

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

THIERRY BARBOT

## **Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 46, n° 5 (1996), p. 1451-1517

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1996\\_\\_46\\_5\\_1451\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_5_1451_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
http://www.numdam.org/*

# FLOTS D'ANOSOV SUR LES VARIÉTÉS GRAPHÉES AU SENS DE WALDHAUSEN

par Thierry BARBOT

## 1. Introduction.

Soient  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  deux feuilletages de classe  $C^1$ , de codimension 1, transverses l'un par rapport à l'autre sur une variété fermée  $M$  de dimension 3. Dans tout ce travail, il n'est pas toujours nécessaire de supposer que  $M$  soit orientable, mais dans tous les énoncés à suivre (sauf le premier), il découlera à chaque fois des hypothèses que la variété considérée est orientable. Le triplet  $(M, \mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$  est appelé *bifeuilletage d'Anosov* si le feuilletage intersection  $\Phi = \mathcal{F}^s \cap \mathcal{F}^u$  est paramétrisable en un flot d'Anosov dont  $\mathcal{F}^s$  est le feuilletage faible stable et  $\mathcal{F}^u$  le feuilletage faible instable (cf. [1]).

Les exemples classiques de tels bifeuilletages sont donnés par les suspensions de difféomorphismes linéaires hyperboliques du tore et les flots géodésiques des surfaces riemanniennes à courbure négative constante. Nous appelons le deuxième type d'exemples *bifeuilletages géodésiques*. Les variétés ambiantes de ces bifeuilletages sont dans le premier cas des fibrés en tores sur le cercle, et dans le second cas des fibrés en cercles sur des surfaces fermées. Il est remarquable que pour ce type de topologie la variété ambiante caractérise le flot d'Anosov à équivalence topologique près. Plus précisément :

**THÉORÈME.** — *Tout flot d'Anosov sur une 3-variété dont le groupe fondamental est résoluble est topologiquement équivalent à une suspension.*

---

*Mots-clés :* Flot d'Anosov – Décomposition torique – Flot géodésique – Groupe de convergence – Structure transverse.

*Classification math. :* 58F15 – 57N10 – 57S05.

THÉORÈME. — *Tout flot d’Anosov sur une 3-variété dont le groupe fondamental est à centre non trivial est, à revêtements finis près, topologiquement équivalent au flot géodésique d’une surface riemannienne à courbure constante négative.*

Le premier théorème résulte de [30] (voir aussi [27]). Le deuxième est une légère extension du théorème principal de [18]. Nous en donnerons une preuve complète au paragraphe 4.2.

On peut espérer au vu de ces deux résultats que, de manière plus générale, tout bifeuilletage d’Anosov en dimension 3 est fortement déterminé à conjugaison topologique près par la nature topologique de la variété ambiante. Il est vrai qu’un résultat aussi général semble relever de l’utopie lorsqu’on passe en revue la liste éclectique des exemples de flots d’Asonov connus en dimension 3 (voir [15], [23], [19], [16], [8]). Nous nous proposons cependant dans cet article d’avancer dans cette direction.

Rappelons le principe de décomposition torique en dimension 3 (*cf.* [33]).

*Toute 3-variété compacte, orientable, irréductible et Haken se découpe le long de tores incompressibles en des sous-variétés qui sont soit atoroidales, soit des fibrés de Seifert. De plus, une telle décomposition, si elle est minimale, est unique à isotopie près.*

Ce théorème de décomposition se combine agréablement avec l’étude faite dans [4]. Par exemple, dans le cas où le flot d’Anosov  $\Phi^t$  est produit<sup>(1)</sup> et n’est pas topologiquement équivalent à la suspension d’un difféomorphisme hyperbolique du tore, les tores le long desquels on découpe la variété peuvent être choisis quasi-transverses à  $\Phi^t$ , *i.e.* transverses à  $\Phi^t$  en dehors d’un nombre fini d’orbites périodiques. De plus, le choix de tores de découpage de ce type est unique à isotopie près le long des orbites de  $\Phi^t$  (*cf.* les théorèmes C et E de [4]). Signalons que dans [4] ces résultats ne sont établis que dans le cas où  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  sont transversalement orientés, mais peuvent être étendus aux cas que nous considérerons ici.

Il apparaît donc naturel d’introduire la notion de *morceau de bifeuilletage d’Anosov* : ce sont les bifeuilletages de variétés à bord obtenus en découpant un bifeuilletage d’Anosov  $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$  le long de tores transverses ou quasi-transverses à  $\Phi = \mathcal{F}^s \cap \mathcal{F}^u$ . De manière plus précise, un morceau

(1) Un flot d’Anosov est dit *produit* si ses feuilletages faibles se relèvent dans le revêtement universel en des feuilletages conjugués chacun au feuilletage produit de  $\mathbb{R}^3$  par plans horizontaux  $\mathbb{R}^2 \times \{*\}$ .

de bifeuilletage d'Anosov est la donnée d'un bifeuilletage  $(G^s, G^u)$  sur une variété compacte à bord  $S$ , d'un bifeuilletage d'Anosov  $(M, \mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$  et d'une immersion  $i$  de  $S$  dans  $M$  envoyant chaque feuille de  $G^s$  dans une feuille de  $\mathcal{F}^s$ , chaque feuille de  $G^u$  dans une feuille de  $\mathcal{F}^u$ , dont la restriction à l'intérieur de  $S$  est un plongement, et dont la restriction à chaque composante du bord  $\partial S$  est un plongement. De manière abusive, nous ne ferons pas mention le plus souvent de l'immersion  $i$ , et nous dirons que  $(G^s, G^u)$  s'obtient par *restriction* à  $S$  de  $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$ . Là encore, nous supposerons toujours que  $G^s$  et  $G^u$  sont transversalement orientés. Si le flot  $\Phi^t$  est produit le bifeuilletage est dit *produit*. Toujours d'après [4], un morceau d'un bifeuilletage d'Anosov est bien défini à isotopie près le long des orbites de  $\Phi^t$ , même si celui-ci n'est pas produit. Lorsque le bifeuilletage initial  $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$  est un bifeuilletage géodésique, nous convenons d'appeler *morceau de bifeuilletage géodésique* le morceau obtenu. Notons que comme tout flot géodésique est produit les tores bordant un morceau de bifeuilletage géodésique sont toujours quasi-transverses à  $\Phi^t$ . Nous appelons *partie tangente du morceau de bifeuilletage* l'union des orbites périodiques tangentes au bord du morceau. Le premier résultat principal de cet article est le suivant :

THÉORÈME A. — Soit  $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$  un bifeuilletage d'Anosov produit sur une 3-variété Haken  $M$  sans bord. Soit  $S$  un morceau de la décomposition torique de  $M$ . On suppose que  $M$  ne fibre pas en tores sur le cercle, que  $S$  est un fibré de Seifert principal, et qu'aucun tore composante de bord de  $S$  ne borde un voisinage tubulaire d'une bouteille de Klein plongée dans  $M$ . Alors, après isotopie éventuelle de  $S$  dans  $M$ , la restriction de  $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$  est un morceau de bifeuilletage d'Anosov qui, privé de sa partie tangente est topologiquement conjugué à un revêtement fini d'un morceau de bifeuilletage géodésique privé de sa partie tangente.

Rappelons qu'un fibré de Seifert principal est une 3-variété admettant une action localement libre de  $\text{SO}(2)$ . Notons aussi que d'après le théorème C de [3] une 3-variété admettant un flot d'Anosov produit qui n'est pas une suspension est nécessairement orientable.

Un exemple de Franks et Williams [15] montre que l'hypothèse produit est nécessaire. On peut aussi confronter le théorème A avec l'exemple de Bonatti-Langevin [8] bien que dans cet exemple le morceau fibré de Seifert n'est pas principal. Mettons aussi en avant le fait qu'il n'est pas clair que la conjugaison topologique dont il est question au théorème A puisse en général s'étendre aux parties tangentes.

L'exemple le plus simple illustrant le théorème A est bien sûr celui des bifeuilletages géodésiques. Il existe aussi d'autres exemples moins triviaux : il s'agit des exemples de Handel-Thurston (*cf.* [23]). Leur construction a été généralisée par S. Goodman et D. Fried (*cf.* [19], [16]). Ces exemples peuvent être décrits comme certains recollements de flots géodésiques. Leurs variétés ambiantes sont ce que F. Waldhausen appelle des *variétés graphées principales* « *suffisamment compliquées* », *i.e.* des 3-variétés Haken dont les morceaux sont tous des fibrés de Seifert principaux. Nous appelons *exemple de Handel-Thurston généralisé* tout flot d'Anosov obtenu en recollant des morceaux de flots géodésiques. Il n'est pas clair si ces flots sont tous des flots de Handel-Thurston au sens de [23]. Nous discutons ces notions avec plus de précisions aux paragraphes 2.1 et 2.2.

Dans la seconde partie de cette étude, nous utilisons le théorème A pour caractériser les exemples de Handel-Thurston parmi les flots d'Asonov sur les variétés graphées principales.

**THÉORÈME B.** — *Soit  $(M, \Phi^t)$  un flot d'Anosov sur une variété graphée principale « suffisamment compliquée ». Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *aucun morceau de la décomposition torique minimale de  $M$  n'admet une fibre régulière librement homotope dans  $M$  à une orbite périodique de  $\Phi^t$  ;*
- (2) *le flot  $\Phi^t$  est produit ;*
- (3) *le flot  $\Phi^t$  est un exemple de Handel-Thurston généralisé.*

La preuve que nous donnerons du théorème B nous permettra même de donner une description du bifeuilletage  $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$  associé à un exemple de Handel-Thurston, où  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  sont les feuilletages faibles stables et instables respectivement. Nous montrerons que ce bifeuilletage s'obtient par recollements de morceaux de bifeuilletages géodésiques (pour la définition, voir section 2.2). Ceci est non trivial : la construction donnée dans [23] ne permet pas de décrire ces feuilletages.

Dans la dernière partie de ce travail, nous exploitons les arguments mis en œuvre auparavant pour montrer :

**THÉORÈME C.** — *Il existe une infinité de VGPC qui ne sont pas des fibrés en tores sur le cercle ni des fibrés de Seifert, dont les groupes fondamentaux sont à croissance exponentielle, mais qui n'admettent pas de flot d'Anosov. De plus, il existe une infinité de VGPC vérifiant les mêmes*

*hypothèses et telles que les seuls flots d'Asonov qu'elles admettent sont des exemples de Handel-Thurston.*

Signalons encore que M. Brunella a construit de nombreux exemples de morceaux de bifeuilletages géodésiques se découplant dans un bifeuilletage d'Anosov qui n'est pas un exemple de Handel-Thurston, ni même produit (cf. [10]).

Le théorème B est essentiellement le théorème D de [2], travail qui a été mené au Laboratoire de mathématiques pures et appliquées de l'École normale supérieure de Lyon. La rédaction, ainsi que certaines améliorations, ont été effectuées à l'IMPA (Rio de Janeiro) et au laboratoire de topologie de Dijon. Je tiens à remercier chaleureusement ces deux instituts pour la qualité de leur accueil et des conditions de travail qu'ils m'ont offert. Je tiens aussi à remercier le rapporteur qui aura permis d'améliorer sensiblement cet article.

## 2. Préliminaires.

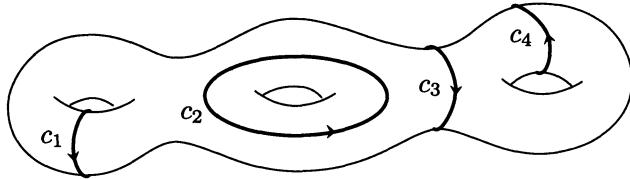
Dans cet article,  $M$  désigne une 3-variété fermée supportant un flot d'Anosov  $\Phi^t$ . Rappelons (cf. [29]) que sous ces hypothèses,  $M$  est irréductible. Nous notons  $\mathcal{F}^{ss}$ ,  $\mathcal{F}^{uu}$ ,  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  les feuilletages stables forts, instables forts, stables faibles et instables faibles, respectivement (pour toutes ces notions, voir [1]). Le feuilletage orienté de dimension un engendré par  $\Phi^t$  est noté  $\Phi$ . Le groupe fondamental de  $M$  est noté  $\Gamma$  (nous négligerons souvent le choix du point base). Ces notations sont du reste celles déjà convenues dans [3] et [4].

### 2.1. Les exemples de Handel-Thurston.

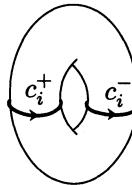
Soit  $\Sigma_0$  une orbifold fermée hyperbolique orientable, *i.e.*, un quotient du disque de Poincaré par un sous-groupe discret cocompact de  $PSL(2, \mathbb{R})$  éventuellement avec torsion (pour plus de précisions, voir [36]). Soit  $M_0$  le fibré unitaire tangent à  $\Sigma_0$  : il s'agit d'un fibré de Seifert. Nous appelons  $\pi_0$  la fibration en cercles de  $M_0$  sur  $\Sigma_0$ .

Soit  $p : M \rightarrow M_0$  un revêtement d'indice fini ne faisant que «déplier les fibres de  $\pi_0$ », c'est-à-dire tel que les fibres de la composition  $\pi = \pi_0 \circ p$  soient connexes. L'application  $\pi$  est une fibration en cercles sur  $\Sigma_0$ . Notons  $\Phi_0^t$  le flot géodésique sur  $M_0$ . Il se relève dans  $M$  en un flot d'Anosov  $\Phi_{\text{geod}}^t$ .

Nous choisissons sur  $\Sigma_0$  une collection finie  $(c_1, \dots, c_n)$  de géodésiques fermées orientées simples deux à deux disjointes.



Les préimages par  $\pi_0$  des  $c_i$  sont des tores  $(T_1^0, \dots, T_n^0)$  plongés dans  $M_0$  deux à deux disjoints. Chaque géodésique orientée  $c_i$  définit deux orbites périodiques de  $\Phi_0$  entièrement contenues dans le tore  $T_i^0$  correspondant : l'une est celle des vecteurs tangents à  $c_i$  dont les directions sont celles définies par l'orientation de  $c_i$ , l'autre est celle des vecteurs tangents à  $c_i$  mais de directions inverses. Il est facile de voir que en dehors de ces deux orbites, le tore  $T_i^0$  est transverse au flot.



Soient  $T_1, \dots, T_n$  les préimages par  $p$  des  $T_i^0$  : il s'agit de tores incompressibles plongés dans  $M$ . Ils contiennent un nombre fini d'orbites périodiques, et en dehors ces orbites périodiques ils sont transverses à  $\Phi_{\text{geod}}^t$ . De plus, ils sont transverses aux deux feilletages faibles, et les seules feuilles fermées des traces des feilletages faibles sur ces tores sont les orbites périodiques de  $\Phi_{\text{geod}}^t$  qu'ils contiennent. Ceci entraîne que de part et d'autre de chacune de ces orbites périodiques, le flot est transverse au tore en deux directions opposées. Ce qui précède peut être résumé par le qualificatif suivant : ces tores sont *quasi-transverses* à  $\Phi_{\text{geod}}^t$ . Pour plus de précision, voir [4].

Pour chaque indice  $i$  on choisit deux orbites tangentes à  $T_i$  : l'une, qu'on notera  $c_i^+$ , est choisie de direction compatible avec l'orientation de  $c_i$ , l'autre,  $c_i^-$ , est choisie de direction opposée.

Découpons  $M$  le long de ces tores  $T_i$ . Nous obtenons ainsi une collection de morceaux  $S_k$ . Ce sont des fibrés de Seifert sur des orbifolds hyperboliques à bord. De plus, ils sont chacun munis d'un feilletage

orienté : la trace du feuilletage défini par  $\Phi_{\text{geod}}^t$ . Ces feuilletages sont transverses aux bords en dehors d'un nombre fini de feuilles fermées tangentes. Ces morceaux sont des « morceaux de flots géodésiques ». Les composantes de bord de ces morceaux viennent par paires  $(T'_i, T''_i)$ . Le feuilletage initial  $(M, \Phi_{\text{geod}})$  est obtenu par recollements de ces morceaux par des difféomorphismes  $f_i : T'_i \rightarrow T''_i$ . Nous tenons à insister sur le fait que les deux tores  $T'_i$  et  $T''_i$  peuvent appartenir au même morceau.

Les exemples de Handel-Thurston s'obtiennent en changeant ces recollements : on les modifie en composant à gauche par des difféomorphismes  $g_i$  de  $T'_i$ . Bien sûr, les  $g_i$  ne peuvent être quelconques. Ils doivent en particulier préserver les feuilles fermées contenues dans  $T'_i$ , ce qui signifie qu'ils doivent être isotopes aux twists de Dehn le long de ces feuilles fermées. La réciproque est vraie ; il s'agit du théorème de [23] (mais qui n'est pas énoncé sous cette forme) : *tout twist de Dehn le long d'une orbite périodique contenue dans  $T'_i$  est isotope à un difféomorphisme  $g_i$  tel que dans la variété obtenue par les recollements  $f_i \circ g_i : T'_i \rightarrow T''_i$  les feuilletages des morceaux se composent en un feuilletage dont les feuilles sont les orbites d'un flot d'Anosov.*

À vrai dire, cette affirmation telle quelle n'est pas démontrée dans [23] : dans cet article, il est imposé une condition de positivité. Mais celle-ci peut être déjouée si on utilise la présentation de S. Goodman (*cf.* [19]). Par la suite, D. Fried a mis au point une version infinitésimale de cette construction (voir [16]). Elle s'énonce de la manière suivante : pour tout flot d'Anosov  $\Phi^t$  de dimension 3, pour toute orbite périodique  $\theta$  de ce flot, et pour tout entier  $p$ , la variété obtenue par chirurgie de Dehn d'ordre  $1/p$  sur  $\theta$  supporte un flot d'Anosov  $\psi^t$ . De plus, la restriction du flot  $\psi^t$  ainsi construit au complémentaire du lieu de la chirurgie est topologiquement équivalent à la restriction de  $\Phi^t$  au complémentaire de  $\theta$ . Nous appelons cette opération *chirurgie de Dehn sur  $\Phi^t$  le long de  $\theta$  d'ordre  $p$* .

Voyons le lien entre les chirurgies de Dehn et les exemples de Handel-Thurston. Soit  $\psi^t$  un flot de Handel-Thurston obtenu à partir d'un revêtement fini  $\Phi_{\text{geod}}^t$  d'un flot géodésique. Soient  $p_1, \dots, p_n$  les entiers caractérisant les classes d'isotopie des twists de Dehn  $g_i$ . Chaque orbite périodique  $c_i^+$  de  $\Phi_{\text{geod}}^t$  correspond à une orbite périodique  $\gamma_i^+$  de  $\psi^t$ . Soit enfin  $\Phi^t$  le flot d'Anosov obtenu à partir de  $\psi^t$  par chirurgie de Dehn d'ordre  $-p_i$  le long de chaque  $\gamma_i^+$ . Il est clair que la variété ambiante de  $\Phi^t$  est homéomorphe à  $M$ . D'après [18], ou plus précisément d'après le théorème 4.9 à suivre, il s'ensuit que  $\Phi^t$  est topologiquement équivalent à un flot géodésique. En d'autres termes, tout exemple de Handel-Thurston

s'obtient par chirurgies de Dehn à partir d'un flot algébrique. Ceci suggère d'étendre la définition des exemples de Handel-Thurston de la manière suivante :

DÉFINITION 2.1. — *Un flot d'Anosov  $\psi^t$  est appelé exemple de Handel-Thurston s'il s'obtient par chirurgies de Dehn à partir d'un flot  $\Phi^t$  tel que :*

- $\Phi^t$  est topologiquement équivalent à un revêtement fini  $\Phi_{\text{geod}}^t$  du flot géodésique d'une orbifold hyperbolique orientable  $\Sigma_0$  ;
- les orbites périodiques de  $\Phi^t$  le long desquelles les chirurgies sont opérées correspondent à des orbites de  $\Phi_{\text{geod}}^t$  qui se projettent dans  $\Sigma_0$  en des géodésiques fermées simples deux à deux disjointes.

Notre discussion précédente montre que les exemples de Handel-Thurston au sens de [23] sont tous des exemples de Handel-Thurston au sens de 2.1.

## 2.2. Morceaux de bifeuilletages géodésiques et exemples de Handel-Thurston généralisés.

Reconsidérons les morceaux définis au paragraphe précédent. Nous les notons  $S_k$ . On peut les munir d'une donnée supplémentaire : les restrictions  $G^s$  et  $G^u$  à  $S_k$  des feuilletages faibles du flot géodésique. Ce sont deux feuilletages de codimension 1, transverses l'un par rapport et l'autre, et transverses au bord de  $S_k$ . Le triplet  $(S_k, G^s, G^u)$  est appelé *morceau de bifeuilletage géodésique*. Ce morceau est découpé dans la variété  $M$  qui a été choisie comme étant un revêtement d'indice fini du fibré unitaire tangent de l'orbifold sous-jacente  $\Sigma_0$ . L'indice de ce revêtement est appelé *indice du morceau*  $(S_k, G^s, G^u)$ .

Nous allons montrer à suivre que la donnée d'un morceau de bifeuilletage géodésique équivaut à la donnée de certains sous-groupes discrets du revêtement universel  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$  de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Soit  $p_0 : \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  l'application de revêtement. C'est un morphisme de groupes de Lie dont le noyau est un sous-groupe discret cyclique. Ce noyau est également le centre de  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ . Soit  $\delta$  un de ses deux générateurs.

Soit  $\Gamma_0$  un sous-groupe discret de  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ , et  $\bar{\Gamma}_0 = p_0(\Gamma_0)$  sa projection dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Nous choisissons  $\Gamma_0$  de sorte que :

- il est de type fini ;

- il rencontre le centre de  $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$  en un élément non trivial;
- aucun élément de  $\bar{\Gamma}_0$  n'est parabolique.

Le quotient  $M_{\Gamma_0} = \Gamma_0 \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$  est un revêtement fini de la variété  $M_0 = \bar{\Gamma}_0 \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . L'indice de ce revêtement est le plus petit entier positif non nul  $n$  pour lequel  $\delta^n$  appartient à  $\Gamma_0$ . Ceci montre que  $\bar{\Gamma}_0$  est discret dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Soit  $\mathrm{SO}(2)$  le sous-groupe de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  correspondant aux matrices de rotation de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Le quotient à droite de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  par  $\mathrm{SO}(2)$  s'identifie au demi-plan supérieur de Poincaré  $H$ . En effet,  $\mathrm{SO}(2)$  est le stabilisateur de  $i$  pour l'action naturelle de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  sur  $H$ . Ainsi, le biquotient

$$\bar{\Gamma}_0 \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(2)$$

s'identifie à l'orbifold hyperbolique  $O_0 = \bar{\Gamma}_0 \backslash H$ . De plus, la projection  $\pi_0 : M_0 \rightarrow O_0$  est un fibré  $\mathrm{SO}(2)$ -principal. L'espace total  $M_0$  s'identifie ainsi au fibré unitaire tangent de  $O_0$ . Le revêtement  $M_{\Gamma_0} \rightarrow M_0$  ne fait que déplier les fibres de  $\pi_0$ . Nous pouvons donc parler du flot géodésique  $\Phi_{\Gamma_0}$  de  $M_{\Gamma_0}$ . Ce flot est le relevé du flot géodésique de  $O_0$ . C'est aussi le passage au quotient du «flot géodésique de  $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ » qui est donné par l'action d'un sous-groupe à un paramètre. Nous notons  $\tilde{\Phi}_{\mathrm{geod}}$  le flot géodésique de  $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$  : c'est en quelque sorte le flot géodésique universel puisqu'il revêt tous les flots géodésiques.

Comme  $\bar{\Gamma}_0$  n'admet pas d'éléments paraboliques et qu'il est de type fini, il possède un *domaine de Nielsen*  $\mathcal{D}_0$  (cf. [7], § 8.5). C'est un fermé de  $H$  préservé par l'action de  $\bar{\Gamma}_0$ , et le quotient  $\Sigma_0 = \bar{\Gamma}_0 \backslash \mathcal{D}_0$  de cette action s'identifie à une partie compacte de  $O_0$  bordée par des géodésiques. Soit  $S_0 = \pi_0^{-1}(\Sigma_0)$  la partie de  $M_0$  au-dessus de  $\Sigma_0$ . Le bifeuilletage géodésique de  $M_0$  est transverse au bord de  $S_0$ . Sa restriction à  $S_0$  définit un morceau de bifeuilletage géodésique. Soit  $S_{\Gamma_0}$  la partie de  $M_{\Gamma_0}$  au-dessus de  $S_0 \subset M_0$ . Le bifeuilletage de  $S_0$  se relève en un bifeuilletage géodésique de  $S_{\Gamma_0}$ . Nous notons  $(S_{\Gamma_0}, G_{\Gamma_0}^s, G_{\Gamma_0}^u)$  le morceau de bifeuilletage géodésique ainsi défini. Tous les morceaux de bifeuilletages géodésiques s'obtiennent de cette manière.

Un *exemple de Handel-Thurston généralisé* est un flot d'Anosov vérifiant la propriété suivante : il existe un nombre fini de tores quasi-transverses plongés dans  $M$  tels que les morceaux de bifeuilletages obtenus en découpant le long de ces tores quasi-transverses sont topologiquement conjugués hors de leur partie tangente à un morceau de bifeuilletage géodésique privé de sa partie tangente. Cette définition englobe celle des exemples de Handel-Thurston donnée à la section précédente mais est a priori plus large. Comme il apparaîtra par la suite (voir le paragraphe 4.3), les exemples de Handel-Thurston sont exactement les exemples de Handel-Thurston généralisés dont les morceaux de bifeuilletages géodésiques qui le constituent ont tous le même indice et dont les deux feuillettages faibles sont transversalement orientés.

Il semble affirmé dans [23] qu'il existe des exemples de Handel-Thurston généralisés qui ne sont pas des exemples de Handel-Thurston au sens de 2.1. Il n'y est malheureusement pas proposé de preuve, et il ne nous paraît pas que ce soit une trivialité. Par exemple, il découle du lemme 5.2 de [6] que deux tores bordant deux morceaux de bifeuilletages géodésiques ne peuvent être envoyés l'un sur l'autre par un homéomorphisme respectant les traces des bifeuilletages que si les deux morceaux ont le même indice. Par ailleurs, même s'il aisé de trouver un tel recollement lisse entre les deux tores ne respectant que le feilletage intersection, il demeure délicat de s'assurer que le feilletage de dimension un obtenu sur le recollé puisse être paramétré par un flot d'Anosov. Pour appréhender la difficulté, il convient de noter que le feilletage obtenu par recollement ne saurait admettre un ouvert saturé formé d'orbites périodiques.

### 2.3. Décomposition des variétés Haken.

Rappelons le théorème fondamental de décomposition torique des 3-variétés énoncé lors de l'introduction :

*Toute 3-variété irréductible, orientable et Haken se découpe le long de tores incompressibles en des sous-variétés qui sont soit atoroïdales, soit des fibrés de Seifert. De plus, une telle décomposition, si elle est minimale, est unique à isotopie près.*

Rappelons qu'une variété orientable *Haken* est une variété irréductible dans laquelle il existe un plongement incompressible d'une surface fermée, et qu'une variété est *atoroïdale* si tout tore immergé de manière incompressible est homotope à une composante du bord. Il est à noter que les seuls fibrés de Seifert atoroïdaux sont ceux qui sont homéomorphes à  $D^2 \times S^1$ ,  $T^2 \times I$  ou

au fibré en cercles non trivial sur le ruban de Möbius. (Ce dernier est aussi homéomorphe au fibré en segments non trivial sur la bouteille de Klein).

