

SAMI MUSTAPHA

**Multiplicateurs de Mikhlin pour une classe particulière de groupes non-unimodulaires**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 48, n° 4 (1998), p. 957-966

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1998\\_\\_48\\_4\\_957\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_4_957_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# MULTIPLICATEURS DE MIKHLIN POUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE GROUPES NON-UNIMODULAIRES

par Sami MUSTAPHA

---

## 1. Introduction.

Soit  $G$  un groupe de Lie réel connexe et  $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$  un système de champs de vecteurs invariants à gauche sur  $G$  vérifiant la condition de Hörmander (cf. [21]). Soit  $\Delta = -\sum X_j^2$  le sous-laplacien associé au système  $\mathcal{X}$ . On note  $dg = d^l g$  (resp. :  $d^r g$ ) la mesure de Haar invariante à gauche (resp. : à droite) sur  $G$  et  $\delta(g) = d^l g / d^r g$  la fonction module sur  $G$  normalisée par  $\delta(e) = 1$ , où  $e$  désigne l'élément identité de  $G$ . Le sous-laplacien  $\Delta$  définit un opérateur positif formellement auto-adjoint sur  $L^2(G, d^r g)$  et si  $m$  est une fonction borélienne bornée sur  $[0, \infty[$ , l'opérateur  $m(\Delta)$  défini par

$$m(\Delta) = \int_0^\infty m(\lambda) dE_\lambda,$$

où

$$\Delta = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$$

est la décomposition spectrale de  $\Delta$  (cf. [22]), est borné sur  $L^2(G, d^r g)$ .

On cherche des conditions sur  $m$  qui permettent d'assurer que l'opérateur  $m(\Delta)$  soit aussi borné sur les espaces  $L^p$  pour  $1 \leq p \leq \infty$ .

Si le groupe  $G$  est à croissance polynomiale du volume (cf. [21]) on montre qu'il suffit de contrôler un nombre suffisant de dérivées de  $m$  pour assurer la bornitude de  $m(\Delta)$  sur les espaces  $L^p$  (cf. [10], [11], [5], [1]). Les résultats obtenus sont du type Mikhlín-Hörmander (cf. [15]). Les problèmes ouverts dans cette direction concernent le nombre optimal de dérivées qu'il faut pour assurer la bornitude du multiplicateur  $m$ . Dans [1] Alexopoulos donne essentiellement comme nombre  $D/2 + 1/2 + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $D$  désignant la croissance du volume du groupe. Le résultat [5] de Christ suggère  $D/2 + \epsilon$ , comme dans le cas de  $\mathbb{R}^n$ . Les résultats plus récents de Müller-Stein et Hebisch montrent que dans certains cas ce nombre dépend de la dimension topologique du groupe et non de son indice de croissance du volume (cf. [17], [13]).

Pour un groupe de Lie  $G$  la non trivialité de la fonction module  $\delta$  entraîne que  $G$  est à croissance exponentielle du volume et ne constitue par conséquent pas un espace de type homogène (cf. [8]). C'est ce qui explique la difficulté de l'analyse sur de tels groupes.

L'idée généralement admise, dans le contexte de la croissance exponentielle du volume, était qu'il fallait imposer sur  $m$  une condition d'holomorphie pour assurer la bornitude de  $m(\Delta)$  sur les espaces  $L^p$  (cf. par exemple Taylor [19], pour le même problème dans le cas des variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée). Dans le cas des espaces symétriques cette condition d'holomorphie est même nécessaire (cf. Anker-Lohoué [3], Clerc-Stein [7]). Cependant Cowling et al ont obtenu, dans [9], pour un groupe d'Iwasawa  $NA$  associé à un groupe réel semi-simple et pour un laplacien distingué sur ce groupe, un théorème des multiplicateurs sans imposer de condition d'holomorphie sur  $m$ . Un résultat précédent dans ce sens a été obtenu par Hebisch dans [12]. L'analyse du laplacien considéré dans ces deux cas repose sur l'utilisation de l'espace symétrique associé à  $NA$ .

Le même type de résultat a été établi par l'auteur (cf. [18]) et F. Astengo (cf. [2]) dans le cas des extensions solubles des H-groupes. Il s'agit d'une classe de groupes de Lie non unimodulaires qui généralisent les groupes  $NA$  associés aux espaces symétriques de rang 1.

