1 + (\sup |Df^{q_n}|^{-1} + 1)|\psi - \psi_k|_1 \end{aligned}$$

par changement de variable  $y = f^{q_n}(x)$  dans la première norme. En utilisant les inégalités de Denjoy il vient

$$|\psi \circ f^{q_n} - \psi|_1 \leq |\psi_k \circ f^{q_n} - \psi_k|_1 + (e^V + 1)|\psi - \psi_k|_1$$

avec  $V = \text{Var}(\log Df)$ .

Fixons  $k = k_0$  assez grand pour que  $|\psi - \psi_k|_1$  soit petit. Par le cas continu appliqué à  $\psi_{k_0}$ , il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  la norme  $|\psi_{k_0} \circ f^{q_n} - \psi_{k_0}|_1$  est petite. Ainsi  $|\psi \circ f^{q_n} - \psi|_1$  tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

*Fait 3* : pour tout  $\delta > 0$ , la suite  $m(\{x : |Df^{q_n}(x) - 1| > \delta\})$  converge vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

La fonction  $\varphi$  vérifie

$$(\varphi \circ f^{q_n})Df^{q_n} = \varphi.$$

En passant au logarithme, il vient  $\log \varphi \circ f^{q_n} + \log Df^{q_n} = \log \varphi$ ; en multipliant par  $2i\pi/2V$ , où  $V = \text{Var}(\log Df)$ , on a  $(2i\pi \log \varphi/2V) \circ f^{q_n} + 2i\pi \log Df^{q_n}/2V = 2i\pi \log \varphi/2V$ ; en passant à l'exponentielle et en posant  $\psi = e^{2i\pi \log \varphi/2V}$ , on obtient

$$(\psi \circ f^{q_n})e^{2i\pi \log Df^{q_n}/2V} = \psi.$$

En conclusion,  $\psi$  est une fonction intégrable (car mesurable et bornée) de module 1 et qui vérifie

$$\psi \circ f^{q_n} - \psi = (1 - e^{2i\pi \log Df^{q_n}/2V})\psi \circ f^{q_n}.$$

En intégrant le module de cette égalité, on a

$$\begin{aligned} \int |\psi \circ f^{q_n} - \psi| dm &= \int |(1 - e^{2i\pi \log Df^{q_n}/2V})| dm \\ &= \int |2 \sin(\pi \log Df^{q_n}/2V)| dm. \end{aligned}$$

Les inégalités de Denjoy indiquent que  $-\frac{1}{2}\pi \leq \pi \log Df^{q_n}/2V \leq \frac{1}{2}\pi$  et donc que

$$|2 \sin(\pi \log Df^{q_n}/2V)| = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2V} |\log Df^{q_n}|\right).$$

Maintenant, supposons par l'absurde qu'il existe  $a > 0$  et  $\delta > 0$  tel que  $m(\{x : |\log Df^{q_n}(x)| > \delta\}) > a$ , pour une infinité de  $n$ . Pour de tels  $n$ , l'intégrale

$$\int 2 \sin\left(\frac{\pi}{2V} |\log Df^{q_n}|\right) dm > 2a \sin \frac{\pi\delta}{2V}$$

ne tend donc pas vers 0, ce qui contredit le fait 2. □

## 2. Bounded Geometry.

### 2.1. Définitions

• *Partitions dynamiques, tours avec balcons.* — Soit  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux de nombre de rotation  $\alpha$  irrationnel et soit 0 un point fixé de  $S^1$ . On appelle *partition dynamique* associée à  $f$  et au



point 0 la suite  $\Delta_n(0)$  de recouvrements de  $S^1$  en intervalles fermés deux à deux d'intérieurs disjoints appelés  $n$ -atomes dont les bornes sont les  $f^j(0)$ ,  $0 \leq j \leq q_n + q_{n+1} - 1$ .

A. Denjoy a décrit la manière dont ces  $q_n + q_{n+1}$  points se répartissent sur le cercle. Ainsi, les  $n$ -atomes de  $\Delta_n(0)$  sont les intervalles

- ▷  $f^k([0, f^{q_n}(0)])$  avec  $k \in \{0, \dots, q_{n+1} - 1\}$  et  $f^k([f^{q_{n+1}}(0), 0])$  avec  $k \in \{0, \dots, q_n - 1\}$  si  $n$  est pair,
- ▷  $f^k([f^{q_n}(0), 0])$  avec  $k \in \{0, \dots, q_{n+1} - 1\}$  et  $f^k([0, f^{q_{n+1}}(0)])$  avec  $k \in \{0, \dots, q_n - 1\}$  si  $n$  est impair.

Dans toute la suite, nous représentons le cas  $n$  pair (le cas  $n$  impair s'en déduit par renversement d'orientation sur  $S^1$ ). Nous rangeons ces atomes suivant la présentation de [KO1] en tours avec balcons comme représenté sur la figure 1.

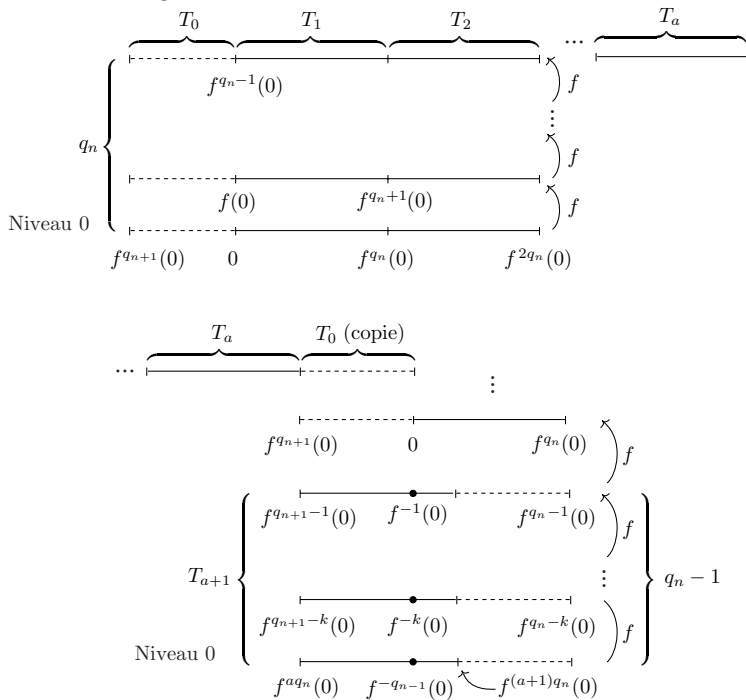


Figure 1. Tours avec balcons

Explication de la figure. — Nous commençons par placer au niveau 0 les deux intervalles consécutifs  $[f^{q_{n+1}}(0), 0]$  et  $[0, f^{q_n}(0)]$ . Nous empilons

au-dessus de ces intervalles leurs images par les itérés de  $f$  jusqu'à ce que l'une des bornes soit un point déjà vu (en l'occurrence  $f^{q_n}(0)$ ). On élève ainsi

$$\begin{aligned} \triangleright \text{ la première tour } T_1 &= \bigcup_{k=0}^{q_n-1} f^k([0, f^{q_n}(0)]) \\ \triangleright \text{ avec ses balcons } T_0 &= \bigcup_{k=0}^{q_n-1} f^k([f^{q_{n+1}}(0), 0]). \end{aligned}$$

Les atomes de  $\Delta_n(0)$  qui sont les images itérées de  $[f^{q_{n+1}}(0), 0]$  sont tous placés.

La première image itérée de  $[0, f^{q_n}(0)]$  non placée est  $[f^{q_n}(0), f^{2q_n}(0)]$  que nous plaçons à droite de  $[0, f^{q_n}(0)]$  et élevons une *deuxième tour*

$$T_2 = f^{q_n}(T_1).$$

Nous élevons ainsi des tours de hauteur  $q_n$  (constituées d'un empilement de  $q_n$  intervalles) notées  $T_i = f^{(i-1)q_n}(T_1)$  et ceci jusqu'à écrire le dernier atome  $[f^{q_{n+1}-1}(0), f^{q_{n+1}+q_n-1}(0)]$ . La dernière tour est incomplète.

Puisque  $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$ , le nombre de tours complètes (i.e. de hauteur  $q_n$ ) est  $E(q_{n+1}/q_n) = a_{n+1}$  et la hauteur de la dernière tour  $T_{a_{n+1}+1}$  est  $q_{n-1}$ . Pour que la figure soit plus lisible, nous avons noté  $a = a_{n+1}$ .

En résumé,  $S^1$  s'écrit comme  $\bigcup_{i=0}^{a+1} T_i$  avec :

$$\begin{aligned} T_0 &= \bigcup_{k=0}^{q_n-1} f^k([f^{q_{n+1}}(0), 0]), & T_1 &= \bigcup_{k=0}^{q_n-1} f^k([0, f^{q_n}(0)]), \\ T_i &= f^{(i-1)q_n}(T_1) \quad \text{pour } 0 < i \leq a, \\ T_{a+1} &= \bigcup_{k=0}^{q_{n-1}-1} f^k([f^{aq_n}(0), f^{(a+1)q_n}(0)]) \subset f^{aq_n}(T_1) \end{aligned}$$

et les  $T_i$  sont deux à deux d'intérieurs disjoints.

L'action de  $f$  sur ces tours avec balcons consiste à gravir un étage et, une fois au sommet, à dégringoler au niveau 0 de la tour immédiatement à droite, à l'exception du sommet de  $T_0$  dont l'image par  $f$  est l'intervalle  $[f^{q_n+q_{n+1}}(0), f^{q_n}(0)]$  qui est strictement contenu dans l'atome  $[0, f^{q_n}(0)]$  et du sommet de  $T_{a+1}$  dont l'image par  $f$  n'est pas un  $n$ -atome et contient l'intervalle  $[f^{q_{n+1}}(0), 0]$ . Comme nous serons amenés à itérer  $q_n - 1$  fois certains  $n$ -atomes nous repérons par des '●' les préimages  $f^{-k}(0)$  de 0 qui constituent les obstructions à ce que ces itérés soient des  $n$ -atomes. Afin de

bien représenter la manière dont les  $n$ -atomes s'itèrent et se positionnent les uns par rapport aux autres, nous traçons une seconde copie des balcons  $T_0$  et de l'intervalle  $[0, f^{q_n}(0)]$ .

- *Constantes universelles, intervalles comparables, mauvais atomes.* Une *constante universelle* est une constante qui ne dépend ni de  $n$  ni du point base 0 de la partition dynamique.

Deux intervalles sont dits *comparables* si le rapport de leurs longueurs (i.e. leurs mesures pour  $m$ ) est borné par deux constantes universelles dans  $]0, +\infty[$ . Ceci définit une relation d'équivalence sur les intervalles.

Un  $(n + 2)$ -atome de  $\Delta_{n+2}(0)$  est dit *mauvais* s'il est de l'un des trois types suivants :

- (P) lorsque son extrémité gauche borne de  $\Delta_{n+2}(0)$  est une borne de  $\Delta_n(0)$ . Dans ce cas, cet atome est le premier atome de la partition en  $(n + 2)$ -atomes du  $n$ -atome qui le contient ;
- (D) lorsque son extrémité droite est une borne de  $\Delta_n(0)$  ;
- (M) lorsqu'il contient un  $f^{-k}(0)$  avec  $k \in \{1, \dots, q_n - 1\}$ .

La figure 2 représente la subdivision d'un  $n$ -atome par les  $(n + 2)$ -atomes dans le cas particulier où  $a_{n+2} = a_{n+1} = 1$  c'est-à-dire où  $q_{n+3} = q_{n+1} + q_{n+2}$  et  $q_{n+2} = q_n + q_{n+1}$  ; les itérés  $f^j(0)$  de 0 y sont repérés par leur ordre d'itération  $j$  et nous indiquons certains  $f^{-k}(0)$  avec  $k \in \{1, \dots, q_n - 1\}$  ainsi que le type des atomes. La ligne inférieure représente la subdivision des atomes  $[f^{q_{n+1}}(0), 0]$  et  $[0, f^{q_n}(0)]$ , la ligne supérieure celle des atomes  $f^j([f^{q_{n+1}}(0), 0])$  et  $f^j([0, f^{q_n}(0)])$ , lorsque  $1 \leq k = q_{n+1} - j \leq q_n - 1$ .

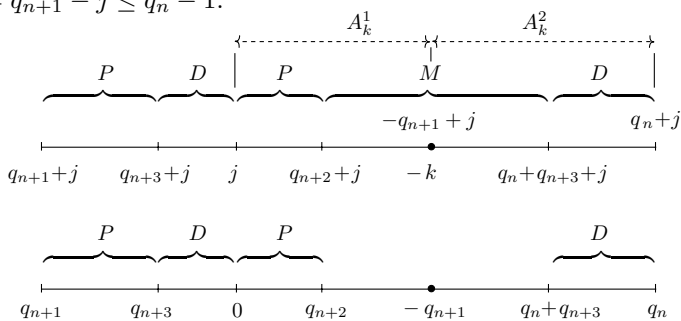


Figure 2. Le cas  $a_{n+2} = a_{n+1} = 1$

On peut voir sur cette figure que les trois types de mauvais atomes

sont bien distincts, ceci est un fait général : lorsque les  $a_n > 1$ , la partition est plus fine, les premiers et derniers  $(n + 2)$ -atomes sont séparés par plusieurs  $(n + 2)$ -atomes dont l'un peut être de type (M).

