ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARTIN TRAIZET

Construction de surfaces minimales en recollant des surfaces de Scherk

Annales de l'institut Fourier, tome 46, nº 5 (1996), p. 1385-1442

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_5_1385_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
46, 5 (1996), 1385–1442

CONSTRUCTION DE SURFACES MINIMALES EN RECOLLANT DES SURFACES DE SCHERK

par
Martin TRAIZET

1. Introduction.

1.1. Résultats.

Jusqu'en 1982, les seuls exemples connus de surfaces minimales complètes plongées dans $\mathbb{R}^3$ nous venaient du siècle dernier : le plan, la caténoïde, et des surfaces périodiques (c'est-à-dire invariantes par un groupe non trivial d'isométries agissant librement sur $\mathbb{R}^3$) : l'hélicoïde, les surfaces de Scherk, les surfaces de Schwartz... En 1982, C. Costa a construit une surface minimale complète de courbure totale $\int K = -12\pi$, modelée sur un tore moins trois points. D. Hoffman et W. Meeks ont montré plus tard que cette surface était plongée. Depuis, d'autres exemples de surfaces minimales de courbure totale finie ont été construits, ainsi que de nombreux exemples de surfaces périodiques (voir [11]).

Tous ces exemples sont construits en utilisant soit la représentation de Weierstrass, soit la méthode de Plateau (voir [7]). L'inconvénient de ces méthodes est qu'on a à résoudre un *problème de périodes*. En général, on impose des symétries pour réduire le nombre de périodes. Ainsi, tous les exemples de genre élevé connus ont beaucoup de symétries. Par exemple, la surface de Costa Hoffman Meeks de genre $k \geq 1$ a $k+1$ plans de symétrie verticaux.

Cette situation contraste avec le cas des surfaces de courbure moyenne constante positive : Kapouleas a construit des exemples de surfaces à $H = 1$ de genre arbitrairement grand et sans symétries [5]. Dans cet article, on utilise les techniques de Kapouleas pour construire des surfaces minimales simplement périodiques, sans avoir à résoudre de problème de périodes.

Mots-clés : Surface minimales – Désingularisation.
Classification math. : 53A10.

THÉORÈME 1.1. — *Il existe des surfaces minimales complètes plongées dans $\mathbb{R}^3$, simplement périodiques (c'est-à-dire invariantes par une translation verticale T), de genre (dans le quotient par T) arbitrairement grand, et dont le groupe de symétrie (dans le quotient) est $\mathbb{Z}_2$ agissant par la symétrie σ par rapport au plan $x_3 = 0$.*

Ce résultat est un corollaire du théorème 1.2 ci-dessous, qui permet de *désingulariser* des plans, au sens heuristique suivant : on prend un ensemble Π fini de plans verticaux; on cherche une surface minimale qui soit proche de Π, sauf au voisinage des intersection entre deux plans, où elle est proche d'une *surface de Scherk* de très petite période (la même période pour chaque intersection).

J'appelle *surface de Scherk* tout élément de la famille des surfaces minimales simplement périodiques de genre 0 avec quatre bouts de type Scherk (c'est-à-dire asymptotes à des demi-plans verticaux).

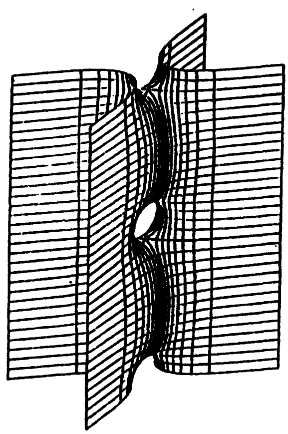

Figure 1 : Une surface de Scherk.

THÉORÈME 1.2. — *Soit Π un ensemble fini de plans verticaux distincts, tels que trois plans ne se coupent jamais en un même point. Je note Γ l'intersection de Π avec le plan horizontal $x_3 = 0$. Pour tout $t > 0$ assez petit, il existe une surface minimale M_t complète, simplement périodique de période verticale $T = (0, 0, t)$, telle que :*

- *M_t converge vers Π sur les compacts de $\mathbb{R}^3$ quand t tend vers zéro (la convergence est pour la distance entre compacts).*

• *Le quotient M_t/T est de courbure totale finie, avec des bouts de type Scherk. En outre, le quotient M_t/T est homéomorphe au bord d'un voisinage tubulaire de Γ dans $\mathbb{R}^3$.*

• *M_t est invariante par la symétrie σ par rapport au plan horizontal $x_3 = 0$.*

• *Si Π ne contient pas deux plans parallèles, M_t est plongée.*

Quelques commentaires. — L'intersection Γ est un graphe, avec des sommets à l'intersection de deux plans, des arêtes (segments de longueur finie) et des rayons (demi-droites de $\mathbb{R}^2$). Lors de la construction, on est amené à déformer Γ en perturbant la direction des rayons. Si Γ contient deux rayons parallèles qui pointent dans la même direction, les rayons correspondants du graphe déformé risquent de se couper, et dans ce cas la surface construite ne sera pas plongée. Ceci explique la dernière assertion du théorème.

Le genre de la surface obtenue est égal au nombre de composantes bornées de $\mathbb{R}^2 - \Gamma$. Si Π ne contient pas deux plans parallèles, le genre ne dépend pas de la position des plans, et est égal à $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, où n est le nombre de plans de Π.

Si Γ n'a aucune symétrie, pour t assez petit, on est sûr que M_t n'aura pas d'autre symétrie que σ.

Remarque. — Tous les exemples connus de surfaces minimales simplement périodiques plongées avec des bouts de type Scherk ont un plan horizontal de symétrie. Le problème de savoir si cette symétrie est nécessaire est intéressant et ouvert (même en genre zéro si il y a plus de six bouts).

Remerciements. — Je remercie mon directeur de thèse Harold Rosenberg pour m'avoir proposé ce problème, et pour de nombreuses discussions sur le sujet. Ses critiques ont beaucoup amélioré la qualité de la rédaction.

Je remercie David Hoffman de m'avoir invité de septembre 92 à mars 94 au G.A.N.G, Amherst, Massachussets, USA, où j'ai appris à construire des surfaces minimales avec les méthodes classiques.

Merci aussi à Joel Spruck qui a répondu à certaines questions.