Un cas particulier est celui des *variétés graphées*, notion qui a été introduite par F. Waldhausen (*cf.* [37] et [38]). Il s'agit des 3-variétés fermées orientables décomposables en fibrés de Seifert le long d'un nombre fini de tores plongés incompressibles deux à deux disjoints. Pour ne pas alourdir inutilement notre propos nous nous restreindrons aux *variétés graphées principales*, *i.e.* celles décomposables en fibrés de Seifert *principaux* (*cf.* introduction) qui ne sont pas homéomorphe au fibré en segments non trivial sur la bouteille de Klein (il convient ici de remarquer que le fibré en cercles non trivial sur le ruban de Möbius admet aussi une fibration principale sur le disque avec deux singularités d'ordre 2. Pour plus de précision, voir [38]). Avec ces conventions, dans une variété graphée principale, aucun tore ne borde un voisinage tubulaire régulier d'une bouteille de Klein.

Nous distinguons parmi les variétés graphées celles qui sont «suffisamment compliquées» (*cf.* [38]). Les seules variétés graphées principales non «suffisamment compliquées» sont les fibrés en tores sur le cercle et les fibrés de Seifert sur la sphère avec au plus trois fibres exceptionnelles. La classification des flots d'Asonov sur ces variétés est déjà connue. Nous limitons donc notre étude aux variétés graphées principales «suffisamment compliquées». Nous utiliserons l'abréviation VGPC. Il découle de [38] que toute variété graphée principale suffisamment compliquée est Haken.

Dans tout ce qui suit,  $M$  désigne une variété Haken orientable, non homéomorphe à un fibré en tores sur le cercle. Soit  $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$  une collection de tores plongés incompressibles et deux-à-deux disjoints le long desquels  $M$  se découpe de manière minimale. Cette famille est bien définie à isotopie près. Nous appelons  $S_1, \dots, S_k$  les morceaux de la décomposition : eux aussi sont bien définis à isotopie près. Comme  $M$  n'est pas un fibré en tores sur le cercle, les  $T_i$  sont deux-à-deux non librement homotopes.

Deux morceaux  $S_i$  et  $S_{i'}$  sont dits *adjacents via un tore*  $T_j$  si pour tout voisinage tubulaire régulier  $U$  de  $T_j$  dans  $M$ , une des composantes connexes de  $U \setminus T_j$  est contenue dans  $S_i$  et que l'autre est contenue dans  $S_{i'}$ . Il est à remarquer qu'un morceau peut fort bien être adjacent à lui-même.

Soit  $\mathcal{G}_M$  le graphe dont les sommets sont les  $S_i$ , dont les arêtes sont les tores  $T_j$ , et tel qu'une arête  $T_j$  relie deux sommets  $S_i$  et  $S_{i'}$  si ceux-ci sont adjacents via  $T_j$ . Ce graphe est indépendant du choix de  $T$ .

On peut associer à  $M$  mieux qu'un graphe : *un graphe de groupes* (voir [35]). Soit  $\mathcal{G}_M^0$  le graphe orienté obtenu en dupliquant les arêtes de  $\mathcal{G}_M$  : si  $S_i$  et  $S_{i'}$  sont deux morceaux adjacents via le tore  $T_j$ , l'arête  $T_j$  de  $\mathcal{G}_M$  donne lieu à deux arêtes  $\alpha = (S_i, S_{i'})$  et  $\bar{\alpha} = (S_{i'}, S_i)$  de  $\mathcal{G}_M^0$ . On choisit ensuite pour chaque indice  $i$  un point base  $x_i$  dans le morceau  $S_i$ , et pour chaque indice  $j$ , un point base  $y_j$  dans le tore  $T_j$ . Enfin, si  $S_i$  et  $S_{i'}$  sont deux morceaux adjacents via  $T_j$ , on choisit deux chemins  $c_{ji}$  et  $c_{ji'}$  joignant dans cet ordre  $y_j$  aux points bases  $x_i$  et  $x_{i'}$ . Ces chemins permettent de définir les injections suivantes :

$$\pi_1(S_i, x_i) \xleftarrow{f_j^i} \pi_1(T_j, y_j) \xleftarrow{f_j^{i'}} \pi_1(S_{i'}, x_{i'}).$$

Si  $\alpha$  est l'arête  $(S_i, S_{i'})$  de  $\mathcal{G}_M^0$ , nous notons  $f_\alpha$  l'application  $f_j^i$ .

Nous obtenons ainsi :

- un étiquetage des sommets de  $\mathcal{G}_M^0$  : l'étiquette de  $S_i$  est  $\pi_1(S_i, x_i)$ ;
- un étiquetage des arêtes de  $\mathcal{G}_M^0$  : l'étiquette de  $\alpha = (S_i, S_{i'})$  est  $\pi_1(T_j, y_j)$ ;
- pour chaque arête  $\alpha = (S_i, S_{i'})$ , un morphisme injectif  $f_\alpha$  de son étiquette dans celle de son extrémité source  $S_i$ .

Une telle donnée est un *graphe de groupe*.

**DÉFINITION 2.2.** — Pour tout morceau  $S_i$ , un élément  $\gamma$  de  $\pi_1(S_i, x_i)$  est appelé fibre de  $S_i$  s'il existe une fibration de Seifert d'espace total  $S_i$  pour laquelle la fibre passant par  $x_i$  est régulière et représente  $\gamma$ . Un élément  $\gamma$  du groupe fondamental de  $M$  est appelé fibre de  $M$  s'il est conjugué dans  $\pi_1(M)$  à une fibre de  $S_i$  où  $S_i$  est un morceau fibré de Seifert de  $M$ .

Il convient de remarquer que lorsque  $S_i$  est un fibré de Seifert principal, son groupe fondamental n'admet que deux fibres, l'une inverse de l'autre. Ceci signifie que le centre du groupe fondamental est dans ce cas cyclique.

**PROPOSITION 2.3.** — Aucun des groupes fondamentaux  $\pi_1(S_i, x_i)$  n'est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ou à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , et s'il est isomorphe à l'extension double non triviale de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , alors  $S_i$  est un voisinage tubulaire régulier d'une bouteille de Klein. Si  $S_i$  et  $S_{i'}$  sont deux morceaux adjacents via  $T_j$ , l'image réciproque par  $f_j^i$  d'une fibre de  $S_i$  et l'image réciproque par  $f_j^{i'}$  d'une fibre de  $S_{i'}$  sont deux éléments de  $\pi_1(T_j, y_j)$  qui n'ont aucune puissance commune.

*Preuve.* — Si le groupe fondamental  $\pi_1(S_i, x_i)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ou à l'extension double non triviale de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , le morceau  $S_i$  est à bord non vide et est donc Haken. D'après le corollaire 12.8 de [25], le morceau  $S_i$  devrait être un fibré de Seifert. On en déduit aisément qu'il devrait être homéomorphe à  $D^2 \times S^1$ , à  $T^2 \times I$  ou au voisinage tubulaire d'une bouteille de Klein plongée dans  $M$  de manière incompressible. Le premier cas contredit l'incompressibilité de  $T$ , et dans le second cas, il découle de la minimalité de  $T$  que le morceau  $S_i$  doit être l'unique morceau apparaissant dans la décomposition de  $M$ . En d'autres termes,  $M$  doit être un fibré en tores sur le cercle, ce qui est supposé ne pas être. Ceci montre la première affirmation. La deuxième est elle aussi un corollaire de la minimalité de  $T$  (les préimages par  $f_j^i$  et  $f_j^{i'}$  de fibres de  $S_i$  et de  $S_{i'}$  se représentent par des courbes fermées simples de  $T_j$ . Donc, si elles admettent des puissances communes, elles sont en fait égales).  $\square$

Notons  $S$  l'ensemble des sommets de  $\mathcal{G}_M^0$  et  $A$  celui de ses arêtes. À chaque élément  $\alpha$  de  $A$  nous associons un symbole  $t_\alpha$ . Nous notons  $L(t_\alpha)$  le groupe libre de générateur  $t_\alpha$ . Soit enfin  $G(\mathcal{G}_M^0)$  le groupe obtenu en quotientant le produit libre

$$\left( \underset{i \in S}{*} \pi_1(S_i, x_i) \right) * \left( \underset{\alpha \in A}{*} L(t_\alpha) \right)$$

par les relations :

$$t_{\bar{\alpha}} = t_\alpha^{-1}, \quad f_{\bar{\alpha}}(g) = t_\alpha f_\alpha(g) t_\alpha^{-1}.$$

Ce groupe se projette surjectivement sur l'ensemble des mots réduits en les lettres  $t_\alpha$ , qui n'est autre que le groupoïde des classes d'homotopies à extrémités fixées des chemins dans le graphe  $\mathcal{G}_M$ . Alors, pour tout choix d'un « sommet-base »  $s_0$  de  $\mathcal{G}_M$ , la préimage par cette projection de l'ensemble des classes d'homotopie des chemins fermés d'extrémités  $s_0$  est un sous groupe de  $G(\mathcal{G}_M^0)$ . Ce groupe est exactement le groupe fondamental du graphe de groupes au point-base  $s_0$ . À isomorphisme près, il ne dépend pas du choix de  $s_0$ .

D'après le théorème de Van Kampen :

**THÉORÈME 2.4.** — *Le groupe fondamental de  $\mathcal{G}_M^0$  est isomorphe au groupe fondamental de  $M$ .*  $\square$

## 2.4. Caractérisation des groupes fuchsiens d'après Gabai, Casson, Jungreis.

Nous notons  $\text{Homéo}^+(S^1)$  le groupe des homéomorphismes du cercle préservant l'orientation. Rappelons qu'un groupe fuchsien est un sous-groupe discret de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{Homéo}^+(S^1)$ . Il apparaîtra que la preuve du théorème A consiste essentiellement à montrer qu'un certain groupe d'homéomorphismes du cercle est conjugué dans  $\text{Homéo}^+(S^1)$  à un groupe fuchsien. Pour répondre à ce type de question, nous disposons du critère suivant :

**THÉORÈME 2.5.** — *Un sous-groupe de  $\text{Homéo}^+(S^1)$  est conjugué à un groupe fuchsien si et seulement si il est de convergence.*

Un *groupe de convergence* est un sous-groupe de  $\text{Homéo}^+(S^1)$  vérifiant les propriétés suivantes :

De toute suite d'éléments distincts du groupe il est possible d'extraire une sous-suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour laquelle il existe deux éléments  $x$  et  $y$  de  $S^1$  tels que :

- la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge sur  $S^1 \setminus \{y\}$  vers  $x$  uniformément sur les compacts;
- la suite  $(g_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge sur  $S^1 \setminus \{x\}$  vers  $y$  uniformément sur les compacts.

La preuve de ce théorème est le fruit du travail de nombreux auteurs : A. Casson, D. Gabai, F.W. Gehring, D. Jungreis, G. Martin, J. Nielsen, R. Tukia, H. Zieschang (cf. [17], [11]). Il ne s'agit pas pour nous de présenter ici cette preuve qui est longue et difficile. Notre objectif est d'établir grâce à 2.5 un autre critère. Nous devons pour ce faire introduire la notion de lacune : tout sous-groupe  $G$  de  $\text{Homéo}^+(S^1)$  admet au moins un fermé invariant minimal. Une composante connexe du complémentaire dans  $S^1$  d'un fermé  $G$ -invariant minimal est appelé *lacune de  $G$* . Une lacune de  $G$  est dite *errante* si elle est disjointe de tous ses itérés par les éléments non triviaux de  $G$ .

**THÉORÈME 2.6.** — *Soit  $G$  un groupe d'homéomorphismes du cercle de type fini. Il est conjugué dans  $\text{Homéo}^+(S^1)$  à un sous-groupe de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (1)  *$G$  n'admet pas de lacune errante;*
- (2) *tout élément de  $G$  admet au plus deux points fixes, et s'il en admet deux, il est de type hyperbolique;*

(3) le sous-groupe d'isotropie de tout point du cercle est soit trivial, soit cyclique;

(4) si  $(x_0, y_0)$  est le couple des points fixes d'un élément hyperbolique de  $G$ , son orbite par  $G$  est un fermé discret de  $S^1 \times S^1$  privé de la diagonale. De plus, si l'action de  $G$  n'est pas libre, le sous-groupe de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  auquel il est conjugué est discret.

*Preuve.* — Nous ne traitons pas ici le cas (facile) où  $G$  admet une orbite finie. Ce cas étant exclu, l'action de  $G$  sur le cercle admet un unique fermé invariant minimal (*cf.* par exemple [24], IV.3.1). Nous notons  $\mu$  ce minimal. Le cas où  $G$  agit librement sur le cercle est bien connu : son action est alors topologiquement conjuguée à une action par rotations d'angles irrationnelles (remarquer que d'après la condition 1 l'action est dans ce cas minimale).

Nous supposons donc désormais que l'action de  $G$  n'est pas libre. Nous traitons d'abord le cas où elle est minimale, *i.e.*,  $\mu = S^1$ . Nous notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des points du cercle à groupe d'isotropie non trivial. Comme l'action de  $G$  n'est pas libre,  $\mathcal{P}$  n'est pas vide. Comme l'action est minimale,  $\mathcal{P}$  est dense dans  $S^1$ . Notons  $\mathcal{P}^2$  l'ensemble des couples de points fixes d'éléments hyperboliques de  $G$ .

**LEMME 2.7.** — *L'ensemble  $\mathcal{P}^2$  n'est pas vide.*

*Preuve.* — Remarquons que comme  $\mathcal{P}$  n'est pas vide, si  $G$  n'admet pas d'élément parabolique, alors il contient des éléments hyperboliques. Ce qui conclut dans ce cas.

Soit donc  $g_0$  un élément parabolique de  $G$ , c'est-à-dire, admettant un unique point fixe  $x_0$ . Soit  $g$  un élément de  $G$  envoyant  $x_0$  sur un élément  $y_0 \neq x_0$ . Le conjugué  $g_1 = gg_0^{-1}g^{-1}$  est un élément parabolique de point fixe  $y_0$ . Le commutateur  $g_0g_1$  envoie un des intervalles  $[x_0, y_0]$  à l'intérieur de lui-même. Il admet donc deux points fixes, un dans chaque intervalle ouvert délimité par  $x_0$  et  $y_0$ .  $\square$

**LEMME 2.8.** — *L'ensemble  $\mathcal{P}^2$  est dense dans  $S^1 \times S^1$ .*

*Preuve.* — Ceci provient d'un argument classique qui s'applique dans le contexte plus général de l'action des groupes hyperboliques sur leur bord (*cf.* [20], corollary 8.2.G).  $\square$

Soit  $(g_n)$  une suite d'éléments distincts de  $G$ . Fixons-nous un élément  $(x_0, y_0)$  de  $\mathcal{P}^2$ . Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite des  $g_n x_0$  admet une limite  $\bar{a}$ . La condition (4) de l'énoncé montre alors qu'à une exception près  $\bar{a}$  est l'unique valeur d'adhérence possible pour la suite des  $g_n y_0$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n y_0 = \bar{a}.$$

L'exception dont il est question précédemment est le cas où une infinité de  $g_n x_0$  valent  $\bar{a}$ . Dans ce cas, après une extraction d'une sous-suite, les  $g_n$  ne diffèrent les uns des autres que par des puissances d'un même élément de  $G$  de type hyperbolique ou parabolique. On vérifie aisément la propriété de convergence dans ce cas de figure. De manière plus générale, on peut supposer que pour tout élément  $(x, y)$  de  $\mathcal{P}^2$ , si  $g_n(x)$  converge, alors  $g_n(y)$  converge elle aussi et admet la même limite.

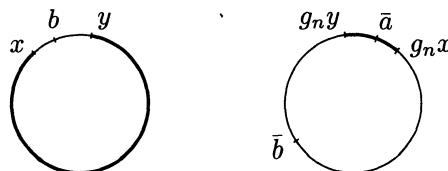
À ce stade, la meilleure méthode consiste à étudier d'abord le cas suivant :

(H) Il existe un élément  $b$  du cercle tel que la suite des  $g_n b$  admet une valeur d'adhérence  $\bar{b}$  différente de  $\bar{a}$ .

Après extraction d'une sous-suite, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n b = \bar{b}.$$

Pour tout couple d'éléments distincts de  $S^1 \setminus \{b\}$ , nous notons  $[x, y]$  l'intervalle de  $S^1 \setminus \{b\}$  d'extrémités  $x$  et  $y$ . Alors, si les  $g_n x$  et  $g_n y$  convergent vers  $\bar{a}$ , les restrictions à  $[x, y]$  des  $g_n$  convergent uniformément vers  $\bar{a}$ . En effet, les intervalles  $S^1 \setminus g_n[x, y]$  contiennent  $g_n(b)$ , c'est-à-dire, des points de plus en plus proches de  $\bar{b}$ . Comme les extrémités des  $S^1 \setminus g_n[x, y]$  convergent vers  $\bar{a}$  et que  $\bar{b}$  est différent de  $\bar{a}$ , ces intervalles sont de plus en plus «grands». Les  $g_n[x, y]$  sont donc de plus en plus petits et convergent vers  $\bar{a}$ .



Ainsi, si  $(x, y)$  est un élément de  $\mathcal{P}^2$  «intercalé» avec  $(x_0, y_0)$ , les intervalles  $g_n[x, y]$  convergent vers  $\bar{a}$ .

Or, comme  $\mathcal{P}^2$  est dense, tout élément  $(x_1, y_1)$  de  $\mathcal{P}^2$  converge vers  $\bar{a}$ . En effet, si  $(x_1, y_1)$  et  $(x_0, y_0)$  ne sont pas déjà intercalés, il existe un autre élément  $(x_2, y_2)$  de  $\mathcal{P}^2$ . Comme tout compact de  $S^1 \setminus \{b\}$  est contenu dans un intervalle du type  $[x, y]$ , où  $(x, y)$  appartient à  $\mathcal{P}^2$ , nous avons montré que *la suite des  $g_n$  converge uniformément sur les compacts de  $S^1 \setminus \{b\}$  vers  $\bar{a}$* . La convergence de la suite inverse en découle aisément : soit  $K$  un compact de  $S^1 \setminus \{\bar{a}\}$ . Soit  $I$  un voisinage de  $b$ . D'après ce qui précède :

$$\exists n_0, \forall n > n_0, \quad g_n(S^1 \setminus I) \cap K = \emptyset.$$

D'où

$$g_n^{-1}K \subset I.$$

La suite  $(g_n^{-1})$  converge donc uniformément sur les compacts de  $S^1 \setminus \{\bar{a}\}$  vers  $b$ .

Le cas où (H) est vérifié est donc traité. Il ne reste donc qu'à étudier le cas :

$$\forall x \in S^1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n x = \bar{a}.$$

Si, quand  $x$  décrit  $S^1$ , deux des suites inverses  $g_n^{-1}(x)$  admettent des valeurs d'adhérence différentes, nous pouvons à nouveau nous placer sous l'hypothèse (H). Donc, après extraction d'une sous-suite, nous pouvons supposer l'existence d'un élément  $\bar{c}$  vers lequel toutes les suites  $g_n^{-1}x$  convergent.

Soit  $K$  un compact de  $S^1 \setminus \{\bar{c}\}$ . Quitte à l'agrandir, nous pouvons le supposer être un intervalle.

Soit  $I$  un voisinage de  $\bar{a}$  :

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, \quad g_n(\partial K) \subset I.$$

Supposons que les  $g_n$  ne convergent pas uniformément sur  $K$  vers  $\bar{a}$ . Alors, nous aurions pour une infinité d'entre eux

$$g_n K \supset S^1 \setminus I.$$

D'où, après extraction d'une sous-suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(S^1 \setminus K) = \{\bar{a}\}.$$

Soit  $x$  un élément de  $S^1 \setminus \{\bar{a}\}$ . D'après ce qui précède,  $x$  appartient à  $g_n K$  dès que  $n$  est suffisamment grand. Or,  $g_n^{-1}x$  converge vers  $\bar{c}$ . Nous en déduisons que  $\bar{c}$  appartient à  $K$ , ce qui est absurde.

La suite  $(g_n)$  converge donc uniformément sur les compacts de  $S^1 \setminus \{\bar{c}\}$  vers  $\bar{a}$ . La convergence de la suite inverse s'obtient de la même façon. Nous avons ainsi traité le cas où l'action est minimale.

Lorsque  $\mu$  n'est pas tout le cercle, nous pouvons nous ramener au cas où l'action est minimale : il suffit d'« écraser » les composantes connexes de  $S^1 \setminus \mu$  en des points. En d'autres termes, il suffit de considérer une application continue  $f : S^1 \rightarrow S^1$ , croissante pour l'ordre cyclique sur  $S^1$ , et telle que la préimage d'un point de  $S^1$  est soit un singleton, soit l'adhérence d'une composante connexe de  $S^1 \setminus \mu$ . Cette application  $f$  envoie alors l'action de  $G$  sur le cercle de gauche en une action minimale de  $G$  sur le cercle de droite. Ces deux actions sont alors bien sûr semi-conjuguées par  $f$ .

Les composantes connexes de  $S^1 \setminus \mu$  sont, d'après la condition 1, chacune fixée par un élément de  $G$ . Leurs images par  $f$  sont donc des points fixes d'éléments de  $G$  dont l'action sur le cercle est de type parabolique. La nouvelle action de  $G$  sur le cercle vérifie toujours les hypothèses du théorème 2.6, et elle est de plus minimale : d'après ce qui précède, il existe un morphisme injectif  $\rho : G \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et un homéomorphisme  $f_0 : S^1 \rightarrow S^1$  tels que

$$\forall x \in S^1, \forall g \in G, \quad f_0(gs) = \rho(g)f_0(x).$$

Comme  $G$  est de type fini, et que l'action de  $\rho(G)$  sur  $S^1$  est minimale, le quotient du disque de Poincaré par  $\rho(G)$  est une orbifold  $O$  de type fini munie d'une métrique hyperbolique, et dont tous les bouts sont des « cusps ». Il existe sur  $O$  une autre métrique hyperbolique n'admettant pas de cusps. Elle correspond à une autre représentation fidèle  $\rho_0$  de  $G$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  dont l'image ne contient aucun élément parabolique.

Par ailleurs, il est bien connu que toutes les représentations fidèles et discrètes d'un même groupe dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  sont semi-conjuguées : il existe une semi-conjugaison  $f_1 : S^1 \rightarrow S^1$  entre les actions de  $G$  sur  $S^1$  via  $\rho$  et  $\rho_0$ . C'est une application continue, préservant l'ordre cyclique sur  $S^1$  et telle que

$$\forall x \in S^1 \forall g \in G \quad f_1(\rho_0(g)s) = \rho(g)f_1(x).$$

La préimage par  $f_1$  d'un point  $x$  de  $S^1$  est un singleton, sauf si  $x$  est point fixe d'un élément parabolique  $\rho(g)$ , auquel cas la préimage est un intervalle dont les extrémités sont fixées par l'élément  $\rho_0(g)$ . Cet intervalle est alors l'adhérence d'une composante connexe du complémentaire dans  $S^1$  de l'ensemble limite de l'action de  $\rho_0(G)$ . On en déduit sans peine que la semi-conjugaison  $f$  se « relève » en une conjugaison entre l'action initiale de  $G$  sur le cercle et son action projective via  $\rho_0$ .  $\square$

## 2.5. Généralités sur les flots d'Asonov en dimension 3.

Nous résumons à suivre les principaux résultats de [3] et de [4]. Soit  $\Phi^t$  un flot d'Anosov *non topologiquement équivalent à la suspension d'un difféomorphisme du tore* sur une 3-variété fermée orientable  $M$ . Comme  $\Phi^t$  n'est pas une suspension,  $M$  ne fibre pas en tores sur le cercle.

Soit  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  le revêtement universel de  $M$ . Soient  $\widetilde{\Phi}^t$ ,  $\widetilde{\Phi}$ ,  $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ , etc. les relevés dans  $\widetilde{M}$  de  $\Phi^t$ ,  $\Phi$ ,  $\mathcal{F}^s$ , etc. Rappelons que nous supposons ici que les feuilletages faibles sont transversalement orientés. Les quotients  $\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^s$  et  $\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^u$  sont appelés *espaces des feuilles* (respectivement stables et instables) et notés  $Q^s$  et  $Q^u$ . Ce sont des variétés de dimension 1, orientables, simplement connexes, mais en général non Hausdorff. Dans [3], il est montré que si un des espaces des feuilles est Hausdorff, il en est de même pour l'autre. Dans [12], S. Fenley démontre lui aussi ce résultat de manière indépendante. Quand tel est le cas, i.e., quand  $Q^s$  et  $Q^u$  sont simultanément homéomorphes à  $\mathbb{R}$ , le flot d'Anosov est dit *produit*.

Le quotient  $\widetilde{M}/\widetilde{\Phi}$  est appelé *espace des orbites*, et noté  $Q^\Phi$ . D'après [3] (voir aussi [12]), ce quotient est toujours homéomorphe à  $\mathbb{R}^2$  et le passage au quotient  $\pi^\Phi : \widetilde{M} \rightarrow Q^\Phi$  est une fibration triviale. Pour toute sous-variété  $A$  de  $M$  plongée de manière incompressible, le revêtement universel de  $A$  se plonge dans  $\widetilde{M}$  en une sous-variété  $\widetilde{A}$  de sorte que la restriction de  $\pi$  à  $\widetilde{A}$  est un revêtement d'image  $A$ . La projection  $\pi^\Phi(\widetilde{A})$  est appelée *trace transverse* de  $A$ . On note  $\mathcal{G}^s$  et  $\mathcal{G}^u$  les feuilletages  $\pi_*^\Phi(\widetilde{\mathcal{F}}^s)$  et  $\pi_*^\Phi(\widetilde{\mathcal{F}}^u)$ . Ce sont des feuilletages par droites fermées transverses l'un par rapport à l'autre. Les quotients  $Q^\Phi/\mathcal{G}^s$  et  $Q^\Phi/\mathcal{G}^u$  sont homéomorphes à  $Q^s$  et  $Q^u$ . On note  $p^s : Q^\Phi \rightarrow Q^s$  et  $p^u : Q^\Phi \rightarrow Q^u$  les applications passage au quotient.

L'action de  $\Gamma$  sur  $\widetilde{M}$  par automorphismes de revêtements passe aux quotients en des actions sur  $Q^s$ ,  $Q^u$  et  $Q^\Phi$ . L'action sur  $Q^\Phi$  préserve les feuilletages  $\mathcal{G}^s$  et  $\mathcal{G}^u$ . Si un élément  $\gamma$  préserve globalement une feuille de  $\mathcal{G}^s$  (respectivement de  $\mathcal{G}^u$ ) il y admet un unique point fixe : la feuille fixe est au-dessus d'une feuille cylindrique de  $\mathcal{F}^s$  (respectivement de  $\mathcal{F}^u$ ) et le point fixe est au-dessus de l'unique orbite périodique du flot contenue dans cette feuille. Ce point fixe est alors de type hyperbolique, i.e. c'est un point fixe attractif ou répulsif de  $\gamma$ . Enfin, l'ensemble des éléments de  $\Gamma$  qui fixent un point donné de  $Q^s$ ,  $Q^u$  ou  $Q^\Phi$  est un sous-groupe trivial ou cyclique.