• *Atomes généralisés.* — Soit  $k \in \{1, \dots, q_n - 1\}$ , le  $n$ -atome qui contient le point  $f^{-k}(0)$  c'est-à-dire l'atome

$$A_k(n) = [f^{q_{n+1}-k}(0), f^{q_{n+1}+q_n-k}(0)] = [f^j(0), f^{j+q_n}(0)]$$

avec  $j = q_{n+1} - k \in \{q_{n+1} - q_n + 1, \dots, q_{n+1} - 1\}$  ne peut pas être itéré  $q_n - 1$  fois dans la partition, au sens où — à partir d'un certain ordre — ses itérés ne sont plus des  $n$ -atomes. Subdivisons  $A_k(n)$  en deux sous-intervalles appelés  *$n$ -atomes généralisés* :

$$A_k^1 = [f^{q_{n+1}-k}(0), f^{-k}(0)] = [f^j(0), f^{j-q_{n+1}}(0)] \text{ et}$$

$$A_k^2 = [f^{-k}(0), f^{q_n+q_{n+1}-k}(0)] = [f^{j-q_{n+1}}(0), f^{j+q_n}(0)].$$

On convient de considérer les  $n$ -atomes autres que les  $A_k(n)$  comme des  *$n$ -atomes généralisés*. Ainsi, l'image par un itéré positif de  $f$  d'ordre au plus  $q_n - 1$  d'un  $n$ -atome généralisé est toujours contenue dans un  $n$ -atome.

**2.2. Bornes universelles pour  $\Delta_n(0)$**

PROPOSITION 3. — Soient  $\alpha$  un irrationnel de type constant,  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux de nombre de rotation  $\alpha$ , 0 un point de  $S^1$  et  $n$  un entier.

- (i) Deux intervalles consécutifs de  $\Delta_n(0)$  sont comparables.
- (ii) Chaque  $n$ -atome  $I$  est subdivisé en au plus  $(a_{n+2} + 1)$  atomes de  $\Delta_{n+1}(0)$  tous comparables à  $I$ .
- (iii) Il existe une constante universelle  $P > 0$  telle que  $m(T_i) \geq P$ , pour tout  $i = 1, \dots, a$ .
- (iv) Chaque  $n$ -atome contient au plus un point de l'ensemble  $\{f^{-k}(0), k = 1, \dots, q_{n+1}\}$ .
- (iv') Pour tout  $k \in \{1, \dots, q_n - 1\}$ , le  $(n + 2)$ -atome  $A_k(n + 2)$  partage le  $n$ -atome  $A_k(n)$  en trois intervalles comparables et les deux  $n$ -atomes généralisés contenus dans  $A_k(n)$  lui sont comparables.
- (v) Il existe une constante universelle  $W > 0$  telle que, pour tout  $n$ -atome généralisé  $A'_n$ , on a  $m(\bigcup_{j=0}^{q_n-1} f^j(A'_n)) \geq W$ .

Remarque. — La propriété (iv) ne nécessite pas l'hypothèse  $\alpha$  de type constant.

*Preuve de la proposition 3.* — Notons  $I_0^+ = [0, f^{q_n}(0)]$  et  $I_0^- = [f^{q_{n+1}}(0), 0]$ . Nous devons montrer que deux intervalles consécutifs de  $\Delta_n(0)$  sont comparables, les possibilités pour deux intervalles consécutifs de  $\Delta_n(0)$  sont :

- 1)  $f^k(I_0^+)$  et  $f^k(f^{q_n}(I_0^+))$  ou
- 2)  $f^k(I_0^-)$  et  $f^k(I_0^+)$  ou
- 3)  $f^k(f^{q_{n+1}-q_n}(I_0^+))$  et  $f^k(I_0^-)$ .

Dans le cas 1), les intervalles consécutifs sont de la forme  $J$  et  $f^{q_n}(J)$ . Par le théorème des accroissements finis et les inégalités de Denjoy, on montre que  $e^{-V} \leq m(f^{q_n}(J))/m(J) = Df^{q_n}(w) \leq e^V$ , prouvant que ces deux intervalles sont comparables.

D'après le lemme de Finzi (la distortion de  $f^k$  pour  $0 \leq k < q_n$  sur la réunion des deux atomes consécutifs  $I_0^-$  et  $I_0^+$  est comprise entre  $e^{-2V}$  et  $e^{2V}$ ) et les inégalités de Denjoy (qui indiquent que  $f^{q_{n+1}-q_n}(I_0^+)$  est comparable à  $I_0^+$ ), il nous suffit, pour avoir 2) et 3), de montrer que les intervalles  $I_0^+$  et  $I_0^-$  sont comparables.

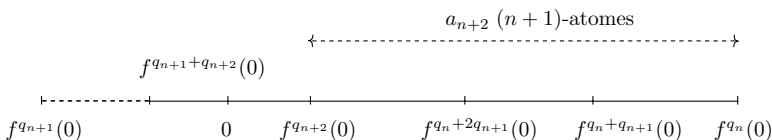


Figure 3. Subdivision atomique

Puisque  $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$ , le  $n$ -atome  $I_0^+$  est constitué de  $a_{n+2} + 1$  atomes de  $\Delta_{n+1}(0)$ , comme indiqué sur la figure 3, de plus on a

$$\begin{aligned}
 I_0^+ &= [0, f^{q_n}(0)] \subset [f^{q_{n+1}+q_{n+2}}(0), f^{q_n}(0)] \\
 &= \bigcup_{j=0}^{a_{n+2}} f^{jq_{n+1}}([f^{q_n+q_{n+1}}(0), f^{q_n}(0)]).
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 m(I_0^+) &\leq \sum_{j=0}^{a_{n+2}} (\sup Df^{jq_{n+1}})(\sup Df^{q_n}) m([f^{q_{n+1}}(0), 0]) \\
 &\leq \sum_{j=0}^{a_{n+2}} (e^V)^{j+1} m(I_0^-).
 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$I_0^+ = [0, f^{q_n}(0)] \supset [f^{q_{n+2}}(0), f^{q_n}(0)] = \bigcup_{j=0}^{a_{n+2}-1} f^{jq_{n+1}}([f^{q_n+q_{n+1}}(0), f^{q_n}(0)]).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} m(I_0^+) &\geq \sum_{j=0}^{a_{n+2}-1} (\inf Df^{jq_{n+1}})(\inf Df^{q_n}) m([f^{q_n+q_{n+1}}(0), 0]) \\ &\geq \sum_{j=0}^{a_{n+2}-1} (e^{-V})^{j+1} m(I_0^-). \end{aligned}$$

Puisque  $\alpha$  est de type constant,  $\sup_{\ell} a_{\ell}$  est fini et on a la première assertion de la proposition 3.

Ces arguments démontrent aussi la seconde assertion (ii). En effet :

- Pour les intervalles du type  $f^k([0, f^{q_n}(0)])$  ( $0 \leq k < q_{n+1}$ ), la subdivision par les  $(n + 1)$ -atomes est l'image par  $f^k$  de la subdivision de  $[0, f^{q_n}(0)]$  par les  $(n + 1)$ -atomes. Elle est représentée sur la figure 3 ; elle se résume par

$$[0, f^{q_n}(0)] = [0, f^{q_{n+2}}(0)] \cup \bigcup_{j=0}^{a_{n+2}-1} f^{jq_{n+1}}([f^{q_n+q_{n+1}}(0), f^{q_n}(0)]).$$

Ces intervalles sont comparables à  $I_0^-$  donc à  $I_0^+$  d'après (i). En effet, le premier est  $[0, f^{q_{n+2}}(0)]$  qui d'après (i) (pour  $n + 1$ ) est bien comparable à  $I_0^-$  et les suivants sont des  $f^{jq_n}(f^{q_n}(I_0^-))$  avec  $j \leq a_{n+2} \leq \sup_{\ell} a_{\ell}$  donc comparables à  $I_0^-$ . Ensuite, on utilise le lemme de Finzi pour répercuter ce résultat sur les itérés de  $I_0^+$ .

- Les intervalles du type  $f^k([f^{q_{n+1}}(0), 0])$  sont aussi des  $(n + 1)$ -atomes : il n'y a pas de subdivision. Ceci conclut la preuve de (ii).

Pour (iii), calculons

$$1 = m(T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_a \cup T_{a+1}) = m(T_0) + \dots + m(T_{a+1})$$

où l'on a  $a = a_{n+1}$  ainsi que  $T_{i+1} = f^{iq_n}(T_1)$  lorsque  $i = 0, \dots, a - 1$ , puis  $T_{a+1} \subset f^{aq_n}(T_1)$  et  $T_0 = \bigcup_{k=0}^{q_n-1} f^k([f^{q_{n+1}}(0), 0]) \subset f^{q_{n+1}}(T_1)$  car

$$[f^{q_{n+1}}(0), 0] \subset [f^{q_{n+1}}(0), f^{q_{n+1}+q_n}(0)] = f^{q_{n+1}}([0, f^{q_n}(0)]).$$

Ainsi,  $m(T_{i+1}) \leq (\sup Df^{iq_n})m(T_1) \leq e^{iV}m(T_1)$  pour  $i = 0, \dots, a$ , d'après les inégalités de Denjoy qui donnent aussi  $m(T_0) \leq e^Vm(T_1)$ . Finalement,

$$1 \leq (1 + 2e^V + e^{2V} + e^{3V} + \dots + e^{aV})m(T_1),$$

puisque  $\alpha$  est de type constant,  $A = \sup_{\ell} a_{\ell}$  est fini,  $1 + 2e^V + e^{2V} + \dots + e^{aV} \leq 1 + 2e^V + e^{2V} + e^{3V} + \dots + e^{AV} = C$  une constante universelle et  $m(T_1) \geq 1/C$ .

Comme on a  $m(T_{i+1}) \geq e^{-iV} m(T_1) \geq e^{-AV} m(T_1)$  pour  $i = 0, \dots, a-1$  par les inégalités de Denjoy, il est possible de trouver une constante universelle  $P = (1/C) e^{-AV}$  telle que  $m(T_{i+1}) \geq P$ .

Pour le (iv), il est clair sur la figure 1 que chaque  $n$ -atome contient au plus un  $f^{-k}(0)$  pour  $k = 0, \dots, q_{n+1}$ . Précisément, puisque  $0 \in [f^{q_{n+1}}(0), f^{q_{n+1}+q_n}(0)]$ , pour tout  $k \in \{1, \dots, q_{n+1}\}$  le point  $f^{-k}(0)$  appartient à l'intervalle  $f^{-k}([f^{q_{n+1}}(0), f^{q_{n+1}+q_n}(0)])$  qui est un  $n$ -atome et ces  $n$ -atomes là sont tous deux à deux distincts.

Pour le (iv'), soit  $k \in \{1, \dots, q_n - 1\}$ , on a  $A_k(n+2) = f^{-k}([f^{q_{n+3}}(0), f^{q_{n+3}+q_{n+2}}(0)])$  et  $A_k(n) = f^{-k}([f^{q_{n+1}}(0), f^{q_{n+1}+q_n}(0)])$ . Les quatre bornes de ces deux intervalles sont des bornes distinctes de  $\Delta_{n+2}(0)$  donc deux points consécutifs parmi elles sont toujours séparés par au moins un  $(n+2)$ -atome.

Or, d'après (ii), un  $(n+2)$ -atome est comparable au  $(n+1)$ -atome qui le contient et par transitivité, il est aussi comparable au  $n$ -atome qui le contient. Pour conclure, toute composante de  $A_k(n) \setminus A_k(n+2)$  ainsi que tout  $n$ -atome généralisé contenu dans  $A_k(n)$  contient un intervalle comparable à  $A_k(n)$  donc est comparable à  $A_k(n)$ .

Pour le dernier point (v), lorsque  $A'_n$  est un  $n$ -atome, il s'écrit :

- $A'_n = f^k([0, f^{q_n}(0)])$  et le résultat cherché est le point (iii) pour la tour  $T_1$  de la partition dynamique de base  $0' = f^k(0)$  ou

- $A'_n = f^j([f^{q_{n+1}}(0), 0])$ , d'après le (i) on sait que  $[f^{q_{n+1}}(0), 0]$  et  $[0, f^{q_n}(0)]$  sont comparables et ceci reste vrai par le lemme de Finzi pour leurs images par  $f^j$  lorsque  $j = 0, \dots, q_n - 1$  et la réunion des  $q_n - 1$  premiers itérés de  $A'_n$  est comparable à  $T_1$  donc sa taille est minorée par une autre constante universelle  $P' > 0$ .