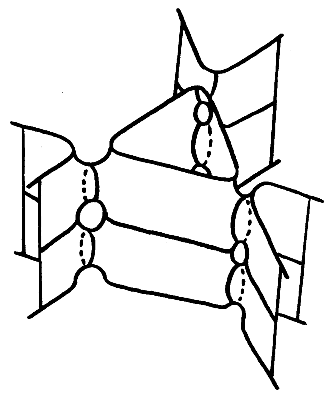

Figure 2 : La surface que l'on obtient dans le cas de trois plans.

1.2. Idée de la preuve du théorème 1.2.

Dans cette section, j'explique de façon informelle la construction, en l'illustrant sur l'exemple le plus simple non trivial : celui de trois plans verticaux qui se coupent selon un triangle. À noter que dans le cas d'un triangle équilatéral, la famille de surfaces qu'on obtient peut être construite au moyen de la représentation de Weierstrass, mais on a à résoudre un problème de périodes [6].

Soit Γ le graphe égal à l'intersection de l'ensemble des trois plans verticaux avec le plan horizontal $x_3 = 0$. Il a trois sommets, trois arêtes et six rayons. Pour $t > 0$ assez petit, on veut construire une surface minimale de période t «basée» sur Γ. Il est plus commode de travailler avec des surfaces de période 2π que t. Ainsi par exemple, la seconde forme fondamentale A sera bornée indépendamment de t.

Soit donc $\widehat{\Gamma}$ l'image de Γ par l'homothétie de rapport $2\pi/t$. On cherche maintenant à construire une surface minimale de période 2π basée sur $\widehat{\Gamma}$. Il suffira de faire l'homothétie inverse — ce qui préserve le fait d'être minimal — pour obtenir la surface voulue.

On construit une *surface initiale* simplement périodique de période 2π, symétrique par rapport au plan horizontal, en recollant trois surfaces de Scherk de période 2π, comme illustré sur la figure 3.

On place les surfaces de Scherk de façon à ce que les bouts que l'on recolle aient le même demi-plan asymptote. Comme les demi-plans

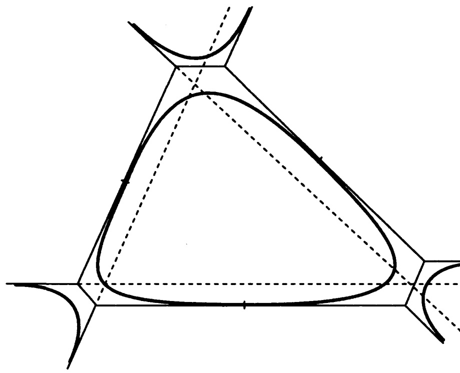

Figure 3. Les arêtes et les rayons de $\widehat{\Gamma}$ sont représentés en pointillés. Les surfaces de Scherk et les demi-plans asymptotes de leurs bouts sont représentés en traits pleins.

asymptotes des bouts d'une surface de Scherk ne passent pas par son « centre » — sauf dans le cas où ils sont perpendiculaires — on ne peut en général pas placer les centres des surfaces de Scherk aux sommets de $\widehat{\Gamma}$.

Plus t est petit, plus les surfaces de Scherk sont proches de leur demi-plan asymptote là où on les recolle, donc plus la courbure moyenne sera petite.

On note M le quotient de la surface initiale par T, la translation verticale de 2π. Notons $X : M \to \mathbb{R}^3/T$ l'immersion et $\nu : M \to S^2$ la normale. On cherche à déformer X en une surface minimale en faisant une petite perturbation normale, c'est-à-dire qu'on cherche $\varphi : M \to \mathbb{R}$ telle que $X_\varphi = X + \varphi\nu$ soit minimale. La courbure moyenne H_φ de X_φ s'écrit

$$2H_\varphi = 2H + \Delta\varphi + |A|^2\varphi + Q_\varphi$$

où Q_φ est quadratique (au moins) en φ, $\mathrm{d}\varphi$ et $D^2\varphi$ et où

$$|A|^2 = 4H^2 - 2K$$

est la norme de la seconde forme fondamentale de X. Posons :

$$\mathcal{L}\varphi = \Delta\varphi + |A|^2\varphi.$$

Alors

$$H_\varphi = 0 \iff \mathcal{L}\varphi = -2H - Q_\varphi. \tag{1}$$

On compactifie M de la façon suivante. Notons p_1, p_2, p_3 les sommets de Γ et g la métrique de la surface initiale. La surface M privée d'un voisinage convenable du milieu des arêtes est l'union de trois surfaces de Scherk auxquelles on a tronqué deux bouts. Je les note $M[p_1]$, $M[p_2]$ et $M[p_3]$.

On remarque que dans le quotient par T, une surface de Scherk munie de la métrique $h = \frac{1}{2}|A|^2 g$ est isométrique (par la normale ν) à une sphère ronde privée de quatre points (les bouts). Donc chaque $M[p_i]$ munie de la métrique $h = \frac{1}{2}|A|^2 g$ est isométrique (par ν) à une sphère ronde privée de deux points et de deux petits disques. On compactifie $(M[p_i], h)$ en rajoutant ces deux points.

La surface $M - \bigcup M[p_i]$ est l'union de trois domaines très plats, topologiquement des cylindres (dans le quotient). Sur ces domaines, la métrique $\frac{1}{2}|A|^2 g$ est singulière car il y a des points où $|A| = 0$. On prend $h = \eta^2 g$ pour une fonction $\eta^2 \geq \frac{1}{2}|A|^2$ convenable. Pour l'instant, il me suffit de dire que le h-volume de $M - \bigcup M[p_i]$ sera petit si t est petit, ce qui fait que (M, h) ressemble à trois sphères rondes reliées par trois petits *cous.*

Posons :

$$\mathcal{L}_h\varphi = \eta^{-2}\mathcal{L}\varphi.$$

En utilisant $\Delta_h = \eta^{-2}\Delta$, on a :

$$\mathcal{L}_h\varphi = \Delta_h\varphi + |A|^2\eta^{-2}\varphi.$$

D'après (1),

$$H_\varphi = 0 \iff \mathcal{L}_h\varphi = \frac{-2H}{\eta^2} - \frac{Q_\varphi}{\eta^2}. \tag{2}$$

$\mathcal{L}_h$ est un opérateur elliptique auto-adjoint sur (M, h) compacte. Par l'alternative de Fredholm, l'équation $\mathcal{L}_h u = f$ a une solution si et seulement si f est perpendiculaire au sens $L^2(h)$ à $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_h$.