Plus récemment Hebisch (cf. [14]) et Christ et Müller (cf. [6]) ont donné deux exemples de groupes résolubles à croissance exponentielle du volume et unimodulaires avec des multiplicateurs différentiables pour le premier et analytiques pour le second. D'une manière plus précise, Hebisch montre que pour le groupe produit semi-direct  $G = \mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}$  où l'action

est définie par  $(x, y) \rightarrow (e^t x, e^{-t} y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et pour le laplacien invariant à gauche sur  $G$ , il suffit que  $m$  soit à support compact et appartienne à et appartienne 'erateur  $m(\Delta)$  borné sur les espaces  $L^p(G)$ . Christ et Müller montrent que pour le produit semi-direct  $G = \mathbf{H}_n \lambda \mathbb{R}$  où  $\mathbf{H}_n$  est le groupe de Heisenberg de dimension  $2n + 1$  et où l'action est définie par  $(x, y, z) \rightarrow (e^t x, e^{-t} y, z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbf{H}_n$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et pour le laplacien (ou sous-laplacien) invariant à gauche sur  $G$ , le mutiplicateur  $m$  doit être analytique.

L'idée de départ de ce travail a été de considérer, en contraste avec l'exemple de Christ et Müller, le cas du produit semi-direct  $G = \mathbf{H}_n \lambda \mathbb{R}$  où l'action est définie par  $(x, y, z) \rightarrow (e^t x, e^t y, e^{2t} z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbf{H}_n$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et d'examiner pour ce groupe non-unimodulaire le problème des multiplicateurs pour le sous-laplacien (pour le laplacien le résultat est déjà contenu dans le théorème obtenu pour les extensions solubles des H-groupes). On montre que pour cette action le calcul fonctionnel est alors différentiable.

C'est cette situation que nous généralisons ci-dessous. Nous obtenons un théorème des multiplicateurs avec une hypothèse de différentiabilité pour tous les groupes produits semi-direct d'un groupe nilpotent stratifié et de  $\mathbb{R}$  et pour les sous-laplaciens invariants à gauche naturels sur ces groupes.

## 2. Énoncé des résultats.

Soit  $\mathcal{N}$  une algèbre de Lie réelle nilpotente stratifiée de rang  $r$  et soit  $N$  le groupe de Lie simplement connexe qui lui correspond. Rappelons qu'il existe  $V_1, \dots, V_r$ ,  $r$  sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{N}$  tels que  $\mathcal{N}$  se décompose comme somme directe

$$\mathcal{N} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$$

avec  $[V_1, V_j] \subset V_{1+j}$ ,  $j = 1, \dots, r - 1$ ,  $[V_1, V_r] = 0$  et  $V_1$  engendrant l'algèbre  $\mathcal{N}$ . Pour  $v = v_1 \oplus v_2 \oplus \dots \oplus v_r \in \mathcal{N}$  et  $z \in \mathbb{R}$  on définit

$$\Theta_z(v) = e^z v_1 \oplus e^{2z} v_2 \oplus \dots \oplus e^{r z} v_r.$$

On note  $G$  le produit semi-direct  $N \lambda \mathbb{R}$  associé à cette action. Étant une extension résoluble de  $N$ , le groupe  $G$  est lui-même résoluble. On identifie  $N$  à son algèbre de Lie par l'application exponentielle. Le produit de deux éléments de  $G$  est donné par

$$(u, z)(u', z') = (u \cdot \Theta_z(u'), z + z'),$$

pour tout  $(u, z), (u', z') \in G$ . Soient  $e_1, \dots, e_m \in \mathcal{N}$ , une base de  $V_1$ . On note  $\tilde{X}_j, j = 1, \dots, m$  les champs de vecteurs invariants à gauche de  $\mathcal{N}$  définis par les vecteurs  $e_j$  et on note  $X_j, j = 1, \dots, m$  les champs de vecteurs invariants à gauche dans  $G$  définis par ces vecteurs, i.e.

$$X_j f(g) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ge^{te_j}) - f(g)}{t}, \quad g \in G, \quad f \in C_0^\infty(G).$$

Il est facile de voir que  $X_j = e^z \tilde{X}_j$ . Les champs  $X_1, \dots, X_m, \frac{\partial}{\partial z}$  engendrent l'algèbre de Lie du groupe  $G$  et vérifient par conséquent la condition de Hörmander. Notons

$$\Delta = - \left( X_1^2 + \dots + X_m^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = - \left( e^{2z} \sum_{j=1}^m \tilde{X}_j^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

le sous-laplacien invariant à gauche sur  $G$  associé aux champs  $X_1, \dots, X_m, \frac{\partial}{\partial z}$ .