Lorsque  $A'_n$  n'est pas un  $n$ -atome, il est alors contenu dans un  $n$ -atome  $A_k(n)$ . Du (iv') résulte que  $A'_n$  et  $A_k(n)$  sont comparables et ceci reste vrai par le lemme de Finzi pour leurs images par  $f^j$  lorsque  $j = 0, \dots, q_n - 1$ . Ainsi, la réunion des  $q_n - 1$  premiers itérés de  $A'_n$  est comparable à

$$T' = \bigcup_{j=0}^{q_n-1} f^j([f^{q_{n+1}-k}(0), f^{q_{n+1}+q_n-k}(0)]) = \bigcup_{j=0}^{q_n-1} f^j([0', f^{q_n}(0')]),$$

où  $0' = f^{q_{n+1}-k}(0)$ . La tour  $T'$  n'est autre que  $T_1$  pour la partition  $\Delta_n(0')$ . D'après (iii), la constante universelle  $P > 0$  minore sa taille. Par comparaison, il existe une autre constante universelle  $P'' > 0$  qui minore celle de  $\bigcup_j f^j(A'_n)$ .  $\square$

**3. Preuve de la partie 2 du théorème 2.**

Soit  $\alpha$  un nombre irrationnel de type constant et  $f$  un homéomorphisme du cercle affine par morceaux de nombre de rotation  $\alpha$ . Nous supposons que le nombre de discontinuités de  $Df^n$  n'est pas borné et nous reprenons la stratégie annoncée dans l'introduction, nous la développons et nous indiquons les passages où les hypothèses supplémentaires (à celle «le nombre de discontinuités de  $Df^n$  n'est pas borné») sont nécessaires. Nous commençons par identifier les discontinuités de  $Df^{-qn}$ .

**3.1. Étude préliminaire, notion de discontinuité essentielle et énoncés des propositions.** — Il existe une partition de l'ensemble  $\mathcal{D}f^{-1}$  des points de coupure de  $f^{-1}$  en ensembles  $\mathcal{C}_1 = \{c_1^1, \dots, c_{s_1}^1\}, \dots, \mathcal{C}_q = \{c_1^q, \dots, c_{s_q}^q\}$  tels que pour tout  $i$  :

- $\mathcal{C}_i$  est contenu dans une orbite, on écrit  $c_i = c_1^i$  et  $c_{s_i}^i = f^{N_i}(c_i)$ ,
- l'orbite négative de  $c_i$  et l'orbite positive de  $c_{s_i}^i$  ne contiennent pas de point de coupure de  $f^{-1}$  (en particulier les orbites contenant deux  $\mathcal{C}_i$  distincts sont disjointes),
- pour  $i = p + 1, \dots, q$ , le produit  $\sigma_i = \prod_{d \in \mathcal{C}_i} \sigma_{f^{-1}(d)}$  vaut 1,
- le produit  $\sigma_i$  défini ci-dessus est différent de 1 pour  $i = 1, \dots, p$ ; la discontinuité  $c_i$  est dite *essentielle*.

On a  $\sigma_1 \cdots \sigma_p = \sigma_1 \cdots \sigma_q = 1$  comme produit de tous les sauts de  $Df^{-1}$ . On dit que  $f$  a une *compensation essentielle partielle* s'il existe un produit de  $\sigma_i$  avec  $1 \leq i \leq p$  partiel (i.e. autre que le produit  $\sigma_1 \cdots \sigma_p$ ) et trivial.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , les candidats pour les discontinuités de  $Df^{-n}$  sont les  $f^k(c_i)$  avec  $k = 0, \dots, n + N_i - 1$  et  $i = 1, \dots, q$ . Nous pouvons faire les observations suivantes.

1) Nous avons vu dans la proposition 0 que le nombre de discontinuités de  $Df^{-n}$  qui sont sur l'orbite de  $c_i$  est au plus  $2N_i$ , pour  $i \in \{p + 1, \dots, q\}$ .

2) L'hypothèse «le nombre de discontinuités de  $Df^{-n}$  est non borné» implique que  $p \geq 1$  (il y a au moins une discontinuité essentielle) et, comme  $\sigma_1 \cdots \sigma_p = 1$  avec l'un des  $\sigma_i \neq 1$ , il faut que  $p \geq 2$  : il y a au moins deux discontinuités essentielles.

3) D'autre part, un produit de sauts de  $Df^{-1}$  en des points de  $\mathcal{C}_i$  pour  $i \in \{1, \dots, p\}$  peut valoir 1. Dans ce cas,  $Df^{-n}$  peut être continue en certains  $f^k(c_i)$ , cependant le nombre de tels points est strictement inférieur à  $2N_i$ . En effet, dès que  $N_i \leq k \leq n - 1$ , l'ensemble  $\mathcal{C}_i$  est



entièrement contenu dans le segment  $\{f^k(c_i), \dots, f^{-n+k+1}(c_i)\}$  et donc le saut  $\sigma_{f^{-n}}(f^k(c_i)) = \prod_{d \in \mathcal{C}_i} \sigma_{f^{-1}}(d)$  le produit des sauts de  $Df^{-1}$  sur tout  $\mathcal{C}_i$  donc différent de 1 puisque  $c_i$  est essentielle. Ainsi, à un nombre fini près qui ne dépend pas de  $n$ , les discontinuités de  $Df^{-q_n}$  sont les segments d'orbites  $\{c_i, \dots, f^{q_n-1}(c_i)\}$  avec  $c_i$  essentielle.

Pour éviter des indices trop lourds, nous avons préféré placer sur  $S^1$  les discontinuités de  $Df^{-q_{n+1}}$ . Nous commençons par placer un premier segment celui du point  $c_1$  que nous rebaptisons 0, plus exactement nous considérons la partition dynamique  $\Delta_n(0)$ . Pour le placement des autres segments d'orbites de discontinuités dans  $\Delta_n(0)$ , nous prouvons la

PROPOSITION 4. — *Soient  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux de nombre de rotation  $\alpha$  irrationnel, 0 et  $c$  deux points d'orbites disjointes et  $n$  un entier fixé. Alors, chaque  $n$ -atome de  $\Delta_n(0)$  contient au plus un point de  $\{f^k(c), k \in \{0, \dots, q_{n+1} - 1\}\}$ .*

Nous devons contrôler le placement des points  $f^k(c)$  dans les  $n$ -atomes, c'est-à-dire borner loin de 0 et 1 leurs coefficients barycentriques dans ces atomes. En toute généralité, nous ne savons pas obtenir de telles bornes. Mais nous pouvons montrer sous l'hypothèse supplémentaire «sans compensation essentielle partielle» que le placement d'un seul autre segment d'orbite dans  $\Delta_n(0)$  suffit, c'est la

PROPOSITION 5. — *Soit  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux de nombre de rotation irrationnel de type constant  $\alpha$  et sans compensation essentielle partielle. Si existent deux discontinuités essentielles distinctes 0 et  $c$  de  $Df^{-1}$  et une constante universelle  $t_1$  dans  $]0, \frac{1}{2}]$  telles que, pour une infinité de  $n$ , le coefficient barycentrique de  $c$  dans le  $n$ -atome généralisé de  $\Delta_n(0)$  qui le contient appartient à  $[t_1, (1 - t_1)]$ , alors  $\mu_f$  est singulière par rapport à la mesure de Haar  $m$ .*

Remarques. 1) Une partie importante de la preuve de cette proposition repose sur un lemme de contrôle des coefficients barycentriques des  $f^k(c)$  dans les  $n$ -atomes qui les contiennent. Pour cela, le contrôle du coefficient barycentrique de  $c$  dans son  $n$ -atome ne suffit pas, il faut un contrôle du coefficient barycentrique de  $c$  dans son  $n$ -atome généralisé.

2) L'hypothèse «sans compensation partielle de saut» du théorème 2.2 implique celle de «sans compensation essentielle partielle» et le théorème 2.2 reste valable sous cette hypothèse affaiblie, elle intervient dans cette proposition pour prouver la

PROPOSITION 6. — Soit  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux de nombre de rotation irrationnel  $\alpha$ , sans compensation essentielle partielle et tel que 0 soit une discontinuité essentielle de  $Df^{-1}$ . Alors il existe  $\delta_0 > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $\delta \leq \delta_0$  et pour tout entier  $n$  chaque  $n$ -atome de  $\Delta_n(0)$  — à l'exception d'au maximum  $N$  — contient au plus un intervalle de continuité de  $Df^{-q_{n+1}}$  sur lequel  $|Df^{-q_{n+1}} - 1| \leq \delta$ .

Pour cette proposition, 0 doit être une discontinuité essentielle de  $Df^{-1}$ . Pour contrôler le placement d'un seul segment d'orbite  $\{f^k(c), k \in \{0, \dots, q_{n+1} - 1\}\}$  dans  $\Delta_n(0)$ , nous avons besoin de l'hypothèse «  $\alpha$  de type constant » car notre contrôle est obtenu via le contrôle de la position du  $(n+2)$ -atome qui contient  $c$  dans le  $n$ -atome qui contient  $c$ .

PROPOSITION 7. — Soient  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux de nombre de rotation irrationnel de type constant  $\alpha$  et 0 un point donné de  $S^1$ . S'il existe une discontinuité essentielle  $c$  de  $Df^{-1}$  qui, pour une infinité de  $n$ , n'appartient à aucun mauvais  $(n+2)$ -atomes de  $\Delta_{n+2}(0)$  alors pour une infinité de  $n$  le coefficient barycentrique de  $c$  dans le  $n$ -atome de  $\Delta_n(0)$  qui le contient est universellement borné loin de 0 et 1.

Remarque. — Sous les hypothèses de cette proposition 7, les points 0 et  $c$  ne sont pas sur une même orbite (les atomes étant des intervalles fermés). De plus, si le point 0 est une discontinuité essentielle de  $Df^{-1}$ , cette proposition 7 implique les hypothèses de la proposition 5.

**3.2. Preuve de la partie 2 du théorème 2.** — Le fait que le nombre de discontinuités de  $Df^n$  soit non borné nous permet d'assurer l'existence d'au moins deux discontinuités essentielles distinctes de  $Df^{-1}$  que nous notons 0 et  $c$ . Si ces deux points vérifient les hypothèses de la proposition 7 et que  $f$  n'a pas de compensation essentielle partielle alors les hypothèses de la proposition 5 sont vérifiées et l'on peut conclure que la mesure de probabilité  $f$ -invariante est singulière par rapport à la mesure de Haar.

Supposons que 0 et  $c$  ne vérifient pas les hypothèses de la proposition 7, ainsi — à partir d'un certain rang —  $c$  est toujours placé dans un mauvais atome de  $\Delta_n(0)$ . Considérons la suite d'intervalles emboîtés  $\mathcal{A}_n(c)$  constituée des  $2n$ -atomes de  $\Delta_{2n}(0)$  qui contiennent  $c$ . On peut faire les observations suivantes :

- Il n'est pas possible que — à partir d'un certain rang —  $\mathcal{A}_n(c)$  soit toujours le premier  $2n$ -atome de  $\mathcal{A}_{n-1}(c)$ . En effet, dans un tel cas l'extrémité droite de  $\mathcal{A}_n(c)$  est toujours le même point de l'orbite de 0.

Comme la taille des  $\mathcal{A}_n(c)$  tend vers 0, la suite  $\mathcal{A}_n(c)$  converge vers  $c$ . Mais, tous les  $\mathcal{A}_n(c)$  — à partir d'un certain rang — contiennent un même point de l'orbite de 0 : ce point doit être dans la limite des  $\mathcal{A}_n(c)$  donc doit être  $c$ . Ceci contredit le fait que  $c$  et 0 ont des orbites disjointes.

- Il n'est pas possible que — à partir d'un certain rang —  $\mathcal{A}_n(c)$  soit toujours le dernier  $2n$ -atome de  $\mathcal{A}_{n-1}(c)$ , par l'argument ci-dessus.

- Il n'est pas possible que — à partir d'un certain rang —  $\mathcal{A}_n(c)$  soit toujours le  $2n$ -atome  $M$  de  $\mathcal{A}_{n-1}(c)$ . En effet, par l'argument ci-dessus, il n'est pas possible que tous les  $\mathcal{A}_n(c)$  — à partir d'un certain rang — contiennent un même  $f^{-k_0}(0)$  fixé. Par conséquent, s'ils sont tous de type  $M$ , il existe  $n$  arbitrairement grand tel que :

$$\triangleright \mathcal{A}_n(c) \text{ contient un } f^{-k_n}(0) \text{ avec } 1 \leq k_n \leq q_{2n-2} - 1,$$

$$\triangleright \mathcal{A}_{n+1}(c) \text{ contient un } f^{-k_{n+1}}(0) \text{ avec } 1 \leq k_{n+1} \leq q_{2n} - 1$$

et les deux points  $f^{-k_n}(0)$  et  $f^{-k_{n+1}}(0)$  avec  $k_n, k_{n+1} \in \{1, \dots, q_{2n} - 1\}$  sont distincts et appartiennent au  $2n$ -atome  $\mathcal{A}_n(c)$ , ce qui contredit le (iv) de la proposition 3.