On appelle *noyau approché* de $\mathcal{L}_h$, noté $\mathcal{K}$, l'espace engendré par les fonctions propres associées aux valeurs propres de $\mathcal{L}_h$ qui sont dans $[-1, 1]$.

Clairement $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_h \subset \mathcal{K}$. On note $\mathcal{P}$ la projection de $L^2(M, h)$ sur $\mathcal{K}$.

Pour toute fonction φ de classe suffisante, soit u la solution de l'équation linéaire

$$\mathcal{L}_h u = f - \mathcal{P}(f), \quad f = \frac{-2H}{\eta^2} - \frac{Q_\varphi}{\eta^2}.$$

D'après (2),

$$H_\varphi = 0 \iff \begin{cases} u = \varphi, \\ \mathcal{P}(f) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Les résultats de l'appendice B de Kapouleas [5] permettent d'obtenir une base suffisamment explicite du noyau approché $\mathcal{K}$.

Soit $\nu_{p_i,j}$ la fonction sur M qui est la j-ième coordonnée de la normale sur $M[p_i]$ et 0 sur $M - M[p_i]$. Pour tout $\epsilon > 0$, si t est assez petit, il existe une base $\{e_{p_i,j}\}$ de $\mathcal{K}$ pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3$ telle que

$$\forall i, j, \quad \|e_{p_i,j} - \nu_{p_i,j}\|_{L^2(h)} \le \epsilon.$$

Heuristiquement, ceci s'explique de la façon suivante. Comme le h-volume des cous est petit, le spectre de $\mathcal{L}_h$ sur M est proche de celui sur l'union disjointe des $M[p_i]$. Sur chaque $M[p_i]$, on a $\mathcal{L}_h = \Delta_h + 2$, et $M[p_i]$ est proche d'être isométrique à une sphère ronde. Le noyau approché de $\Delta + 2$ sur la sphère ronde est égal au noyau ; une base en est donnée par les trois fonctions coordonnées. En les transportant sur $M[p_i]$ par ν, on obtient les fonctions $\nu_{p_i,j}$.

La fonction f est perpendiculaire à $\mathcal{K}$ si et seulement si pour tout i, j, on a $\langle f, e_{p_i,j}\rangle = 0$. En notant $e_{p_i} = (e_{p_i,1}, e_{p_i,2}, e_{p_i,3})$, on a :

$$\langle f, e_{p_i}\rangle = \left\langle \frac{-2H}{\eta^2}, \nu_{p_i}\right\rangle + \left\langle \frac{-Q_\varphi}{\eta^2}, \nu_{p_i}\right\rangle + \langle f, e_{p_i} - \nu_{p_i}\rangle.$$

Le premier terme a une signification géométrique (flux).

$$\left\langle \frac{2H}{\eta^2}, \nu_{p_i}\right\rangle = \int_{M[p_i]} \frac{2H}{\eta^2}\nu \,\mathrm{d}h = \int_{M[p_i]} 2H\nu \,\mathrm{d}g.$$

L'idée est de modifier la construction de la surface initiale de façon à prescrire le flux $\int_{M[p_i]} 2H\nu\,\mathrm{d}g$ en chaque sommet. Ceci est fait de la façon suivante.

Si on a une surface D immergée dans $\mathbb{R}^3/T$ telle que $H = 0$ en dehors d'un compact, avec des bouts de type Scherk, alors le flux $\int_D 2H\nu\,\mathrm{d}g$ est égal à 2π fois la somme des vecteurs directeurs (unitaires) des bouts. C'est la formule du flux, ou « balancing formula ». Donc, en courbant les bouts d'une surface de Scherk — ce qui crée de la courbure moyenne — on peut prescrire le flux de la surface obtenue.

Pour tous vecteurs $\xi(p_1)$, $\xi(p_2)$ et $\xi(p_3)$ assez petits, on construit une surface initiale $M(\xi)$ en recollant trois surfaces de Scherk dont on a perturbé la direction des bouts, de façon à ce que pour chaque sommet, $\int_{M[p_i]} 2H\nu\,\mathrm{d}g = \xi(p_i)$. Dans le cas où il n'y a que trois sommets, il suffit de courber les bouts correspondant aux rayons de Γ. Dans le cas général, il faudra aussi courber ceux correspondant aux arêtes, et donc perturber la position des surfaces de Scherk.

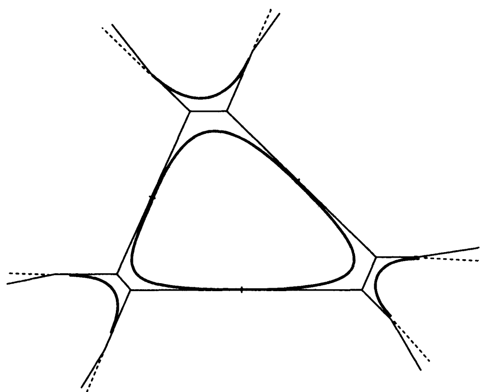

Figure 4. Les demi-plans asymptotes des bouts des surfaces de Scherk non perturbées sont représentés en pointillés. Les demi-plans asymptotes des bouts des surfaces de Scherk perturbées sont représentés en traits pleins.

On note

$$\zeta(p_i) = \left\langle \frac{-Q_\varphi}{\eta^2}, \nu_{p_i} \right\rangle + \langle f, e_{p_i} - \nu_{p_i} \rangle,$$

de sorte que $\langle f, e_{p_i} \rangle = \zeta(p_i) - \xi(p_i)$. D'après (3), on a :

$$H_\varphi = 0 \iff \begin{cases} u = \varphi, \\ \zeta = \xi, \end{cases}$$

c'est-à-dire que l'on cherche un point fixe de l'opérateur $\mathcal{F}(\xi, \varphi) = (\zeta, u)$. Soit :

$$\mathcal{C} = \left\{ (\xi, \varphi)\,;\ |\xi| \leq C_1,\ \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}} \leq C_2 \right\}$$

pour des constantes C_1, C_2 convenables telles que $C_2^2 \ll C_1 \ll C_2 \ll 1$. L'essentiel du travail consistera à estimer ζ et u pour montrer que

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}.$$

Le théorème du point fixe de Schauder nous donne alors un point fixe de $\mathcal{F}$. Sans rentrer dans les détails, là où on courbe les bouts, la courbure moyenne H est de l'ordre de C_1 ; là où on recolle les surfaces de Scherk, H est inférieure à C_1 en prenant t assez petit. Comme Q_φ est quadratique, Q_φ est de l'ordre de C_2^2. Donc f est de l'ordre de $C_1 + C_2^2 \approx C_1$ et en utilisant des estimées classiques pour les équations linéaires elliptiques, u est de l'ordre de $C_1 \ll C_2$. Donc ζ est de l'ordre de $\epsilon C_1 + C_2^2 \leq C_1$ si ϵ est assez petit.