Le groupe  $G$  est non unimodulaire et la mesure de Haar invariante à droite sur  $G$  est donnée par  $d^r g = dndz$   $g = (n, z)$  où  $dn$  est la mesure de Haar sur  $N$  et  $dz$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

L'opérateur  $\Delta$  possède une extension auto-adjointe positive sur  $L^2(G, d^r g)$  et si  $m$  est une fonction borélienne bornée sur  $[0, \infty[$ , l'opérateur  $m(\Delta)$  est borné sur  $L^2(G, d^r g)$ .

**THÉORÈME 1.** — *Soient  $G$  et  $\Delta$  comme ci-dessus. Alors, pour toute fonction  $m$  à support compact dans  $[0, \infty[$  et appartenant à l'espace de Sobolev  $H^{2+\epsilon}(\mathbb{R})$ ,  $\epsilon > 0$ , l'opérateur  $m(\Delta)$  est borné sur  $L^p(G, d^r g)$ , pour  $1 \leq p \leq \infty$ .*

Notons  $\phi_t$  le noyau de la chaleur associé au semi-groupe  $T_t = e^{-t\Delta}$ ,  $t > 0$ , i.e.  $\phi_t$  est donné par

$$T_t f(x) = \int_G \phi_t(y^{-1}x) f(y) dy = \int_G \phi_t(y) f(xy^{-1}) d^r y, \quad f \in C_0^\infty(G).$$

Le théorème 1 est une conséquence du théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** — *Les notations étant comme plus haut, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $t > 0$  et pour tout  $s \in \mathbb{R}$*

$$\|\phi_{t+is}\|_{L^1(G, d^r g)} \leq C \left(1 + \sqrt{t}\right) \exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right) \left(1 + \frac{|s|}{t}\right)^{3/2}.$$

**COROLLAIRE 1.** — *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\|\phi_{1+is}\|_{L^1(G, d^r g)} \leq C (1 + |s|)^{3/2}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Pour déduire le théorème 1 du corollaire 1, posons  $f(\lambda) = m(\lambda)e^\lambda$ ; ce qui donne (par la formule d'inversion de Fourier) :

$$m(\lambda) = (2\pi)^{-1} \int e^{-(1-i\xi)\lambda} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

D'où l'on déduit (par le théorème spectral)

$$m(\Delta) = (2\pi)^{-1} \int \hat{f}(\xi) e^{-(1-i\xi)\Delta} d\xi.$$

Si on désigne par  $k_m$  le noyau associé à  $m(\Delta)$ , i.e. le noyau défini par

$$m(\Delta)f(x) = \int_G k_m(y^{-1}x) f(y) dy = \int_G k_m(y^{-1}x) \delta(y) f(y) d^r y, \quad f \in C_0^\infty(G),$$

on peut alors estimer

$$\|m(\Delta)\|_{L^1(G, d^r g) \rightarrow L^1(G, d^r g)}$$

par

$$\begin{aligned} \|k_m\|_{L^1(G, d^r g)} &\leq C \int |\hat{f}(\xi)| \|\phi_{(1-i\xi)}\|_{L^1(G, d^r g)} d\xi \\ &\leq C \int |\hat{f}(\xi)| (1 + |\xi|)^{3/2} d\xi < \infty \end{aligned}$$

dès que  $m \in H^{2+\epsilon}$ . Il suffit ensuite de procéder par interpolation et dualité pour déduire le théorème 1.

Pour voir que l'indice 3/2 est optimal dans le corollaire 1, observons que dans le cas où  $G$  est le produit semi-direct  $G = \mathbb{R}^2 \lambda \mathbb{R}$  le noyau  $\phi_t$  est donné par (cf. [4]) :

$$\phi_t(g) = \frac{e^{-z}}{(4\pi t)^{3/2}} \frac{r}{\sinh(r)} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$$

où  $g = ((x, y); z)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\cosh(r) = \cosh(z) + \frac{e^{-z}}{2} (x^2 + y^2)$ .