En conclusion, il n'est pas possible que — à partir d'un certain rang — la suite des  $\mathcal{A}_n(c)$  soit constituée d'atomes d'un même type. Par conséquent, pour une infinité de  $n$ , l'atome  $\mathcal{A}_n(c)$  est de type (P) ou (D) et  $\mathcal{A}_{n+1}(c)$  est de l'un des deux autres mauvais types possibles. En effet, puisqu'il y a alternance de type  $\mathcal{A}_n(c)$  n'est pas toujours (M) donc de type (P) ou (D) et ne peut rester indéfiniment de ce type. Dans ces moments d'alternance de types,  $c$  est au moins séparé de chacune des extrémités du  $2(n-1)$ -atome généralisé  $\mathcal{A}'_{n-1}(c)$  qui le contient par un  $2(n+1)$ -atome ou un  $2n$ -atome généralisé :  $P$  et  $A_\omega$  représentés en gras sur la figure 4, où  $\omega$  est soit l'éventuel  $f^{-k}(0)$  contenu dans  $\mathcal{A}_{n-1}(c)$  soit l'extrémité droite de  $\mathcal{A}_{n-1}(c)$  et  $A_\omega$  est soit un  $2n$ -atome généralisé contenu dans un  $2n$ -atome de type (M), soit un  $2n$ -atome de type (D) donc dans les deux cas d'intérieur disjoint de  $\mathcal{A}_n(c)$ .

Ensuite, grâce au (ii) et (iv') de la proposition 3 on conclut que le coefficient barycentrique de  $c$  dans son  $2(n-1)$ -atome généralisé est borné.

Maintenant, nous pouvons à nouveau appliquer la proposition 5 et conclure que la mesure de probabilité  $f$ -invariante est singulière par rapport à la mesure de Haar.  $\square$

### 3.3. Preuves des propositions 4, 6, 5 et 7.

*Preuve de la proposition 4.* — Le résultat de la proposition 4 ne

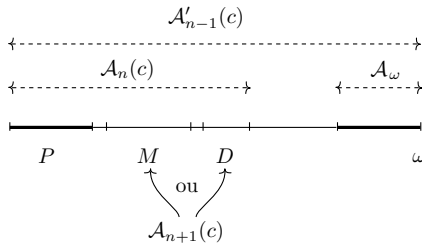


Figure 4. Alternance dans le cas où  $A_n(c)$  est de type (P)

dépend que de l'ordre des points d'une orbite sur le cercle; il suffit donc d'effectuer la vérification pour les partitions dynamiques de la rotation  $R_\alpha$ . Nous nous reportons aux propriétés et notations du « formulaire de fractions continues » mentionné dans l'introduction. Nous rappelons en particulier la propriété : si un entier non nul  $n$  vérifie  $\|n\alpha\| < \|q_n\alpha\| = |q_n\alpha - p_n|$ , alors on a  $|n| \geq q_{n+1}$ , où  $\|x\| := \inf_{p \in \mathbb{Z}} |x + p|$ .

Par l'absurde, nous supposons qu'existent deux entiers  $k$  et  $k'$  dans l'ensemble  $\{0, \dots, q_{n+1} - 1\}$  pour lesquels  $R_\alpha^k(c)$  et  $R_\alpha^{k'}(c)$  sont dans l'intérieur d'un même  $n$ -atome, alors

$$\|R_\alpha^k(c) - R_\alpha^{k'}(c)\| = \|(k - k')\alpha\| < \|q_n\alpha\|.$$

Par la propriété ci-dessus,  $|k - k'| \geq q_{n+1}$ , ce qui n'est pas possible avec  $k$  et  $k'$  dans  $[0, q_{n+1} - 1]$ . □

*Preuve de la proposition 6.* — Nous reprenons les notations de l'étude préliminaire au début de ce paragraphe et convenons de  $c_1 = 0$ . Soit  $A$  un  $n$ -atome de  $\Delta_n(0)$  qui ne rencontre pas les discontinuités de  $Df^{-q_{n+1}}$  qui sont sur les orbites des points de coupure non essentiels  $c_{p+1}, \dots, c_q$  ni les discontinuités de  $Df^{-q_{n+1}}$  qui s'écrivent  $f^k(c_i)$  avec  $i \in \{1, \dots, p\}$  et  $k \geq q_{n+1}$ . Il résulte de l'étude préliminaire que les points invoqués ci-dessus sont en nombre fini indépendant de  $n$  et donc que le nombre d'atomes qui ne satisfont pas ces conditions est borné par une constante  $N$  qui ne dépend pas de  $n$ .

D'après la proposition 4, l'atome  $A$  contient au plus un point de chaque segment  $\{c_i, \dots, f^{q_{n+1}-1}(c_i)\}$ , pour  $i = 2, \dots, p$ . Notons  $x_i$  ce point éventuel. Pour  $i = 1$ , l'intérieur de  $A$  ne contient aucun point du segment  $\{0, \dots, f^{q_{n+1}}(0)\}$ . Par conséquent, les discontinuités de  $Df^{-q_{n+1}}$  dans l'intérieur de  $A$  sont exactement les  $x_i$  et le saut de  $Df^{-q_{n+1}}$  en  $x_i$  est

$$\sigma_n(x_i) = \sigma_{f^{-q_{n+1}}}(x_i) = \prod_{d \in C'_i} \sigma_{f^{-1}}(d),$$

où  $\mathcal{C}'_i = \{x_i, \dots, f^{-(q_{n+1}-1)}(x_i)\} \cap \mathcal{C}_i$  et où  $\mathcal{C}_i$  est l'ensemble des discontinuités de  $Df^{-1}$  situées sur l'orbite de  $c_i$ . Ainsi, si  $Df^{-q_{n+1}}$  prend la valeur  $\lambda$  dans  $A$ , ses autres valeurs dans  $A$  s'écrivent  $(\prod_{i \in I} \sigma_n(x_i))\lambda$ , où  $I \subset \{2, \dots, p\}$ . Les valeurs possibles de  $Df^{-q_{n+1}}$  dans  $A$  sont contenues dans l'ensemble

$$\left\{ \lambda_D = \left( \prod_{d \in D} \sigma_{f^{-1}}(d) \right) \lambda : D \subset \bigcup_{i=2}^p \mathcal{C}'_i \subset Df^{-1} \setminus \mathcal{C}_1 \right\}.$$

L'ensemble décrit par  $D$  est contenu dans l'ensemble fini des parties de  $Df^{-1} \setminus \mathcal{C}_1$  et sans compensation essentielle partielle, aucun produit  $\prod_{d \in D} \sigma_{f^{-1}}(d)$  ne peut valoir 1 (puisque  $\sigma_1$  n'apparaît jamais dans un tel produit). Ainsi, le produit  $\prod_{d \in D} \sigma_{f^{-1}}(d)$  appartient à un ensemble fini  $F$  indépendant de  $n$  qui ne contient pas 1, la valeur  $\lambda$  est prise sur au plus un intervalle de continuité de  $Df^{-q_{n+1}}$  contenu dans  $A$  et les autres valeurs de  $Df^{-q_{n+1}}$  sur cet atome sont contenues dans l'ensemble  $F\lambda$ .

La proposition 6 s'obtient en écrivant ceci pour  $\lambda \in [1 - \delta, 1 + \delta]$  avec  $\delta$  suffisamment petit pour que  $F\lambda$  ne rencontre par l'intervalle  $[1 - \delta, 1 + \delta]$ . Explicitement, si nous notons  $F^+ = F \cap ]1, +\infty[$  et  $F^- = F \cap ]0, 1[$ , on a  $\min(F^+\lambda) \geq (\min F^+)(1 - \delta)$  et  $\max(F^-\lambda) \leq (\min F^-)(1 + \delta)$ . Pour que  $F\lambda$  ne rencontre pas l'intervalle  $[1 - \delta, 1 + \delta]$ , il suffit que le nombre  $\delta$  vérifie  $\min F^+(1 - \delta) > 1 + \delta$  et  $\max F^-(1 + \delta) < 1 - \delta$ .  $\square$

*Preuve de la proposition 5.* — Les notations et propriétés utilisées ici sont définies et prouvées en section 2.1 « bounded geometry ».

LEMME. — Soient  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux de nombre de rotation  $\alpha$  et de type constant, 0 et  $c$  deux points de  $S^1$ ,  $n$  un entier. Soit  $x \in S^1$ ; on note  $A_n(x)$  (resp.  $A'_n(x)$ ) le  $n$ -atome (resp. généralisé) de  $\Delta_n(0)$  qui contient  $x$  et  $t_n(x)$  (resp.  $t'_n(x)$ ) le coefficient barycentrique du point  $x$  dans  $A_n(x)$  (resp.  $A'_n(x)$ ).

1) Il existe une constante universelle  $C_1 > 0$  telle que pour tout entier  $n$ , pour tout  $k = 0, \dots, q_n - 1$  on a

$$\frac{t_n(f^k(c))}{t'_n(c)} \geq C_1 \quad \text{et} \quad \frac{1 - t_n(f^k(c))}{1 - t'_n(c)} \geq C_1.$$

2) Soit  $t_1$  une constante universelle dans  $]0, \frac{1}{2}[$ . Il existe une constante universelle  $t_2 \in ]0, \frac{1}{2}[$  telle que si  $n$  a la propriété que le coefficient barycentrique de  $c$  dans  $A'_n(c)$  est dans  $[t_1, 1 - t_1]$  alors le coefficient barycentrique de  $f^k(c)$  dans  $A_n(f^k(c))$  est dans  $[t_2, 1 - t_2]$ , pour tout  $k = 0, \dots, q_n - 1$ .

*Preuve du lemme.* — Fixons  $n \in \mathbb{N}$  que nous supposons pair (lorsque  $n$  est impair, on doit changer tous les coefficients barycentriques  $t$  par  $1 - t$ ). Nous démontrons la première inégalité de 1). Les cas rencontrés ci-dessous sont représentés sur les figures 5 et 6.

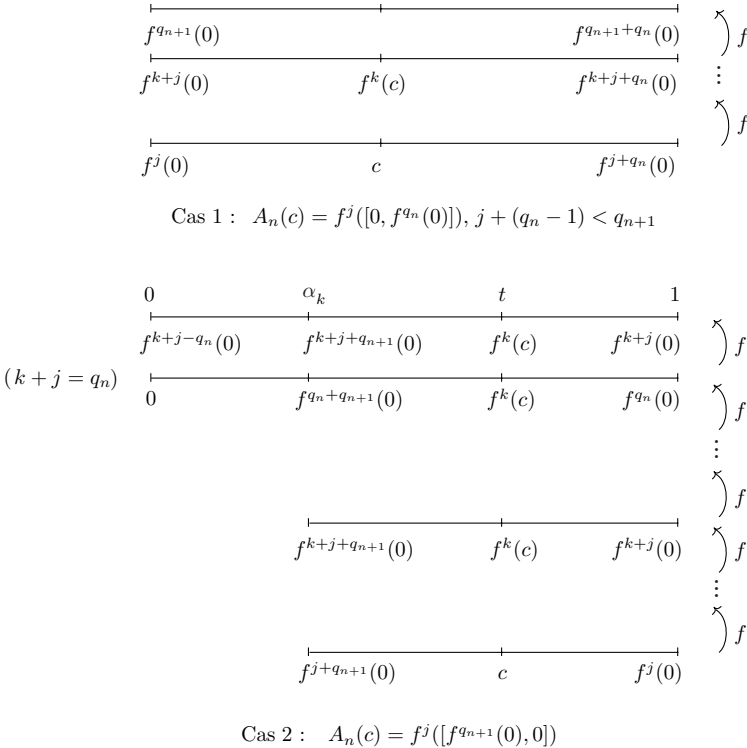


Figure 5. Les deux premiers cas considérés dans la preuve du lemme de la proposition 5. Les intervalles représentés sont les  $n$ -atomes qui contiennent les points  $f^k(c)$ , avec  $0 \leq k \leq q_n - 1$ . Les symboles en gras sont les coefficients barycentriques dans ces atomes.

- Cas 1 :  $A'_n(c) = A_n(c) = f^j([0, f^{q_n}(0)])$  avec  $j = 0, \dots, q_{n+1} - q_n$ .