Lorsque  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  sont orientables,  $\mathcal{G}^s$  et  $\mathcal{G}^u$  admettent des orientations préservées par l'action de  $\Gamma$ . Ces orientations induisent sur chaque feuille de  $\mathcal{G}^s$  et de  $\mathcal{G}^u$  un ordre. Nous convenons alors des notations suivantes :

• Pour tout élément  $x$  de  $Q^\Phi$ , la feuille de  $\mathcal{G}^s$  (resp. de  $\mathcal{G}^u$ ) le contenant est notée  $s(x)$  (resp.  $u(x)$ ). L'ensemble des éléments de  $s(x)$  (resp.  $u(x)$ ) supérieurs à  $x$  est noté  $s^+(x)$  (resp.  $u^+(x)$ ). Les éléments de  $s(x)$  ou de  $u(x)$  inférieurs à  $x$  sont notés  $s^-(x)$  et  $u^-(x)$ .

• Pour tout élément  $x$  de  $Q^\Phi$ , la composante connexe de  $Q^\Phi \setminus s(x)$  (resp. de  $Q^\Phi \setminus u(x)$ ) contenant  $u^+(x)$  (resp.  $s^+(x)$ ) est notée  $S_+(x)$  (resp.  $U_+(x)$ ). L'autre composante connexe est notée  $S_-(x)$  (resp.  $U_-(x)$ ).

• Pour tout élément  $s$  de  $Q^s$ , si  $x$  est un élément de  $s$ , l'image par  $p^s$  de  $S_+(x)$  est notée  $s_+$ . Celle de  $S_-(x)$  est notée  $s_-$ . On définit de manière analogue  $u_+$  et  $u_-$  pour chaque élément  $u$  de  $Q^u$ .

• Pour toute partie  $A$  de  $Q^\Phi$ , on note  $\text{Sat}_{\mathcal{G}^s}(A)$  (resp.  $\text{Sat}_{\mathcal{G}^u}(A)$ ) le saturé par  $\mathcal{G}^s$  (resp. par  $\mathcal{G}^u$ ) de  $A$ . Pour chaque élément  $x$  de  $Q^\Phi$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{++}(x) &= \text{Sat}_{\mathcal{G}^s}(u^+(x)) \cap \text{Sat}_{\mathcal{G}^u}(s^+(x)), \\ \mathcal{L}^{+-}(x) &= \text{Sat}_{\mathcal{G}^s}(u^+(x)) \cap \text{Sat}_{\mathcal{G}^u}(s^-(x)), \\ \mathcal{L}^{-+}(x) &= \text{Sat}_{\mathcal{G}^s}(u^-(x)) \cap \text{Sat}_{\mathcal{G}^u}(s^+(x)), \\ \mathcal{L}^{--}(x) &= \text{Sat}_{\mathcal{G}^s}(u^-(x)) \cap \text{Sat}_{\mathcal{G}^u}(s^-(x)).\end{aligned}$$

Soit  $x$  et  $y$  deux éléments de  $Q^\Phi$  tels que :

$$\mathcal{L}^{++}(x) = \mathcal{L}^{--}(y).$$

Alors  $\mathcal{L}^{++}(x)$  est appelé *losange ouvert direct de sommets  $x$  et  $y$* . De même, si les ouverts  $\mathcal{L}^{+-}(x)$  et  $\mathcal{L}^{-+}(y)$  sont confondus, on les appelle *losanges ouverts indirects de sommets  $x$  et  $y$* . La notion de losange a été introduite par S. Fenley dans [13].

Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite d'éléments de  $Q^\Phi$  tels que :

$$\mathcal{L}^{++}(x_n) = \mathcal{L}^{--}(x_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Alors, l'union des  $\mathcal{L}^{++}(x_n)$  et des  $\{x_n\}$  est appelée *chapelet de losanges*. De même, si  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifie :

$$\mathcal{L}^{+-}(x_n) = \mathcal{L}^{-+}(x_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

l'union des  $\mathcal{L}^{+-}(x_n)$  et des  $\{x_n\}$  est elle aussi appelée chapelet de losanges.

Un des résultats principaux de [4] est le suivant (*cf. théorèmes C et E de [4]*, ainsi que la remarque 7.14 de ce même article) :

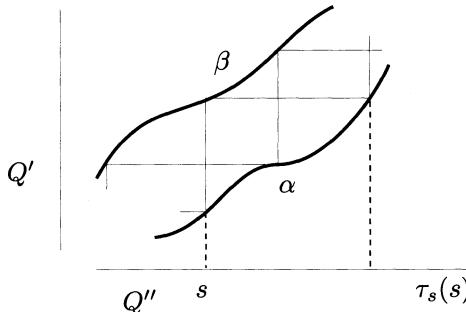
THÉORÈME 2.9. — Soit  $T_1, \dots, T_n$  une collection finie de tores plongés dans  $M$  de manière incompressible. On suppose que le flot  $\Phi^t$  est produit et que ses deux feuilletages faibles sont transversalement orientés. On suppose de plus qu'aucun des tores  $T_i$  ne borde dans  $M$  un voisinage tubulaire d'un plongement de la bouteille de Klein. Alors, chaque tore  $T_i$  est isotope dans  $M$  à un tore  $T'_i$  quasi-transverse à  $\Phi^t$ . De plus, si les  $T_i$  sont disjoints et deux à deux non librement homotopes, les  $T'_i$  peuvent alors être choisis deux à deux disjoints.  $\square$

Pour la définition d'un tore quasi-transverse, voir [4] ou la section 2.1.

Ce théorème est basé sur le fait que pour tout flot d'Anosov produit, tout sous-groupe du groupe fondamental isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  préserve un chapelet de losanges dans l'espace des orbites. De manière plus générale nous avons le résultat suivant (cf. [3]) :

THÉORÈME 2.10. — Soit  $(M, \Phi^t)$  un flot d'Anosov produit non topologiquement équivalent à une suspension. Alors l'application de  $Q^\Phi$  dans  $Q^s \times Q^u$  qui à une orbite associe les deux feuilles qui la contiennent est un plongement injectif. Son image est l'ouvert compris entre les graphes de deux homéomorphismes  $\alpha$  et  $\beta$  de  $Q^s$  vers  $Q^u$ . La composition  $\tau_s = \alpha^{-1} \circ \beta$  est un homéomorphisme de  $Q^s$  sans point fixe et commutant avec l'action de  $\Gamma$ , pour peu que les deux feuilletages faibles sont transversalement orientés.  $\square$

La figure suivante permet de visualiser les applications  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\tau$ .



Il est par exemple simple d'en extraire la preuve du lemme suivant :

LEMME 2.11. — Si  $s$  est un point fixe attractif dans  $Q^s$  d'un élément  $\gamma$  de  $\Gamma$ , les  $\tau_s^n(s)$ , où  $n$  décrit  $\mathbb{Z}$ , sont exactement tous les points fixes attractifs de  $\gamma$ .

Nous aurons besoin dans notre étude du théorème suivant, qui est dû à S. Fenley, mais malheureusement encore non publié :

**THÉORÈME 2.12.** — *Si deux éléments de  $Q^s$  sont non séparés l'un de l'autre par la topologie de  $Q^s$ , ils sont alors points fixes d'un même élément du groupe fondamental. De plus, tout élément du groupe fondamental préservant les orientations de  $Q^s$  et de  $Q^u$  qui fixe l'un fixe l'autre.*

*Preuve.* — Il s'agit des théorèmes A et C de [14]. □

### 3. Preuve du théorème A.

Par hypothèse,  $i : S \hookrightarrow M$  est un morceau fibré de Seifert principal. Fixons le point base  $x_0$  de  $M$  à l'intérieur de  $i(S)$ . Nous l'identifions à sa préimage par  $i$ . Nous notons  $\Gamma = \pi_1(M, x_0)$  et  $Z = \pi_1(S, x_0)$ . Le centre de  $Z$  est un sous-groupe engendré par un élément  $h$  représenté par la fibre régulière passant par  $x_0$ .

D'après le théorème 2.10 l'espace des orbites  $Q^\Phi$  s'identifie à l'ouvert délimité dans  $Q^s \times Q^u$  par les graphes de deux homéomorphismes  $\alpha$  et  $\beta$  de  $Q^s$  vers  $Q^u$ . Nous choisissons les orientations de  $Q^s$  et de  $Q^u$  de sorte que les homéomorphismes  $\alpha$  et  $\beta$  soient croissants. Nous notons  $\tau_s = \alpha^{-1} \circ \beta$ .

#### 3.1. Mise en bonne position du morceau par rapport au flot.

Nous commençons par étudier l'action de  $Z$  sur  $Q^s$ . Dans tout ce qui suit, nous appelons *Z-cylindrique* toute feuille de  $\mathcal{G}^s$  ou de  $\mathcal{G}^u$  fixée par un élément (non trivial) de  $Z$ . Nous appelons *Z-périodique* tout point de  $Q^\Phi$  fixé par un élément de  $Z$ .

**LEMME 3.1.** — *L'action de  $Z$  sur  $Q^s$  n'admet pas d'orbite fermée discrète.*

*Preuve.* — Nous raisonnons par l'absurde : soit  $\Theta_0 = Z \cdot \{s_0\}$  une  $Z$ -orbite fermée discrète de  $Q^s \simeq \mathbb{R}$ . Pour chaque élément  $\gamma$  de  $Z$ , si  $\gamma s_0$  est supérieur à  $s_0$  nous notons  $\rho(\gamma)$  le nombre d'éléments de  $\Theta_0$  contenus dans  $[s_0, \gamma s_0]$ . Si  $\gamma s_0$  est inférieur à  $s_0$ , nous notons  $\rho(\gamma)$  l'opposé du nombre d'éléments de  $\Theta_0$  contenus dans  $]\gamma s_0, s_0]$ . Enfin, si  $\gamma s_0$  et  $s_0$  sont confondus, nous posons  $\rho(\gamma) = 0$ . On montre aisément que  $\rho : Z \rightarrow \mathbb{Z}$  est un morphisme surjectif. Son noyau est le stabilisateur de  $s_0$  et est donc trivial ou cyclique.

Il s'ensuit que  $Z$  est soit cyclique, soit isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  à un indice deux près. Contradiction (cf. proposition 2.3).  $\square$

Comme premier corollaire, nous obtenons que l'action de la fibre  $h$  sur  $Q^s$  est nécessairement libre : en effet, l'ensemble des points fixes de  $h$  est soit vide, soit un fermé discret  $Z$ -invariant.

**LEMME 3.2.** — *Chaque élément de  $Z$  préserve l'orientation de  $Q^s$ .*

*Preuve.* — Si un élément  $\gamma$  de  $Z$  renverse l'orientation de  $Q^s$ , il y admet un unique point fixe. Comme  $h$  et  $\gamma$  commutent, ce point fixe devrait aussi être point fixe de  $h$  : contradiction.  $\square$

**LEMME 3.3.** — *L'action de  $Z$  sur  $Q^s$  n'est pas libre.*

*Preuve.* — Tout groupe agissant librement sur  $\mathbb{R}$  est un groupe libre abélien. Par ailleurs, les seuls groupes libres abéliens pouvant apparaître comme groupe fondamental d'un fibré de Seifert sont  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . On exclut les deux premiers grâce à la proposition 2.3. Le dernier cas est lui aussi impossible, car toute variété fermée dont le groupe fondamental contient  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  admet un revêtement fini par le tore de dimension trois. Or, celui-ci ne peut être support d'un flot d'Anosov car son groupe fondamental n'est pas à croissance exponentielle (cf. [32]).  $\square$

**COROLLAIRE 3.4.** — *L'action de  $Z$  sur  $Q^s$  admet un unique fermé invariant minimal  $\mu^s$  qui est soit tout  $Q^s$ , soit exceptionnel, i.e. parfait et totalement discontinu. Si un élément de  $Z$  admet des points fixes dans  $Q^s$ , un de ces points fixes appartient à  $\mu^s$ .*

*Preuve.* — C'est une propriété générale des groupes de type fini agissant sur  $\mathbb{R}$  et sans orbite fermée discrète. Voir par exemple [24], IV.3.1.  $\square$

Comme  $\tau_s$  commute à l'action de  $Z$ , l'unicité de  $\mu^s$  implique son invariance par  $\tau_s$ .

Il découle presque immédiatement de la définition de  $\tau_s$  que, pour tout élément  $\gamma$  de  $Z$ , si  $s$  est un point fixe de  $\gamma$ , disons attractif, alors  $\tau_s(s)$  est lui aussi un point fixe attractif de  $\gamma$ , et l'intervalle  $]s, \tau_s(s)[$  contient un et un seul point fixe de  $\gamma$ , qui est répulsif. On en déduit :

LEMME 3.5. — *Le minimal  $\mu^s$  est l'adhérence des points fixes d'éléments de  $Z$ .*  $\square$

LEMME 3.6. — *L'action sur le quotient  $Q_{/\tau_s}^s$  d'un élément de  $Z$  admettant un point fixe dans  $Q^s$  est de type hyperbolique, i.e. admet deux points fixes, l'un attractif, l'autre répulsif.*  $\square$

En raisonnant de manière analogue sur  $Q^u$ , on trouve l'existence d'un minimal  $\mu^u$  pour l'action de  $Z$  sur  $Q^u$  qui est l'adhérence des points fixes d'éléments de  $Z$ . Du reste,  $\mu^u$  n'est autre que l'image par  $\alpha$  ou  $\beta$  de  $\mu^s$ .

COROLLAIRE 3.7. — *Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des éléments de  $Q^\Phi \subset Q^s \times Q^u$  dont les coordonnées appartiennent à  $\mu^s$  et  $\mu^u$ . Alors, l'ensemble des points  $Z$ -périodiques de  $Q^\Phi$  est une partie dense de  $\mathcal{M}$ .*

*Preuve.* — L'argument est classique. Voir la référence du lemme 2.8.  $\square$

Ces observations étant faites, revenons à la preuve du théorème A.

D'après le théorème 2.9 on peut après isotopie supposer que les composantes connexes de  $i(\partial S)$  sont des tores quasi-transverses à  $\Phi$ . Notons que l'hypothèse d'orientabilité transverse des feuilletages faibles demandée dans l'énoncé du théorème 2.9 est palliée dans notre cas par le lemme 3.2. De plus, ils ont pour traces transverses des chapelets de losanges, *i.e.*, pour chacun d'entre eux, il existe une composante connexe de leur préimage par  $\pi$  sur lequel  $\pi^\Phi$  se restreint en un homéomorphisme d'image un chapelet. Les restrictions  $G^s$  et  $G^u$  de  $\mathcal{F}^s$  et de  $\mathcal{F}^u$  à  $S$  forment alors un morceau de bifeuilletage d'Anosov. Soit  $\widehat{\pi} : (\widehat{M}, \hat{x}_0) \rightarrow (M, x_0)$  le revêtement associé à  $Z \subset \Gamma$ . Comme  $Z$  n'est autre que  $\pi_1(S, x_0)$ , le plongement  $i$  de l'intérieur de  $S$  dans  $M$  se relève en un plongement  $\hat{i}$  de  $\text{Int } S$  dans  $\widehat{M}$  tel que  $\widehat{\pi} \circ \hat{i}$  soit injectif.

L'adhérence de  $\hat{i}(\text{Int } S)$  est un fibré de Seifert compact  $\widehat{S}$  plongé dans  $\widehat{M}$ . Son bord  $\partial \widehat{S}$  est constitué de tores quasi-transverses au relevé  $\widehat{\Phi}$  de  $\Phi$ . Il se peut que certains tores  $T_i$  borde  $S$  des deux côtés : ces tores correspondent aux «auto-recollements» de  $S$ . Au-dessus de tels tores, il existe deux tores composantes connexes de  $\partial \widehat{S}$ . Notons  $\widehat{T}_1, \dots, \widehat{T}_m$  les composantes connexes de  $\partial \widehat{S}$ . Soit  $(\widetilde{S}, \widetilde{x}_0)$  le revêtement universel de  $(\widehat{S}, \widehat{x}_0)$ . Il se plonge dans  $(\widehat{M}, \widetilde{x}_0)$ . Nous l'identifions à l'image de ce plongement. C'est alors un fermé de  $\widehat{M}$  préservé par l'action de  $Z$ . De plus, comme  $\widetilde{S}$

est connexe, si un élément de  $\Gamma$  envoie l'intérieur de  $\tilde{S}$  sur une partie de  $\tilde{M}$  non disjointe de  $\tilde{S}$ , il appartient nécessairement à  $Z$ . Le fermé  $\tilde{S}$  est bordé dans  $\tilde{M}$  par une infinité de plans fermés. Chacun de ces plans fermés est au-dessus d'un des  $\tilde{T}_i$  et est préservé par un sous-groupe libre abélien de rang deux de  $Z$ .

Soit  $\tilde{T}$  un des plans fermés bordant  $\tilde{S}$ . Nous noterons toujours  $H$  le sous-groupe libre abélien de rang 2 de  $Z$  préservant  $\tilde{T}$ . Notons  $\mathcal{C}$  sa projection  $\pi^\Phi$ . Rappelons (*cf.* lemme 7.4 de [4]) que toute feuille de  $\tilde{\Phi}$  non tangente à  $\tilde{T}$  ne rencontre  $\tilde{T}$  qu'en au plus un point, et que l'intersection entre chaque feuille de  $\tilde{\mathcal{F}}^s$  ou de  $\tilde{\mathcal{F}}^u$  et  $\tilde{T}$  est soit vide, soit connexe. Soit  $\tilde{T}^+$  la composante connexe de  $\tilde{M} \setminus \tilde{T}$  contenant l'intérieur de  $\tilde{S}$  et  $\tilde{T}^-$  l'autre composante connexe. Soit  $\tilde{\theta}$  une feuille de  $\tilde{\Phi}$  contenue dans  $\tilde{T}$  : elle est globalement préservée par un élément  $\gamma$  de  $H$  qui préserve également  $\tilde{T}$ . Soit enfin  $F^s$  et  $F^u$  les feuilles de  $\tilde{\mathcal{F}}^s$  et de  $\tilde{\mathcal{F}}^u$  contenant  $\tilde{\theta}$ ,  $F_+^s$  et  $F_+^u$  les composantes connexes de  $F^s \setminus \tilde{\theta}$  et de  $F^u \setminus \tilde{\theta}$  contenues dans  $\tilde{T}^+$ , et  $F_-^s$  et  $F_-^u$  les composantes connexes de  $F^s \setminus \tilde{\theta}$  et de  $F^u \setminus \tilde{\theta}$  contenues dans  $\tilde{T}^-$ .

L'union  $F_+^s \cup F_+^u \cup \tilde{\theta}$  borde dans  $\tilde{M}$  un domaine entièrement contenu dans  $\tilde{T}^+$ . Nous notons  $W^+(\tilde{\theta})$  l'union de ce domaine, de  $F_+^s$  et de  $F_+^u$ . De manière similaire, nous définissons le fermé  $W^-(\tilde{\theta})$  de  $\tilde{T}^-$  bordé par  $F_-^s$  et  $F_-^u$ . Les deux fermés  $W^+(\tilde{\theta})$  et  $W^-(\tilde{\theta})$  sont saturés par  $\tilde{\Phi}$ . Notons  $(s_0, u_0)$  les coordonnées de  $\pi^\Phi(\tilde{\theta})$  dans  $Q^\Phi \subset Q^s \times Q^u$  (*cf.* théorème 2.10). La projection  $\Delta(\tilde{\theta}) = \pi^\Phi(W^-(\tilde{\theta}))$  est l'un des triangles  $\Delta^+(\tilde{\theta})$  ou  $\Delta^-(\tilde{\theta})$  définis par

$$\Delta^+(\tilde{\theta}) = \{(s, u) \in Q^\Phi / (s, u) \neq (s_0, u_0), s \in [s_0, \alpha^{-1}(u_0)[, u \in ]\alpha(s_0), u_0]\},$$

$$\Delta^-(\tilde{\theta}) = \{(s, u) \in Q^\Phi / (s, u) \neq (s_0, u_0), s \in ]\beta^{-1}(u_0), s_0], u \in [u_0, \beta(s_0)[\}.$$

Si  $\Delta(\tilde{\theta}) = \Delta^+(\tilde{\theta})$ , alors  $\bar{\Delta}(\tilde{\theta}) = \pi^\Phi(W^+(\tilde{\theta}))$  est le triangle  $\Delta^-(\tilde{\theta})$ , et si  $\Delta(\tilde{\theta}) = \Delta^-(\tilde{\theta})$ , alors  $\bar{\Delta}(\tilde{\theta}) = \Delta^+(\tilde{\theta})$ .

**LEMME 3.8.** —  $\Delta(\tilde{\theta})$  ne contient pas de point  $Z$ -périodique.

**Preuve.** — Supposons l'existence d'une orbite  $\tilde{\theta}_0$  de  $\tilde{\Phi}$  contenue dans  $W^-(\tilde{\theta})$  préservée par un élément  $\gamma_0$  de  $Z$ . Alors,  $\gamma_0 \tilde{T}^-$  et  $\tilde{T}^-$  ont en commun  $\tilde{\theta}_0$  et ne sont donc pas disjoints. Il s'ensuit que  $\gamma_0$  préserve  $\tilde{T}$ , et donc le chapelet  $\mathcal{C}$ . Comme il préserve un point de  $Q^\Phi$ , il fixe en fait chaque sommet de  $\mathcal{C}$ . L'orbite  $\tilde{\theta}_0$  est donc sommet de  $\mathcal{C}$ . Or,  $\mathcal{C}$  est disjoint de  $\Delta(\tilde{\theta})$  : contradiction.  $\square$

LEMME 3.9. — *Aucune feuille de  $\mathcal{G}^s$  ou de  $\mathcal{G}^u$  rencontrant l'intérieur de  $\Delta(\tilde{\theta})$  n'est Z-cylindrique.*

*Preuve.* — Supposons qu'une feuille  $F$  de  $\mathcal{G}^s$  rencontre l'intérieur de  $\Delta(\tilde{\theta})$  tout en étant fixée par un élément  $\gamma_0$  de  $Z$ . Nous nous plaçons dans le cas  $\Delta(\tilde{\theta}) = \Delta^+(\tilde{\theta})$ , l'autre cas se traite de manière analogue. Comme  $\mu^s$  est parfait il existe une autre feuille  $F'$  de  $\mathcal{G}^s$  dans  $]s_0, \beta(u_0)[$  fixée par un élément  $\gamma'_0$  de  $Z$  et telle que  $\gamma_0$  et  $\gamma'_0$  n'ont aucune puissance commune. Quitte à échanger  $F$  et  $F'$  on peut supposer  $F' < F$ . Alors,  $\alpha(F)$  est strictement supérieur à  $\alpha(F')$ , ce qui montre que le couple  $(F', \alpha(F))$  appartient à  $\Delta(\tilde{\theta})$ . Par ailleurs, c'est un élément de  $\mathcal{M}$ . D'après le corollaire 3.7, il existe donc dans  $\Delta(\tilde{\theta})$  un point  $Z$ -périodique. Ceci contredit le lemme 3.8.

On montre de même qu'aucune feuille  $Z$ -cylindrique de  $\mathcal{G}^u$  ne rencontre l'intérieur de  $\Delta(\tilde{\theta})$ .  $\square$

COROLLAIRE 3.10. — *La projection  $p^s(\text{Int } \Delta(\tilde{\theta}))$  (resp.  $p^u(\text{Int } \Delta(\tilde{\theta}))$ ) est une composante connexe de  $Q^s \setminus \mu^s$  (resp.  $Q^u \setminus \mu^u$ ).*  $\square$

COROLLAIRE 3.11. — *L'intérieur du chapelet  $\mathcal{C}$  ne contient aucun point  $Z$ -périodique.*

*Preuve.* — Une des deux feuilles  $Z$ -cylindriques (soit de  $\mathcal{G}^s$ , soit de  $\mathcal{G}^u$ ) passant par un tel point rencontrerait l'intérieur de  $\Delta(\tilde{\theta})$ .  $\square$

LEMME 3.12. — *Le triangle  $\bar{\Delta}(\tilde{\theta})$  contient une orbite  $Z$ -périodique.*

*Preuve.* — Comme  $\mu^s$  et  $\mu^u$  sont parfaits, il existe des feuilles  $Z$ -cylindriques proches respectivement de  $s_0$  et de  $u_0$ . Comme elles ne peuvent rencontrer  $\Delta(\tilde{\theta})$ , elles rencontrent l'intérieur de  $\bar{\Delta}(\tilde{\theta})$ . Leur intersection est constituée d'un élément de  $\mathcal{M}$  contenu à l'intérieur de  $\bar{\Delta}(\tilde{\theta})$ . D'après 3.7, l'intérieur de celui-ci contient donc un point  $Z$ -périodique.  $\square$

L'étude précédente nous permet d'avoir une bonne idée de la restriction de  $\tilde{\Phi}$  à  $W^-(\tilde{\theta})$ . Par ailleurs, lorsque  $\tilde{\theta}$  parcourt l'ensemble des orbites de  $\tilde{\Phi}$  tangentes à  $\tilde{T}$ , l'union des  $\bar{\Delta}(\tilde{\theta})$  et des  $\Delta(\tilde{\theta})$  recouvre le complémentaire de  $\mathcal{C}$  dans  $Q^\Phi$ . D'où :

LEMME 3.13. — *Une feuille de  $\tilde{\Phi}$  ne rencontrant pas  $\tilde{T}$  est soit contenue dans l'un des  $W^+(\tilde{\theta})$ , soit dans l'un des  $W^-(\tilde{\theta})$ .*  $\square$

Soit  $\tilde{T}$  la projection de  $\tilde{T}$  dans  $\tilde{M}$  et  $\tilde{T}^-$  celle de  $\tilde{T}^-$ .

**COROLLAIRE 3.14.** — *Les orbites périodiques de  $\widehat{\Phi}^t$  sont toutes contenues dans  $\widehat{S}$ .*

*Preuve.* — Soit  $\hat{\theta}_0$  une orbite périodique de  $\widehat{\Phi}^t$ . Elle se relève en une orbite  $\tilde{\theta}_0$  de  $\tilde{\Phi}$  préservée par un élément de  $Z$ . D'après 3.11, elle ne peut rencontrer transversalement  $\partial\widehat{S}$  et d'après 3.9,  $\tilde{\theta}_0$  ne peut rencontrer un des  $W^-(\tilde{\theta})$ . D'après 3.13, il s'ensuit que  $\hat{\theta}_0$  ne rencontre aucun des  $\widehat{T}^-$  et est donc contenu dans  $\widehat{S}$ .

Chaque losange  $\mathcal{L}^{++}(\tilde{\theta})$  correspond à un anneau de Birkhoff élémentaire  $A^+(\tilde{\theta})$  entièrement contenu dans la projection  $T$  de  $\tilde{T}$  dans  $M$  (cf. [4]). Le flot  $\Phi^t$  est transverse à l'intérieur de  $A^+(\tilde{\theta})$ . Il est donc soit rentrant dans  $S$ , soit sortant de  $S$  en  $A^+(\tilde{\theta})$ . Le résultat suivant donne un critère pour décider de cette alternative.