Remarque. — En courbant les bouts des surfaces de Scherk, on doit laisser leurs demi-plans asymptotes verticaux, sinon la surface initiale ne serait pas périodique. On ne peut donc prescrire qu'un flux horizontal, ce qui oblige à prendre des vecteurs $\xi(p_i)$ horizontaux. Pour que $\zeta(p_i)$ soit horizontal, on impose à toute la construction d'être symétrique par rapport au plan horizontal $x_3 = 0$, ce qui explique les symétries des surfaces que l'on obtient.

1.3. Conventions.

On note :

$$\tau = \exp(-2t/\pi).$$

Ce paramètre est plus naturel que le paramètre t du théorème 1.2 car la courbure des surfaces de Scherk décroît exponentiellement aux bouts.

Une quantité est dite *uniforme* si elle ne dépend pas des paramètres de la construction, c'est-à-dire τ, φ et ξ.

Sauf mention contraire, dans une équation, C désigne une constante uniforme. La même lettre C peut désigner des constantes différentes. Autant que possible, j'ai essayé de garder les notations de Kapouleas [5].

Dans toute la construction, $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$ est une fonction C^∞ croissante fixée qui vaut 0 si $x \leq 0$ et 1 si $x \geq 1$, telle que

$$\psi(1-x) = 1 - \psi(x).$$

1.4. Organisation de cet article.

Dans la partie 2, je donne les détails de la construction de la surface initiale, j'estime sa courbure moyenne, je définis les métrique h et χ et j'estime la constante de Sobolev de la métrique h et la constante de Schauder de la métrique χ.

Dans la partie 3, je construit une base suffisamment explicite du noyau approché.

Dans la partie 4, j'obtiens la délicate estimée $C^{2,\alpha}$ pour le terme quadratique.

Dans la partie 5, j'applique le théorème du point fixe de Schauder pour trouver ξ et φ.

2. La surface initiale.

2.1. Les surfaces de Scherk.

À rotation, translation et homothétie près, elles forment une famille à un paramètre $\alpha \in]0, \frac{1}{2}\pi[$. La surface de Scherk de paramètre α est paramétrée sur $M = \mathbb{C} \cup \infty - \{\pm e^{\pm i\alpha}\}$ par sa représentation de Weierstrass (voir Karcher [7], section 2.3.4 ou [6]) :

$$X_\alpha(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \Big(\tfrac{1}{2}(g^{-1} - g)\, dh,\, \tfrac{1}{2}i(g^{-1} + g)\, dh,\, dh\Big) : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

avec

$$\begin{aligned} g(z) &= z \\ dh &= \Big(\frac{1}{z + e^{i\alpha}} + \frac{1}{z - e^{i\alpha}} - \frac{1}{z + e^{-i\alpha}} - \frac{1}{z - e^{-i\alpha}}\Big) i\, dz. \end{aligned}$$

Comme la partie réelle du résidu de l'intégrant aux points $\pm e^{\pm i\alpha}$ est égale à $(0, 0, \pm 2\pi)$, l'application $X_\alpha : M \to \mathbb{R}^3/T$ est bien définie si T est la translation de $(0, 0, 2\pi)$.

Les surfaces de Scherk ont les propriétés suivantes, qui sont immédiates pour qui a l'habitude de la représentation de Weierstrass (voir Karcher [7], section 2.3.4) :

(1) X_α est une surface minimale complète plongée, avec quatre bouts de type Scherk. La normale aux demi-plans asymptotes des bouts est $(\pm \cos\alpha, \pm \sin\alpha, 0)$.

(2) La normale ν envoie bijectivement M sur S^2 moins les quatre points $(\pm \cos\alpha, \pm \sin\alpha, 0)$.

(3) À une translation de $\mathbb{R}^3$ près, les surfaces de Scherk sont symétriques par rapport aux plans $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_1 = 0$. Dans le domaine du paramétrage, ces symétries correspondent respectivement aux involutions

$z \mapsto 1/\bar{z}$, $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto -\bar{z}$. La surface de paramètre $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ a en plus les symétries par rapport aux droites $x_3 = \frac{1}{2}\pi$, $x_1 = \pm x_2$.

La seule symétrie dont on aura besoin ici est celle par rapport au plan horizontal $x_3 = 0$, que l'on note σ. À noter que dans le quotient $\mathbb{R}^3/T$, c'est la même que celle par rapport au plan $x_3 = \pi$.

Note historique. — Seule la surface de Scherk la plus symétrique, où $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, est due à Scherk (qui n'utilisait pas la représentation de Weierstrass). Le reste de la famille est du à Karcher [7].

On a besoin d'estimer la convergence des bouts vers leurs demi-plans asymptotes. Fixons un bout d'une surface de Scherk.

J'appelle *origine du demi-plan asymptote au bout* le point du plan horizontal qui est à l'intersection du demi-plan asymptote et d'un des deux plans verticaux de symétrie, comme sur la figure ci-dessous.

Je note (u, v, w) le système de coordonnées orthonormées de $\mathbb{R}^3$ tel que l'origine du demi-plan asymptote au bout est en $u = v = w = 0$, w est la coordonnée verticale, et le demi-plan asymptote au bout est $v = 0, u \geq 0$.

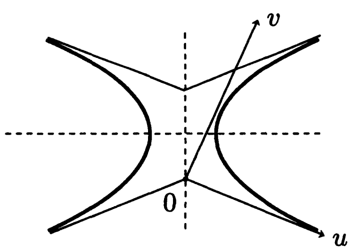

Figure 5. Les plans de symétrie verticaux sont représentés en pointillés, et les demi-plans asymptotes des bouts en traits pleins.

PROPOSITION 2.1. — *Si u est assez grand, le bout est le graphe sur le plan (u, w) d'une fonction f qui vérifie :*

$$|D^k f| \leq C(\alpha, k)\, \mathrm{e}^{-u}.$$

De plus la courbure au point de coordonnées (u, w) vérifie :

$$C^{-1}\, \mathrm{e}^{-2u} \leq \big|K(u, w)\big| \leq C\, \mathrm{e}^{-2u}$$

avec $C = C(\alpha)$.