Alors pour tout  $k \in \{0, \dots, q_n - 1\}$ , le  $n$ -atome contenant  $f^k(c)$  est  $f^{k+j}([0, f^{q_n}(0)])$  et le coefficient barycentrique est

$$t_n(f^k(c)) = \frac{m(f^k([f^j(0), c]))}{m(f^k(f^j([0, f^{q_n}(0)])))} = \frac{Df^k(x_k)}{Df^k(y_k)} t_n(c) = \frac{Df^k(x_k)}{Df^k(y_k)} t'_n(c),$$

avec  $x_k, y_k \in [f^j(0), f^{q_n}(f^j(0))]$ . D'après le théorème des accroissements

finis, en appliquant le lemme de Finzi, on obtient que

$$\frac{Df^k(x_k)}{Df^k(y_k)} \geq e^{-V}$$

et donc que  $t_n(f^k(c))/t'_n(c) \geq e^{-V}$ .

- Cas 2 :  $A'_n(c) = A_n(c) = f^j([f^{q_{n+1}}(0), 0])$  avec  $j = 0, \dots, q_n - 1$ .

Tant que  $j + k < q_n$ , l'image par  $f^k$  de  $A_n(c)$  est le  $n$ -atome contenant  $f^k(c)$ . Ainsi, l'analogie du calcul ci-dessus montre que pour  $k \in \{0, \dots, q_n - j - 1\}$ , on a  $t_n(f^k(c))/t'_n(c) \geq e^{-V}$ .

Maintenant, si  $k \geq q_n - j$ , alors  $f^k(A_n(c)) = [f^{k+j+q_{n+1}}(0), f^{k+j}(0)]$  est strictement contenu dans le  $n$ -atome  $[f^{k+j-q_n}(0), f^{k+j}(0)] = A_n(f^k(c))$ . Le coefficient barycentrique  $t$  de  $f^k(c)$  dans  $A_n(f^k(c))$  s'exprime à l'aide de son coefficient barycentrique  $t'$  dans  $f^k(A_n(c))$  par

$$\frac{t - \alpha_k}{1 - \alpha_k} = t',$$

où  $\alpha_k$  est le coefficient barycentrique du point  $f^{k+j+q_{n+1}}(0)$  dans  $A_n(f^k(c))$  donc borné loin de 0 et 1 par des constantes universelles d'après la proposition 3 (ii) et  $t'$  vérifie  $t' = w_k t'_n(c)$  avec  $e^{-V} \leq w_k \leq e^V$  par le théorème des accroissements finis et le lemme de Finzi. On en déduit que  $t = t_n(f^k(c)) = w_k t'_n(c)(1 - \alpha_k) + \alpha_k$ ; la division par  $t'_n(c)$  et les estimations sur  $w_k$  et  $\alpha_k$  donnent le résultat voulu.

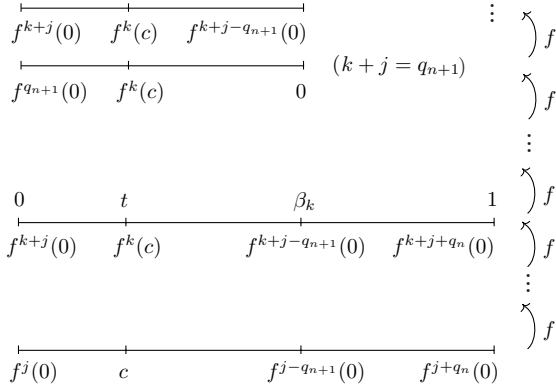
- Cas 3 :  $A_n(c) = f^j([0, f^{q_n}(0)])$  avec  $q_{n+1} - q_n + 1 \leq j \leq q_{n+1} - 1$ .

Le  $n$ -atome généralisé  $A'_n(c)$  qui contient  $c$  est soit  $f^j([0, f^{-q_{n+1}}(0)])$ , soit  $f^j([f^{-q_{n+1}}(0), f^{q_n}(0)])$ . Notons  $\beta_k$  le coefficient barycentrique de  $f^{k+j-q_{n+1}}(0)$  dans  $[f^{k+j}(0), f^{k+j+q_n}(0)]$ . Il résulte de la proposition 3 (ii) que  $\beta_k$  est borné loin de 0 et 1.

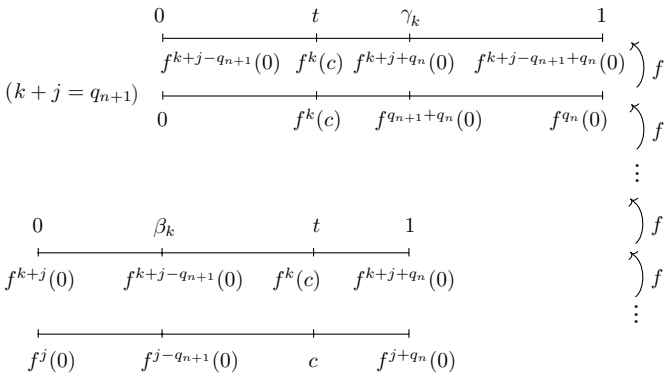
- a) Si  $A'_n(c) = f^j([0, f^{-q_{n+1}}(0)])$  alors, pour tout  $k \in \{0, \dots, q_n - 1\}$ , on a  $f^k(A'_n(c)) = f^{k+j}([0, f^{-q_{n+1}}(0)])$  est le  $n$ -atome généralisé qui contient  $f^k(c)$  et le coefficient

$$t'_n(f^k(c)) = \frac{m(f^k([f^j(0), c]))}{m(f^k(A_n(c)))} = \frac{Df^k(x_k)}{Df^k(y_k)} t'_n(c) = w_k t'_n(c),$$

avec  $e^{-V} \leq w_k \leq e^V$ , par Finzi.



Cas 3.a :  $A_n(c) = f^j([0, f^{q_n}(0)])$ ,  $j + (q_n - 1) \geq q_{n+1}$   
 et  $A'_n(c) = f^j([0, f^{-q_{n+1}}(0)])$



Cas 3.b :  $A_n(c) = f^j([0, f^{q_n}(0)])$ ,  $j + (q_n - 1) \geq q_{n+1}$   
 et  $A'_n(c) = f^j([f^{-q_{n+1}}(0), f^{q_n}(0)])$

Figure 6. Troisième cas considéré dans la preuve du lemme de la proposition 5. Les intervalles représentés sont les  $n$ -atomes qui contiennent les points  $f^k(c)$ , avec  $0 \leq k \leq q_n - 1$ . Les symboles en gras sont les coefficients barycentriques dans ces atomes.

Si  $k + j \geq q_{n+1}$ , alors  $f^k(A'_n(c))$  est un  $n$ -atome et donc  $t_n(f^k(c)) = t'_n(f^k(c))$  et le résultat suit.

Si  $k + j < q_{n+1}$ , alors  $A_n(f^k(c)) = [f^{k+j}(0), f^{k+j+q_n}(0)]$  contient strictement  $A'_n(f^k(c))$  et le coefficient barycentrique  $t$  de  $f^k(c)$  dans  $A_n(f^k(c))$



est relié à son coefficient barycentrique  $t'$  dans  $A'_n(f^k(c))$  par  $t' = t/\beta_k$ . Finalement,  $t_n(f^k(c)) = t = \beta_k t' = w_k \beta_k t'_n(c)$  et les estimations sur  $w_k$  et  $\beta_k$  donnent le résultat.

b) Si  $A'_n(c) = f^j([f^{-q_{n+1}}(0), f^{q_n}(0)])$ , alors le coefficient barycentrique  $t''$  de  $f^k(c)$  dans l'intervalle  $f^k(A'_n(c))$  vérifie d'après le théorème des accroissements finis  $t'' = w_k t'_n(c)$ , avec  $e^{-V} \leq w_k \leq e^V$  par Finzi.

Si  $k+j < q_{n+1}$ , alors le  $n$ -atome qui contient  $f^k(c)$  est  $f^{k+j}([0, f^{q_n}(0)])$  et le coefficient barycentrique  $t$  de  $f^k(c)$  dans cet atome est relié à  $t''$  par  $t'' = t - \beta_k/1 - \beta_k = w_k t'_n(c)$ . Finalement,  $t = (1 - \beta_k)w_k + \beta_k$  et les estimations sur  $w_k$  et  $\beta_k$  permettent de conclure.

Si  $k+j \geq q_{n+1}$ , le  $n$ -atome contenant  $f^k(c)$  est  $f^{k+j-q_{n+1}}([0, f^{q_n}(0)])$  et le coefficient barycentrique  $t$  de  $f^k(c)$  dans cet atome est relié à  $t''$  par  $t'' = t/\gamma_k$ , où  $\gamma_k$  est le coefficient barycentrique de  $f^{k+j+q_n}(0)$  dans  $f^{k+j-q_{n+1}}([0, f^{q_n}(0)])$ , borné loin de 0 et 1 par la proposition 3 (ii). Finalement,  $t = \gamma_k w_k t'_n(c)$  et les estimations sur  $w_k$  et  $\gamma_k$  permettent de conclure.

On peut effectuer les mêmes calculs en intervertissant les bornes droites et gauches de tous les intervalles, ceci ayant pour effet de changer un coefficient barycentrique  $t$  en  $1 - t$  et l'on obtient la deuxième inégalité de 1).

Pour 2), soit  $n$  un entier fixé pour lequel  $t'_n(c) \in [t_1, 1 - t_1]$ . Alors en appliquant le 1) on a, pour tout  $k \in \{0, \dots, q_n - 1\}$ ,

$$t_n(f^k(c)) \geq C_1 t'_n(c) \geq C_1 t_1 \quad \text{et} \quad 1 - t_n(f^k(c)) \geq C_1 (1 - t'_n(c)) \geq C_1 t_1.$$

On obtient 2) avec  $t_2 = C_1 t_1$ . □

Plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition 5, les points 0 et  $c$  sont deux discontinuités essentielles de  $Df^{-1}$ . Par l'absurde, supposons de plus que  $\mu_f$  soit équivalente à  $m$ . On choisit  $0 < \delta < \delta_0$  (le  $\delta_0$  de la proposition 6) et  $n$  assez grand pour que :

- en appliquant la proposition 2, on ait

$$m(\{x : |Df^{-q_{n+1}} - 1| \leq \delta\}) > 1 - \frac{1}{2} t_2 W,$$

où  $W$  est la constante universelle du (v) de la proposition 3 et  $t_2$  celle du lemme ci-dessus;

- les  $n$ -atomes qui contiennent plus d'un intervalle de continuité de  $Df^{-q_{n+1}}$  sur lequel  $|Df^{-q_{n+1}} - 1| \leq \delta$  ou qui contiennent un  $f^k(c)$

avec  $k \in \{0, \dots, q_{n+1} - 1\}$  qui n'est pas une discontinuité de  $Df^{-q_{n+1}}$  constituent un ensemble, noté  $\widehat{N}_n$ , de mesure au plus  $\frac{1}{2}W$ . Ceci est faisable puisque, d'après la proposition 6 et l'observation 3 de l'étude préliminaire des discontinuités, le nombre de ces atomes est fini borné indépendamment de  $n$  et que la mesure d'un  $n$ -atome tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

On pose  $\widehat{T}_n := (\bigcup_{k=0}^{q_n-1} A_n(f^k(c))) \setminus \widehat{N}_n$  et on estime sa mesure :

$$m(\widehat{T}_n) \geq \bigcup_{k=0}^{q_n-1} f^k(A'_n(c)) \setminus \widehat{N}_n \geq W - \frac{1}{2}W = \frac{1}{2}W,$$

car on a toujours  $f^k(A'_n(c)) \subset A_n(f^k(c))$ , par propriété des atomes généralisés, ensuite la proposition 3 (v) et nos choix donnent la dernière minoration.