**COROLLAIRE 3.15.** — *Le flot  $\Phi^t$  est sortant de  $S$  en  $A^+(\tilde{\theta})$  si  $\Delta(\tilde{\theta}) = \Delta^+(\tilde{\theta})$ . Il est rentrant dans  $S$  si  $\Delta(\tilde{\theta}) = \Delta^-(\tilde{\theta})$ .*

*Preuve.* — Nous n'étudions que le premier cas, à savoir  $\Delta(\tilde{\theta}) = \Delta^+(\tilde{\theta})$ . L'autre cas s'en déduit en inversant le flot. Soit  $\tilde{\theta}'$  un élément  $Z$ -périodique de  $Q^\Phi$  dont la feuille  $u'$  de  $\mathcal{G}^u$  rencontre  $\mathcal{L}^{++}(\tilde{\theta})$  (il existe d'après le lemme 3.12). Il correspond à une orbite périodique  $\hat{\theta}'$  de  $\widehat{\Phi}^t$  contenue à l'intérieur de  $\widehat{S}$ . Nous notons comme précédemment  $\widehat{T}$  la projection de  $\tilde{T}$  dans  $\widehat{M}$ , et  $\widehat{T}^-$  celle de  $\tilde{T}^-$ . Soit enfin  $\widehat{M}_H$  le revêtement de  $\widehat{M}$  associé au sous-groupe  $H$  de  $Z$  préservant  $\tilde{T}$ , i.e., correspondant au groupe fondamental de  $\widehat{T}$ .

Soient  $\widehat{T}_H$  et  $\widehat{T}_H^-$  les projetés de  $\tilde{T}$  et de  $\tilde{T}^-$  dans  $\widehat{M}_H$ . Les seuls éléments  $\gamma$  de  $Z$  envoyant  $\tilde{T}^-$  sur un ouvert  $\gamma\tilde{T}^-$  non disjoint de  $\tilde{T}^-$  sont ceux appartenant à  $H$ . Donc, le revêtement  $\widehat{\pi}_H : \widehat{M}_H \rightarrow \widehat{M}$  se restreint à  $\widehat{T}_H^-$  en un homéomorphisme sur son image  $\widehat{T}^-$ . Or, d'après le lemme 7.4 de [4], une feuille de  $\widehat{\Phi}_H$  rencontrant transversalement  $\widehat{T}_H$  ne le rencontre qu'en exactement un point. Donc, pour chaque élément  $\hat{x}$  de  $\widehat{T}$ , si les  $\widehat{\Phi}^t(\hat{x})$  pour  $t$  petit et négatif appartiennent à  $\widehat{T}^-$ , alors l'orbite négative toute entière de  $\hat{x}$  est contenue dans  $\widehat{T}^-$ .

Soit  $\hat{\theta}$  l'orbite de  $\widehat{\Phi}^t$  correspondant à  $\tilde{\theta}$ , et  $\widehat{A}(\tilde{\theta})$  l'anneau de Birkhoff contenu dans  $\widehat{T}$  correspondant à  $\mathcal{L}^{++}(\tilde{\theta})$ . Par hypothèse, il existe un élément  $\hat{x}$  de  $\widehat{A}(\tilde{\theta})$  dont l'orbite négative s'accumule sur  $\hat{\theta}' \subset \widehat{S}$ . Comme  $\widehat{S}$  et  $\widehat{T}^-$  sont disjoints, les  $\widehat{\Phi}^t(\hat{x})$  pour les temps  $t$  négatifs ne peuvent tous appartenir à  $\widehat{T}^-$ . D'après ce qui précède, ils appartiennent donc tous à  $\widehat{S}$  :  $\widehat{\Phi}$  est donc sortant de  $\widehat{S}$  en  $\widehat{A}(\tilde{\theta})$ . Le lemme en découle.  $\square$

### 3.2. Structures projectives transverses des feuilletages intermédiaires.

Notre but est de montrer ici que les relevés dans  $\widehat{M}$  de  $\mathcal{F}^s$  et de  $\mathcal{F}^u$  sont transversalement projectifs.

**PROPOSITION 3.16.** — *Toute lacune de  $Z$  dans  $Q^s$  est de la forme  $p^s(\Delta(\tilde{\theta}))$  où  $\tilde{\theta}$  est une feuille de  $\tilde{\Phi}$  tangente à  $\partial\tilde{S}$ .*

*Preuve.* — Soit  $I$  une lacune de  $Z$  dans  $Q^s$ . Rappelons que ceci signifie que  $I$  est une composante connexe  $I$  du complémentaire dans  $Q^s$  de  $\mu^s$ . Rappelons aussi qu'elle est dite errante si elle est disjointe de tous ses itérés  $\gamma I$  (où  $\gamma \in Z \setminus \{\text{id}\}$ ).

Supposons que  $I$  soit errante. Soit  $\Lambda$  la préimage  $(p^s)^{-1}(I)$ . Soit  $\bar{\Lambda}$  la projection dans  $M$  de  $(\pi^\Phi)^{-1}(\Lambda)$ . Soit  $\tilde{T}$  un des plans fermés bordant  $\tilde{S}$ . Pour toute orbite  $\tilde{\theta}$  tangente à  $\tilde{T}$ , l'intervalle  $p^s(\text{Int } \Delta(\tilde{\theta}))$  est une lacune de  $Z$  non errante (*cf.* corollaire 3.10). Elle est donc disjointe de  $I$ . Donc,  $\Lambda$  est disjoint de  $\Delta(\tilde{\theta})$ . On en déduit que  $\Lambda$  est contenu dans  $\Omega S = \pi^\Phi(\tilde{S})$  (*cf.* proposition 3.13). De plus, si l'orbite  $\tilde{\theta}$  est telle que le losange  $\mathcal{L}^{++}(\tilde{\theta})$  rencontre  $\Lambda$ , alors le triangle  $\Delta(\tilde{\theta})$  est  $\Delta^-(\tilde{\theta})$ . D'après le corollaire 3.15, il s'ensuit que si une orbite de  $\tilde{\Phi}$  appartenant à  $\Lambda$  rencontre  $\tilde{T}$  en un point  $\tilde{x}$ , l'orbite négative de  $\tilde{x}$  par  $\tilde{\Phi}^t$  est entièrement contenue dans  $\tilde{T}^-$ . Il en découle que l'orbite positive de  $\tilde{x}$  est elle entièrement contenue dans  $\tilde{S}$ . Ceci s'interprète dans  $M$  de la manière suivante : l'orbite d'un élément de  $\bar{\Lambda}$  est d'un des deux types suivants :

- soit elle est entièrement contenue dans  $S$  ;
- soit elle rencontre  $\partial S$  en un point  $x$  dont l'orbite positive par  $\Phi^t$  est entièrement contenue à l'intérieur de  $S$ .

Soit  $s_0$  une feuille de  $\mathcal{G}^s$  rencontrant  $\Lambda$  et contenant un point fixe  $\tilde{\theta}_0$  d'un élément  $\gamma_0$  de  $\Gamma$  (cette feuille existe, car les feuilles cylindriques de  $\mathcal{F}^s$  sont denses dans  $M$  (voir par exemple le théorème 2.4 de [3])). Soit  $\tilde{F}_0^s$  la feuille  $(\pi^\Phi)^{-1}(s_0)$  de  $\tilde{\mathcal{F}}^s$  et  $F_0^s$  sa projection dans  $M$ . Soit enfin  $\theta_0$  le projeté dans  $M$  de  $\tilde{\theta}_0$  : c'est l'unique orbite périodique contenue dans  $F_0^s$ . Quitte à modifier le choix de  $s_0$ , on peut supposer que  $\theta_0$  n'est pas une des orbites périodiques contenues dans  $\partial S$ . Soit enfin  $\tilde{\theta}'$  une orbite de  $\tilde{\Phi}$  contenue dans  $\tilde{F}_0^s$  dont l'image par  $\pi^\Phi$  rencontre un des losanges  $\mathcal{L}^{++}(\tilde{\theta})$  où  $\tilde{\theta}$  est une orbite périodique tangente à un des plans  $\tilde{T}$  bordant  $\tilde{S}$ . Soit  $\theta'$  sa projection dans  $M$ . L'orbite positive de  $\theta'$  est contenue dans  $S$  et s'accumule sur  $\theta_0$ . On en déduit que  $\theta_0$  est contenue dans  $S$ , et même dans l'intérieur de  $S$ .

puisque n'est pas tangente à  $\partial S$ . Soit  $\tilde{\theta}'_0$  un relevé de  $\theta_0$  dans  $\tilde{S}$  : il existe un élément  $\gamma_1$  de  $Z$  préservant  $\tilde{\theta}'_0$ . Soit  $\gamma$  l'élément de  $\Gamma$  envoyant  $\tilde{\theta}_0$  sur  $\tilde{\theta}'_0$ . Nous avons, quitte à remplacer  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  par des puissances d'eux-même,

$$\gamma_1 = \gamma \gamma_0 \gamma^{-1}.$$

Par ailleurs,  $\gamma$  envoie  $\tilde{\theta}'$  sur une orbite  $\gamma \tilde{\theta}'$  dont la partie future s'accumule sur  $\tilde{\theta}'_0 \subset \text{Int } \tilde{S}$ . Comme la partie future de  $\tilde{\theta}'$  est elle aussi contenue à l'intérieur de  $\tilde{S}$ , on en déduit que l'intersection entre l'intérieur de  $\tilde{S}$  et l'intérieur de  $\gamma \tilde{S}$  est non vide. Donc,  $\gamma$  est élément de  $Z$  et  $\gamma_0 = \gamma^{-1} \gamma_1 \gamma$  également. Il s'ensuit que l'élément  $\gamma_0$  de  $Z$  fixe la feuille  $s_0$  qui est contenue dans  $\Lambda$  : ceci contredit le fait que  $I$  soit une lacune et le lemme 3.5.

Donc,  $I$  n'est pas errante : il existe un élément  $\gamma$  de  $Z$  fixant les extrémités  $s_1 < s_2$  de  $I$ . Soit  $\mathcal{C}$  le chapelet des  $\gamma$ -losanges. Le losange  $\mathcal{L}^{++}(\tilde{\theta}')$  ne rencontre aucune feuille  $Z$ -cylindrique de  $\mathcal{G}^s$ , et  $\mathcal{L}^{--}(\tilde{\theta}')$  ne rencontre aucune feuille  $Z$ -cylindrique de  $\mathcal{G}^u$ . On en déduit que l'intérieur de  $\mathcal{C}$  ne contient aucun point  $Z$ -périodique. C'est donc un chapelet «  $Z$ -simple », *i.e.* la  $Z$ -orbite d'un sommet de  $\mathcal{C}$  est disjointe de l'intérieur de  $\mathcal{C}$ . D'après le théorème C de [4] (qui peut être appliqué dans ce contexte car il n'y est jamais utilisée la compacité de la variété ambiante), il existe un tore  $\widehat{T}$  plongé dans  $\widehat{M}$ , quasi-transverse à  $\widehat{\Phi}$  et admettant un relevé  $\tilde{T}$  dans  $\tilde{M}$  dont l'image par  $\pi^\Phi$  est le chapelet  $\mathcal{C}$ . Comme  $\mathcal{C}$  ne rencontre aucun des  $\Delta(\tilde{\theta}_0)$  où  $\tilde{\theta}_0$  est une feuille de  $\tilde{\Phi}$  tangente à  $\partial \tilde{S}$ ,  $\widehat{T}$  est contenu dans  $\widehat{S}$  (quitte à le pousser le long des orbites de  $\tilde{\Phi}^t$ ).

Supposons que  $\widehat{T}$  n'est pas librement homotope à un des tores bordant  $\widehat{S}$ . Alors, d'après le théorème E de [4], on peut le supposer disjoint de  $\partial \widehat{S}$ , *i.e.* contenu à l'intérieur de  $\widehat{S}$ . Il existe alors une courbe fermée simple  $c$  dans  $\text{Int } \widehat{S}$  dont le nombre d'intersection avec  $\widehat{T}$  est non nul. On peut supposer que  $c$  contient le point base. Soit  $[c]$  l'élément de  $Z$  représenté par  $c$ . Soit  $H$  le sous-groupe de  $Z$  engendré par  $[c]$  et  $h$ . C'est un groupe libre abélien de rang 2. D'après la proposition 7.1 de [4], il existe un élément  $[c']$  de  $H$  fixant un point de  $Q^\Phi$ . Soit  $\hat{\theta}_0$  l'orbite de  $\widehat{\Phi}$  correspondant à ce point fixe. Comme  $h$  n'admet pas de point fixe,  $[c']$  est de la forme  $[c]^p h^q$  où  $p$  est non nul. Donc, comme  $\hat{\theta}_0$  est homologue à  $c'$ , son nombre d'intersection avec  $\widehat{T}$  est non nul :  $\hat{\theta}_0$  rencontre transversalement  $\widehat{T}$ . Ceci contredit le fait que  $\mathcal{C}$  ne contient pas d'éléments  $Z$ -périodiques dans son intérieur.

Donc,  $\widehat{T}$  est homotope à une composante connexe de  $\partial \widehat{S}$ . Les orbites périodiques qu'il contient sont tangentes à cette composante de bord. La lacune  $I$  est donc un intervalle  $p^s(\Delta(\tilde{\theta}))$  où  $\tilde{\theta}$  est tangente à  $\partial \tilde{S}$ .  $\square$

**PROPOSITION 3.17.** — *Il existe un entier positif  $k$  tel que les restrictions à  $\mu^s$  de  $\tau_s^k$  et de  $h$  coïncident .*

*Preuve.* — Soit  $s$  un point fixe attractif d'un élément  $\gamma$  de  $Z$ . L'image  $h(s)$  est alors elle aussi un point fixe attractif de  $\gamma$  et est donc de la forme  $\tau_s^{k(s)}(s)$ . L'application  $k$  est manifestement localement constante et est  $Z$ -invariante. Elle est donc constante sur l'ensemble des points cylindriques. On conclut grâce à la densité des éléments  $Z$ -cylindriques dans  $\mu^s$ .  $\square$

En général, l'égalité  $h = \tau_s^k$  ne s'étend pas à tout  $Q^s$ . La proposition suivante remédie à cette «imperfection» :

**PROPOSITION 3.18.** — *Il existe un homéomorphisme  $\tau_0$  de  $Q^s$  dans lui-même coïncidant avec  $\tau_s$  sur  $\mu^s$ , commutant avec l'action de  $Z$  et vérifiant*

$$\tau_0^k = h.$$

*Preuve.* — Si  $k = 1$  il suffit de choisir  $\tau_0 = h$ . Si  $\mu^s$  est  $Q^s$  tout entier,  $\tau_0 = \tau_s$  convient. Nous supposons donc  $k > 1$  et  $\mu^s \neq Q^s$ . Nous allons définir les restrictions de  $\tau_0$  à chaque composante connexe  $J$  de  $Q^s \setminus \mu^s$ . Comme nous voulons assurer la commutativité avec  $Z$ , nous sommes amenés à étudier la dynamique de l'action de  $Z$  sur les intervalles  $J$ . Soit  $x_0$  un élément de  $\mu^s$ . Notons  $I_0$  l'intervalle  $[x_0, \tau_s(x_0)]$ . Soit  $(J_r)_{r \in \mathcal{R}}$  une collection de composantes connexes de  $I_0 \setminus \mu$  telle que :

$$(1) \quad Z \cdot J_r \cap Z \cdot J_{r'} \neq \emptyset \iff r = r',$$

$$(2) \quad I_0 \setminus \mu = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} (Z \cdot J_r \cap I_0).$$

Comme  $Z$  agit minimalement sur  $\mu^s$ , toute composante connexe de  $Q^s \setminus \mu^s$  admet un itéré dans  $I_0$ , c'est-à-dire

$$(3) \quad Q^s \setminus \tilde{\mu} = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} (Z \cdot J_r).$$

D'après 3.16, chaque intervalle  $J_r$  est préservé par un élément de  $Z$ . Nous notons  $\gamma_r$  le générateur du groupe d'isotropie de l'intervalle  $J_r$  ( $r \in \mathcal{R}$ ) dont le point fixe répulsif est l'extrémité gauche de  $J_r$ .

Soit  $\mathcal{G}$  le graphe orienté étiqueté par  $Z$  suivant :

- l'ensemble des sommets de  $\mathcal{G}$  est  $\mathcal{R}$  ;
- une arête relie  $r_1$  à  $r_2$  (dans cet ordre) si il existe un élément  $\gamma$  de  $Z$  tel que :

$$(4) \quad \tau_s J_{r_1} = \gamma \cdot J_{r_2}.$$

Elle est étiquetée par un des  $\gamma$  vérifiant (4).

Remarquons que le choix de l'étiquette d'une arête est unique modulo translation à droite par  $\gamma_{r_2}$  ou modulo translation à gauche par  $\gamma_{r_1}$ . L'étiquette envoie par conjugaison  $\gamma_{r_1}$  sur  $\gamma_{r_2}$ . Montrons que ce graphe vérifie les propriétés suivantes :

(1) Chaque sommet est de valence deux. Il admet une arête « rentrante » et une arête « sortante » (ces deux arêtes peuvent être confondues).

(2) Chaque composante connexe est un cycle de longueur finie divisant  $k$ .

La propriété (1) découle de (3) et de (1). En effet, pour tout indice  $r$ , les intervalles  $\tau_s J_r$  et  $\tau_s^{-1} J_r$  sont des composantes connexes de  $Q^s \setminus \mu^s$ . L'existence des arêtes provient de (3) ; l'unicité de (1).

Pour prouver (2), il suffit de montrer que tout chemin orienté de  $\mathcal{G}$  de longueur  $k$  est un cycle. Soit donc  $(r_0, \dots, r_k)$  un tel chemin. Soit  $\gamma_i$  l'étiquette de l'arête  $[r_i, r_{i+1}]$  ( $0 \leq i \leq k$ ). La composition des relations (4) donne

$$\gamma_0 \dots \gamma_{k-1} J_{r_k} = (\tau_s)^k J_{r_0} = h J_{r_0}.$$

D'après (1),

$$r_k = r_0.$$

Nous allons maintenant définir des applications  $\tau_r$  ( $r \in \mathcal{R}$ ). Ce seront des restrictions de l'application  $\tau_0$  recherchée. Les seules contraintes sont celles provenant des cycles. Soit  $(r_0, \dots, r_d = r_0)$  un tel cycle. Rappelons que  $d$  divise  $k$ ; notons  $p$  le rapport  $k/d$ . Notons  $\gamma_i$  l'étiquette de l'arête  $[r_i, r_{i+1}]$  et  $\gamma$  la composition de ces étiquettes. Nous choisissons pour chaque indice  $i$  entre 0 et  $(d-2)$  un homéomorphisme croissant  $\tau_{r_i}$  de  $J_{r_i}$  sur  $\tau_s J_{r_i}$  commutant avec les actions de  $\gamma_{r_i}$  sur ces intervalles (remarquons que  $\gamma_{r_i}$  préserve  $\tau_s J_{r_i}$ ). Le choix de  $\tau_{r_{d-1}}$  est moins immédiat. Rappelons que les étiquettes des arêtes sont définies modulo les groupes d'isotropie des

sommets. Ceci implique que leur composition  $\gamma$  est définie modulo  $\gamma_{r_0}$ . La puissance  $\gamma^p$  envoie  $J_{r_0}$  sur  $hJ_{r_0}$ . Il existe donc un entier  $q$  tel que :

$$(6) \quad \gamma^p \gamma_{r_0}^q = h.$$

Comme  $\gamma$  est défini modulo  $\gamma_{r_0}$ , on peut supposer  $q$  compris entre 0 et  $p$ . Soit  $f_{r_0}$  un homéomorphisme croissant de  $J_{r_0}$  sur  $\gamma J_{r_1} = \gamma J_{r_0} = (\tau_s)^d J_{r_0}$  commutant avec les actions de  $\gamma_{r_0}$  et tel que  $(f_{r_0} \circ \gamma^{-1})^p$  vole  $\gamma_{r_0}^q$ . Il suffit alors de choisir  $\tau_{r_{d-1}}$  de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \tau_s J_{r_0} = \gamma_0 J_{r_1} & \xrightarrow{\gamma_0 \tau_{r_1} \gamma_0^{-1}} & (\tau_s)^2 J_{r_0} = \tau_s \gamma_0 J_{r_1} \\
 \uparrow \tau_{r_0} & & = \gamma_0 \tau_s J_{r_1} \\
 J_{r_0} & \downarrow f_{r_0} & = \gamma_0 \gamma_1 J_{r_2} \\
 & & \downarrow \gamma_0 \gamma_1 \tau_{r_2} \gamma_1^{-1} \gamma_0^{-1} \\
 (\tau_s)^d J_{r_0} & \xleftarrow{(\gamma_0 \cdots \gamma_{d-2} \tau_{r_{d-1}} (\gamma_0 \cdots \gamma_{d-2})^{-1}} & \cdots
 \end{array}$$

Cette application  $\tau_{r_{d-1}}$  commute alors avec  $\gamma_{r_{d-1}}$ .

Les applications ainsi associées aux sommets de  $\mathcal{G}$  définissent une application  $\tau_0$  de  $\bigcup_{r \in \mathcal{R}} J_r$  sur  $\bigcup_{r \in \mathcal{R}} (\tau_s J_r) = \tau_s (\bigcup_{r \in \mathcal{R}} J_r)$ . Celle-ci s'étend sur tout  $Q^s$  de la manière suivante :

- $\tau_0|_{\mu^s} = \tau_s|_{\mu^s}$ ;
- $\tau_0|_{\gamma J_r} = \gamma \tau_r \gamma^{-1}$ .

Cette application est bien définie. En effet, dans la deuxième égalité, l'élément  $\gamma$  est défini modulo  $\gamma_r$  à droite. Or, comme  $\tau_r$  et  $\gamma_r$  commutent :

$$(\gamma \gamma_r) \tau_r (\gamma \gamma_r)^{-1} = \gamma \tau_r \gamma^{-1}.$$

Cette application est définie sur tout  $Q^s$ . Elle est strictement croissante, surjective : c'est donc un homéomorphisme. La commutativité avec l'action de  $Z$  est claire. Pour vérifier que  $\tau_0$  admet pour puissance  $k$ -ième  $h$ , il suffit de le faire sur les intervalles  $J_r$ . Étudier  $\tau_{0|J_r}^k$  revient à considérer le cycle

$(r = r_0, \dots, r_d = r)$  de  $\mathcal{G}$  issu de  $r$ . Notre choix des  $\tau_{r_{d-1}}$  a été fait pour que la restriction de  $\tau_0^d$  à  $J_r$  coïncide avec  $f_r$ . D'où

$$\begin{aligned}\tau_0^k|_{J_r} &= (\tau_0^d)|_{J_r} \\ &= \gamma^{p-1} \circ f_r \circ \gamma^{1-p} \circ \dots \circ \gamma \circ f_r \circ \gamma^{-1} \circ f_r \\ &= \gamma^{p-1} (f_r \circ \gamma^{-1})^p \gamma = \gamma^{-1} \circ \gamma^p \circ \gamma_{r_0}^q \circ \gamma \\ &= \gamma^{-1} \circ h \circ \gamma = h|_{J_r}.\end{aligned}$$

□

Il ne nous reste qu'à vérifier que le théorème 2.6 s'applique à l'action de  $\bar{Z} = Z/\langle h \rangle$  sur le cercle  $S_0 = Q^s/\langle \tau_0 \rangle$ . Notons  $\bar{\mu}^s$  la projection dans  $S_0$  de  $\mu^s$  : il s'agit de l'unique fermé minimal invariant par  $\bar{Z}$ .

**LEMME 3.19.** — *Un élément non trivial  $\bar{\gamma}$  de  $\bar{Z}$  ayant un point fixe dans  $S_0$  est de type hyperbolique. Le groupe d'isotropie de tout point de  $S_0$  est cyclique.*

**Preuve.** — Soit  $\bar{x}_0$  un élément de  $S_0$  de groupe d'isotropie  $\bar{Z}_0$  non trivial. Soit  $x_0$  un relevé dans  $Q^s$  de  $\bar{x}_0$ . Si  $\gamma$  est un élément non trivial de  $Z$  dont la projection  $\bar{\gamma}$  dans  $\bar{Z}$  appartient à  $b\bar{Z}_0$ , il existe un entier  $p(\gamma)$  tel que :

$$\gamma x_0 = \tau_0^{p(\gamma)} x_0.$$

D'où :

$$\gamma^k h^{-p(\gamma)} x_0 = x_0.$$

Remarquons que  $\gamma^k$  est différent de  $h^{p(\gamma)}$ . En effet,  $\bar{\gamma}$  serait sinon un homéomorphisme d'ordre fini admettant un point fixe. Il serait donc trivial, ce qu'on a supposé ne pas être.

On en déduit :

- le  $Z$ -groupe d'isotropie de  $x_0$  n'est pas trivial : on note  $\gamma_0$  un de ses générateurs ;

- il existe un entier  $q(\gamma)$  non nul tel que  $\gamma^k = h^{p(\gamma)} \gamma_0^{q(\gamma)}$ .

On en déduit que  $\bar{\gamma}^k$  est de type hyperbolique sur  $S_0$ . Il en est donc de même pour  $\bar{\gamma}$ . De plus, si on note  $\bar{y}_0$  le deuxième point fixe de  $\bar{\gamma}_0$ , le groupe d'isotropie  $\bar{Z}_0$  est aussi le groupe d'isotropie de  $\bar{y}_0$ . L'action de  $\bar{Z}_0$  sur chaque composante connexe de  $S_0 \setminus \{\bar{x}_0, \bar{y}_0\}$  est libre. Le groupe  $\bar{Z}_0$  est donc isomorphe à un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ . Comme chacun de ses éléments élevé à la puissance  $k$  appartient au même groupe cyclique (celui engendré par  $\bar{\gamma}_0$ ), c'est un groupe cyclique. □

LEMME 3.20. — Soit  $(\bar{x}, \bar{y})$  les points fixes d'un élément de  $\bar{Z}$ . L'orbite de  $(\bar{x}, \bar{y})$  par  $Z$  est un fermé discret de  $S_0 \times S_0$  privé de la diagonale.

Preuve. — Supposons l'existence de deux éléments distincts  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  de  $S_0$  et d'une suite  $\bar{\gamma}_n$  de  $\bar{Z}$  tels que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\gamma}_n(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{a}, \bar{b}).$$

Notons  $x$  et  $y$  des relevés de  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  dans  $Q^s$ . Nous les choisissons de sorte que le couple  $(x, \alpha(y))$  appartienne à l'ouvert  $Q^\Phi \subset Q^s \times Q^u$ . Il est alors possible de choisir des représentants  $\gamma_n$  des  $\bar{\gamma}_n$  de sorte que les suites  $(\gamma_n x)$  et  $(\gamma_n y)$  convergent. Notons  $a$  et  $b$  leurs limites : il s'agit de relevés de  $\bar{a}$  et de  $\bar{b}$ . Ils sont donc différents. De plus, vu notre choix de  $x$  et de  $y$ , le couple  $(a, \alpha(b))$ , qui est la limite des  $\gamma_n(x, \alpha(y))$ , appartient à  $Q^\Phi$ .