Preuve. — Par symétrie, il suffit de considérer le bout $z = e^{i\alpha}$. On fait une rotation de la surface de sorte que $g = i$ au bout, c'est-à-dire qu'on prend $g = e^{i(\frac{1}{2}\pi - \alpha)}z$. Alors :

$$(u, v, w) = \operatorname{Re} \int \Big(\frac{1}{2}(g^{-1} - g)\, \mathrm{d}h,\ \frac{1}{2} i(g^{-1} + g)\, \mathrm{d}h,\ \mathrm{d}h \Big).$$

On fait le changement de coordonnée $z = e^{i\alpha}(1 + e^{-\omega})$, de sorte que le bout soit en $\omega = 0$. On obtient

$$g = i + e^{-\omega}, \quad \mathrm{d}h = -i\, \mathrm{dz} + \mathcal{O}(e^{-\omega}),$$

ce qui nous donne en notant $\omega = x + iy$

$$u = x + \mathcal{O}(e^{-x}), \quad v = e^{-x} \sin y + \mathcal{O}(e^{-2x}), \quad w = y + \mathcal{O}(e^{-x}),$$

où $\mathcal{O}(e^{-x})$ désigne une fonction analytique de (x, y) telle que ses dérivées d'ordre k sont bornées par $C(k)\, e^{-x}$. On en déduit le résultat voulu.

Pour la courbure, on utilise la formule générale [7], 1.4.3 :

$$K = \frac{-16}{(|g| + |g|^{-1})^4} \frac{|\,\mathrm{d}g/g|^2}{|\,\mathrm{d}h|^2}. \qquad \square$$

2.2. Configuration initiale.

Dans cette section, j'explique comment on positionne dans $\mathbb{R}^3$ les surfaces de Scherk qui vont servir à construire la surface initiale. On se fixe une fois pour toute un ensemble Π de plans comme dans le théorème 1.2. Le graphe Γ est l'intersection de Π avec le plan horizontal $x_3 = 0$. Je note :

- $V(\Gamma)$ l'ensemble des *sommets* de Γ (les points à l'intersection de deux droites) ;

- $E(\Gamma)$ l'ensemble des *arêtes* de Γ (les segments d'extrémités deux sommets, et qui ne rencontrent pas d'autre sommet) ;

- $R(\Gamma)$ l'ensemble des *rayons* de Γ (les demi-droites d'extrémité un sommet, et qui ne rencontrent pas d'autre sommet).

Sauf mention contraire, p désigne un sommet, e une arête et r un rayon de Γ. Pour chaque sommet p, il y a exactement quatre arêtes ou rayons d'extrémités p. À noter que Γ est *équilibré*, au sens où en chaque sommet p, la somme des vecteurs directeurs unitaires des arêtes et des rayons issus de p est nulle.

On note $\widehat{\Gamma}$ l'image de Γ par l'homothétie de rapport $4|\log\tau|$. Pour tout sommet p, rayon r ou arête e de Γ, on note $\hat{p}$, $\hat{r}$ et $\hat{e}$ les éléments correspondants du graphe $\widehat{\Gamma}$.

Pour tout sommet p de Γ, soit $S(p)$ la surface de Scherk dont les demi-plans asymptotes des bouts sont parallèles aux arêtes et rayons de Γ issus de p. À translation verticale de π près, $S(p)$ est uniquement déterminée par la position $\bar{p}$ de son *centre*, c'est-à-dire de l'intersection des deux plans de symétrie verticaux et d'un plan de symétrie horizontal.

On prend $\bar{p}$ sur le plan $x_3 = 0$, pour que $S(p)$ soit symétrique par rapport à ce plan. Comme il a été expliqué dans l'introduction, on ne peut en général pas prendre $\bar{p} = \hat{p}$. On doit aussi perturber la direction des bouts de $S(p)$ de façon à prescrire le flux. La notion de *configuration initiale* que j'introduis dans la définition ci-dessous contient toute l'information nécessaire à la construction de la surface initiale.

DÉFINITION 2.2. — *Une configuration initiale* $\bar{\Gamma}$ (*associée à* Γ) *est une application* $p \mapsto \bar{p}$, $r \mapsto \bar{r}$, $e \mapsto \bar{e}$ *telle que :*

- *Pour tout sommet* p, $\bar{p}$ *est un point de* $\mathbb{R}^2$.

- *Pour tout rayon* r *d'extrémité* p, $\bar{r}$ *est une demi-droite de* $\mathbb{R}^2$, *dont l'extrémité est l'origine du demi-plan asymptote au bout de* $S(p)$ *correspondant à* r (*c'est-à-dire pointant dans la même direction que* r). $S(p)$ *est la surface de Scherk dont les bouts sont parallèles aux arêtes et rayons de* Γ *issus de* p, *centrée en* $\bar{p}$.

- *Pour toute arête* e *d'extrémités* p_1 *et* p_2, $\bar{e}$ *est le segment de* $\mathbb{R}^2$ *d'extrémités les origines des demi-plans asymptotes aux bouts de* $S(p_1)$, $S(p_2)$ *correspondants à* e.

À noter que $S(p)$ n'est bien définie qu'à une translation verticale de π près. Mais la seule chose qui nous intéresse dans cette définition, c'est les demi-plans asymptotes de $S(p)$, et ils ne dépendent pas de la translation verticale.

À partir d'une configuration initiale, on construira dans la section 2.3 une *surface initiale* de la façon suivante.

Pour chaque rayon r d'extrémité p, on déforme le bout correspondant de $S(p)$ de sorte qu'il soit asymptote au plan vertical contenant $\bar{r}$. Pour chaque arête e d'extrémités p_1, p_2, on déforme les bouts correspondants de $S(p_1)$ et $S(p_2)$ de sorte qu'ils soient asymptotes au plan vertical

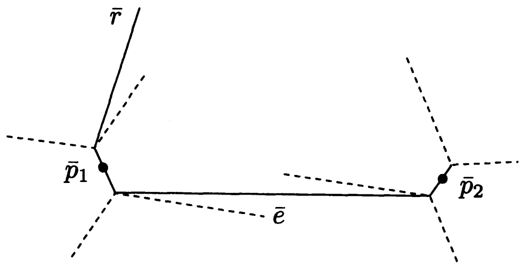

Figure 6. Les pointillés représentent les demi-plans asymptotes des surfaces $S(p_1)$ et $S(p_2)$.

contenant $\bar{e}$. Ensuite, on les recolle au milieu de $\bar{e}$. Comme ils sont asymptotes au même plan vertical, la courbure moyenne sera petite.