Chaque atome  $A$  contenu dans  $\widehat{T}_n$  contient une véritable discontinuité  $f^k(c)$  de  $Df^{-q_{n+1}}$  (car contient toujours un point  $f^k(c)$ , pour  $k$  appartenant à  $\{0, \dots, q_{n+1} - 1\}$  et est contenu dans le complémentaire de  $\widehat{N}_n$ ) et  $Df^{-q_{n+1}}$  prend au plus une fois une valeur  $\delta$ -proche de 1 sur  $A$ . Ainsi, sur au moins l'un des deux sous-intervalles de  $A$  délimités par  $f^k(c)$  la fonction  $Df^{-q_{n+1}}$  est  $\delta$ -loin 1. Lorsque, de plus,  $n$  est tel que le coefficient barycentrique de  $c$  dans  $A'_n(c)$  est dans  $[t_1, 1 - t_1]$ , pour tout  $k \in \{0, \dots, q_n - 1\}$ , le coefficient barycentrique de  $f^k(c)$  dans  $A = A_n(f^k(c))$  est dans  $[t_2, 1 - t_2]$ , d'après le lemme précédent. Il en résulte que chacun des deux sous-intervalles de  $A$  délimités par  $f^k(c)$  a une taille au plus  $(1 - t_2)$  fois la taille de  $A$ . Ainsi, le borélien  $A_\delta$  sur lequel  $|Df^{-q_{n+1}} - 1| \leq \delta$  intersecte chaque  $n$ -atome de  $\widehat{T}_n$  en un intervalle (éventuellement vide) dont la taille est au plus  $(1 - t_2)$  fois la taille de ce  $n$ -atome. Par conséquent,

$$\begin{aligned} m(A_\delta) &= m(A_\delta \cap \widehat{T}_n) + m(A_\delta \cap {}^c\widehat{T}_n) \\ &\leq (1 - t_2)m(\widehat{T}_n) + (1 - m(\widehat{T}_n)) = 1 - t_2m(\widehat{T}_n) \\ &\leq 1 - \frac{1}{2}t_2W. \end{aligned}$$

D'où la contradiction. □

*Preuve de la proposition 7.* — Soient 0 un point donné de  $S^1$  et  $c$  une discontinuité essentielle de  $Df^{-1}$  telles que — pour une infinité de  $n$  — le point  $c$  n'appartient à aucun mauvais  $(n + 2)$ -atomes de  $\Delta_{n+2}(0)$ . Ainsi,  $c$  est toujours séparé de chacune des extrémités du  $n$ -atome généralisé qui le contient par un  $(n + 2)$ -atome ou  $(n + 2)$ -atome généralisé donc par un intervalle comparable à un  $n$ -atome, par (ii) et (iv') de la proposition 3. Par conséquent, pour une infinité de  $n$  le coefficient barycentrique de  $c$  dans le  $n$ -atome qui le contient est universellement borné loin de 0 et 1. □

#### 4. Preuves des corollaires.

##### 4.1. Preuve du corollaire 1.

*Fait 1 : l'hypothèse d'indépendance rationnelle des  $\log \lambda_i$  interdit la possibilité de compensation partielle de sauts et est générique au sens du corollaire 1.*

En effet, un produit partiel de sauts de  $Df$  qui est trivial est une relation de la forme  $1 = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_r} = (\lambda_{i_1} \lambda_{i_1-1}^{-1}) \dots (\lambda_{i_r} \lambda_{i_r-1}^{-1})$ , avec  $i_j \in 1, \dots, p$  et la convention  $\lambda_0 = \lambda_p$ .

Le produit étant partiel, un des sauts  $\sigma_s$  n'apparaît pas alors que son successeur  $\sigma_{s+1}$  apparaît dans la relation. Par conséquent,  $\lambda_s$  n'apparaît qu'une seule fois dans cette relation; on obtient une relation rationnelle non triviale en passant au logarithme.

Notons  $\mathcal{N}_1 = \{(r_1, \dots, r_p) \in G \text{ liés par une relation rationnelle}\}$ . On peut écrire

$$\mathcal{N}_1 = \bigcup_{(q_1, \dots, q_p) \in \mathbb{Z}^p} \{(r_1, \dots, r_p) \in G \text{ tels que } q_1 r_1 + \dots + q_p r_p = 0\},$$

et en déduire que  $\mathcal{N}_1$  est une union dénombrable de traces sur  $G$  d'hyperplans de  $\mathbb{R}^p$  donc de fermés d'intérieurs vides et de mesures de Lebesgue nulles.

*Fait 2 : soit  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux de nombre de rotation  $\alpha$ , de pentes  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ . Si les points de coupure de  $f$  sont sur une même orbite alors  $\alpha$  s'écrit comme le quotient de deux éléments du  $\mathbb{Q}$  sous-espace vectoriel engendré par  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_p$ .*

En effet, soient  $d_0, \dots, d_{p-1}$  les  $p$  points de coupure de  $f$ . Les points  $d_1, \dots, d_{p-1}$  étant tous sur l'orbite de  $d_0$  il existe  $(p-1)$  entiers  $N_1, \dots, N_{p-1}$  tels que

$$d_1 = f^{N_1}(d_0), \dots, d_{p-1} = f^{N_{p-1}}(d_0).$$

Notons  $h$  l'homéomorphisme qui conjugue  $f$  à la rotation d'angle  $\alpha$  ( $R_\alpha = h \circ f \circ h^{-1}$ ) et tel que  $h(d_0) = 0$ , on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} h(d_1) &= R_\alpha^{N_1}(0) = N_1 \alpha \pmod{1}, \\ &\vdots \\ h(d_{p-1}) &= R_\alpha^{N_{p-1}}(0) = N_{p-1} \alpha \pmod{1}. \end{aligned}$$

Or

$$0 = \int \log Df \, d\mu_f = \sum_{i=1}^{p-1} (\log \lambda_i) \mu_f([d_{i-1}, d_i]) + (\log \lambda_p) \mu_f([d_{p-1}, d_0]).$$

Et  $\mu_f([d_{i-1}, d_i]) = m([h(d_{i-1}), h(d_i)]) = (N_i - N_{i-1})\alpha \pmod{1}$  pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq p$  et les conventions  $d_p = d_0$  et  $N_p = N_0 = 0$ . Par conséquent, il existe deux  $p$ -uplets d'entiers  $(t_1, \dots, t_p)$  et  $(s_1, \dots, s_p)$  tels que  $\mu_f([d_{i-1}, d_i]) = t_i\alpha - s_i$ . Finalement,

$$\sum_{i=1}^p (\log \lambda_i)(t_i\alpha - s_i) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{s_1 \log \lambda_1 + \dots + s_p \log \lambda_p}{t_1 \log \lambda_1 + \dots + t_p \log \lambda_p}.$$

*Fin de la preuve du corollaire 1.* — Nous notons  $\mathcal{N}_2$  l'ensemble des  $p$ -uplets de réels  $(r_1, \dots, r_p) \in G$  pour lesquels il existe deux  $p$ -uplets d'entiers  $(t_1, \dots, t_p)$  et  $(s_1, \dots, s_p)$  tels que

$$\alpha = \frac{s_1 r_1 + \dots + s_p r_p}{t_1 r_1 + \dots + t_p r_p}.$$

Comme précédemment, cet ensemble s'écrit comme réunion dénombrable de traces sur  $G$  d'hyperplans de  $\mathbb{R}^p$  donc de fermés d'intérieurs vides et de mesures de Lebesgue nulles. Par conséquent, l'ensemble  $S = G \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2)$  est un  $G_\delta$  dense de mesure de Lebesgue pleine de l'ouvert  $G$  de  $\mathbb{R}^p$ . Si  $f$  est un homéomorphisme affine par morceaux de pentes  $\Lambda \in e^S$  alors  $f$  a au moins deux orbites de discontinuité et est sans compensation partielle de sauts, par le théorème 2, sa mesure invariante est singulière par rapport à la mesure de Haar. □

**4.2. Preuve du corollaire 2.** — Soit  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux de nombre de rotation irrationnel  $\alpha$  de type constant. L'ensemble  $\mathcal{D}f$  des points de coupure de  $f$  s'écrit  $\mathcal{D}f = \bigcup_i \mathcal{C}_i$ , chaque  $\mathcal{C}_i$  est ensemble fini contenu dans une orbite. Notons  $\sigma_i = \prod_{d \in \mathcal{C}_i} \sigma_f(d)$ , le produit  $\prod_i \sigma_i = 1$  comme produit de tous les sauts de  $Df$ .

*Fait :* si le nombre de discontinuités essentielles de  $Df$  est exactement 2, alors  $\mu_f$  est singulière par rapport à la mesure de Haar.

En effet, si  $Df$  a exactement deux discontinuités essentielles (cette notion est définie en section 3.1)  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont différents de 1, il n'y a donc pas de compensation partielle de sauts. Les hypothèses permettant de dérouler la partie 3.2 (preuve du théorème 2, partie 2) sont vérifiées, on conclut de la singularité de  $\mu_f$ .

Maintenant, si  $f$  possède exactement deux orbites de points de coupure alors ou bien elles sont toutes les deux essentielles et le fait s'applique, ou bien le produit des sauts sur chacune de ces orbites vaut 1 et la proposition 1 permet de conclure que le nombre de discontinuités de  $Df^n$  est borné.

Si  $f$  possède exactement trois orbites de points de coupure, l'ensemble  $\mathcal{D}f$  des points de coupure de  $f$  s'écrit  $\mathcal{D}f = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$  et le produit  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$ .

S'il n'y a pas de compensation entre les  $\sigma_i$  la proposition 5 s'applique et en découle la singularité de  $\mu_f$ .

Une compensation partielle entre les  $\sigma_i$  est de la forme  $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2} = 1$  et nécessairement le troisième  $\sigma_i$  vaut 1. Si l'un des deux  $\sigma_{i_j}$  est différent de 1, alors l'autre aussi et du fait découle la singularité de  $\mu_f$ .

Si les deux  $\sigma_{i_j}$  valent 1, tous les  $\sigma_i$  valent 1 et la proposition 1 permet de conclure que le nombre de discontinuités de  $Df^n$  est borné.

Ainsi, nous avons prouvé que ou bien le nombre de discontinuités de  $Df^n$  est borné ou bien  $\mu_f$  est singulière par rapport à la mesure de Haar c'est-à-dire (d'après aussi le théorème 1) que  $\mu_f$  est absolument continue par rapport à la mesure de Haar si et seulement si le nombre de discontinuités de  $Df^n$  est borné. Les équivalences avec (iii), (iv) et (v) résultent de la proposition 1 et du théorème de [Li].  $\square$

## **E. Le ratio set et la classification des homéomorphismes affines par morceaux.**

### **1. Preuve du théorème 3.**

Soit  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux du cercle de nombre de rotation irrationnel  $\alpha$  et soit  $q_{s_n}$  la sous-suite invoquée dans les hypothèses du théorème 3. Nous convenons d'appeler *ensemble positif* tout borélien dont la mesure de Haar est strictement positive.

LEMME 1. — *Pour tout ensemble positif  $A$ , pour tout  $\delta \in ]0, 1[$ , il existe un entier  $n_0$  et un ensemble positif  $A_\delta \subset A$  tels que  $m(f^{q_n}(A_\delta) \cap A_\delta) \geq (1 - \delta)m(A_\delta)$ , pour tout  $n \geq n_0$ .*

*Preuve du lemme 1.* — En effet, lorsque  $A$  est un intervalle  $[a, b]$ , on a  $f^{q_n}(A) \cap A = [f^{q_n}(a), b]$  pour  $n$  pair assez grand et  $f^{q_n}(A) \cap A = [a, f^{q_n}(b)]$  pour  $n$  impair assez grand.

Dans le premier cas, on a

$$m(f^{q_n}(A) \cap A) = m([f^{q_n}(a), b]) = m([a, b]) - m([a, f^{q_n}(a)])$$

et, puisque  $f^{q_n}(a)$  converge vers  $a$  pour  $n$  assez grand, la quantité  $m([a, f^{q_n}(a)]) \leq \delta m(A)$  et on a le résultat souhaité. Le second cas est analogue.

Maintenant, lorsque  $A$  n'est qu'un ensemble positif, nous choisissons un point de densité  $a \in A$  et  $I_\delta$  un intervalle centré en  $a$  tel que

$$m(A \cap I_\delta) / m(I_\delta) \geq (1 - \delta'),$$

où  $\delta' = \delta / 2(1 + e^V)$ . Notons  $A_\delta = A \cap I_\delta$ ; on a  $m(I_\delta \setminus A_\delta) \leq \delta' m(I_\delta)$ . Ainsi,

$$m(f^{q_n}(A_\delta) \cap A_\delta) \geq m(f^{q_n}(I_\delta) \cap I_\delta) - (m(f^{q_n}(I_\delta \setminus A_\delta)) + m(I_\delta \setminus A_\delta)).$$

Pour l'intervalle  $I_\delta$ , on a  $m(f^{q_n}(I_\delta) \cap I_\delta) > (1 - \delta/2)m(I_\delta)$ , pour tout  $n$  assez grand. Aussi  $e^{-V}m(I_\delta \setminus A_\delta) \leq m(f^{q_n}(I_\delta \setminus A_\delta)) \leq e^V m(I_\delta \setminus A_\delta)$ , par les inégalités de Denjoy. D'où

$$\begin{aligned} m(f^{q_n}(I_\delta \setminus A_\delta)) + m(I_\delta \setminus A_\delta) &\leq (1 + e^V)m(I_\delta \setminus A_\delta) \\ &\leq (1 + e^V)\delta' m(I_\delta) = \frac{\delta}{2} m(I_\delta). \end{aligned}$$

Finalement, il existe  $n_0(\delta)$  tel que pour  $n \geq n_0(\delta)$ , on a :

$$m(f^{q_n}(A_\delta) \cap A_\delta) \geq (1 - \delta)m(I_\delta) \geq (1 - \delta)m(A_\delta). \quad \square$$

Le lemme suivant est le lemme 2.1 de [KW], que nous énonçons et prouvons dans le cas particulier d'un homéomorphisme  $f$  affine par morceaux du cercle de nombre de rotation irrationnel agissant sur la mesure de Haar.