Ce qui précède s'interprète alors de la manière suivante : l'orbite du flot  $\Phi^t$  représentée par  $(x, \alpha(y))$  admet dans son adhérence l'orbite représentée par  $(a, \alpha(b))$ . Or, la première est une orbite périodique, donc propre. Il s'ensuit que la suite  $\gamma_n(x, \alpha(y))$  est stationnaire à partir d'un certain rang.  $\square$

D'après les lemmes 3.16, 3.3, 3.19 et 3.20, les hypothèses du théorème 2.6 sont toutes satisfaites. La conjugaison topologique obtenue grâce à ce théorème se relève en une conjugaison  $f_s$  entre l'action de  $Z$  sur  $Q^s$  et une action projective sur  $\tilde{P}^1$  définie par un plongement discret  $\rho$  de  $Z$  dans  $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ . Ceci montre :

PROPOSITION 3.21. — Les actions de  $Z$  sur  $Q^s$  et  $Q^u$  sont projectives.  $\square$

Remarque 3.22. — Le sous-groupe  $\rho(Z)$  est toujours discret, mais il n'est cocompact que si  $S$  est  $M$  tout entier (et donc, en particulier, que si  $M$  est un fibré de Seifert). En effet comme le revêtement universel  $\widehat{M}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$ , le revêtement  $\widehat{M}$  associé à  $Z$  est un  $K(Z, 1)$ . Or,  $\rho(Z) \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$  est lui aussi un  $K(Z, 1)$ . Donc, si  $\rho(Z)$  est cocompact,  $\widehat{M}$  est compact, ce qui entraîne comme nous l'avons affirmé que le morceau  $S$  est  $M$  tout entier. Cependant, dans le cas général, comme tout élément de  $Z$  admettant dans  $Q^s$  un point fixe est de type hyperbolique, l'image  $\rho(Z)$  ne contient aucun élément parabolique.

### 3.3. Fin de la preuve du théorème A.

Soient  $\widehat{\mathcal{G}}^s$  et  $\widehat{\mathcal{G}}^u$  les relevés dans  $\widehat{M}$  de  $\mathcal{F}^s$  et de  $\mathcal{F}^u$ . Soient  $\widehat{G}^s$  et  $\widehat{G}^u$

leurs restrictions à  $\tilde{S}$ . D'après la proposition 3.21, ces deux feuilletages sont transversalement projectifs. Soient  $\tilde{G}^s$  et  $\tilde{G}^u$  les relevés dans  $\tilde{S}$  de  $\hat{G}^s$  et de  $\hat{G}^u$ . Les feuilles de  $\tilde{G}^s \cap \tilde{G}^u$  sont les fibres de la restriction à  $\tilde{S}$  de  $\pi^\Phi$ . Rappelons que  $\Omega S$  est le complémentaire dans  $Q^\Phi$  des  $\Delta(\tilde{\theta})$ , où  $\tilde{\theta}$  décrit l'ensemble des feuilles de  $\tilde{\Phi}$  tangentes à  $\partial\tilde{S}$  : la restriction à  $\tilde{S}$  de  $\pi^\Phi$  est une fibration (localement) triviale d'image  $\Omega S$ . De plus, elle envoie  $\tilde{G}^s$  et  $\tilde{G}^u$  sur les restrictions à  $\Omega S \subset Q^s \times Q^u$  des feuilletages verticaux et horizontaux.

Soit  $\varphi : Q^\Phi \rightarrow \tilde{P}^1 \times \tilde{P}^1$  l'application définie par

$$\varphi(s, u) = (f_s(s), f_s(\alpha^{-1}(u))).$$

Elle envoie homéomorphiquement  $Q^\Phi$  sur l'ouvert  $\Omega'$  de  $\tilde{P}^1 \times \tilde{P}^1$  compris entre les graphes de l'identité et de  $\delta' = f_s \circ \tau_s \circ f_s^{-1}$ . Elle envoie l'action de  $Z$  sur  $\Omega$  sur la restriction à  $\Omega'$  de son action diagonale sur  $\tilde{P}^1 \times \tilde{P}^1$  via  $\rho : Z \rightarrow \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ . Rappelons que nous notons  $\delta$  un des générateurs du centre de  $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ . Quitte à inverser  $\delta$  nous pouvons supposer que

$$\delta \circ f_s = f_s \circ \tau_0.$$

D'après la proposition 3.18  $\delta$  et  $\delta'$  coïncident sur  $f_s(\mu^s)$ . Notons  $\Omega_{\mathrm{can}}$  l'ouvert de  $\tilde{P}^1 \times \tilde{P}^1$  compris entre les graphes de l'identité et de  $\delta$ . Les ouverts  $\Omega'$  et  $\Omega_{\mathrm{can}}$  sont en général différents, mais nous pouvons estimer à quel point ils diffèrent : soit  $(J_r = ]s_1^r, s_2^r[)_{r \in \mathcal{R}}$  la collection des composantes connexes de  $Q^s \setminus \mu^s$ . Chaque couple  $(s_1^r, \alpha(s_2^r))$  est un élément  $\tilde{\theta}_r$  de  $Q^\Phi$  correspondant à une orbite de  $\tilde{\Phi}$  tangente à  $\tilde{S}$ . Soit  $(x_r, y_r)$  l'image par  $\varphi$  de  $\tilde{\theta}_r$ . On pose :

$$T_r = \{(x, y) \in ]x_r, y_r] \times \tilde{P}^1 / \delta(x_r) \leq y < \delta'(x)\} \setminus \{(y_r, \delta(x_r))\},$$

$$T_r^0 = \{(x, y) \in ]x_r, y_r] \times \tilde{P}^1 / \delta(x_r) \leq y < \delta(x)\} \setminus \{(y_r, \delta(x_r))\}.$$

Alors,  $T_r$  et  $T_r^0$  sont des «triangles» contenus respectivement dans  $\Omega'$  et  $\Omega_{\mathrm{can}}$ , et  $\Omega'$  privé de  $T_r$  coïncide avec  $\Omega_{\mathrm{can}}$  privé de  $T_r^0$ . Soit  $[\rho(\gamma_r)z_r, z_r] \subset ]x_r, y_r[$  un domaine fondamental de l'action de  $\rho(\gamma_r)$  (rappelons que  $\gamma_r$  est un générateur du stabilisateur de  $\tilde{\theta}_r$ ). Soit enfin  $u_r$  un élément de  $\tilde{P}^1$  supérieur à  $z_r$  et inférieur à  $\delta(z_r)$  et  $\delta'(z_r)$ . On montre aisément qu'il existe un homéomorphisme croissant  $\eta_r$  envoyant  $[\rho(\gamma_r)z_r, z_r]$  sur  $[\rho(\gamma_r)u_r, u_r]$  et dont le graphe est contenu dans  $T_r \cap T_r^0$ . On peut prolonger  $\eta_r$  sur tout  $I_r$  en lui imposant de vérifier

$$\eta_r \circ \rho(\gamma_r) = \rho(\gamma_r) \circ \eta_r.$$

Soit  $T'_r$  le triangle :

$$T'_r = \{(x, y) \in ]x_r, y_r] \times \tilde{P}^1 / \delta(x_r) \leq y < \eta_r(x)\}.$$

C'est un voisinage ouvert de  $(x_r, y_r)$  à la fois dans  $T_r$  et dans  $T_r^0$ . De plus,  $T_r^0$ ,  $T_r$  et  $T'_r$  sont chacun préservés par l'action de  $\rho(\gamma_r)$ . Notons :

$$t_r = \{(x, y) \in ]\rho(\gamma_r)z_r, z_r] \times \tilde{P}^1 / \delta(x_r) \leq y < \delta'(x)\},$$

$$t_r^0 = \{(x, y) \in ]\rho(\gamma_r)z_r, z_r] \times \tilde{P}^1 / \delta(x_r) \leq y < \delta(x)\}.$$

Il existe un homéomorphisme  $\Psi_r : t_r \rightarrow t_r^0$  tel que :

$$\begin{aligned} \Psi_r(\rho(\gamma_r)z_r, \rho(\gamma_r)y) &= \rho(\gamma_r)\Psi_r(z_r, y) \\ \Psi_r(x, y) &= (x, y) \quad \text{si} \quad y < \eta_r(x). \end{aligned}$$

On prolonge ensuite  $\Psi_r$  sur tout  $T_r$  en lui imposant de commuter avec  $\rho(\gamma_r)$ . On obtient alors un homéomorphisme  $\Psi_r : T_r \rightarrow T_r^0$  commutant avec  $\rho(\gamma_r)$  et valant l'identité sur  $T'_r$ . On prolonge  $\Psi_r$  sur l'orbite de  $T_r$  par  $\rho(Z)$  en lui imposant de commuter avec l'action de  $Z$ . On effectue cette construction pour chaque intervalle  $J_r$ . On obtient ainsi un homéomorphisme  $\Psi$  entre l'union des  $T_r$  et celle des  $T_r^0$  commutant avec l'action de  $\rho(Z)$ . Comme  $\Psi$  vaut l'identité sur les triangles  $T'_r$ , il se prolonge continûment en un homéomorphisme entre  $\Omega'$  et  $\Omega_{\text{can}}$  : il suffit de lui imposer de valoir l'identité hors des  $T_r$ . En composant  $\Psi$  avec  $\varphi$  on obtient :

**PROPOSITION 3.23.** — *Il existe un homéomorphisme  $\varphi_0$  entre  $Q^\Phi$  et  $\Omega_{\text{can}}$  envoyant l'action de  $Z$  sur  $\Omega$  sur la restriction à  $\Omega_{\text{can}}$  de l'action de  $Z$  sur  $\tilde{P}^1 \times \tilde{P}^1$  via  $\rho$ .*  $\square$

Comme  $\Psi$  vaut l'identité hors des  $T_r$  nous avons même :

**PROPOSITION 3.24.** — *La conjugaison topologique  $\varphi_0$  envoie les restrictions à  $\Omega S$  de  $\mathcal{G}^s$  et de  $\mathcal{G}^u$  sur les restrictions à  $\varphi_0(\Omega S)$  des feuilletages verticaux et horizontaux.*  $\square$

L'intérêt de cette identification est que l'action diagonale de  $\rho(Z)$  sur  $\Omega_{\text{can}}$  s'interprète naturellement comme étant l'action du groupe fondamental sur l'espace des orbites du flot géodésique  $\Phi_{\rho(Z)}$  (cf. [3]). En d'autres termes,  $\widehat{\Phi}$  et  $\Phi_{\rho(Z)}$  ont même espaces transverses. Il est bien connu que les propriétés transverses d'un feuilletage le caractérise fortement. Nous sommes ainsi en mesure de montrer :

**PROPOSITION 3.25.** — *Le feuilletage intermédiaire  $\widehat{\Phi}$  sur  $\widehat{M}$  est topologiquement conjugué au feuilletage géodésique de  $\rho(Z) \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ . Cette conjugaison topologique peut être choisie de trace transverse  $\varphi_0$ .*

Avant de commencer la preuve convenons de quelques définitions. Si  $(N_1, \Phi_1)$  et  $(N_2, \Phi_2)$  sont deux variétés feuilletées et  $f : N_1 \rightarrow N_2$  une application continue envoyant les orbites de  $\Phi_1$  dans celles de  $\Phi_2$ , nous appelons *trace transverse* de  $f$  toute application entre les quotients  $\widetilde{N}_1/\widetilde{\Phi}_1$  et  $\widetilde{N}_2/\widetilde{\Phi}_2$  induite par un relevé de  $f$  aux revêtements universels  $\widetilde{N}_1$  et  $\widetilde{N}_2$ . Rappelons quelques notations déjà convenues auparavant :  $\widehat{T}_1, \dots, \widehat{T}_m$  sont les tores bordant  $\widehat{S}$ , et soient  $(\widetilde{T}_a)_{a \in A}$  leurs relevés dans  $\widehat{M}$ . Pour tout indice  $a$ , soit  $H_a$  le sous-groupe de  $Z$  fixant  $\widetilde{T}_a$ . Soit  $\widetilde{T}_a^-$  (resp.  $\widehat{T}_i^-$ ) la composante connexe de  $\widehat{M} \setminus \widetilde{T}_a$  (resp.  $\widehat{M} \setminus \widehat{T}_i$ ) ne contenant pas  $\widehat{S}$  (resp.  $\widehat{S}$ ).

**LEMME 3.26.** — *Pour chaque indice  $i$ , il existe un voisinage ouvert  $U_i$  de  $\widehat{T}_i^- \cup \widehat{T}_i$  dans  $\widehat{M}$  et une application  $\widehat{\varphi}_i : U_i \rightarrow M_{\rho(Z)}$  qui est un homéomorphisme sur son image et envoie la restriction de  $\widehat{\Phi}$  à  $\widehat{\varphi}_i(U_i)$ . De plus, chaque  $\widehat{\varphi}_i$  admet pour trace transverse  $\varphi_0$ , et les  $U_i$  peuvent être choisis deux à deux disjoints.*

*Preuve.* — Pour chaque indice  $a$  dans  $A$  soit  $\widehat{M}_{H_a}$  le revêtement de  $\widehat{M}$  associé à  $H_a$ . Le relevé  $\widehat{\Phi}_a$  de  $\widehat{\Phi}$  à  $\widehat{M}_{H_a}$  admet une description particulièrement simple : la variété  $\widehat{M}_{H_a}$  est homéomorphe au produit du tore par  $\mathbb{R}$ . Elle admet donc deux bouts. Le flot  $\widehat{\Phi}_a$  n'admet qu'un nombre fini de feuilles compactes, et les autres feuilles sont toutes errantes. Ces feuilles errantes vont soit d'un bout à lui-même, soit d'un bout à l'autre, soit d'un bout à une feuille compacte. Cette même description vaut bien sûr aussi pour le flot géodésique sur  $\rho(H_a) \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ . On en déduit aisément l'existence d'une conjugaison topologique  $\widehat{\varphi}_a$  entre  $\widehat{\Phi}_a$  et le flot géodésique sur  $\rho(H_a) \backslash \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$  dont la trace transverse soit  $\varphi_0$  : comme indication, disons qu'on définit cette conjugaison sur des voisinages tubulaires des feuilles fermées ; on étend cette conjugaison sur les saturés de ces voisinages tubulaires (ceci sans aucune difficulté puisque les saturés de voisinages suffisamment petits de deux feuilles fermées différentes sont disjoints) ; on prolonge enfin cette conjugaison sur tout  $\widehat{M}_{H_a}$ . Il ne nous semble pas utile de donner plus de détails.

La restriction de l'application de revêtement  $\widehat{\pi}_a : \widehat{M}_{H_a} \rightarrow \widehat{M}$  à l'une des composantes connexes de  $\widehat{M}_{H_a}$  privé du tore  $\widetilde{T}_a/H_a$  est par ailleurs injective, l'image étant un  $\widehat{T}_i^-$ . L'indice  $i$  étant fixé, on choisit un indice  $a$  pour lequel  $\widetilde{T}_a$  est au-dessus de  $\widehat{T}_i$ . Il existe alors un voisinage ouvert  $U_i$

de  $\widehat{T}_i^-$  sur lequel  $\widehat{\pi}_a$  admet une section  $\sigma_a$ . Ceci fournit l'ouvert  $U_i$  recherché, l'application  $\widehat{\varphi}_i$  recherchée étant  $\widehat{\varphi}_a \circ \sigma_a$ .  $\square$

*Preuve de 3.25.* — Il ne nous reste qu'à prolonger les applications  $\widehat{\varphi}_i$  définies au lemme précédent sur  $\widehat{S}$ , car les  $U_i$  recouvrent  $\widehat{M} \setminus \widehat{S}$ .

Soit  $\tau_1, \dots, \tau_k$  une collection finie de transversales à  $\widehat{\Phi}$  contenues dans  $\widehat{S}$  et  $\epsilon$  un réel positif tels que :

- la restriction de  $\widehat{\Phi}^t$  à chaque  $\tau_j \times ]-\epsilon, +\epsilon[$  est un plongement d'image  $V_j$  contenue dans  $\widehat{S}$ ;
- l'union des  $V_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) et des  $U_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) recouvre  $\widehat{M}$ .

Soit  $w_1, \dots, w_{m+k}$  une partition de l'unité sur  $\widehat{M}$  telle que :

- pour chaque indice  $i$  entre 1 et  $m$ , le support de  $w_i$  est contenu dans  $U_i$ ;
- pour chaque indice  $j$  entre 1 et  $k$ , le support de  $w_{m+j}$  est contenu dans  $V_j$ .

Nous notons  $(\widetilde{\tau}_b)_{b \in B}$  les relevés dans  $\widetilde{M}$  des  $\tau_i$ ,  $(\widetilde{U}_a)_{a \in A}$  ceux des  $U_i$  et  $(\widetilde{V}_b)_{b \in B}$  ceux des  $V_j$ . Nous choisissons bien sûr les indices de telle sorte que chaque  $\widetilde{U}_a$  contient  $\widetilde{T}_a$  et que chaque  $\widetilde{V}_b$  contient  $\widetilde{\tau}_b$ . Enfin, pour chaque indice  $a$ , on note  $\widetilde{w}_a$  le relevé à  $\widetilde{U}_a$  d'un des  $w_i$  (le seul  $w_i$  pour lequel ceci a un sens), et pour chaque indice  $b$ , on note  $\widetilde{w}_b$  le relevé à  $\widetilde{V}_b$  d'un des  $w_{m+j}$  (là encore, il n'y a qu'un seul indice  $j$  pour lequel ceci a un sens).

Chaque  $\widetilde{\tau}_b$  se projette dans  $Q^\Phi$  en un ouvert que l'homéomorphisme  $\varphi_0$  envoie en un ouvert de  $\Omega_{\text{can}}$  au-dessus duquel la fibration  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_{\text{can}}$  admet une section. On choisit une telle section dont l'image est notée  $\widetilde{\tau}'_b$ . Nous faisons ce choix de sorte que la collection des  $\widetilde{\tau}'_b$  soit  $\rho(Z)$ -invariante. On obtient aussi des homéomorphismes  $\widetilde{\varphi}_b : \widetilde{\tau}_b \rightarrow \widetilde{\tau}'_b$  de traces transverses  $\varphi_0 : \pi^\Phi(\widetilde{\tau}_b) \rightarrow \varphi_0(\pi^\Phi(\widetilde{\tau}_b))$ . Pour chaque élément  $x$  d'un des  $\widetilde{T}_a^-$  on pose  $\widetilde{\varphi}_0(x) = \widetilde{\varphi}_a(x)$ ,  $\widetilde{\varphi}_a$  étant le relevé de  $\widehat{\varphi}_i$ . Pour les éléments  $x$  de  $\widetilde{S}$ , on considère les divers ouverts  $\widetilde{V}_b$  le contenant. Pour chacun de ces ouverts  $\widetilde{V}_b$ , il existe un unique élément  $x_b$  de  $\widetilde{\tau}_b$  et un unique réel  $t_b$  tels que

$$x = \widetilde{\Phi}^{t_b}(x_b).$$

On pose alors

$$x'_b = \widetilde{\Phi}_{\text{geod}}^{t_b}(\widetilde{\varphi}_b(x_b)).$$

Si de plus  $x$  appartient à un des  $\widetilde{U}_a$ , on pose

$$x'_a = \widetilde{\varphi}_a(x).$$

En résumé, à chaque indice  $a$  (resp.  $b$ ) tel que  $\tilde{w}_a(x)$  (resp.  $\tilde{w}_b(x)$ ) est non nul nous avons associé un élément de  $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ . Ces divers points appartiennent tous à la même orbite du flot géodésique  $\tilde{\Phi}_{\mathrm{geod}}$ . Celle-ci munie de son paramétrage est une droite affine : on peut donc prendre le barycentre de ces points  $x'_a$  et  $x'_b$  pondérés par les poids  $\tilde{w}_a(x)$  et  $\tilde{w}_b(x)$ . Nous notons  $\tilde{\varphi}_0(x)$  ce barycentre. Il est clair que  $\tilde{\varphi}_0 : \widehat{M} \rightarrow \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$  est continue, de trace transverse  $\varphi_0$  et commute avec les actions de  $Z$ . De plus, elle envoie les orbites de  $\tilde{\Phi}$  dans celles de  $\tilde{\Phi}_{\mathrm{geod}}$ . Elle passe donc au quotient en une application  $\widehat{\varphi}_0 : \widehat{M} \rightarrow M_{\rho(Z)}$  envoyant les orbites de  $\tilde{\Phi}$  dans celles de  $\Phi_{\rho(Z)}$ . Nous aurions achevé la preuve de la proposition si  $\widehat{\varphi}_0$  s'avèrait bijective.

Remarquons que la restriction à  $\widehat{M} \setminus \widehat{S}$  de  $\widehat{\varphi}_0$  est donnée par les  $\widehat{\varphi}_i$  et est donc un homéomorphisme sur son image. Comme c'est une équivalence d'homotopie,  $\widehat{\varphi}_0$  est donc surjective. Pour les définitions de  $M_{\rho(Z)}$ , de  $S_{\rho(Z)}$  et de  $\Phi_{\rho(Z)}$  nous renvoyons à la section 2.2. Notons  $S'$  le complémentaire dans  $M_{\rho(Z)}$  de l'union des  $\widehat{\varphi}_i(\widehat{T}_i^-)$ . Ce qui précède signifie que  $\widehat{\varphi}_0$  envoie le complémentaire de  $\widehat{S}$  sur celui de  $S'$ . Nous affirmons qu'on peut supposer en plus que  $\widehat{\varphi}_0$  envoie  $\widehat{S}$  dans  $S'$ . En effet, soit  $x$  un élément de  $\widehat{S}$  dont l'image par  $\widehat{\varphi}_0$  est hors de  $S'$ . Alors, il existe un élément  $x'$  de  $\partial S'$  un réel positif  $t(x)$  et un signe  $\alpha = \pm 1$  tels que, pour tous les temps positifs  $t$ , le point  $\Phi_{\rho(Z)}^{\alpha t}(x')$  est hors de  $S'$ , et tels que  $\Phi_{\rho(Z)}^{\alpha t(x)}(x')$  soit égal à  $\widehat{\varphi}_0(x)$ . On définit alors  $\widehat{\varphi}'_0(x)$  comme étant  $x'$ . On obtient ainsi une nouvelle application continue  $\widehat{\varphi}'_0$  satisfaisant les propriétés de  $\widehat{\varphi}_0$  décrites précédemment, et en outre envoyant  $\widehat{S}$  dans  $S'$ . Là encore, il nous semble superflu de détailler davantage.

Si deux éléments de  $\widehat{M}$  ont même image par  $\widehat{\varphi}_0$ , ils sont nécessairement sur la même orbite de  $\tilde{\Phi}$ . Il se peut cependant que  $\widehat{\varphi}_0$  ne soit pas injective. Pour achever la preuve nous allons modifier  $\widehat{\varphi}_0$  en poussant le long des orbites de  $\Phi_{\rho(Z)}$ , *i.e.* la remplacer par une application de la forme  $\Phi_{\rho(Z)}^v(\widehat{\varphi}_0(x))$  où  $v : \widehat{M} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.

Nous allons pour ce faire appliquer comme dans [18] ou [3] l'idée suivante (due à M. Gromov [21]) : soit  $u : \mathbb{R} \times \widehat{U} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \widehat{M}, \quad \widehat{\varphi}_0(\widehat{\Phi}^t(x)) = \Phi_{\rho(Z)}^{u(t,x)}(\widehat{\varphi}_0(x)).$$

Pour tout réel positif  $T$ , soit  $u_T : \widehat{M} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application moyenne

$$\forall x \in \widehat{M}, \quad u_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T u(s, x) \, ds.$$

On définit alors l'application  $\widehat{\varphi}_T : \widehat{M} \rightarrow M_{\rho(Z)}$  :

$$\widehat{\varphi}_T(x) = \Phi_{\rho(Z)}^{u_T(x)}(\widehat{\varphi}_0(x)).$$

Nous avons

$$\widehat{\varphi}_T(\widehat{\Phi}^t(x)) = \Phi_{\rho(Z)}^{v_T(t,x)}(\widehat{\varphi}_T(x))$$

où  $v_T$  est définie comme étant

$$v_T(t, x) = \frac{1}{T} \int_t^{T+t} u(s, x) \, ds.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial t} v_T(t, x) = \frac{1}{T} [u(T+t, x) - u(t, x)] = \frac{1}{T} u(T, \widehat{\Phi}^t(x)) - u_T(x).$$

En particulier, la dérivée par rapport à  $t$  en 0 de  $v_T(t, x)$  est de même signe que  $u(T, x)$ . Si celui-ci est non nul,  $\widehat{\varphi}_T$  est injective le long des feuilles de  $\widehat{\Phi}$  au voisinage de  $x$ . Donc, si le réel  $T$  est tel que  $u(T, x)$  ne s'annule en aucun élément  $x$  de  $\widehat{M}$ ,  $\widehat{\varphi}_T$  est injective.

Comme  $\widehat{S}$  est compact, on montre comme dans la preuve du lemme 3.5 de [3] qu'on peut pour le moins choisir le réel  $T$  de telle sorte que, pour tout élément  $x$  de  $\widehat{S}$ , si la portion d'orbite positive  $\{\widehat{\Phi}^t(x) ; 0 \leq t \leq T\}$  est contenue dans  $\widehat{S}$ , alors  $u(T, x)$  est non nul.

On peut en résumer la preuve de la manière suivante : il existe dans  $\widehat{S}$  un autre point  $y$  proche de  $x$ , appartenant à la feuille stable forte  $\widehat{\mathcal{F}}^{ss}(x)$ , et tel que tous les  $\widehat{\Phi}^t(y)$  ( $0 \leq t \leq T$ ) appartiennent eux-aussi à  $\widehat{S}$ . Comme les  $\widehat{\Phi}^t(y)$  et les  $\widehat{\Phi}^t(x)$  se rapprochent exponentiellement lorsque  $t$  devient proche de  $T$ , il en est de même pour les  $\widehat{\varphi}_0(\widehat{\Phi}^t(y)) = \Phi_{\rho(Z)}^{u(t,y)}(\widehat{\varphi}_0(y))$  et les  $\Phi_{\rho(Z)}^{u(t,x)}(\widehat{\varphi}_0(x))$ . Ceci implique que, pour peu que  $y$  ait été choisi suffisamment éloigné de  $x$ , le réel  $u(T, x)$  doit être suffisamment grand, et donc au moins non nul. Que ce réel  $T$  puisse être choisi indépendamment de  $x$  provient de la compacité de  $\widehat{S}$ .

Par ailleurs, si la portion d'orbite positive  $\{\widehat{\Phi}^t(x) ; 0 \leq t \leq T\}$  sort de  $\widehat{S}$ ,  $u(T, x)$  doit là encore être non nul car  $\widehat{\varphi}_0$  est injective hors de  $\widehat{S}$ . En définitive, il existe un réel positif  $T$  tel que  $u(T, x)$  est non nul pour chaque élément  $x$  de  $\widehat{S}$ . Toujours parce que  $\widehat{\varphi}_0$  est injective hors de  $\widehat{S}$ , cette propriété s'étend sur tout  $\widehat{M}$  :  $\widehat{\varphi}_T$  est donc injective.  $\square$

Soit  $i$  l'immersion de  $S$  dans  $M$  dont la restriction à l'intérieur de  $S$  est un plongement. Les restrictions à  $i(S)$  de  $\mathcal{F}^s$  et de  $\mathcal{F}^u$  se tirent en arrière en un bifeuilletage  $(G^s, G^u)$  de  $S$ . Comme  $Z$  est exactement le sous-groupe  $i_*\pi_1(S, x_0)$  de  $\Gamma$ ,  $i$  se relève en un plongement  $\hat{i} : S \hookrightarrow \widehat{M}$ . Vu notre choix de  $i$ , qui est tel que les composantes de  $i(\partial S)$  soient quasi-transverses à  $\Phi^t$  l'image de  $\hat{i}$  est exactement  $\widehat{S}$ . Le plongement  $\hat{i}$  est donc une conjugaison topologique entre  $(S, G^s, G^u)$  et  $(\widehat{S}, \widehat{G}^s, \widehat{G}^u)$ .