D'où

$$\begin{aligned} |\phi_{1+is}(g)| &= \frac{e^{-z}}{(4\pi(1+is))^{3/2}} \frac{r}{\sinh(r)} \exp\left(-\frac{r^2}{4(1+s^2)}\right) \\ &\sim \frac{e^{-z}}{(1+|s|)^{3/2}} \frac{r}{\sinh(r)} \exp\left(-\frac{r^2}{4(1+s^2)}\right) \\ &\sim e^{-z} \frac{(1+s^2)^{3/2}}{(1+|s|)^{3/2}} \frac{r}{\sinh(r)} \frac{1}{(1+s^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4(1+s^2)}\right) \\ &\sim (1+|s|)^{3/2} \phi_{1+s^2}(g). \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\|\phi_{1+is}(g)\|_{L^1(G, d^r g)} \sim (1+|s|)^{3/2}.$$

### 3. Preuve du théorème 2.

Notons  $Z(t) = (n(t), z(t))$ ,  $t > 0$ ,  $n(t) \in N$ ,  $z(t) \in \mathbb{R}$ , la diffusion associée au semi-groupe  $(T_t)_{t>0}$ . Observons que la projection de la diffusion de  $\Delta$  sur  $\mathbb{R}$  est la diffusion de générateur  $-\frac{\partial^2}{\partial z^2}$  et que  $z(t)$  est par conséquent le brownien unidimensionnel standard. Notons  $H_t(n) = H(n, t)$  la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur  $N$  associée au sous-laplacien  $\frac{1}{2}\Sigma\tilde{X}_j^2$ . Pour calculer le noyau  $\phi_t(g) = \phi_t(n, z)$ ,  $g = (n, z) \in G$ , il suffit de conditionner sur toutes les trajectoires  $z(s)$  démarrnant en 0 et aboutissant en  $z$  au temps  $t$  et d'effectuer le changement de temps. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_e[Z(t) \in dg] &= \phi_t(g)d^r g = \phi_t(n, z)dndz \\ &= \mathbf{P}_0[z(t) \in dz]\mathbf{E} \left[ H \left( n, \int_0^t e^{2z(s)} ds \right) // z(t) = z \right] dn, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{E}[\cdot // z(t) = z]$  est l'espérance conditionnelle avec  $z(t) = z$ . L'idée de conditionner par les trajectoires  $z(s)$  pour exprimer à l'aide d'une espérance le noyau  $\phi_t(\cdot)$  est issue de [20] où on peut voir le rôle que jouent les fonctionnelles browniennes  $\int_0^t e^{z(s)} ds$  dans les estimations centrales de  $\phi_t$ . Il s'avère que ces fonctionnelles browniennes jouent un rôle important en mathématiques financières (cf. [23]). Notons

$$a_t(z, u)du = \mathbf{P}_0 \left[ \int_0^t e^{2z(s)} ds \in du // z(t) = z \right].$$

On peut alors écrire

$$\phi_t(n, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right) \int_0^\infty H_u(n)a_t(z, u)du.$$

Nous allons maintenant utiliser l'expression de  $a_t(z, u)$  donnée dans [23]. D'après [23], on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right) a_t(z, u) \\ = \frac{e^z}{(4\pi^3 t)^{1/2}} \frac{1}{u^2} \exp\left(-\frac{1}{2u}(1 + e^{2z})\right) \exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right) \psi_{e^z/u}(t) \end{aligned}$$

où  $\psi_r(t)$ ,  $r > 0$ ,  $t > 0$  est définie par

$$\psi_r(t) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) \exp(-r \cosh(y)) \sinh(y) \sin\left(\frac{\pi y}{2t}\right) dy.$$

D'où

$$\phi_t(n, z) = \frac{e^z}{\sqrt{4\pi^3 t}} \exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right) \int_0^\infty H_u(n) \frac{1}{u^2} \exp\left(-\frac{1}{2u} (1 + e^{2z})\right) \psi_{e^z/u}(t) du.$$