LEMME 2. — Soit  $F$  une réunion finie d'intervalles fermés  $[a_i, b_i]$  telle que  $R(f) \cap F = \emptyset$  alors il existe un ensemble positif  $A$  tel que pour tout sous-ensemble positif  $B$  de  $A$  et pour tout entier  $n$  tels que  $f^n(B) \subset A$  on a  $Df^n(x) \notin F$ , pour tout  $x \in B$ .

Preuve du lemme 2.

Fait 1 : soient  $k$  un entier et  $I$  un intervalle de continuité de  $Df^k$ . Si  $n$  est un entier et  $B$  un sous-ensemble positif de  $I$  tels que  $f^n(B) \subset I$ , alors pour tout  $x \in B$  on a  $Df^n(f^k(x)) = Df^n(x)$ .

Soit  $x \in B$ ; on a

$$Df^n(f^k(x)) = Df^{k+n-k}(f^k(x)) = Df^k(f^n(x))Df^n(x)Df^{-k}(f^k(x)).$$

Or  $Df^k$  est constante de  $I$  dans  $f^k(I)$  et vaut  $C$ , aussi  $Df^{-k}$  est constante de  $f^k(I)$  dans  $I$  et vaut  $C^{-1}$ . Par conséquent,  $Df^k(f^n(x))Df^{-k}(f^k(x)) = 1$  puisque  $f^n(x) \in I$  et  $f^k(x) \in f^k(I)$ .

Reprenons la preuve du lemme 2. Par définition de  $R(f)$ , pour tout  $t \in F$  il existe  $\epsilon_t > 0$  et un ensemble positif  $A_t$  tels que si  $B$  est un sous-ensemble positif de  $A_t$  et  $n$  est un entier avec  $f^n(B) \subset A_t$  alors, pour tout  $x \in B$ , on a  $|Df^n(x) - t| \geq \epsilon_t$ . Le problème consiste à trouver un ensemble  $A$  qui convienne à tous les  $t$ . Recouvrons  $F$  par un nombre fini  $N$  d'intervalles de la forme  $[t_j - \frac{1}{2}\epsilon_{t_j}, t_j + \frac{1}{2}\epsilon_{t_j}]$  et notons  $A_j = A_{t_j}$ . Par ergodicité de  $f$ , on peut trouver un ensemble positif  $A'_2$  de  $A_1$  et un entier  $k_1$  tel que  $f^{k_1}(A'_2) \subset A_2$  et quitte à réduire  $A'_2$  on peut supposer qu'il est contenu dans un intervalle de continuité de  $Df^{k_1}$ . Maintenant, si  $B$  est un sous-ensemble positif de  $A'_2$  et  $n$  un entier tels que  $f^n(B) \subset A'_2$ , pour tout  $x \in B$  on a

$$|Df^n(x) - t_1| \geq \epsilon_{t_1}$$

car  $B \subset A_1$  et  $|Df^n(x) - t_2| = |Df^n(f^{k_1}(x)) - t_2| \geq \epsilon_{t_2}$ . L'égalité résulte du fait 1 et l'inégalité du fait que  $f^{k_1}(x) \in f^{k_1}(A'_2)$  sous-ensemble positif de  $A_2$  dont l'image par  $f^n$  est aussi contenue dans  $A_2$ .

Le même argument montre qu'il existe un ensemble positif  $A'_3$  de  $A'_2$  et un entier  $k_2$  tels que  $f^{k_2}(A'_3) \subset A_3$  et  $A'_3$  est contenu dans un intervalle de continuité de  $Df^{k_2}$ . Maintenant, si  $B$  est un sous-ensemble positif de  $A'_3$  et  $n$  un entier tels que  $f^n(B) \subset A'_3$ , pour tout  $x \in B$  on a

$$|Df^n(x) - t_1| \geq \epsilon_{t_1}, \quad |Df^n(x) - t_2| \geq \epsilon_{t_2}, \quad |Df^n(x) - t_3| \geq \epsilon_{t_3}.$$

On procède ainsi jusqu'au dernier  $A'_N$  qui est le  $A$  cherché.  $\square$

Reprenons la preuve du théorème 3 et supposons par l'absurde que  $R(f)$  ne rencontre pas l'ensemble fini  $W$ . Puisque  $R(f)$  est fermé et  $W$  fini, il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que  $R(f) \cap W_{\epsilon_0} = \emptyset$ , où  $W_{\epsilon_0} = \bigcup_{w \in W} [w - \epsilon_0, w + \epsilon_0]$ . D'après le lemme 2, il existe un ensemble positif  $A$  tel que pour tout sous-ensemble positif  $B$  de  $A$ , pour tout entier  $n$  tel que  $f^n(B) \subset A$ , on a

$$(N) \quad Df^n(x) \notin W_{\epsilon_0}, \quad \text{pour tout } x \in B.$$

D'autre part, on peut trouver un entier  $n_1$  tel que pour tout  $n \geq n_1$  il existe un sous-ensemble positif  $B_n$  de  $A$  tel que  $f^{q_n}(B_n) \subset A$ . En effet, il suffit d'appliquer le lemme 1 avec l'ensemble  $A$  et  $\delta > 0$  quelconque puis poser  $B_n = f^{-q_n}(A_\delta) \cap A_\delta$ .

Mais, par hypothèse, pour tout  $n$  assez grand et tout  $x$  (en particulier pour  $x \in B_{s_n}$ ), la quantité  $Df^{q_{s_n}}(x) \in W_{\epsilon_0}$ , ce qui contredit  $(\mathcal{N})$ .

Notons  $W^+ = W \cap [1, +\infty[$  et montrons par l'absurde que  $R(f)$  rencontre  $W^+$ . Sinon  $R(f)$  évite un  $\epsilon_0$ -voisinage de  $W^+$ . D'après le lemme 2, il existe un ensemble positif  $A$  tel que pour tout sous-ensemble positif  $B$  de  $A$ , pour tout entier  $n$  tel que  $f^n(B) \subset A$ , on a  $Df^n(x) \notin W_{\epsilon_0}^+$ , pour tout  $x \in B$ .

Soit  $\delta > 0$  quelconque, d'après le lemme 1, pour tout  $n$  assez grand le sous-ensemble positif  $B_{s_n}$ , défini comme ci-dessus, de  $A$  vérifie  $f^{q_n}(B_{s_n}) \subset A$  et par hypothèse  $Df^{q_{s_n}}(x) \in W_{\epsilon_0}$ , pour tout  $x \in B_{s_n}$ .

Ainsi, pour tout  $n$  assez grand et pour tout  $x \in B_{s_n}$ , on a  $Df^{q_{s_n}}(x) \in W_{\epsilon_0}^-$ . Ceci signifie qu'il existe une constante  $b < 1$  indépendante de  $n$  et  $\delta$  telle que  $Df^{q_{s_n}}(x) < b$  sur  $B_{s_n}$ , d'où

$$\begin{aligned} m(f^{q_{s_n}}(A_\delta) \cap A_\delta) &= m(f^{q_{s_n}}(B_{s_n})) \\ &< bm(B_{s_n}) = bm(f^{-q_{s_n}}(A_\delta) \cap A_\delta) \leq b.m(A_\delta). \end{aligned}$$

Si on suppose  $\delta > 0$  tel que  $1 - \delta > b$ , ceci contredit le lemme 1. □

## 2. Preuve des corollaires.

**2.1. Preuve du corollaire 3.** — Soit  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux de nombre de rotation irrationnel  $\alpha$  et dont les pentes sont puissances impaires d'un même scalaire  $\lambda$ . Nous exhibons *une sous-suite*  $s_n$  et un entier  $N_0$  tels que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un entier  $n_\epsilon$  tel que  $\{Df^{q_{s_n}}(x), x \in S^1, n \geq n_\epsilon\}$  est contenu dans le  $\epsilon$ -voisinage de  $W = \{(\lambda)^{2p+1} : p \in \{-N_0, \dots, 0, \dots, N_0\}\}$ .

Lorsque  $n$  est impair,  $Df^n(x)$  est une puissance impaire de  $\lambda$  car  $Df^n(x)$  est le produit de  $n$  puissances impaires de  $\lambda$ . Par ailleurs, il découle de la relation de Lagrange (i.e.  $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ ) l'existence d'une infinité de  $q_n$  impairs. Les inégalités de Denjoy attestent que  $Df^{q_n}(x)$  est borné loin de 0 et  $\infty$ . Ainsi, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers  $p$  pour lesquels  $(\lambda)^{2p+1}$  est réalisée comme valeur de  $Df^{q_n}(x)$ . □

**2.2. Preuve du corollaire 4.** — Soit  $f$  un homéomorphisme affine par morceaux, de nombre de rotation irrationnel  $\alpha$  et de pentes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ . Soit  $(b_1, \dots, b_p)$  le vecteur limite d'une suite  $(\{-q_{s_n} \mu_1\}, \dots, \{-q_{s_n} \mu_p\})$ .

Montrons que *les hypothèses du théorème 3 sont réalisées avec*

$$W = \left\{ \prod_{i=1}^p (\lambda_i)^{b_i + r_i} ; r_i \in \mathbb{Z}, |r_i| \leq \text{var } \mathbb{I}_{\{Df = \lambda_i\}} \right\}.$$



Un calcul immédiat montre que l'on a  $Df^n(x) = \lambda_1^{N_1^n(x)} \dots \lambda_p^{N_p^n(x)}$ , pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , où  $N_i^n(x)$  est le cardinal de  $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\} \cap \{Df = \lambda_i\}$ .

Puisque  $\int \log Df \, d\mu_f = 0$ , on a  $(\log \lambda_1)\mu_1 + \dots + (\log \lambda_p)\mu_p = 0$ . En multipliant par  $(-q_n)$  et passant à l'exponentielle et en multipliant l'expression de  $Df^{q_n}(x)$  par  $Df^{q_n}(x) = \lambda_1^{N_1^{q_n}(x) - q_n\mu_1} \dots \lambda_p^{N_p^{q_n}(x) - q_n\mu_p}$ , on trouve

$$1 = \lambda_1^{-q_n\mu_1} \times \dots \times \lambda_p^{-q_n\mu_p}$$

Maintenant, pour la sous-suite  $q_{s_n}$ , on a  $\lim -q_{s_n}\mu_i = b_i$ . Les  $N_i^n$  étant entiers on en déduit que

$$\lim N_i^{q_{s_n}}(x) - q_{s_n}\mu_i = b_i.$$

L'inégalité de Denjoy-Koksma appliquée à la fonction  $\mathbb{I}_i$  indicatrice de  $\{Df = \lambda_i\}$  s'écrit

$$|N_i^{q_n}(x) - q_n\mu_i| \leq \text{var} \mathbb{I}_i.$$

Ainsi,  $-\text{var} \mathbb{I}_i \leq E(N_i^{q_{s_n}}(x) - q_{s_n}\mu_i) \leq \text{var} \mathbb{I}_i$ . Par conséquent, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_\varepsilon$  tel que pour tout  $n \geq n_\varepsilon$ , la quantité

$$N_i^{q_{s_n}}(x) - q_{s_n}\mu_i = E(N_i^{q_{s_n}}(x) - q_{s_n}\mu_i) + \{N_i^{q_{s_n}}(x) - q_{s_n}\mu_i\}$$

appartient à  $\bigcup_{k=-\text{var} \mathbb{I}_i}^{\text{var} \mathbb{I}_i} [b_i + k - \varepsilon, b_i + k + \varepsilon]$ . On obtient le corollaire 4 en remplaçant dans l'expression de  $Df^{q_{s_n}}(x)$ . □

**2.3. Preuve du corollaire 5.** — On peut affiner le corollaire 4 en utilisant les deux faits suivants :

$$\mu_p = 1 - (\mu_1 + \dots + \mu_{p-1}) \text{ et } N_p^{q_n}(x) = q_n - (N_1^{q_n}(x) + \dots + N_{p-1}^{q_n}(x)).$$

En résulte

$$N_p^{q_n}(x) - q_n\mu_p = -((N_1^{q_n}(x) - q_n\mu_1) + \dots + (N_{p-1}^{q_n}(x) - q_n\mu_{p-1})).$$

En remplaçant dans  $Df^{q_{s_n}}$  on trouve

$$W = \left\{ \prod_{i=1}^{p-1} (\lambda_i/\lambda_p)^{b_i+r_i}, r_i \in \mathbb{Z}, |r_i| \leq \text{var} \mathbb{I}_i \right\}.$$

Dans le cas particulier  $p = 2$ , on trouve

$$W = \{(\lambda_1/\lambda_2)^{b_1+r_1}, r_1 \in \mathbb{Z}, |r_1| \leq \text{var} \mathbb{I}_1\}.$$

LEMME 3. — *Sous les hypothèses du corollaire 5, on a*

$$\mu_1 = \mu_f(\{Df = \lambda_1\}) = \frac{\log \lambda_2}{\log \lambda_2 - \log \lambda_1}.$$

En effet, puisque  $\int \log Df \, d\mu_f = 0$  et  $\log Df = \log \lambda_1 \mathbb{I}_{\{Df=\lambda_1\}} + \log \lambda_2 \mathbb{I}_{\{Df=\lambda_2\}}$ , on a  $\log \lambda_1 \mu_1 + \log \lambda_2 \mu_2 = 0$ . En remplaçant  $\mu_2$  par  $1 - \mu_1$ , on obtient  $\mu_1 = \log \lambda_2 / \log \lambda_2 - \log \lambda_1$ . □

LEMME 4. — *Soit  $(q_n)$  une suite strictement croissante d'entiers (par exemple la suite des dénominateurs des réduites du développement en fractions continues de  $\alpha$ ). Sauf pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de  $s \in [0, 1]$ , la suite  $\{q_n \cdot s\}$  possède au moins une valeur d'adhérence irrationnelle.*

Nous devons montrer que  $A$  l'ensemble des  $s \in [0, 1]$  pour lesquels la suite  $\{q_n \cdot s\}$  possède une valeur d'adhérence irrationnelle est de mesure pleine. Nous rappelons que  $\|x\| := \inf_{p \in \mathbb{Z}} |x + p|$ .