$\widehat{S}$  privé de sa partie tangente, *i.e.* des quelques orbites périodiques de  $\widehat{\Phi}$  tangentes à  $\partial\widehat{S}$ , est envoyée par  $\widehat{\varphi}_0$  en une partie de  $M_{\rho(Z)}$  qui est clairement homotope le long des orbites de  $\Phi_{\rho(Z)}$  à  $S_{\rho(Z)}$  privé de sa partie tangente. Il convient de noter que cette homotopie le long du flot ne peut être en général prolongée aux parties tangentes !

Il découle de la proposition 3.24 que la conjugaison topologique ainsi établie entre  $S$  privé de sa partie tangente et  $S_{\rho(Z)}$  privé de sa partie tangente préserve les bifeuilletages. Le théorème A est donc démontré.

#### 4. Preuve du théorème B.

Dans toute cette section,  $\Phi^t$  désigne un flot d'Anosov sur une VGPC  $M$ . Nous appelons  $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$  une collection finie de tores plongés dans  $M$  de manière incompressible et deux à deux disjoints le long desquels  $M$  se découpe en un nombre fini de fibrés de Seifert compacts à bord  $S_1, \dots, S_k$ . Ce sont des fibrés principaux.

Mettant à part le cas où  $M$  est un fibré de Seifert principal (*cf.* théorème 4.9), nous supposons ici que le nombre  $n$  de tores est non nul. Si  $T$  est choisie minimale, cette décomposition est unique à isotopie près. D'après la section 2.3, le groupe fondamental  $\Gamma$  de  $M$  s'exprime comme un produit des  $\pi_1(S_i, x_i)$  amalgamé par les  $\pi_1(T_j, y_j)$ , où les  $x_i$  et les  $y_j$  sont des points bases choisis arbitrairement. Nous fixons  $x_1$  comme point base de  $M$ .

De manière plus précise,  $\Gamma = \pi_1(M, x_1)$  est isomorphe au groupe fondamental d'un graphe de groupes  $\mathcal{G}_M^0$ . Pour chaque couple d'indices  $(i, j)$  où  $T_j$  est un tore contenu dans  $\partial S_i$ , il a été choisi un chemin  $c_{ij}$  reliant  $x_i$  à  $y_j$  : ceci permet de définir un plongement  $f_j^i : \pi_1(T_j, y_j) \hookrightarrow \pi_1(S_i, x_i)$ .

De même, le choix d'un sous-arbre maximal  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{G}_M^0$  permet de définir de manière unique des plongements  $f_{\mathcal{T}}^i : \pi_1(S_i, x_i) \hookrightarrow \Gamma$  et  $f_{\mathcal{T}}^j : \pi_1(T_j, y_j) \hookrightarrow \Gamma$ . Les images de ces plongements sont notées

respectivement  $Z_i$  et  $H_j$ . Nous notons  $h_i$  l'élément de  $Z_i$  correspondant aux fibres régulières de  $S_i$  : il engendre le centre de  $Z_i$ . Enfin, si  $S_i$  et  $S_{i'}$  sont deux morceaux sommets d'une même arête du sous-arbre  $\mathcal{T}$ , les fibres  $h_i$  et  $h_{i'}$  commutent.

#### 4.1. Sur l'hypothèse produit.

Le but de cette section est de montrer l'équivalence entre les assertions (1) et (2) apparaissant dans l'énoncé du théorème B. Pour mener à bien ce projet nous devons établir quelques propriétés générales des 1-variétés fermées connexes, simplement connexes et orientées, ainsi que de leurs homéomorphismes. Pour tout couple d'éléments  $(s, s')$  de  $Q^s$  nous notons  $]s, s'[$  l'ensemble des éléments de  $Q^s$  qui déconnectent  $s$  de  $s'$ . Si il existe une immersion de  $\mathbb{R}$  dans  $Q^s$  dont l'image contient  $s$  et  $s'$ , alors  $]s, s'[$  est contenu dans l'image de cette immersion. De manière plus précise,  $]s, s'[$  est l'intervalle ouvert délimité par  $s$  et  $s'$  dans l'image de cette immersion.

On dit alors que  $s$  et  $s'$  sont *comparables*. Nous notons  $[s, s']$  l'union de  $]s, s'[$  et de  $\{s, s'\}$ . Lorsque  $s$  et  $s'$  sont non séparés, c'est-à-dire lorsque tout voisinage de l'un rencontre tout voisinage de l'autre, nous notons  $s \approx s'$ . Nous laissons au lecteur le soin de montrer (voir aussi [2]) :

LEMME 4.1. — *Pour toute paire d'éléments  $(s, s')$  de  $Q^s$  l'ensemble  $[s, s']$  est une union finie d'intervalles  $[s_i, s'_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) où*

$$s_1 = s, \quad s'_i \approx s_{i+1}, \quad s'_n = s'. \quad \square$$

On peut donc définir sur  $Q^s$  la pseudodistance

$$d(s, s') = n - 1$$

où  $n$  est le nombre d'intervalles composantes connexes de  $[s, s']$ . On vérifie aisément que si  $s'$  déconnecte  $s$  de  $s''$  alors

$$d(s, s'') = d(s, s') + d(s', s'').$$

De plus, tout homéomorphisme de  $Q^s$  est une  $d$ -isométrie. Remarquons que  $d(s, s')$  peut s'interpréter de la manière suivante : c'est le nombre minimal de points de contact avec  $\mathcal{G}^s$  d'un chemin reliant dans  $Q^\Phi$  un point de  $s$  à un point de  $s'$ . Le lemme suivant interviendra fréquemment dans notre étude :

LEMME 4.2. — Soit  $\gamma$  un élément de  $\Gamma$  préservant l'orientation de  $Q^s$  et sans point fixe. On suppose qu'il existe un intervalle ouvert  $I_0$  de  $Q^s$  préservé par  $\gamma$ . Alors, cet intervalle est unique, i.e. il n'existe pas d'autre intervalle ouvert  $\gamma$ -invariant.

Preuve. — Soit  $I$  un autre intervalle ouvert  $\gamma$ -invariant. S'il est disjoint de  $I_0$ , comme  $I$  et  $I_0$  sont connexes, il existe un unique élément  $s$  de  $\partial I_0$  déconnectant  $I$  et  $I_0$ .  $\gamma(s)$  vérifie alors la même propriété et doit donc être égal à  $s$  : contradiction. Donc,  $J = I \cap I_0$  est non vide. Comme  $Q^s$  est simplement connexe,  $J$  est un sous-intervalle ouvert de  $I_0$  préservé par  $\gamma$ . Ses extrémités dans  $I_0$ , si elles existent, sont des points fixes de  $\gamma$ . Donc,  $J$  et  $I_0$  sont confondus. De même,  $J = I$ . Donc,  $I$  et  $I_0$  sont confondus.  $\square$

Un homéomorphisme  $f : Q^s \rightarrow Q^s$  est dit *séparant les points de  $Q^s$*  s'il préserve l'orientation de  $Q^s$  et que tout élément  $s$  de  $Q^s$  est séparé de son image  $f(s)$  par la topologie de  $Q^s$ . Un homéomorphisme séparant les points est en beaucoup de points semblable à un automorphisme d'un arbre simplicial agissant librement. Par exemple, il admet l'analogue d'un « axe de translation » : l'*axe fondamental* d'un homéomorphisme  $f$  de  $Q^s$  séparant les points est l'ensemble des éléments  $s$  de  $Q^s$  pour lesquels  $d(s, f(s))$  est pair ; il est noté  $\mathcal{A}(f)$ . On préférera sans doute une des définitions provenant de la proposition suivante :

PROPOSITION 4.3. — Un élément  $s$  de  $Q^s$  appartient à  $\mathcal{A}(f)$  si et seulement si il vérifie une des trois conditions suivantes :

- (1) pour une orientation de  $Q^s$  convenable  $f(s)$  appartient à  $s_+$  et  $s$  appartient à  $f(s)_-$  ;
- (2) l'intersection de  $[s, f(s)]$  avec son image  $[f(s), f^2(s)]$  est réduite à  $f(s)$  ;
- (3) l'image  $f(s)$  déconnecte  $s$  et  $f^2(s)$ .

Preuve. — Élémentaire.  $\square$

PROPOSITION 4.4. — L'axe fondamental de  $f$  n'est pas vide.

Preuve. — Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $Q^s$ . Supposons l'existence d'un entier  $n$  non nul pour lequel  $f^n I$  rencontre  $I$ . Soit  $y$  un élément de cette intersection :  $f^n y$  appartient à  $f^n I$  et est donc comparable à  $y$ . Remarquons que, comme  $f$  agit librement sur  $Q^s$ , d'après la proposition 3.8

de [4],  $f^n$  n'admet pas non plus de point fixe. Donc  $y$  est différent de  $f^n y$ . On en déduit que l'union  $J$  des itérés  $f^{pn}[y, f^n y]$  est un intervalle ouvert  $f^n$ -invariant. Comme  $fJ$  est lui aussi  $f^n$ -invariant, nous avons  $fJ = J$  d'après le lemme 4.2. Donc,  $y$  est comparable à  $fy$  et appartient à  $\mathcal{A}(f)$ .  $\square$

Nous pouvons donc nous restreindre au cas où tous les intervalles ouverts de  $Q^s$  sont disjoints de leurs itérés par les  $f^n$ . Le quotient  $Q^s_f$  est alors une 1-variété, qui n'est pas simplement connexe puisqu'elle admet un revêtement non trivial. Il existe donc un élément  $\bar{s}_0$  de ce quotient qui ne le déconnecte pas. N'importe quel relevé de  $\bar{s}_0$  dans  $Q^s$  appartient alors à  $\mathcal{A}(f)$ .

**PROPOSITION 4.5.** — Pour tout élément  $s$  de  $\mathcal{A}(f)$ , la réunion des itérés  $[f^n(s), f^{n+1}(s)]$  quand  $n$  décrit  $\mathbb{Z}$  est  $\mathcal{A}(f)$  tout entier.

**Preuve.** — Pour tout élément  $s$  de  $\mathcal{A}(f)$ , notons  $I_s$  la réunion des  $[f^n s, f^{n+1} s]$  où  $n$  décrit  $\mathbb{Z}$ . Soit  $s'$  un élément de  $]s, f(s)[$ . D'après le point 2 de 4.3, son image  $f(s')$  ne déconnecte pas  $s$  et  $f(s)$ . Par contre, elle déconnecte  $f(s)$  et  $f^2(s)$ . Elle déconnecte donc  $s$  et  $s'$  de  $f^2(s)$ , d'où

$$d(s, f^2(s)) = d(s, s') + d(s', f(s')) + d(f(s'), f^2(s)).$$

Donc

$$\begin{aligned} d(s, f(s)) + d(f(s), f^2(s)) &= d(s, s') + d(s', f(s')) + d(s', f(s)), \\ 2d(s, f(s)) &= d(s, f(s)) + d(s', f(s')), \\ d(s, f(s)) &= d(s', f(s')), \end{aligned}$$

ce qui montre que  $s'$  appartient à  $\mathcal{A}(f)$ . Celui-ci étant  $f$ -invariant, on en déduit qu'il contient  $I_s$ .

Inversement, soit  $s'$  un élément de  $\mathcal{A}(f)$ . Supposons par l'absurde qu'il n'appartient pas à  $I_s$ . D'après le point 1 de 4.3, pour une orientation convenable de  $Q^s$ , et quitte à remplacer  $f$  par son inverse :

$$s \in (s')_+, \quad f(s') \in (s')_+, \quad s' \in f(s')_-.$$

Il en découle

$$f(s) \in f(s')_+.$$

Comme  $f(s')$  est supposé ne pas déconnecter  $s$  et  $f(s)$ ,

$$s \in f(s')_+.$$

Par conséquent,  $f(s')$  déconnecte  $s$  de  $s'$ . En itérant ce procédé, on montre que pour tout entier positif  $n$   $f^n(s')$  appartient à  $[s, s']$ . Comme ce dernier est compact, et que la suite des  $f^n(s')$  vérifie une propriété de croissance (à savoir : si  $p$  est supérieur à  $q$ , alors  $f^p(s')$  appartient à  $[s, f^q(s')]$ ) on en déduit que cette suite admet une limite  $\bar{s}$ . Cette limite serait un point presque fixe de  $f$ , *i.e.*,

$$f(\bar{s}) \approx \bar{s}.$$

Ceci est absurde puisque  $f$  sépare les points de  $Q^s$ .  $\square$

Montrons (1)  $\Rightarrow$  (2) dans le théorème B. L'hypothèse (1) de ce théorème signifie que pour chaque indice  $i$  le générateur  $h_i$  du centre de  $Z_i \subset \Gamma$  n'admet pas de point fixe dans  $Q^\Phi$ . D'après la proposition 3.8 de [4], il en découle qu'aucune puissance non triviale de  $h$  n'admet de point fixe dans  $Q^\Phi$ . Les trois lemmes suivants constituent le point de départ de ce travail. Pour simplifier les notations, nous omettons les indices  $i$  de  $h_i$  et de  $Z_i$ .

**LEMME 4.6.** — *Chaque fibre  $h$  préserve l'orientation de  $Q^s$ . Il existe un intervalle ouvert  $I^s$  de  $Q^s$  préservé par  $h$ .*

**Preuve.** — Étudions  $h^2$  : il préserve l'orientation de  $Q^s$ . Nous distinguons deux cas :

*Premier cas :  $h^2$  admet un point presque fixe.* Alors, près de ce point presque fixe, il existe un point  $s_0$  comparable à son image  $h^2s_0$ , *i.e.* tel que  $[s_0, h^2s_0]$  est un intervalle ouvert. Alors l'union des  $[h^{2n}s_0, h^{2n+2}s_0]$  est un intervalle ouvert  $I_0$  préservé par  $h^2$ . L'intervalle  $hI_0$  est lui aussi préservé par  $h^2$ . D'après le lemme 4.2, nous avons donc  $hI_0 = I_0$ . Comme  $h$  n'admet pas de point fixe, on en déduit également que  $h$  préserve l'orientation de  $I_0$ , donc de  $Q^s$ .

*Deuxième cas :  $h^2$  sépare les points de  $Q^s$ .* Soit  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(h^2)$  son axe fondamental. Soit  $s_0$  un élément de  $\mathcal{A}$ . D'après la proposition 4.5,  $\mathcal{A}$  est l'union des  $[h^{2n}(s_0), h^{2n+2}(s_0)]$ . Supposons que  $\mathcal{A}$  n'est pas connexe, *i.e.*, que  $s_0$  et  $h^2s_0$  ne sont pas comparables. Alors,  $\mathcal{A}$  est une union d'intervalles fermés  $[s_i, s'_i]$  tels que :

$$s'_i \approx s_{i+1}, \quad h^2s_i = s_{i+p}$$

où  $p$  est un entier pair non nul. Par ailleurs, chaque élément  $\gamma$  de  $Z$  commute avec  $h^2$  et préserve donc  $\mathcal{A}$ ; il permute donc les indices  $i$ . Cette

permutation préserve ou inverse l'ordre des indices : elle est donc de la forme  $i \mapsto \epsilon(\gamma) \cdot i + t(\gamma)$ , où  $\epsilon(\gamma)$  vaut  $\pm 1$  et où  $t(\gamma)$  est un entier. Si  $\epsilon(\gamma)$  vaut  $-1$ , alors  $\gamma$  fixe un et un seul intervalle  $[s_i, s'_i]$ . Comme  $h^2$  commute avec  $\gamma$ , l'intervalle  $h^2[s_i, s'_i]$  est lui aussi fixé par  $\gamma$ . Il s'ensuit que  $h^2$  doit fixer l'intervalle  $[s_i, s'_i]$ , et donc également ses extrémités. Ceci est absurde. Donc, tous les  $\epsilon(\gamma)$  valent  $+1$ . L'application  $t : Z \rightarrow \mathbb{Z}$  est donc un morphisme. Son noyau est le stabilisateur des  $s_i$  : il est donc trivial ou cyclique. On en déduit que  $Z$  est soit cyclique, soit isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , soit isomorphe à l'extension double non triviale de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Ceci contredit la proposition 2.3. Donc,  $\mathcal{A}$  est connexe, *i.e.*, chaque élément de  $\mathcal{A}$  est comparable à son image par  $h^2$ . On conclut alors comme lors du premier cas.  $\square$

LEMME 4.7. — *L'intervalle  $I^s$  est  $Z$ -invariant.*

*Preuve.* — Pour tout élément  $\gamma$  de  $Z$ ,  $\gamma I^s$  est un intervalle ouvert  $h$ -invariant. Il est donc égal à  $I^s$  d'après le lemme 4.2.

LEMME 4.8. — *Chaque élément de  $Z$  préserve l'orientation de  $Q^s$ .*

*Preuve.* — La preuve est identique à celle du lemme 3.2.  $\square$

Il existe donc pour chaque indice  $i$  un unique intervalle ouvert  $I_i$   $h_i$ -invariant. Si  $S_i$  et  $S_{i'}$  sont deux morceaux adjacents admettant en commun un tore  $T_j$  appartenant au sous-arbre  $\mathcal{T}$ , les fibres  $h_i$  et  $h_{i'}$  commutent. Il s'ensuit alors que  $I_i$  et  $I_{i'}$  sont confondus. Par connexité de  $\mathcal{T}$ , on en déduit que tous les  $I_i$  sont confondus. Nous notons  $I$  cet intervalle commun préservé par les  $h_i$ . Soit  $\Gamma_{\mathcal{T}}$  le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par les  $Z_i$  : comme chaque sous-groupe  $Z_i$  préserve  $I_i$ ,  $\Gamma_{\mathcal{T}}$  préserve  $I$ .

D'après le théorème 2.4,  $\Gamma$  s'identifie à un sous-groupe du quotient  $G(\mathcal{G}_M^0)$  du produit libre

$$\left( \bigast_{i \in S} \pi_1(S_i, x_i) \right) * \left( \bigast_{\alpha \in A} L(t_\alpha) \right)$$

par les relations

$$t_{\bar{\alpha}} = t_\alpha^{-1}, \quad f_{\bar{\alpha}}(g) = t_\alpha f_\alpha(g) t_\alpha^{-1}$$

où chaque  $\alpha$  est une arête de  $\mathcal{G}_M^0$ . Soit  $S_i$  un morceau. Soit  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  l'unique géodésique de  $\mathcal{T}$  reliant  $S_1$  à  $S_i$ . Via cette identification, le sous-groupe  $Z_i$  de  $\Gamma$  correspond aux projections des  $[t_{\alpha_1}] \cdots [t_{\alpha_k}] [c] [t_{\alpha_k}]^{-1} \cdots [t_{\alpha_1}]^{-1}$  où  $[c]$  décrit  $\pi_1(S_i, x_i)$ . Soit  $\alpha = (i, i')$  une

arête de  $\mathcal{G}_M^0$ . Soit  $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_l)$  la géodésique de  $\mathcal{T}$  reliant  $S_1$  à  $S_{i'}$ . Soit enfin  $\gamma_\alpha$  l'élément de  $\Gamma$  correspondant à  $[t_{\alpha'_1}] \cdots [t_{\alpha'_l}] [t_\alpha] [t_{\alpha_k}]^{-1} \cdots [t_{\alpha_1}]^{-1}$ .

Vu la description précédente, il est clair que  $\gamma_\alpha h_i \gamma_\alpha^{-1}$  est un élément de  $\Gamma$  appartenant à  $Z_{i'}$ . Il préserve donc  $I$ , ce qui montre que  $h_i$  préserve  $\gamma_\alpha I$ . On en déduit que  $\gamma_\alpha$  préserve  $I$ . Comme l'union des  $\gamma_\alpha$  et de  $\Gamma_{\mathcal{T}}$  engendre  $\Gamma$ , on en déduit que  $\Gamma$  tout entier préserve  $I$ . Soit  $U$  l'ouvert  $(p^s \circ \pi^\Phi)^{-1}(I)$  de  $\widetilde{M}$ . C'est un ouvert  $\Gamma$ -invariant homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$ . Le quotient de  $U$  par l'action de  $\Gamma$  est un  $K(\Gamma, 1)$  tout comme  $M$ . Il est donc en particulier compact. Par ailleurs, il s'identifie à l'ouvert  $\pi(U)$  de  $M$ . Par connexité de  $M$ , on en déduit que  $U$  est  $\widetilde{M}$  tout entier et donc que  $\Phi^t$  est produit.

La réciproque est beaucoup plus facile : si le flot  $\Phi^t$  est produit, aucun des  $h_i$  ne peut admettre de point fixe. En effet, l'ensemble de ces points fixes serait sinon un fermé discret de  $Q^s \simeq \mathbb{R}$   $Z_i$ -invariant. Un argument analogue à celui utilisé au deuxième cas de la preuve du lemme 4.6 montre que  $Z_i$  serait alors isomorphe à un indice 2 près à  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , ce qui est absurde.  $\square$

#### 4.2. Flots d'Anosov sur les 3-variétés à centre non trivial.

Dans ce paragraphe nous exploitons les résultats précédents pour montrer la généralisation suivante du théorème de E. Ghys cité lors de l'introduction :

**THÉORÈME 4.9.** — *Tout flot d'Anosov sur une 3-variété dont le groupe fondamental est à centre non trivial est topologiquement équivalent à un revêtement fini d'un flot géodésique.*

Une méthode possible pour montrer ce théorème est la suivante : d'après le théorème 1.1 de [11] (voir aussi [34], [28], [17]), une variété vérifiant les hypothèses de ce théorème est nécessairement un fibré de Seifert principal. On peut alors adapter la preuve de [18] assez aisément.

Nous allons exposer ici une preuve différente utilisant essentiellement les résultats précédents de cet article. Plus précisément, notre preuve consiste à reprendre les arguments de la preuve du théorème A, qui dans ce cas de figure se simplifient considérablement. Soit donc  $\Phi^t$  sur une variété  $M$  dont le groupe fondamental  $\Gamma$  est à centre non trivial. Soit  $h$  un élément non trivial du centre de  $\Gamma$  préservant les orientations de  $Q^s$  et  $Q^u$ .

LEMME 4.10. — *L'élément  $h$  agit sur l'espace des feuilles  $Q^s$  en séparant les points.*

*Preuve.* — Il s'agit d'un des résultats de [18] : soit  $X$  l'ensemble des points de  $Q^s$  non séparés de leurs images par  $h$ . Comme l'ensemble des points fixes de  $h$  et l'ensemble des points de branchements de  $Q^s$  sont tous les deux dénombrables,  $X$  est un fermé dénombrable de  $Q^s$ . Comme  $h$  appartient au centre de  $\Gamma$ , ce fermé est de plus  $\Gamma$ -invariant. Il correspond donc à un fermé de  $M$  saturé par  $\mathcal{F}^s$  transversalement dénombrable. Comme  $M$  est compacte, ce fermé, *s'il est non vide*, contient un fermé minimal invariant qui est lui aussi «transversalement dénombrable». Il est donc d'intérieur vide, et aucune transversale ne le coupe selon un fermé localement homéomorphe à un Cantor. Ce fermé est donc une union de feuilles compactes de  $\mathcal{F}^s$ , ce qui est absurde. Le fermé  $X$  est donc vide.  $\square$

La preuve du lemme 4.6 s'applique ici pour montrer que l'axe fondamental de  $h$  est un intervalle ouvert  $I^s$  de  $Q^s$ . Cet intervalle est  $\Gamma$ -invariant. Soit  $V$  la préimage par  $p^s$  de  $I^s$  : c'est un ouvert de  $\widetilde{M}$  homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$  et  $\Gamma$  invariant. Sa projection dans  $M$  est donc un ouvert  $\bar{V}$ , qui est un  $K(\Gamma, 1)$ . Or,  $M$  est lui aussi un  $K(\Gamma, 1)$  tout en étant compact. Donc,  $\bar{V}$  est un ouvert compact de  $M$ , donc est tout  $M$ . En d'autres termes,  $I^s$  est  $Q^s$  tout entier, *i.e.* :

LEMME 4.11. — *Le flot  $\Phi^t$  est produit.*  $\square$

On montre comme pour le lemme 4.8 que  $\Gamma$  préserve l'orientation de  $Q^s$ . Le lemme 3.17 est ici superflu : en effet, comme  $\Phi^t$  est produit, il est topologiquement transitif et le minimal  $\mu^s$  est donc  $Q^s$  tout entier. L'égalité  $h = \tau_s^k$  est donc déjà valable sur tout  $Q^s$ . La preuve de 3.21 s'applique ici pour montrer que l'action de  $\Gamma$  sur  $Q^s$  est projective. Le feuilletage  $\mathcal{F}^s$  est donc transversalement projectif. D'après [3], il s'ensuit que  $(M, \Phi^t)$  est revêtement fini d'un flot géodésique.

### 4.3. Caractérisation des exemples de Handel-Thurston.

Nous achérons ici la preuve du théorème B. Remarquons que l'implication  $2 \Rightarrow 3$  est un corollaire du théorème A.

Montrons la réciproque, à savoir que tous les exemples de Handel-Thurston généralisés sont produits. Nous raisonnons pour ce faire par l'absurde, supposant l'existence d'un exemple de Handel-Thurston généralisé admettant une orbite périodique librement homotope à une

fibre  $h$  d'un des morceaux  $S$  de la décomposition torique de la variété ambiante  $M$ . Soit  $T$  un des tores bordant  $S$  (notons qu'il en existe puisque d'après le théorème 4.9  $S$  n'est pas  $M$  tout entier).

Il est clair d'après la description des exemples de Handel-Thurston généralisés que  $T$  est quasi-transverse au flot. Par ailleurs,  $T$  contient une orbite périodique du flot non homologue dans  $T$  aux représentants de  $h$  dans  $T$ . D'après le théorème B de [4], il s'ensuit que  $T$  est homotope à un tore transverse au flot. Or, toujours selon [4], un tore quasi-transverse au flot ne peut être homotope à un tore transverse : contradiction.  $\square$

Le théorème B est donc démontré. Nousachevons cette section en montrant une affirmation faite précédemment, à savoir que si les morceaux d'un exemple de Handel-Thurston généralisé ont tous le même indice, et que le feuilletage faible stable de cet exemple est transversalement orienté, alors c'est un exemple de Handel-Thurston au sens de [23]. La raison en est fort simple : soit  $n$  l'indice commun de tous les morceaux. Soit  $T$  un tore bordant un des morceaux : il est adjacent à deux morceaux  $S$  et  $S'$ . Soient  $h$  et  $h'$  les fibres de  $S$  et  $S'$ , et  $2k$  le nombre d'orbites périodiques du flot contenues dans  $T$ .

On vérifie aisément que le nombre d'intersection entre  $h$  et chacune de ces orbites périodiques est le rapport  $n/k$ , et est donc égale au nombre d'intersection entre  $h'$  et chaque orbite périodique contenue dans  $T$ . Il s'ensuit qu'après une chirurgie de Dehn convenable le long d'une de ces orbites périodiques on peut supposer que  $h^{\pm 1}$  et  $h'$  sont homotopes dans  $M$ . En effectuant des chirurgies de Dehn de ce type pour chaque tore, on est ramené au cas où la variété ambiante est un fibré en cercle et dont le groupe fondamental  $\Gamma$  est donc à pseudocentre non trivial.