J'explique maintenant comment à chaque $\xi \in W(\Gamma)$ assez petit, on associe une configuration initiale (et donc une surface initiale). L'ensemble $W(\Gamma)$ est l'espace des applications de $V(\Gamma)$ dans $\mathbb{R}^2$, muni de la norme $|w| = \sup |w(p)|$.

Le *déséquilibre* $d_{\overline{\Gamma}} \in W(\Gamma)$ d'une configuration initiale $\overline{\Gamma}$ est défini de la façon suivante : pour tout sommet p, soit E_p l'ensemble des arêtes et des rayons partant de p. Si e est dans E_p, soit $\bar{v}_{p,e}$ le vecteur unité pointant dans la direction de $\bar{e}$. On définit :

$$d_{\overline{\Gamma}}(p) = \sum_{e \in E_p} \bar{v}_{p,e}. \tag{5}$$

La proposition suivante permet d'associer à chaque $\xi \in W(\Gamma)$ assez petit une configuration initiale dont le déséquilibre est ξ, et dont les sommets $\bar{p}$ sont « proches » des $\hat{p}$.

PROPOSITION 2.3 (flexibilité). — *Il existe une constante T (dépendant de Γ) telle que si $\tau \leq T$, pour tout $\xi \in W(\Gamma)$ tel que $|\xi| \leq \tau$, il existe une configuration initiale $\overline{\Gamma}$, dépendant continûment de ξ, telle que*

$$\forall p \in V(\Gamma) \quad d_{\overline{\Gamma}}(p) = \xi(p).$$

Il existe une constante C indépendante de ξ et τ (dépendant de Γ) telle que pour tout sommet p et toute arête ou rayon e,

$$|\hat{p} - \bar{p}| \leq C \qquad \left|\angle(\hat{e}, \bar{e})\right| \leq C|\xi|$$

(à gauche il s'agit de la distance entre ces deux points dans $\mathbb{R}^2$; à droite c'est l'angle entre les directions de $\hat{e}$ et de $\bar{e}$.

Preuve. — L'argument général exposé en 3) ne dépendra pas des cas particuliers 1) et 2), mais ceux-ci aident à comprendre la démonstration.

1) Commençons par le cas le plus simple où Γ est la réunion de deux droites, c'est-à-dire que Γ a un sommet p et quatre rayons r_1, r_2, r_3, r_4 tels que r_1, r_3 sont parallèles et r_2, r_4 aussi.

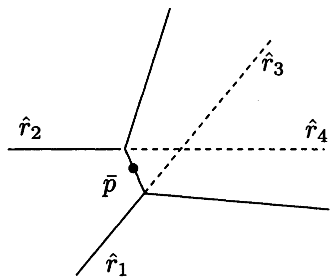

Figure 7. Les pointillés représentent $\widehat{\Gamma}$. Les traits pleins représentent $\overline{\Gamma}$.

J'appelle *support d'une arête ou d'un rayon* la droite de $\mathbb{R}^2$ qui le contient. On décide que les supports de $\bar{r}_1$ et $\bar{r}_2$ seront les supports de $\hat{r}_1$ et $\hat{r}_2$. Alors la position de $\bar{p}$ est uniquement déterminée par la condition que les bouts de $S(p)$ correspondant à r_1 et r_2 soient asymptotes aux plans verticaux contenant $\bar{r}_1$ et $\bar{r}_2$. Ceci détermine complètement les rayons $\bar{r}_1$ et $\bar{r}_2$, et les extrémités de $\bar{r}_3$ et $\bar{r}_4$. Ensuite la direction de $\bar{r}_3$ et $\bar{r}_4$ est uniquement déterminée par $\xi(p)$: posons $v_i = \bar{v}_{p,r_i}$. On veut

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \xi(p).$$

Cette équation a une unique solution (v_3, v_4) si $|v_1 + v_2 - \xi(p)| < 2$. Comme $|v_1 + v_2| < 2$, il suffit de prendre $\xi(p)$ assez petit.

2) Passons au cas ou Γ est la réunion de trois droites, comme dans l'introduction (voir figure 8).

On décide que les supports de $\bar{r}_1$ et $\bar{r}_2$ seront les mêmes que ceux de $\hat{r}_1$ et $\hat{r}_2$ respectivement. Ceci détermine la position de $\bar{p}_1$. Ensuite $\xi(p_1)$ détermine les supports de $\bar{e}_1$ et $\bar{e}_3$. On décide que le support de $\bar{r}_3$ sera celui de $\hat{r}_3$. Ceci détermine la position de $\bar{p}_2$. Puis les supports de $\bar{r}_4$ et $\bar{e}_2$ sont déterminés par $\xi(p_2)$. Ensuite, les supports de $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ déterminent la position de $\bar{p}_3$. Enfin, la direction des rayons $\bar{r}_5$ et $\bar{r}_6$ est déterminée par $\xi(p_3)$.

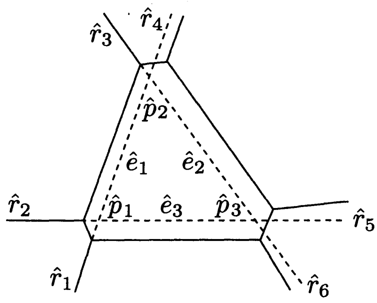

Figure 8. Les pointillés représentent $\widehat{\Gamma}$. Les traits pleins représentent $\overline{\Gamma}$.

3) On utilise le même algorithme dans le cas général. Le seul problème est de trouver dans quel ordre on doit déterminer la position des $\bar{p}$ pour que l'algorithme aboutisse.