Effectuons dans cette intégrale le changement de variable  $u = ve^z$ . On obtient alors

$$\phi_t(n, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi^3 t}} \exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right) \int_0^\infty H_{ve^z}(n) \frac{1}{v^2} \exp\left(-\frac{1}{v} \cosh(z)\right) \psi_{1/v}(t) dv$$

et donc

$$\begin{aligned} \phi_t(n, z) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi^3 t}} \exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right) \int_0^\infty H_{ve^z}(n) \frac{1}{v^2} \exp\left(-\frac{1}{v} \cosh(z)\right) \\ &\quad \times \left( \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) \exp\left(-\frac{1}{v} \cosh(y)\right) \sinh(y) \sin\left(\frac{\pi y}{2t}\right) dy \right) dv. \end{aligned}$$

On peut ainsi écrire

$$\begin{aligned} \phi_t(n, z) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi^3 t}} \exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right) \int_0^\infty \int_0^\infty H_{ve^z}(n) \frac{1}{v^2} \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{v} (\cosh(z) + \cosh(y))\right) \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) \sinh(y) \sin\left(\frac{\pi y}{2t}\right) dy dv. \end{aligned}$$

On peut, dans cette formule, complexifier le temps et déduire pour tout  $t > 0, s \in \mathbb{R}$ , l'estimation :

$$\begin{aligned} |\phi_{t+is}(n, z)| &\leq C \frac{1}{\sqrt{t + |s|}} \exp\left(\frac{\pi^2 t}{4(t^2 + s^2)}\right) \int_0^\infty \int_0^\infty H_{ve^z}(n) \\ &\quad \frac{1}{v^2} \exp\left(-\frac{1}{v} (\cosh(z) + \cosh(y))\right) \exp\left(-\frac{ty^2}{4(t^2 + s^2)}\right) \\ &\quad \exp\left(\frac{|s|\pi y}{2(t^2 + s^2)}\right) e^y dy dv. \end{aligned}$$

Estimons maintenant la norme  $L^1(G, d^r g)$  de  $\phi_{t+is}$ . On a

$$\|\phi_{t+is}\|_{L^1(G, d^r g)} = \iint |\phi_{t+is}(n, z)| dndz,$$

d'où, d'après l'estimation précédente :

$$\begin{aligned} \iint |\phi_{t+is}(n, z)| dndz &\leq C \frac{1}{\sqrt{t + |s|}} \exp\left(\frac{\pi^2 t}{4(t^2 + s^2)}\right) \\ &\quad \int_0^\infty \int_0^\infty \left( \int H_{ve^z}(n) dn \right) \frac{1}{v^2} \exp\left(-\frac{1}{v} (\cosh(z) + \cosh(y))\right) \\ &\quad \exp\left(-\frac{ty^2}{4(t^2 + s^2)}\right) \exp\left(\frac{|s|\pi y}{2(t^2 + s^2)}\right) e^y dy dv dz. \end{aligned}$$



En utilisant le fait que  $\int H_{ve^z}(n)dn = 1$  et en intégrant en  $v$  on peut alors estimer le premier membre de l'inégalité ci-dessus par

$$\frac{\exp\left(\frac{\pi^2 t}{4(t^2+s^2)}\right)}{\sqrt{t+|s|}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\cosh(z) + \cosh(y)} \exp\left(-\frac{ty^2}{4(t^2+s^2)}\right) \times \exp\left(\frac{|s|\pi y}{2(t^2+s^2)}\right) e^y dy dz.$$

Mais

$$\int_0^\infty \frac{1}{\cosh(z) + \cosh(y)} dz \leq 2 \int_0^\infty \frac{1}{\exp(z) + \exp(y)}$$

et en effectuant le changement de variable  $e^z = u$ , on voit que

$$\int_0^\infty \frac{1}{\exp(z) + \exp(y)} = \int_1^\infty \frac{du}{u(u+e^y)} \leq \frac{C}{e^y}(1+y).$$

On a par conséquent

$$\|\phi_{t+is}\|_{L^1(G, dr_g)} \leq C \frac{\exp\left(\frac{\pi^2 t}{4(t^2+s^2)}\right)}{\sqrt{t+|s|}} \int_0^\infty (1+y) \exp\left(-\frac{ty^2}{4(t^2+s^2)}\right) \times \exp\left(\frac{|s|\pi y}{2(t^2+s^2)}\right) dy,$$

et donc

$$\|\phi_{t+is}\|_{L^1(G, dr_g)} \leq C \frac{\exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right)}{\sqrt{t+|s|}} \int_0^\infty (1+|y| + \frac{|s|}{t}) \exp\left(-\frac{ty^2}{4(t^2+s^2)}\right) dy.$$