D'après ce qui précède, le flot d'Anosov sur cette nouvelle variété est produit, et le feuilletage faible stable a été supposé transversalement orienté : le groupe  $\Gamma$  agit donc sur  $\mathbb{R}$  par homéomorphismes préservant l'orientation. Soit  $h$  un générateur du pseudocentre de  $\Gamma$  : il agit librement sur  $Q^s$ . On en déduit qu'il ne peut satisfaire une relation du type  $tht^{-1} = h^{-1}$  : le pseudocentre est donc exactement le centre de  $\Gamma$ . D'après le théorème 4.9, le flot est un revêtement d'indice fini d'un flot géodésique. Le flot initial était donc un exemple de Handel-Thurston au sens de [24].

## 5. Étude d'un exemple.

Le but de cette section est de démontrer le théorème C, *i.e.* de donner des exemples de VGPC n'admettant pas de flots d'Asonov et d'autres exemples de VGPC n'admettant pour flots d'Asonov que des exemples de Handel-Thurston.

Ces exemples sont construits en recollant deux copies  $S_1$  et  $S_2$  de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \Sigma_0$  où  $\Sigma_0$  est le tore troué une fois. Nous ne retenons que les recollements pour lesquelles la variété obtenue est orientable. Ces recollements sont définis à isotopie près par l'application  $H_1(T_1) \rightarrow H_1(T_2)$  qu'elle induit, où  $T_i$  est le bord de  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ). Si on oriente  $T_i$  comme bord de  $S_i$ , ce qui oriente les  $H_1(T_i)$ , l'application précédente doit renverser les orientations pour que le recollé soit orientable.

Chaque  $H_1(T_i)$  est naturellement muni d'une base définie au signe près : soient  $s_i$  un des deux éléments de  $H_1(T_i)$  engendrant le noyau de  $H_1(T_i) \rightarrow H_1(S_i)$  et  $h_i$  l'unique élément de  $H_1(T_i)$  tel que la base  $(h_i, s_i)$  soit directe et dont l'image par  $H_1(T_i) \simeq \pi_1(T_i) \rightarrow \pi_1(S_i)$  soit la fibre de  $S_i$ . Une fois de telles bases choisies, toute matrice  $A$  à coefficients entiers et de déterminant  $-1$  définit une variété  $M_A$  : celle obtenue par un recollement dont l'application induite  $H_1(T_1) \rightarrow H_1(T_2)$  est donnée par  $A$  dans les bases  $(h_i, s_i)$ . Nous notons les coefficients de  $A$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Nous notons  $Z_1$  et  $Z_2$  les groupes fondamentaux de  $S_1$  et  $S_2$ . Ils se plongent dans le groupe fondamental  $\Gamma_A$  de  $M_A$ . Nous les identifierons abusivement avec leurs images par ces plongements. Leur intersection dans  $\Gamma_A$  est le sous-groupe libre abélien de rang deux  $H$  engendré par  $s_1$  et  $h_1$  ; c'est aussi le sous-groupe engendré par  $s_2$  et  $h_2$ . Il correspond au groupe fondamental du tore  $T_A$  plongé dans  $M_A$  correspondant à  $T_1$  et  $T_2$  ; nous noterons parfois de manière abusive  $T_1 = T_A = T_2$ .

Il est clair que  $M_A$  est un fibré en cercle si et seulement si  $(\alpha, \gamma) = (\pm 1, 0)$ . Il est tout aussi clair que deux matrices  $A$  et  $A^{-1}$  inverses l'une de l'autre définissent deux VGPC difféomorphes : le difféomorphisme consiste à envoyer la copie de  $S_i$  dans  $M_A$  sur celle de  $S_{2-i}$  dans  $M_{A^{-1}}$ .

De même, comme le choix des bases  $(h_i, s_i)$  est au signe près, deux matrices opposées  $A$  et  $-A$  définissent deux VGPC difféomorphes. Enfin,

pour chaque indice  $i$ , comme  $S_i$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \Sigma_0$ , on peut définir un difféomorphisme  $\Phi_i : S_i \rightarrow S_i$  par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \Sigma_0 &\longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \Sigma_0, \\ ([x], m) &\longmapsto ([-x], m). \end{aligned}$$

Le difféomorphisme  $\Phi_1 \cup \Phi_2$  sur  $S_1 \cup S_2$  passe aux quotients en un difféomorphisme entre  $M_A$  et  $M_{\widehat{A}}$  où  $\widehat{A}$  est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Inversement, soit  $\varphi : M_A \rightarrow M_{A'}$  un difféomorphisme entre deux de ces VGPC. On suppose que ces VGPC ne fibrent pas en cercles. D'après les travaux de Waldhausen [38], (8.1), on peut supposer après isotopie que  $\varphi$  envoie  $T_A$  sur  $T_{A'}$ . D'après la remarque précédente, et quitte à inverser  $A$ , on peut supposer que  $\varphi$  envoie la copie  $S_i$  de  $M_A$  sur celle de  $M_{A'}$ . Notons  $B$  la matrice dans la base  $(h_1, s_1)$  de l'application  $H_1(T_1) \rightarrow H_1(T_1)$  induite par la restriction à  $T_1$  de  $\varphi$ . Elle est nécessairement de la forme

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon' \end{pmatrix}$$

où  $|\epsilon|$  et  $|\epsilon'|$  valent 1. En étudiant la restriction de  $\varphi$  sur  $T_2$ , on voit que  $B$  doit aussi envoyer  $h_1^\alpha s_1^\gamma$  sur  $h_1^{\alpha' \epsilon_1} s_1^{\gamma' \epsilon_1}$  où  $\epsilon_1 = \pm 1$  et  $h_1^\beta s_1^\delta$  sur  $h_1^{\beta' \epsilon_2} s_1^{\delta' \epsilon_2}$  où  $\epsilon_2 = \pm 1$ . On en déduit les égalités

$$\alpha' = \alpha \epsilon \epsilon_1, \quad \beta' = \beta \epsilon \epsilon_2, \quad \gamma' = \gamma \epsilon' \epsilon_1, \quad \delta' = \delta \epsilon' \epsilon_2.$$

Quitte à remplacer  $A$  par son opposé, on peut supposer que  $\epsilon = \epsilon_1$ . Alors, comme  $\beta \gamma - \alpha \delta$  et  $\beta' \gamma' - \alpha' \delta'$  valent chacun 1, il s'ensuit que  $\epsilon' = \epsilon_2$ . Par conséquent,

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta \epsilon \epsilon', \quad \gamma' = \gamma \epsilon \epsilon', \quad \delta' = \delta.$$

Donc, en définitive, si  $M_A$  ne fibre pas en cercles,  $M_{A'}$  est difféomorphe à  $M_{A'}$  si et seulement si

$$A^{\pm 1} = \pm A' \quad \text{ou} \quad A^{\pm 1} = \pm \widehat{A}'.$$

Cette conclusion reste vraie même dans le cas où  $M_A$  est un fibré en cercles, *i.e.* quand  $A$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

où  $\alpha$  vaut  $\pm 1$ . En effet, dans ce cas, le produit  $\beta \alpha$  est exactement la classe d'Euler du fibré en cercles  $M_A \rightarrow \Sigma$  où  $\Sigma$  est la surface orientable de genre 2 et où l'orientation des fibres est celle donnée par  $h_1$ . Nous laissons la preuve de cette affirmation au lecteur.

THÉORÈME 5.1. — Si ni  $|\alpha|$ , ni  $|\delta|$  ne vaut 1, et si  $\beta$  ne divise ni  $\alpha + 1$ , ni  $(\alpha - 1)$ , alors la VGPC  $M_A$  n'admet pas de flot d'Anosov. De plus, si  $\beta$  divise  $\alpha + 1$  ou  $\alpha - 1$  mais que ni  $|\alpha|$ , ni  $|\delta|$  ne vaut 0 ou 1, alors tout flot d'Anosov sur  $M_A$ , s'il en existe, est un exemple de Handel-Thurston généralisé. Enfin, si la trace de  $A$  est nulle, si  $|\alpha|$  est différent de 0 et de 1, si  $\beta$  divise  $\alpha + 1$  ou  $(\alpha - 1)$ , et si  $M_A$  admet un flot d'Anosov, alors ce flot d'Anosov est un exemple de Handel-Thurston au sens de [23], et le quotient de  $\alpha \pm 1$  par  $\beta$  est de valeur absolue 1 ou 2.

Ce théorème prouve clairement le théorème C. Signalons ici que les matrices pour lesquelles le rapport entre  $\alpha \pm 1$  et  $\beta$  vaut  $\pm 1$  ou  $\pm 2$  sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \epsilon + \beta k & \beta \\ -2k\epsilon - \beta k^2 & -\epsilon - \beta k \end{pmatrix}$$

où  $\beta$  est un entier non nul quelconque et où  $k$  vaut  $\pm 1$  ou  $\pm 2$ .

Nous commençons la preuve du théorème par le fait suivant :

PROPOSITION 5.2. — *Les feuilletages faibles de tout flot d'Anosov sur une des variétés  $M_A$  sont transversalement orientés.*

*Preuve.* — Soit  $\Phi^t$  un flot d'Anosov sur  $M_A$ . Nous allons montrer que le feuilletage faible stable  $\mathcal{F}^s$  est transversalement orienté. Le cas de  $\mathcal{F}^u$  est analogue. Il s'agit de montrer que l'action du groupe fondamental  $\Gamma_A$  sur  $Q^s$  préserve l'orientation. Comme  $Z_1$  et  $Z_2$  engendrent à eux deux  $\Gamma_A$ , il suffit de montrer que l'un et l'autre préserve l'orientation de  $Q^s$ . Nous ne traitons que le cas de  $Z_1$ , celui de  $Z_2$  étant analogue. Si  $h_1$  n'a pas de point fixe, il s'agit exactement des lemmes 4.6 à 4.8. Nous supposons donc que  $h_1$  fixe un point  $s$  dans  $Q^s$ . Si  $h_1$  renversait l'orientation de  $Q^s$ , il échangerait les deux composantes connexes de  $Q^s \setminus \{s\}$ . Le point  $s$  serait donc l'unique point fixe de  $h_1$  et serait donc fixé par tout  $Z_1$ . Ceci est absurde. Donc,  $h_1$  préserve les orientations de  $Q^s$  et de  $Q^u$ . Nous considérons comme dans [4] le graphe  $G_{h_1}$  suivant :

- les sommets de  $G_{h_1}$  sont les éléments de  $Q^s$  fixés par  $h_1$ ;
- deux sommets  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont reliées par une arête si et seulement si il existe un losange de sommets  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

Comme dans [4], prop. 3.6, il découle du théorème 3.5 de [13] que  $G_{h_1}$  est un arbre connexe. De plus,  $Z_1$  agit sur cet arbre, l'action de tout élément

de  $Z_1$  qui n'est pas une puissance de  $h_1$  est libre, et  $h_1$  agit trivialement. Une orientation de  $Q^s$  étant fixée, chaque  $h_1$ -losange est «orienté», et donc, chaque arête de  $G_{h_1}$  l'est aussi. Si un élément  $\gamma$  de  $Z_1$  renverse l'orientation de  $Q^s$ , il renverse également celle de  $G_{h_1}$ . Il doit donc dans ce cas fixer une arête de  $G_{h_1}$  en échangeant les extrémités. Ces deux extrémités sont alors points fixes de  $\gamma^2$  qui doit donc être une puissance de  $h_1$ .  $\gamma$  lui-même doit donc être une puissance de  $h_1$  : contradiction.  $\square$

Nous supposons toujours l'existence d'un flot d'Anosov  $\Phi^t$  sur une variété  $M_A$ .

**LEMME 5.3.** — *Une des deux fibres  $h_1$  et  $h_2$  n'est pas librement homotope dans  $M_A$  à une orbite périodique de  $\Phi^t$ .*

*Preuve.* — Nous raisonnons par l'absurde en supposant que  $h_1$  et  $h_2$  admettent chacun des points fixes dans  $Q^s$ . Alors, d'après le théorème B de [4], quitte à isotoper le flot, on peut supposer que  $T_A$  est transverse à  $\Phi^t$  et que les restrictions des feuilletages faibles à  $T_A$  sont sans composante de Reeb et admettent l'une des feuilles fermées homotopes à  $h_1$ , l'autre des feuilles fermées homotopes à  $h_2$ . Quitte à inverser le flot, on peut supposer qu'il est rentrant dans  $S_1$  en  $T_A$ . Nous notons  $G$  la restriction à  $S_1$  du feuilletage faible dont la restriction à  $T_1 = T_A$  admet des feuilles fermées homotopes à  $h_1$ . Soit  $Q$  l'espace des feuilles du revêtement universel de  $S_1$ .

Comme la restriction à  $T_1$  n'admet pas de composante de Reeb et que les feuilletages faibles n'admettent pas de composante de Reeb,  $G$  n'a ni composante de Reeb ni semi-composantes de Reeb. Il découle donc du théorème de Novikov que le groupe fondamental de chaque feuille de  $G$  s'injecte dans celui de  $S_1$ . Les feuilles de  $\tilde{G}$  sont donc simplement connexes. Ceci montre que  $Q$  est une 1-variété connexe et simplement connexe. De plus,  $Z_1$  agit sur  $Q$  de manière effective, *i.e.* l'action d'un élément non trivial est non triviale. Soit  $x$  un élément de  $Q$  au-dessus d'une feuille de  $G$  dont l'intersection avec  $T_1$  admet une composante compacte :  $x$  est un point fixe de  $h_1$ . Donc, l'ensemble des points presque fixes de  $h_1$  est un fermé de  $Q$   $Z_1$ -invariant et non vide.

On en déduit, comme lors de la preuve du lemme 4.10, que  $G$  doit admettre une feuille compacte. Notons  $G_0$  une feuille compacte de  $G$  et  $F_0$  la feuille de  $\mathcal{F}^s$  ou de  $\mathcal{F}^u$  qui la contient. Le bord de  $G_0$  est constitué de courbes fermées simples non homotopiquement triviales dans  $G_0$ , donc

également homotopiquement non triviales dans  $F_0$ . On en déduit que  $F_0$  est nécessairement un cylindre, et que  $G_0$  est un anneau. Rappelons qu'un anneau plongé dans  $S_1$  est dit vertical s'il contient une courbe fermée simple homotope à  $h_1$ , horizontal s'il est isotope modulo  $\partial S_1$  à un anneau sur lequel la fibration  $S_1 \rightarrow \Sigma$  se restreint en un revêtement, et  $\partial$ -parallèle s'il est isotope modulo  $T_1$  à un anneau contenu dans  $T_1$ .

D'après [37], tout anneau plongé de manière incompressible dans  $S_1$  est soit vertical, soit  $\partial$ -parallèle, soit horizontal. La feuille  $G_0$  ne peut être  $\partial$ -parallèle : en effet, le théorème de Novikov appliqué au double  $2G$  aboutirait à l'existence d'une semi-composante de Reeb. Elle ne peut pas non plus être horizontale, car la surface à bord compacte  $S_1$  ne peut être revêtue par un anneau.  $G_0$  est donc verticale. Comme  $\Phi^t$  est rentrant dans  $S_1$  le long de  $T_1$ , ceci montre que  $G$  est la restriction de  $\mathcal{F}^s$  et que  $G_0$  contient une orbite périodique  $\theta_0$  homotope à  $h_1$ .

Maintenant, en appliquant de nouveau les arguments précédents à la restriction  $G^u$  de  $\mathcal{F}^u$  à  $S_1$ , on montre que  $G^u$  admet lui aussi une feuille compacte qui est un anneau vertical (pour montrer que  $h_1$  admet un point fixe dans l'espace des feuilles approprié, il suffit de considérer la feuille de  $G^u$  contenant  $\theta_0$ ). Or, la restriction de  $\Phi^t$  à cette feuille compacte doit être rentrant le long du bord : ceci est absurde puisque cet anneau compact est découpé dans une feuille instable.  $\square$

Nous supposons désormais que  $h_1$  n'admet pas de point fixe dans  $Q^s$ . D'après les lemmes 4.6 et 4.7,  $Z_1$  fixe un unique intervalle ouvert dans  $Q^s$ . Nous notons  $I_1^s$  cet intervalle  $Z_1$ -invariant.

**LEMME 5.4.** — *Tout élément  $s$  de la frontière de  $I_1^s$  est non séparé d'un unique élément de  $I_1^s$ .*

*Preuve.* — Soient  $s$  un élément de la frontière de  $I_1^s$  et  $J$  un intervalle ouvert voisinage de  $s$ . Comme  $Q^s$  est simplement connexe, l'intersection entre  $J$  et  $I_1^s$  est un intervalle ouvert de  $I_1^s \simeq \mathbb{R}$ . Deux cas se présentent :

- soit on peut choisir  $J$  de telle sorte que  $J \cap I_1^s$  est à extrémités finies : alors une de ces extrémités est non séparée de  $s$  ;
- soit, quel que soit le choix de  $J$ , une des extrémités de  $J \cap I_1^s$  est infinie.

Dans le premier cas, nous avons conclu. Dans le second cas,  $J \cap I_1^s$  rencontre son image par n'importe quel élément de  $Z_1$ . Ceci montre que

pour tout élément  $\gamma$  de  $Z_1$ ,  $s$  et  $\gamma s$  sont non séparés l'un de l'autre. D'après le théorème 2.12, il existe un élément  $\gamma_0$  de  $\Gamma_A$  fixant chaque élément de l'orbite de  $s$  par  $Z_1$ . On en déduit que  $\gamma_0$  appartient au pseudo-centre de  $Z_1$  et est donc une puissance non triviale de  $h_1$ . En d'autres termes, une puissance de  $h_1$  doit fixer  $s$ . Or, comme  $h_1$  n'admet pas de point fixe, ceci contredit la proposition 3.8 de [4].

L'unicité est évidente. □

Les analogues des lemmes 3.1, 3.4 et 3.5 restent vrais. L'action de  $Z_1$  sur  $I_1^s$  admet donc un unique fermé minimal invariant  $\mu_1^s$ . Nous notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des éléments de  $\mu_1^s$  fixés par un élément de  $Z_1$ . Il est dense dans  $\mu_1^s$  pour peu qu'il soit non vide, ce qui provient du lemme suivant et du fait que si le flot n'est pas produit  $h_2$  admet un point fixe dans  $Q^s$ .

**LEMME 5.5.** — *Tout élément de  $Z_1$  admettant un point fixe dans  $Q^s$  admet un point fixe dans  $\mu_1^s$ .*

*Preuve.* — Soit  $\gamma$  un élément de  $Z_1$  fixant un élément  $s$  de  $Q^s$ . Si  $s$  n'appartient pas à  $I_1^s$ , soit  $s'$  l'unique élément de  $\partial I_1^s$  déconnectant  $s$  de  $I_1^s$ . Étant unique,  $s'$  doit être lui aussi point fixe de  $\gamma$ . D'après le lemme 5.4, il existe un unique élément  $s''$  de  $I_1^s$  non séparé de  $s'$ . Toujours pour raison d'unicité,  $s''$  est point fixe de  $\gamma$ . Donc,  $\gamma$  admet un point fixe dans  $I_1^s$ . En déduire qu'il admet un point fixe dans  $\mu_1^s$  est classique : voir la référence donnée au corollaire 3.4. □

**LEMME 5.6.** — *Il existe une courbe fermée simple dans  $T_A$  homotope dans  $M_A$  à une orbite périodique de  $\Phi^t$ , et les courbes vérifiant cette propriété sont homotopes entre elles dans  $T_A$ .*

*Preuve.* — L'existence est claire : elle est évidente si  $h_2$  est homotope à une orbite périodique, elle provient du théorème B sinon. Il s'agit donc de montrer l'unicité. S'il n'y a pas unicité, le fameux théorème B de [4] montre une nouvelle fois qu'après isotopie, le tore  $T_A$  est transverse au flot. En particulier,  $\Phi^t$  n'est pas produit ce qui montre que nécessairement on est dans le cas où  $h_2$  est homotope à une orbite périodique. Ainsi, un des feilletages faibles se restreint à  $S_2$  en un feilletage  $G$  dont la trace sur  $T_2$  admet des feuilles compactes homotopes à  $h_2$ . On aboutit à une contradiction comme lors de la preuve du lemme 5.3. □

Le lemme précédent se traduit de la manière suivante : il existe un élément  $\pm(p, q)$  de  $\mathbb{Z}^2$  bien défini au signe près tel que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux et  $h_1^p s_1^q$  admet un point fixe dans  $Q^s$ . De plus, tout élément de  $H$  admettant un point fixe dans  $Q^s$  est nécessairement une puissance de  $h_1^p s_1^q$ . Notre but est de montrer que  $p = \pm 1$  ou  $(p, q) = (0, \pm 1)$ . Ce fait, analogue de l'inégalité de Milnor-Wood et l'emploi qu'en fait W. Thurston dans sa thèse, est l'obstruction topologique menant au théorème C.

Soit  $s$  un élément de  $\mu_1^s$  fixé par un élément  $\gamma$  de  $Z_1$ . Quitte à inverser  $\gamma$ , on peut supposer que  $s$  est un point fixe attractif de  $\gamma$ . Soit  $\tau(s)$  le plus petit point fixe attractif de  $\gamma$  appartenant à  $\mu_1^s$  strictement supérieur à  $s$ . Notons qu'il existe car  $h_1 s > s$  est un point fixe attractif de  $\gamma$  et que les points fixes de  $\gamma$  forment un fermé discret de  $I_1^s$ .

Nous reprenons les notations de la section 2.5. Soit  $V_1$  l'ouvert  $(p^s)^{-1}(I_1^s)$  de  $Q^\Phi$ . C'est un ouvert saturé par  $\mathcal{G}^s$   $Z_1$ -invariant. Nous notons  $g^u$  la trace sur  $V_1$  de  $\mathcal{G}^u$ . Pour tout élément  $x$  de  $V_1$ , nous notons  $s(x)$  et  $\bar{u}(x)$  les feuilles de  $\mathcal{G}^s$  et de  $g^u$  le contenant. La projection  $p^s(\bar{u}(x))$  est un intervalle ouvert de  $I_1^s$  ; nous le notons  $]\alpha(x), \beta(x)[$ . Les quantités  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  peuvent *a priori* être l'une ou l'autre infinie. Nous nous intéressons dans ce qui suit à un point fixe  $x_0$  d'un élément  $\gamma_0$  de  $Z_1$ .

**LEMME 5.7.** — *Les extrémités  $\alpha(x_0)$  et  $\beta(x_0)$  appartiennent à  $I_1^s$ .*

**Preuve.** — Les itérés  $h(x_0)$  et  $h^{-1}(x_0)$  sont eux aussi points fixes de  $\gamma_0$ . Une intersection entre  $h^{-1}s(x_0)$  et  $\bar{u}(x_0)$  serait un point fixe de  $\gamma_0$  :  $\bar{u}(x_0)$  contiendrait alors deux points fixes de  $\gamma_0$  ce qui est impossible. Donc

$$\alpha(x_0) > h^{-1}p^s(x_0).$$

De même,

$$\beta(x_0) < hp^s(x_0).$$

□

Soit  $x_{-1}$  le point fixe de  $\gamma_0$  contenu dans  $\alpha(x_0)$  et  $x_1$  celui contenu dans  $\beta(x_0)$ . Comme chaque feuille appartenant à l'intervalle  $]\alpha(x_0), \beta(x_0)[$  rencontre  $\bar{u}(x_0)$ , le seul point fixe de  $\gamma_0$  dans  $]\alpha(x_0), \beta(x_0)[$  est  $p^s(x_0)$ . On en déduit :

$$\beta(x_{-1}) = p^s(x_0) = \alpha(x_1).$$

Deux alternatives se présentent selon que  $\alpha(x_0)$  et  $\beta(x_0)$  appartiennent ou non à la même composante connexe de  $V_1 \setminus \bar{u}(x_0)$ . Dans le premier cas,  $x_0$  est dit *de type C*. Dans le second cas, il est dit *de type D* (Fig. 1).

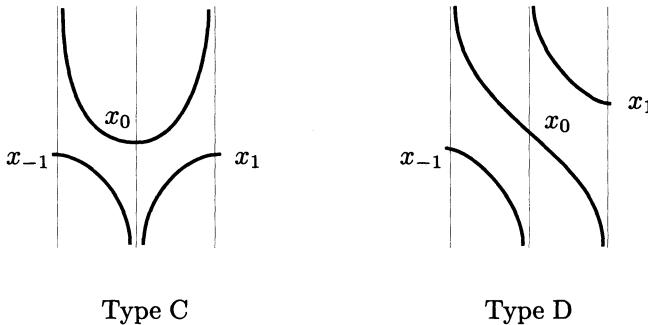


Figure 1

LEMME 5.8. — Si  $p^s(x_0)$  appartient à  $\mu_1^s$ , alors  $x_0$  est de type D.

*Preuve.* — Nous raisonnons une nouvelle fois par l'absurde. Nous supposons donc l'existence d'un point fixe  $x_0$  d'un élément  $\gamma_0$  de  $Z_1$  de type C dont la projection par  $p^s$  appartient à  $\mu_1^s$ . Quitte à modifier l'orientation de  $Q^u$ , nous pouvons supposer que  $x_{-1}$  et  $x_1$  appartiennent à  $U_-(x_0)$ .

Nous allons montrer que l'orbite  $Z_1 \cdot \{p^s(x_0)\}$  ne rencontre l'intervalle  $[\alpha(x_0), \beta(x_0)]$  qu'en  $p^s(x_0)$ , ce qui amène à la contradiction voulue puisque  $\mu_1^s$  est parfait et que  $Z_1 \cdot \{p^s(x_0)\}$  est dense dans  $\mu_1^s$ .

Supposons donc *a contrario* l'existence d'un itéré  $x'_0 = \gamma x_0$  ( $\gamma \in Z_1$ ) dans  $(p^s)^{-1}([\alpha(x_0), \beta(x_0)])$  autre que  $x_0$ . Nous notons  $\gamma_1$  le conjugué  $\gamma \gamma_0 \gamma^{-1}$  : il admet  $x'_0$  comme point fixe. Comme  $s(x'_0)$  rencontre  $\bar{u}(x_0)$  et que  $x_0$  et  $x'_0$  sont différents,  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  n'ont aucune puissance commune. Donc, aucun point fixe de  $\gamma_0$  n'est point fixe de  $\gamma_1$ .

Nous pouvons nous restreindre au cas où  $p^s(x'_0)$  appartient à  $]p^s(x_0), \beta(x_0)[$ . L'autre cas, à savoir  $p^s(x'_0)$  appartenant à  $[\alpha(x_0), p^s(x_0)[$  est identique. La feuille  $s(x'_0)$  rencontre alors  $u^-(x_1)$ , ce qui montre que  $x'_{-1} = \gamma x_{-1}$  appartient à  $U_-(x_1)$ . Donc, la feuille  $\alpha(x'_0) = p^s(x'_1)$  rencontre  $u^+(x_0)$ . On en déduit aisément que  $x'_0$  doit appartenir à  $S_+(x_0) \cap U_+(x_0)$ . Comme  $x'_{-1}$  appartient à  $U_-(x_1)$  et que  $\bar{u}(x'_{-1})$  ne rencontre pas  $\bar{u}(x_1)$ ,  $\alpha(x'_{-1})$  est supérieur à  $p^s(x_0)$ , et même strictement puisque  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  n'ont pas de point fixe commun.