Soit $y(p)$ la coordonnée y de $p \in V(\Gamma)$. En tournant Γ, on peut supposer que tous les $y(p)$ sont différents. L'idée est d'équilibrer aux sommets p par $y(p)$ croissante. Par équilibrer en p, je veux dire qu'on fixe la position de $\bar{p}$ et des supports des arêtes ou rayons $\bar{e}$ pour e issu de p. Alors pour chaque sommet p :

(a) Si il existe deux arêtes ou rayons e_1, $e_2 \in E_p$, tels que e_1 et e_2 ne soient pas parallèles, et que les supports de $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ n'aient pas encore été fixés. Soient e_3, e_4 les autres arêtes ou rayons qui partent de p. Si les supports de $\bar{e}_3$ ou $\bar{e}_4$ n'ont pas encore été fixés, on décide qu'ils coïncideront avec ceux de $\hat{e}_3$, $\hat{e}_4$. Les supports de $\bar{e}_3$ et $\bar{e}_4$ déterminent la position de $\bar{p}$. Ensuite, $\xi(p)$ détermine les supports de $\bar{e}_1$ et $\bar{e}_2$.

(b) Sinon, c'est qu'il existe deux arêtes ou rayons $e_1, e_2 \in E_p$, parallèles, telles que les supports de $\bar{e}_1$ et $\bar{e}_2$ aient déjà été fixés. Montrons que ce n'est pas possible. Clairement e_1 et e_2 doivent être des arêtes. Soient p_1, p_2 les extrémités des arêtes e_1, e_2. Alors p_1, p, p_2 sont alignés dans cet ordre sur une droite, donc $y(p_1) < y(p) < y(p_2)$ (ou l'inverse), donc on aurait du équilibrer en p avant p_2 (ou p_1).

À noter que pour toute arête ou rayon e, la direction de $\bar{e}$ ne dépend que de ξ, et pas de τ. En particulier, si $\xi \equiv 0$, $\bar{e}$ est parallèle à $\hat{e}$. Comme $\angle(\hat{e}, \bar{e})$ dépend C^1 (et même C^∞) de ξ, on obtient l'estimée voulue pour $\angle(\hat{e}, \bar{e})$.

Soit p un sommet, et e_1 et e_2 deux arêtes ou rayons issus de p tels que dans l'algorithme, la position de $\bar{p}$ soit déterminée par les supports de $\bar{e}_1$ et $\bar{e}_2$. Comme e_1 et e_2 ne sont pas parallèles, on garantit en prenant ξ assez petit que les supports de $\bar{e}_1$ et $\bar{e}_2$ ne sont pas parallèles — ce dont on a besoin pour trouver $\bar{p}$ — et que $|\angle(\bar{e}_1, \bar{e}_2)|$ est uniformément minoré, disons par $|\frac{1}{2}\angle(e_1, e_2)|$. Alors $\bar{p}$ est à une distance uniformément bornée de l'intersection de $\bar{e}_1$ et $\bar{e}_2$. Ensuite il faut tenir compte du fait qu'on modifie la direction des arêtes d'un angle de l'ordre de τ. Comme la longueur des arêtes est bornée par $C|\log\tau|$, cela perturbe la position des sommets de l'ordre de $\tau \times |\log\tau| \ll 1$. □

2.3. Construction de la surface initiale.

Sans perdre de généralité, on peut supposer que toutes les arêtes de Γ ont une longueur supérieure à 2. Soit $(\kappa - 1)$ la longueur de la plus grande arête et $2\alpha_0$ le plus petit angle entre deux arêtes issues d'un même sommet. Comme Γ est fini, on a $\kappa < \infty$ et $\alpha_0 > 0$. La plupart des constantes C qui interviendront dans la suite dépendront de κ et de α_0, donc de Γ. Comme Γ est fixé une fois pour toute, on oublie la dépendance des constantes en fonction de Γ.

Dans cette section, on se fixe un $\tau > 0$ et un $\xi \in W(\Gamma)$ tel que $|\xi| \leq \tau$. Le graphe $\widehat{\Gamma}$ est l'image de Γ par l'homothétie de rapport $4|\log\tau|$; on note $\overline{\Gamma}$ la configuration initiale de déséquilibre ξ donnée par la proposition 2.3. Pour toute arête $\hat{e}$ de $\widehat{\Gamma}$, on a en notant $\ell(\hat{e})$ sa longueur,

$$8|\log\tau| \leq \ell(\hat{e}) \leq 4(\kappa - 1)|\log\tau|.$$

Pour toute arête $\bar{e}$ de $\overline{\Gamma}$, on a d'après la proposition 2.3 si τ est assez petit :

$$4|\log\tau| \leq \ell(\bar{e}) \leq 4\kappa|\log\tau|.$$

La surface initiale est la réunion des domaines $\Sigma[p]$, $\Sigma[r]$ et $\Sigma[e]$ suivants, pour $p \in V(\Gamma)$, $r \in R(\Gamma)$ et $e \in E(\Gamma)$.

1) Pour chaque sommet p de Γ, $S(p)$ est la surface de Scherk de période 2π dont les bouts sont parallèles aux rayons et arêtes de Γ issus de p, centrée en $\bar{p}$. À noter qu'il y a en fait deux surfaces de Scherk qui vérifient ces hypothèses; elles diffèrent par une translation verticale de π. On choisit l'une d'entre elles, indépendamment de ξ, pour que la surface initiale dépende continûment de ξ.

Pour chaque bout de $S(p)$, soit (u, v, w) le système de coordonnées introduit dans la section 2.1. D'après la proposition 2.1, il existe un a tel que si $u \geq a - 1$, le bout est le graphe sur le plan (u, w) d'une fonction f. Le domaine $\Sigma[p]$ est le domaine de $S(p)$ obtenu en enlevant à chaque bout le domaine $u > a$.

2) Pour chaque rayon r, d'extrémité p, on courbe le bout correspondant de $S(p)$ de sorte qu'il soit asymptote au plan vertical contenant $\bar{r}$. Plus précisément, posons $\theta = \angle(r, \bar{r})$. Pour $u \geq a - 1$, $S(p)$ est le graphe d'une fonction f sur le plan (u, w). L'image de $S(p)$ par la rotation d'angle θ et d'axe la droite verticale qui passe par l'origine du bout de $S(p)$ correspondant à r — c'est-à-dire la droite $u = v = 0$ — est le graphe d'une fonction F sur le plan (u, w).

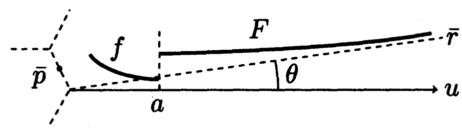

Figure 9. La configuration initiale $\overline{\Gamma}$ est représentée en pointillés.