D'où

$$\|\phi_{t+is}\|_{L^1(G, dr_g)} \leq C \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^{3/2}}\right) \exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right) (t+|s|)^{3/2}.$$

Ce qui achève la preuve du théorème 2.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. ALEXOPOULOS, Spectral multipliers on Lie groups of polynomial growth, Proc. Amer. Math. Soc., 120 (1994), 973–979.
- [2] F. ASTENGO, Multipliers for a distinguished Laplacean on solvable extensions of  $H$ -type groups, Monatshefte f. Math., 120 (1995), 179–188.
- [3] J. Ph. ANKER et N. LOHOUÉ, Multiplicateurs sur certains espaces symétriques, Amer. J. Math., 108 (1986), 1303–1354.
- [4] Ph. BOUGEROL, Exemples de théorèmes locaux sur certains groupes résolubles, Ann. I.H.P., XIX (1983), 369–391.

- [5] M. CHRIST,  $L^p$  bounds for spectral multipliers on nilpotent groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 328 (1991), 73–81.
- [6] M. CHRIST et D. MÜLLER, On  $L^p$  spectral multipliers for a solvable Lie group, *Geom. and Func. Analysis*, Vol 6, No. 5 (1996), 860–876.
- [7] J.-L. CLERC et E. M. STEIN,  $L^p$  multipliers for non compact symmetric spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, 71 (1974), 3911–3912.
- [8] R. R. COIFMAN et G. WEISS, Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes, *Lectures Notes in Math.*, 242, Springer-Verlag, 1971.
- [9] M. G. COWLING, S. GIULINI, A. HULANICKI et G. MAUCERI, Spectral multipliers for a distinguished Laplacian on certain groups of exponential growth, *Studia Math.*, 111 (1994), 103–121.
- [10] L. De MICHELE et G. MAUCERI,  $L^p$  multipliers on the Heisenberg group, *Michigan J. Math.*, 26 (1979), 361–371.
- [11] G. B. FOLLAND et E. M. STEIN, *Hardy Spaces on Homogenous Groups*, *Math. Notes*, 28, Princeton Univ. Press, 1982.
- [12] W. HEBISCH, The subalgebra of  $L^1$  associated with Laplacian on a Lie group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 117 (1993) 547–549.
- [13] W. HEBISCH, Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups, *Colloq. Math.*, 65 (1993) 231–239.
- [14] W. HEBISCH, Boundedness of  $L^1$  spectral multipliers for an exponential solvable Lie group, *Colloq. Math.*, 73 (1997), 155–164.
- [15] L. HÖRMANDER, Estimates for translation invariant operators on  $L^p$  spaces, *Acta Math.*, 104 (1960) 93–140.
- [16] G. MAUCERI et S. MEDA, Vector-valued multipliers on stratified groups, *Revista Math. Iberoamericana*, 6 (1990), 141–154.
- [17] D. MÜLLER et E. STEIN, On spectral multipliers for Heisenberg and related groups, *J. Math. Pures et Appliquées*, 73 (1994), 413–440.
- [18] S. MUSTAPHA, Multipliateurs spectraux sur certains groupes non-unimodulaires, *Harmonic Analysis and Number Theory, CMS Conf. Proceedings*, Vol 21, 1997.
- [19] M. E. TAYLOR,  $L^p$  estimates on functions of Laplace operator, *Duke Math. J.*, 58 (1989), 773–793.
- [20] N. Th. VAROPOULOS, Analysis on Lie groups, *Revista Math. Iberoamericana*, 12 (1996) 791–917.
- [21] N. Th. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE et Th. COULHON, *Analysis and Geometry on Groups*, *Cambridge Tracts in Math.*, 100, 1993.

- [22] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1978.
- [23] M. YOR, On some exponential functionals of Brownian motion, *Adv. Appl. Prob.*, 24 (1992), 509–531.

Manuscrit reçu le 8 janvier 1998,  
accepté le 20 mars 1998.

Sami MUSTAPHA,  
Université Pierre et Marie Curie  
Institut de Mathématiques  
4, place Jussieu  
75252 Paris Cedex 05 (France).