Soient  $x'_{-2}$  l'unique  $\gamma_1$ -point fixe appartenant à  $\alpha(x'_{-1})$  et  $x'_{-3}$  l'unique  $\gamma_1$ -point fixe appartenant à  $\alpha(x'_{-2})$ . Le premier appartient clairement à

$S_+(x_0) \cap U_+(x_0)$  : ceci découle de l'égalité  $\beta(x'_{-2}) = p^s(x'_{-1})$ . Par ailleurs, selon l'égalité  $\beta(x'_{-3}) = p^s(x'_{-2})$ ,  $x'_{-3}$  appartient à  $S_-(x_1) \cap U_-(x_1)$ . De proche en proche, on établit ainsi l'existence d'une infinité de  $\gamma_1$ -points fixes  $(x'_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$  alternativement dans  $S_+(x_0) \cap U_+(x_0)$  et dans  $S_-(x_1) \cap U_-(x_1)$ . Les  $(p^s(x'_{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$  forment une suite décroissante dans le compact  $[p^s(x_0), \beta(x_0)]$  : cette suite converge donc, et sa limite est un point fixe de  $\gamma_1$ . Or, comme les points fixes de  $\gamma_1$  sont de type hyperbolique, ils forment un fermé discret de  $I_1^s$ . Contradiction.  $\square$

La réciproque est elle aussi vraie :

LEMME 5.9. — *Si  $p^s(x_0)$  n'appartient pas à  $\mu_1^s$  alors  $x_0$  est de type C.*

*Preuve.* — Supposons que  $p^s(x_0)$  n'appartient pas à  $\mu_1^s$ . Soit  $]s_-, s_+[$  la composante connexe de  $I_1^s \setminus \mu_1^s$  contenant  $p^s(x_0)$ . Cette composante est  $\gamma_0$ -invariante. Ses extrémités  $s_-$  et  $s_+$  sont donc points fixes de  $\gamma_0$ . Notons  $x_-$  et  $x_+$  les points fixes de  $\gamma_0$  contenus dans  $(p^s)^{-1}(s_-)$  et  $(p^s)^{-1}(s_+)$ . Comme  $s_-$  et  $s_+$  appartiennent à  $\mu_1^s$ ,  $x_-$  et  $x_+$  sont de type D. Quitte à remplacer  $\gamma_0$  par un de ses diviseurs, on peut supposer qu'il engendre les stabilisateurs de  $x_-$  et de  $x_+$ . Si un autre élément de  $Z_1$  admet un point fixe dans  $]s_-, s_+[$  il doit lui aussi fixer les extrémités de cet intervalle et est donc une puissance de  $\gamma_0$ . Comme  $\mu_1^s$  est parfait et que  $\mathcal{P}$  en est une partie dense, il existe un point fixe  $x_1$  d'un élément  $\gamma_1$  de  $Z_1$  tel que

$$\alpha(x_-) < p^s(x_1) < s_-$$

et tel que  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  n'admettent pas de point fixe commun. Regardons la suite des  $x_n$  de premier terme  $x_1$  et telle que chaque  $x_{n+1}$  est l'unique point fixe de  $\gamma_1$  contenu dans  $\beta(x_n)$ . Comme les points fixes de  $\gamma_1$  dans  $I_1^s$  forment un fermé discret, il existe un indice  $n$  pour lequel

$$p^s(x_n) < s_- < p^s(x_{n+1}).$$

Donc, quitte à remplacer  $x_1$  par  $x_n$ , on peut supposer

$$p^s(x_1) < s_- < \beta(x_1).$$

Or, aucun élément de  $]s_-, s_+[$  ne peut être point fixe de  $\gamma_1$ . Donc

$$p^s(x_1) < s_- < s_+ < \beta(x_1).$$

Il existe donc une feuille de  $g^u$  rencontrant à la fois  $(p^s)^{-1}(s_-)$  et  $(p^s)^{-1}(s_+)$ . Or, si un des points fixes de  $\gamma_0$  dans  $(p^s)^{-1}([s_-, s_+])$ , disons  $x_0$ , est de type D, il est clair que pour tout élément  $x$  de  $(p^s)^{-1}([\alpha(x_0), \beta(x_0)])$ , on a soit  $\alpha(x) \geq \alpha(x_0) \geq s_-$ , soit  $\beta(x) \leq \beta(x_0) \leq s_+$ . Contradiction.  $\square$

Au vu des deux lemmes précédents, on peut définir  $\tau$  de la manière suivante : pour tout  $\gamma_0$ -point fixe  $x$  de type D,  $\tau(p^s(x))$  est la deuxième feuille parmi celles supérieures à  $\tau(p^s(x))$ , fixées par  $\gamma_0$  et dont l'unique point fixe qu'elle contient est de type D.

**LEMME 5.10.** — *Pour toute composante connexe de  $I_1^s \setminus \mu_1^s$ , le nombre de points fixes de type C qu'elle contient est pair.*

*Preuve.* — Si une composante connexe  $[s_-, s_+]$  de  $I_1^s \setminus \mu_1^s$  contient un nombre impair de points fixes de type C, on voit aisément que pour tout élément  $x$  de  $(p^s)^{-1}([s_-, s_+])$  on a soit  $\alpha(x) \geq s_-$ , soit  $\beta(x) \leq s_+$ . On obtient une contradiction comme lors de la preuve du lemme précédent.  $\square$

Nous sommes désormais en mesure de montrer :

**LEMME 5.11.** — *L'application  $\tau$  est strictement croissante.*

*Preuve.* — Soit  $s < s'$  deux points fixes de deux éléments  $\gamma$  et  $\gamma'$  de  $Z_1$ . Il nous semble qu'ici quelques figures valent mieux qu'un long discours. Dans la figure 2 page suivante,  $x_1$  et  $x_2$  désignent les  $\gamma$ -points fixes contenus dans  $(p^s)^{-1}(s)$  et  $(p^s)^{-1}(\tau(s))$ , et  $x'_1$  et  $x'_2$  désignent les  $\gamma'$ -points fixes contenus dans  $(p^s)^{-1}(s')$  et  $(p^s)^{-1}(\tau(s'))$ .

Notons que  $\tau : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  est clairement bijective. Comme  $\tau$  est strictement croissante, elle se prolonge sur tout  $\mu_1^s$  en une application croissante de la manière suivante :

$$\tau(s) = \text{Sup}\{\tau(s_0) ; s_0 \leq s, s_0 \in \mathcal{P}\}.$$

L'application  $\tau$  ainsi prolongée n'est pas nécessairement continue, ni injective, ni même surjective. Pour remédier à cette imperfection, nous nous intéressons à son action sur l'espace quotient  $\mu$  obtenu en identifiant deux éléments  $s$  et  $s'$  de  $\mu_1^s$  si  $[s, s']$  est une composante connexe de  $I_1^s \setminus \mu_1^s$ . Il est clair que  $\tau$  passe au quotient en une application  $\bar{\tau}$ . Il est tout aussi clair que l'action de  $Z_1$  sur  $\mu_1^s$  passe elle aussi en une action sur  $\mu$ . Notons enfin que  $\mu$ , muni de la topologie quotient, est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ . Alors,  $\bar{\tau}$  est une application croissante.

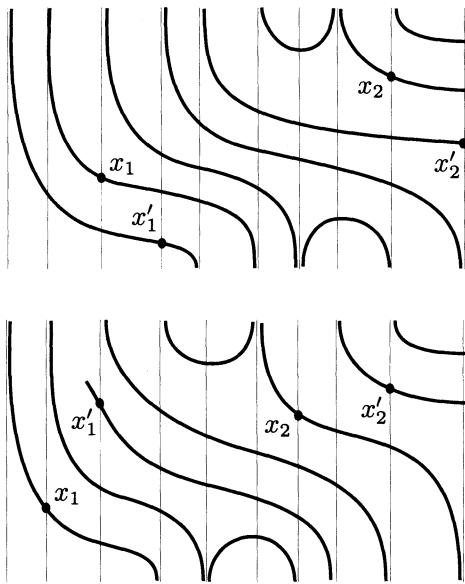


Figure 2

LEMME 5.12. — *L'application  $\bar{\tau} : \mu \rightarrow \mu$  est continue.*

*Preuve.* — Nous raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un point de discontinuité  $\bar{s}_0$  de  $\bar{\tau}$  dans  $\mu$  : il existe une suite d'éléments  $\bar{s}_n$  de  $\mu$  convergeant vers  $\bar{s}_0$  tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\tau}(\bar{s}_n) \neq \bar{\tau}(\bar{s}_0).$$

En extrayant une sous-suite, on peut supposer que  $\bar{s}_n$  est strictement monotone.

*Premier cas :  $\bar{s}_n$  est strictement croissante.* Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\tau}(\bar{s}_n) < \bar{\tau}(\bar{s}_0).$$

Parmi les représentants de  $\bar{s}_0$  dans  $\mu_1^s$  nous choisissons le plus petit ; nous le notons  $s_0$ . Pour chaque indice  $n$ , nous choisissons un représentant  $s_n$  dans  $\mu_1^s$  de  $\bar{s}_n$ . Vu notre choix de  $s_0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s_0.$$

Par ailleurs, la suite des  $\tau(s_n)$  est croissante et majorée par  $\tau(s_0)$  : elle admet une limite, qui doit être strictement inférieure à  $\tau(s_0)$ . Vu notre choix de  $s_0$ , il ne peut être extrémité supérieure d'une composante connexe de  $I_1^s \setminus \mu_1^s$ . On en déduit qu'il en est de même pour  $\tau(s_0)$ . Par densité de  $\mathcal{P}$ , il s'ensuit qu'il existe une suite strictement croissante d'éléments  $s'_p$  de  $\mathcal{P}$  convergeant vers  $\tau(s_0)$ . Alors, les  $s''_p = \tau^{-1}(s'_p)$  forment une sous-suite strictement croissante d'éléments de  $\mathcal{P}$  tous strictement inférieurs à  $s_0$  et tels que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \tau(s''_p) = \tau(s_0).$$

Pour chaque indice  $p$ , il existe un entier  $n_p$  tel que

$$s''_p \leq s_{n_p} < s_0.$$

D'où

$$\tau(s_0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \tau(s''_p) \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \tau(s_{n_p}) < \tau(s_0).$$

Contradiction.

*Deuxième cas :  $\bar{s}_n$  est strictement décroissante.* Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\tau}(\bar{s}_n) > \bar{\tau}(\bar{s}_0).$$

On choisit  $s_0$  comme étant le plus grand des représentants de  $\bar{s}_0$  dans  $\mu_1^s$ . Comme précédemment, on voit que si  $s_n$  est une suite de représentants dans  $\mu_1^s$  des  $\bar{s}_n$ , elle converge vers  $s_0$  et les  $\tau(s_n)$  admettent une limite strictement supérieure à  $\tau(s_0)$ . Nous notons  $s_1 = \tau(s_0)$  si  $\tau(s_0)$  n'est pas extrémité inférieure d'une composante connexe de  $I_1^s \setminus \mu_1^s$ , et  $s_1 = s_+$  si  $]\tau(s_0), s_+[$  est une composante connexe de  $I_1^s \setminus \mu_1^s$ . Dans les deux cas,  $s_1$  représente  $\bar{\tau}(\bar{s}_0)$ , et il existe une suite strictement décroissante d'éléments  $s'_p$  de  $\mathcal{P}$  convergeant vers  $s_1$ . Les  $s''_p = \tau^{-1}(s'_p)$  forment une suite décroissante d'éléments de  $\mathcal{P}$ . En raisonnant comme lors du premier cas, on obtient :

$$\tau(s_0) < \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau(s_n) \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \tau(s''_p) = s_1.$$

Or, comme  $\tau(s_0)$  et  $s_1$  représentent tous les deux  $\bar{\tau}(\bar{s}_0)$ , ceci implique que les  $\bar{\tau}(\bar{s}_n)$  convergent vers  $\bar{\tau}(\bar{s}_0)$ . Contradiction.  $\square$

**LEMME 5.13.** — *L'application  $\bar{\tau}$  est un homéomorphisme.*

*Preuve.* — Comme  $\tau$  est croissante et que sa restriction à  $\mathcal{P}$  est bijective, l'application  $\bar{\tau}$ , qui est continue, est surjective. Il s'agit donc

de montrer que  $\bar{\tau}$  est injective. Soient  $s_0$  et  $s_1$  deux éléments de  $\mu_1^s$  ne représentant pas le même élément de  $\mu$ . Par densité de  $\mathcal{P}$ , et comme  $]s_0, s_1[$  rencontre  $\mu_1^s$ , il existe trois éléments  $s$ ,  $s'$  et  $s''$  de  $\mathcal{P}$  tels que

$$s_0 < s < s' < s'' < s_1.$$

Alors

$$\tau(s_0) \leq \tau(s) < \tau(s') < \tau(s'') \leq \tau(s_1).$$

Donc  $\tau(s_0)$  et  $\tau(s_1)$  ne bordent pas une composante connexe de  $I_1^s \setminus \mu_1^s$ , ce qui montre qu'ils ne représentent pas le même élément de  $\mu$ .  $\square$

Sachant que  $\bar{\tau}$  est un homéomorphisme, on voit aisément, en s'inspirant de la preuve de la proposition 3.17 :

LEMME 5.14. — *Il existe un entier  $k$  tel que l'action de  $h_1$  sur  $\mu$  coïncide avec celle de  $\bar{\tau}^k$ .*  $\square$

Le quotient  $\bar{S}$  de  $\mu$  par l'action de  $\bar{\tau}$  est homéomorphe au cercle. Nous sommes désormais en mesure de montrer :

PROPOSITION 5.15. — *Si  $h_1^p s_1^q$  est un élément indivisible de  $H$  admettant un point fixe dans  $Q^s$  alors  $p = \pm 1$  ou  $(p, q) = (0, \pm 1)$ .*

Preuve. — Rappelons (*cf. lemme 5.6*) que  $\gamma_0 = h_1^p s_1^q$  est au signe près l'unique élément de  $H$  vérifiant cette propriété. D'après le lemme 5.14, l'action de  $\gamma_0$  sur  $\bar{S}$  coïncide avec celle de  $s_1^q$ . Par ailleurs, cette action est manifestement de type hyperbolique ou parabolique, *i.e.* admet au plus deux points fixes. Il en est donc de même pour celle de  $s_1$ . En tant qu'homéomorphisme de  $\mu$ ,  $s_1$  s'écrit donc sous la forme  $s_1 = s_0 \bar{\tau}^\epsilon$  où  $s_0$  admet des points fixes isolés et où  $\epsilon$  est un entier. Mais comme  $s_1$  est un commutateur d'éléments de  $Z_1$  qui commutent avec  $\bar{\tau}$ , on doit avoir  $|\epsilon| \leq 1$ . Or

$$s_1^k = h_1^\epsilon s_0^k.$$

Ceci montre que  $(p, q) = (\epsilon, -k)$  si  $\epsilon$  est non nul, ou  $(p, q) = (0, 1)$  si  $\epsilon$  est nul, convient.  $\square$

Preuve de 5.1. — Soit donc

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

une matrice de déterminant  $-1$  pour laquelle  $M_A$  admet un flot d'Anosov  $\Phi^t$ . Si  $h_1$  n'admet pas de point fixe, alors d'après les lemmes 5.6 et 5.15, soit il existe un entier  $k_1$  non nul tel que les seuls éléments de  $H$  admettant un point fixe dans  $Q^s$  sont les  $h_1^n s_1^{nk_1}$ , soit les seuls éléments de  $H$  admettant un point fixe dans  $Q^s$  sont les puissances de  $s_1$ . De même, si  $h_2$  n'admet pas de point fixe, les seuls éléments de  $H$  admettant des points fixes sont soit les puissances de  $s_2$ , soit les puissances de  $h_2 s_2^{k_2}$  pour un certain entier  $k_2$ . Enfin, si  $h_i$  ( $i = 1, 2$ ) admet un point fixe dans  $Q^s$ , ses puissances sont les seuls éléments de  $H$  admettant des points fixes. Notons par ailleurs que nous avons

$$h_2 = h_1^\alpha s_1^\gamma, \quad s_2 = h_1^\beta s_1^\delta.$$

D'après ce qui précède et le lemme 5.3, il n'y a que les quatres possibilités suivantes :

(1) *ni  $h_1$ , ni  $h_2$  n'admet de point fixe dans  $Q^s$ .* D'après le théorème B, le flot est alors un exemple de Handel-Thurston généralisé. Il existe alors un entier  $\epsilon$  de valeur  $\pm 1$  tel que

$$h_1 s_1^{k_1} = (h_2 s_2^{k_2})^\epsilon.$$

Notons en effet qu'en observant de près les morceaux de flots géodésiques sur  $S$ , on voit que ni  $s_1$  ni  $s_2$  ne peut dans ce cas admettre de point fixe. De l'égalité précédente, on obtient

$$\alpha + k_2 \beta = \epsilon.$$

Donc, si  $\beta$  est non nul, il divise  $\alpha \pm 1$ , et s'il est nul, nous avons  $\alpha = \epsilon = -\delta$ .

(2)  *$h_2$  et  $s_1$  admettent des points fixes dans  $Q^s$ , mais pas  $h_1$ .* Dans ce cas,  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = \pm 1 = \beta$ . Ainsi,  $\beta$  divise  $\alpha \pm 1$ .

(3)  *$h_2$  admet des points fixes dans  $Q^s$ , mais pas  $h_1$  ni  $s_1$ .* Nous avons alors

$$h_2^\epsilon = h_1 s_1^{k_1}$$

pour un entier  $\epsilon$  valant  $\pm 1$ . Alors  $\alpha$  vaut  $\pm 1$ .

(4)  *$h_1$  admet des points fixes dans  $Q^s$  mais pas  $h_2$ .* En échangeant les indices 1 et 2, *i.e.* en inversant la matrice  $A$ , on se ramène à un des deux cas précédents. Donc, soit  $\beta$  divise  $\alpha \pm 1$ , soit  $\delta$  vaut  $\pm 1$ . On peut aussi dire que soit  $\delta$  est nul, soit il vaut  $\pm 1$ .

La première partie du théorème est ainsi démontrée : en regardant chaque cas, on voit que si  $M_A$  admet un flot d'Anosov, soit  $\beta$  est nul, auquel cas  $|\alpha|$  vaut 1, soit  $\beta$  divise  $\alpha \pm 1$ , soit  $|\delta|$  vaut 1.

De plus, si on exclut les cas où  $|\alpha|$  ou  $|\delta|$  vaut 0 ou 1, seul le premier cas parmi les quatres précédents est possible. En d'autres termes, dans ce cas de figure tout flot sur la variété est un exemple de Handel-Thurston généralisé.

Nous n'avons plus qu'à traiter la dernière affirmation du théorème, *i.e.* le cas

- $|\alpha| \neq 0, 1$ ;
- $\alpha + \delta = 0$ ;
- $\beta$  divise  $\alpha - \epsilon$ .

Notons alors que  $|\delta| \neq 0, 1$  puisque  $\delta = -\alpha$ . Dans ce cas, tout flot d'Anosov sur  $M_A$  est un exemple de Handel-Thurston généralisé. De plus,

$$\alpha + k_2\beta = \epsilon.$$

En inversant  $A$  et en échangeant les indices 1 et 2 :

$$-\delta + k_1\beta = \epsilon.$$

Comme  $\alpha = -\delta$ , et comme  $\beta$  est non nul, on en déduit que les entiers  $k_1$  et  $k_2$  sont égaux.

Soit  $c_0$  une des orbites périodiques contenues dans  $T_A$ . On peut la choisir de sorte qu'elle représente l'élément  $s_1 h_1^{k_1}$  de  $H$ . Son nombre d'intersection dans  $T_A$  avec  $h_1$  est, au signe près  $k_1$ , et son nombre d'intersection avec  $h_2$  est  $k_2 = k_1$ . Ainsi, en effectuant une chirurgie de Dehn-Goodman adéquate, on peut se ramener à une variété  $M_{A'}$  qui fibre en cercles sur la surface orientable  $\Sigma$  de genre 2. La matrice

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

s'obtient à partir de  $A$  par multiplication à droite par un twist de Dehn le long de  $c_0$ , *i.e.* par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 - k_1 p & p \\ -p k_1^2 & 1 + k_1 p \end{pmatrix}$$

où  $p$  est l'ordre de la chirurgie de Dehn effectuée le long de  $c_0$ .

La variété  $M_{A'}$  est un fibré en cercles sur  $\Sigma$  et admet un flot d'Anosov. D'après le théorème 4.9, elle doit être un revêtement fini du fibré unitaire tangent à  $\Sigma$ . Or, la caractéristique d'Euler de  $\Sigma$  est  $-2$ . Donc, l'indice de ce revêtement doit diviser  $2$ , *i.e.* être égal à  $1$  ou  $2$ ; nous notons  $\eta$  cet indice. La matrice  $A'$  est donc de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon' \times 2/\eta \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix}$$

où  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  valent  $\pm 1$ .

De plus, le flot sur  $M_{A'}$  est un revêtement d'indice  $\eta$  du flot géodésique de  $\Sigma$ . On en déduit que l'entier  $k_1$  vaut  $\pm\eta$ . Sachant que  $A'$  envoie  $(1, k_1)$  sur lui-même ou son opposé, on voit que  $k_1$  vaut plus précisément  $-\epsilon\epsilon'\eta$ .

Donc,  $A$  est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon - \epsilon' p\eta & -p\epsilon + \epsilon' \times 2/\eta \\ \epsilon p\eta^2 & -\epsilon + \epsilon' p\eta \end{pmatrix}.$$

Ceci montre comme voulu que  $A$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} \epsilon + \beta\eta\epsilon' & \beta \\ -\beta\eta^2 - 2\eta\epsilon\epsilon' & -\epsilon - \epsilon'\eta\beta \end{pmatrix}$$

où  $\eta$  vaut  $1$  ou  $2$  et où  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  valent  $\pm 1$ .

Comme dernière remarque, il convient de signaler que le théorème C est loin d'être optimal. Nous ne savons pas encore à vrai dire si tout flot d'Anosov sur une variété  $M_A$  est un exemple de Handel-Thurston au sens de [23] ou non. Notons aussi que les techniques que nous avons mises en oeuvre sont susceptibles d'être employées dans un cadre plus général. Nous n'avons pas cherché à atteindre le plus haut degré de généralité : ceci serait vain tant que l'existence éventuelle d'exemples de Handel-Thurston généralisés qui ne sont pas au sens de [23] n'est pas éclaircie.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.V. ANOSOV, Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature, Proc. Steklov Inst. Math., AMS Translations (1969).
- [2] T. BARBOT, Géométrie transverse des flots d'Anosov, Thèse (1992).
- [3] T. BARBOT, Caractérisation des flots d'Anosov en dimension 3 par leurs feuillages faibles, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 15 (1995), 247–270.

- [4] T. BARBOT, Mise en position optimale de tores par rapport à un flot d'Anosov, *Comment. Math. Helv.*, 70 (1995), 113–160.
- [5] T. BARBOT, Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen, I : Morceaux fibrés de biseuilletages d'Anosov, prépublication Université de Bourgogne, (1994).
- [6] T. BARBOT, Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen, II : Caractérisation des exemples de Handel-Thurston, prépublication Université de Bourgogne, (1994).
- [7] A.F. BEARDON, *The geometry of discrete groups*, Springer-Verlag, 91 (1983).
- [8] C. BONATTI et R. Langevin, Un exemple de flot d'Anosov transitif transverse à un tore et non conjugué à une suspension, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 14 (1994), 633–643.
- [9] R. BOWEN, On Axiom A diffeomorphisms, *A.M.S. Providence*, 35 (1970).
- [10] M. BRUNELLA, On the discrete Godbillon-Vey invariant and Dehn surgery on geodesic flows, *Ann. Fac. Sciences de Toulouse*, 3 (1994), 335–344.
- [11] A. CASSON et D. Jungreis, Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds, *Invent. Math.*, 118 (1994), 441–456.
- [12] S.R. FENLEY, Anosov flows in 3-manifolds, *Ann. of Math.*, 139 (1994), 79–115.
- [13] S.R. FENLEY, Quasigeodesic Anosov flows and homotopic properties of flow lines, *Jour. Diff. Geom.*, 41 (1995), 479–514.
- [14] S.R. FENLEY, The structure of branching in Anosov flows of 3-manifolds, preprint.
- [15] J. FRANKS et R. Williams, Anomalous Anosov flows, *Global theory of dynamical systems*, Springer Lectures Notes 819, Springer-Verlag, New York (1980).
- [16] D. FRIED, Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps, *Topology*, 22 (1983), 299–304.
- [17] D. GABAI, Convergence groups are Fuchsian groups, *Ann. of Math.*, 136 (1992), 447–510.
- [18] E. GHYS, Flots d'Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 4 (1984), 67–80.
- [19] S. GOODMAN, Dehn surgery on Anosov flows, *Springer Lectures Notes 1007*, Springer, New York (1983).
- [20] M. GROMOV, Hyperbolic groups, in 'Essays in group theory', édité par S.M. Gersten, M.S.R.I. Publ. 8, Springer, (1987), 75–263.
- [21] M. GROMOV, Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group, texte non publié, S.U.N.Y., vers 1977.
- [22] A. HAEFLIGER, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, *Astérisque*, 116 (1984), 70–97.
- [23] M. HANDEL and W. THURSTON, Anosov flows on new 3-manifolds, *Inv. Math.*, 59 (1980), 95–103.
- [24] G. HECTOR and U. HIRSCH, Geometry of foliations, part B, *Aspects of Math.*, (1987), second edition.
- [25] J. HEMPEL, 3-manifolds, *Ann. of Math Studies 86*.
- [26] W. JACO, Lectures on three manifold topology, *C.B.M.S. Regional Conference Series in Mathematics 43*.

- [27] S. MATSUMOTO, Codimension one foliations on solvable manifolds, *Comment. Math. Helv.*, 68 (1993), 633–652.
- [28] G. MESS, Centers of 3–manifolds groups and groups which are coarse quasi isometric to planes, preprint.
- [29] C.F.B. PALMEIRA, Open manifolds foliated by planes, *Ann. of Math.*, 107 (1978), 109–131.
- [30] J.F. PLANTE, Anosov flows, transversely affine foliations, and a conjecture of Verjovsky, *J. London Math. Soc.* (2), 23 (1981), 359–362.
- [31] J.F. PLANTE, Solvable groups acting on the line, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 278 (1983), 401–414.
- [32] J.F. PLANTE et W.P. THURSTON, Anosov flows and the fundamental group, *Topology*, 11 (1972), 147–150.
- [33] P. SCOTT, Strong annulus and torus theorem and the enclosing property of characteristic submanifolds of 3–manifolds, *Quat. J. Math.*, 35 (1984), 485–506.
- [34] P. SCOTT, There are no fake Seifert fibered spaces with infinite  $\pi_1$ , *Ann. of Math.*, 117 (1983), 35–70.
- [35] J.-P. SERRE, Arbres, amalgames,  $SL_2$ , *Astérisque*, 46 (1977).
- [36] W.P. THURSTON, The geometry and topology of 3–manifolds, chap. 13, *Princeton Lect. Notes* (1977).
- [37] F. WALDHAUSEN, Eine Klasse von 3–dimensionalen Mannigfaltigkeiten, I, *Invent. Math.*, 3 (1967), 308–333.
- [38] F. WALDHAUSEN, Eine Klasse von 3–dimensionalen Mannigfaltigkeiten, II, *Invent. Math.*, 4 (1967), 87–117.
- [39] F. WALDHAUSEN, On irreducible 3–manifolds which are sufficiently large, *Ann. of Math.*, 87, 56–88.

Manuscrit reçu le 29 mai 1995,  
accepté le 29 mars 1996.

Thierry BARBOT,  
Université de Bourgogne  
Laboratoire de Topologie  
UHR 5584  
21004 Dijon Cedex (France).  
tbarbot@satie.u-bourgogne.fr