Écrivons  $A = \bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} A_q$ , où  $A_q$  est l'ensemble des  $s \in [0, 1]$  pour lesquels la suite  $\{q_n \cdot s\}$  possède une valeur d'adhérence qui n'est pas dans  $\{p/q; p \in \{0, \dots, q - 1\}\}$ .

Ainsi, notre problème se ramène à montrer que  $m({}^c A_q) = 0$ , pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$ , où  ${}^c A_q := [0, 1] \setminus A_q$  est l'ensemble des  $s$  pour lesquels la suite  $\{q_n \cdot s\}$  a toutes ses valeurs d'adhérences dans  $\{p/q\}$ .

On a

$$\begin{aligned} {}^c A_q &= \left\{ s \in [0, 1] : \forall \epsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : \inf_p \{ \|q_n s - p/q\| \} \leq \epsilon \right\} \\ &= \bigcap_{\epsilon} \bigcup_{n_0} \bigcap_{n \geq n_0} \left\{ s : \inf_p \{ \|q_n s - p/q\| \} \leq \epsilon \right\} \\ &= \bigcap_{\epsilon} \bigcup_{n_0} \bigcap_{n \geq n_0} B_n. \end{aligned}$$

Avec

$$B_n := \left\{ s : \inf_p \{ \|q_n s - p/q\| \} \leq \epsilon \right\} = \bigcup_{k=0}^{qq_n-1} [k/qq_n - \epsilon/q_n, k/qq_n + \epsilon/q_n]$$

est la réunion de  $qq_n$  intervalles de longueur  $2\epsilon/q_n$ , appelés  $q_n$ -intervalles.

Dans un  $q_n$ -intervalle, il y a au plus  $E(2\epsilon/q_n qq_{n+1}) + 1$  points  $k/qq_{n+1}$ , avec  $k$  entier et  $0 \leq k < qq_{n+1}$ , donc au plus  $N_n := E(2q\epsilon q_{n+1}/q_n) + 1$   $(q_{n+1})$ -intervalles dans un  $q_n$ -intervalle.

Cas 1 :  $q_{n+1}/q_n \leq a$  (i.e.  $\alpha$  est de type constant)

Alors  $N_n \leq E(2q\epsilon a) + 1$ , et quitte à diminuer  $\epsilon$  on peut supposer  $N_n = 1$ . Ainsi, l'intersection  $B_{n_0} \cap B_{n_0+1} \cap \dots \cap B_{n_0+p}$  est constituée d'au plus  $qq_{n_0}$  intervalles de longueur  $2\epsilon/q_{n_0+p}$ .

D'où  $m(B_{n_0} \cap B_{n_0+1} \cap \dots \cap B_{n_0+p}) \leq 2q\epsilon q_{n_0}/q_{n_0+p} \leq 2q\epsilon q_{n_0}/q_{n_0} + p$  tend vers 0, lorsque  $p \rightarrow +\infty$ .

Cas 2 :  $q_{n+1}/q_n$  n'est pas borné.

On peut trouver  $n_0$  tel que  $N_{n_0} := E(2q\epsilon q_{n_0+1}/q_{n_0}) + 1 \geq 2$  et pour tout  $p'$ , il existe  $p \geq p'$  tel que  $N_{n_0+p-1} \geq 2$ . Choisissons un tel  $p$ . On définit

$$\mathcal{N} := \{n \in \{n_0, \dots, n_0 + p - 1\} : N_n \geq 2\} = \{n_0, n_1, \dots, n_{w-1}\},$$

avec  $w := \text{card } \mathcal{N}$ .

Dans un  $q_{n_0}$ -intervalle, il y a au plus  $\nu_p = [\prod_{n \in \mathcal{N}} N_n]$   $(q_{n_0+p})$ -intervalles.

On a

$$\nu_p \leq \left( \prod_{n \in \mathcal{N}} 2q\epsilon q_{n+1}/q_n + 1 \right) \leq \prod_{n \in \mathcal{N}} 4q\epsilon q_{n+1}/q_n \leq (4q\epsilon)^w q_{n_0+p}/q_{n_0},$$

car pour  $n \in \mathcal{N}$  on a  $1 \leq 2q\epsilon q_{n+1}/q_n$  et

$$\prod_{n \in \mathcal{N}} q_{n+1}/q_n = q_{n_0+1}/q_{n_0} \times q_{n_1+1}/q_{n_1} \times \dots \times q_{n_0+p}/q_{n_0+p-1} \leq q_{n_0+p}/q_{n_0}$$

comme  $q_{n_1} \geq q_{n_0+1}, \dots, q_{n_k} \geq q_{n_{k-1}+1}$ . Finalement, dans  $B_{n_0}$ , il y a au plus  $qq_{n_0}(4q\epsilon)^w q_{n_0+p}/q_{n_0} = q(4q\epsilon)^w q_{n_0+p}$   $(q_{n_0+p})$ -intervalles (qui sont de longueur  $2\epsilon/q_{n_0+p}$ ).

En conclusion, pour tout  $p' \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} m(B_{n_0} \cap B_{n_0+1} \cap \dots \cap B_{n_0+p'}) &\leq m(B_{n_0} \cap B_{n_0+1} \cap \dots \cap B_{n_0+p}) \\ &\leq 2q\epsilon(4q\epsilon)^w \xrightarrow{p' \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

pour  $\epsilon < 1/4q$  car  $w \rightarrow +\infty$ , puisque  $q_{n+1}/q_n$  n'est pas borné.

Dans tous les cas,  $m(\bigcap_{n \geq n_0} B_n) = 0$  pour  $\epsilon$  assez petit, et donc  $m({}^c A_q) = 0$  d'où le lemme 4. □

*Fin de la preuve du corollaire 5.* — D’après les lemmes 3 et 4, pour un ensemble de mesure de Lebesgue pleine de valeurs de  $\mu_1$ , il existe une sous-suite  $q_{s_n}$  telle que la suite  $\{-q_{s_n}\mu_1\}$  converge vers  $b_1 \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Pour cette sous-suite, l’ensemble  $W$  vérifiant les hypothèses du théorème 3 est

$$\{(\lambda_1/\lambda_2)^{(b_1+r_1)}, r_1 \in \mathbb{Z}, |r_1| \leq \text{var}\mathbb{I}_1\}.$$

L’ensemble  $W$  ne contient pas 1 car sinon, il existerait  $r_1$  tel que  $\log\left(\lambda_1/\lambda_2^{(b_1+r_1)}\right) = (\log \lambda_1 - \log \lambda_2)(b_1 + r_1) = 0$ , ce qui n’est possible que si  $b_1 \in \mathbb{Z}$  ou  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ .

L’ensemble  $W$  ne contient pas deux éléments distincts qui sont puissances entières d’un même scalaire car, sinon, il existerait des entiers  $r, r', p_1$  et  $p_2$  tels que

$$p_1(\log \lambda_1 - \log \lambda_2)(b_1 + r) = p_2(\log \lambda_1 - \log \lambda_2)(b_1 + r'),$$

ce qui n’est possible que si  $b_1 = p_1r - p_2r'/p_2 - p_1 \in \mathbb{Q}$  ou  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ .

On conclut par le théorème 3 que  $R(f)$  contient un réel strictement supérieur à 1 et un réel strictement inférieur à 1. Ces deux réels ne sont pas des puissances entières d’un même scalaire donc  $f$  est de type (III<sub>1</sub>) dès que son nombre de rotation est irrationnel et que  $-\log \lambda_1/\log \lambda_2$  décrit un ensemble de mesure de Lebesgue totale, puisque  $\mu_1 = (1 - \log \lambda_1/\log \lambda_2)^{-1}$ , d’où le corollaire 5. □

### BIBLIOGRAPHIE

- [Bo] M. BOSHERNITZAN, Dense orbits of rationals, Proc. AMS, 117-4 (1993), 1201–1203.
- [CLR] Z. COELHO, A. LOPEZ, L.F. da ROCHA, Absolutely continuous invariant measures for a class of affine interval exchange maps, Proc. AMS, 123 (1995), 3533–3542.
- [De] A. DENJOY, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, J. Math. Pures Appl., 11 (1932), 333–375.
- [DK] A.A. DZHALILOV, K.M. KHANIN, On invariant measure for homeomorphisms of a circle with a break point, Funct. Anal. Appl., 32-3 (1998), 153–161.
- [Dy] H.A. DYE, On groups of measure preserving transformations, Amer. J. Math., I : 81 (1959), 119–159; II : 85 (1963), 551–576.
- [Fi] A. FINZI, Sur le problème de la génération d’une tranformation donnée d’une courbe fermée, par une transformation infinitésimale, Ann. Sci. École Norm. Sup., 3<sup>e</sup> série, 67 (1950), 243–305.
- [GhSe] E. GHYS, V. SERGIESCU, Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle, Comm. Math. Helv., 62 (1987), 185–239.

- [GrSw] J. GRACZYK, G. SWIATEK, Singular measures in circle dynamics, *Comm. Math. Phys.*, 157 (1993), 213–230.
- [He1] M. HERMAN, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *IHÉS Publ. Math.*, 49 (1979), 5–233.
- [He2] M. HERMAN, Sur les difféomorphismes du cercle de nombre de rotation de type constant, p. 708–725, *Conference on Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmund*, vol. II, 1981 .
- [HK] B. HASSELBLATT, A. KATOK, Introduction to the modern theory of dynamical systems, *Encyclopedia of mathematics*, CUP, 1995.
- [Ka1] Y. KATZNELSON, Sigma-finite invariant measures for smooth mappings of the circle, *J. Anal. Math.*, 31 (1977), 1–18.
- [Ka2] Y. KATZNELSON, The action of diffeomorphism of the circle on the Lebesgue measure, *J. Anal. Math.*, 36 (1979), 156–166.
- [KO1] Y. KATZNELSON, D. ORNSTEIN, The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle, *Erg. Th. Dyn. Syst.*, 9 (1989), 643–680.
- [KO2] Y. KATZNELSON, D. ORNSTEIN, The absolute continuity of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle, *Erg. Th. Dyn. Syst.*, 9 (1989), 681–690.
- [Kr] W. KRIEGER, On non-singular transformations of a measure space I, II, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 11 (1969), 83–97, 98–119.
- [KS] K. KHANIN, Ya. SINAI, Smoothness of conjugacies of diffeomorphisms of the circle with rotations, *Russian Math. Surveys*, 44 (1989), 69–99.
- [KW] Y. KATZNELSON, B. WEISS, The classification of non singular actions, revisited, *Erg. Th. Dyn. Syst.*, 11 (1991), 333–348.
- [LM] I. LIOUSSE, H. MARZOUGUI, Échanges d’intervalles affines conjugués à des linéaires, *Erg. Th. Dyn. Syst.*, 22 (2002), 535–554.
- [Li] I. LIOUSSE, PL homeomorphisms that are piecewise  $C^1$  conjugate to irrational rotations, à paraître dans *Bull. Brazil. Math. Soc.*.
- [Po] H. POINCARÉ, *Œuvres complètes*, t. 1, 137–158.
- [Yo] J.-C. YOCCOZ, Il n’y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique, *C.R.A.S.*, série I, 298-7 (1984).

Manuscrit reçu le 8 avril 2003,  
révisé le 9 avril 2004,  
accepté le 11 septembre 2004.

Isabelle LIOUSSE,  
Université Lille I  
Laboratoire Paul Painlevé UMR 871  
U.F.R. de Mathématiques  
59655 Villeneuve d’Ascq Cedex (France)  
liousse@math.univ-lille1.fr