$\Sigma[r]$ est le graphe pour $u \geq a - 1$ de la fonction

$$\big(1 - \psi(u - a)\big) f(u, w) + \psi(u - a) F(u, w)$$

où ψ est la fonction définie dans la section 1.3. Les domaines $\Sigma[r]$ et $\Sigma[p]$ coïncident sur $a - 1 \leq u \leq a$. La courbure moyenne H est supportée sur $a \leq u \leq a + 1$.

3) Pour toute arête e d'extrémités p_1 et p_2, on courbe les bouts correspondants de $S(p_1)$ et $S(p_2)$ de sorte qu'ils soient asymptotes au plan vertical contenant $\bar{e}$, et on les recolle au milieu. Plus précisément, posons $\theta = \angle(e, \bar{e})$, $\ell = \ell(\bar{e})$ et $R = \ell \cos \theta$. Pour $i = 1, 2$, la surface $S(p_i)$ est le graphe sur le plan (u, w) d'une fonction f_i. L'image de $S(p_i)$ par la rotation d'angle θ et d'axe la droite verticale qui passe par l'origine du bout de $S(p_i)$ correspondant à e est le graphe sur le plan (u, w) d'une fonction F_i.

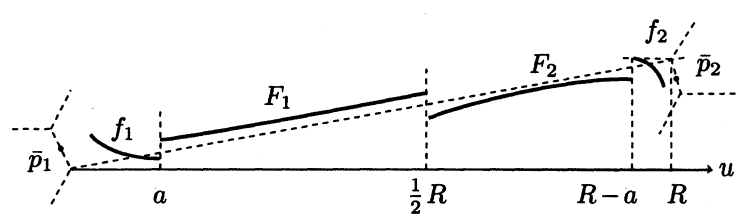

Figure 10. La configuration initiale $\overline{\Gamma}$ est représentée en pointillés.

$\Sigma[e]$ est le graphe pour $a-1 \leq u \leq R+1-a$ de la fonction

$$\begin{aligned}&\big(1-\psi(u-a)\big)f(u,w)\\&\quad+\psi(u-a)\big(1-\psi(u-\tfrac{1}{2}(R-1))\big)F(u,w)\\&\qquad+\psi(R-u-a)\big(1-\psi(R-u-\tfrac{1}{2}(R-1))\big)F_2(u,w)\\&\qquad\quad+\big(1-\psi(R-u-a)\big)f_2(u,w).\end{aligned}$$

Le domaine $\Sigma[e]$ coïncide avec $\Sigma[p_1]$ sur $a-1 \leq u \leq a$, et avec $\Sigma[p_2]$ sur $R-a \leq u \leq R-a+1$. La courbure moyenne H est supportée sur les domaines $a \leq u \leq a+1$, $\frac{1}{2}(R-1) \leq u \leq \frac{1}{2}(R+1)$ et $R-a-1 \leq u \leq R-a$.

DÉFINITION 2.4. — *On a ainsi construit une surface lisse, simplement périodique de période 2π, complète, invariante par la symétrie σ par rapport au plan horizontal. La surface initiale $M = M(\tau,\xi)$ est le quotient de cette surface par T. On note g la métrique de M.*

2.4. Estimation de la courbure moyenne.

Pour estimer la courbure moyenne de la surface initiale, il faut d'abord comparer les fonctions que l'on a recollées.

PROPOSITION 2.5. — *Les fonctions f et F qui servent à définir $\Sigma[r]$ vérifient*

$$\|f-F\|_{C^k} \leq C(k)\,|\theta| \leq C(k)\tau \quad \text{pour } a \leq u \leq a+1.$$

Pour $i=1,2$, les fonctions f_i et F_i qui servent à définir $\Sigma[e]$ vérifient

$$\begin{aligned}&\|f_1-F_1\|_{C^k} \leq C(k)\,|\theta| \leq C(k)\tau && \text{pour } a \leq u \leq a+1,\\&\|f_2-F_2\|_{C^k} \leq C(k)\,|\theta| \leq C(k)\tau && \text{pour } R-a-1 \leq u \leq R-a,\\&\|F_1-F_2\|_{C^k} \leq C(k)e^{-\frac{\ell}{2}} \leq C(k)\tau^2 && \text{pour } \tfrac{1}{2}(R-1) \leq u \leq \tfrac{1}{2}(R+1).\end{aligned}$$

Preuve. — Cherchons une formule pour $F(u,w)$. Soit (U,V,W) le système de coordonnées (u,v,w) tourné de θ, c'est-à-dire que :

$$u = U\cos\theta - V\sin\theta, \quad v = U\sin\theta + V\cos\theta, \quad w = W.$$

Les coordonnées (u,v,w) et (U,V,W) d'un point de la surface $S(p)$ tournée de θ vérifient :

$$v = F(u,w), \quad V = f(U,W).$$

Posons

$$\phi(U,W) = (u,w) = \big(U\cos\theta - f(U,W)\sin\theta, W\big).$$

Si θ est assez petit, ϕ est un difféomorphisme qui vérifie $\| \mathrm{d}\phi^{\pm 1}\|_{C^k} \leq C(k)$. On a :

$$F(u,w) = u\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta} f(U,W) = u\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta} f\circ\phi^{-1}(u,w). \tag{6}$$

Montrons maintenant la proposition 2.5 :

1) Si $a \leq u \leq a+1$, on a $\|\phi - \mathrm{Id}\|_{C^{k+1}} \leq C(k)\,|\theta|$. On obtient l'estimée en écrivant :

$$F(u,w) - f(u,w) = u\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}(f\circ\phi^{-1} - f) + \Big(\frac{1}{\cos\theta} - 1\Big) f.$$

2) Si $\frac{1}{2}(R-1) \leq u \leq \frac{1}{2}(R+1)$ et si θ est assez petit, on a $|U - \frac{1}{2}\ell| \leq 1$. Pour le voir, on écrit :

$$\Big|U - \frac{u}{\cos\theta}\Big| = \big|f(U,W)\tan\theta\big| \leq C|\theta|. \tag{7}$$

D'après la proposition 2.1, on a $\|f\circ\phi^{-1}\|_{C^k} \leq C(k)\,\mathrm{e}^{-\ell/2}$. D'après la formule (6),

$$\big\|F_1(u,w) - u\tan\theta\big\|_{C^k} \leq C(k)\,\mathrm{e}^{-\ell/2}.$$

On a la même chose pour F_2, d'où le résultat. □

PROPOSITION 2.6. — *Pour toute arête e et tout rayon r, sur le domaine $a \leq u \leq a+1$ de $\Sigma[r]$ et les domaines $a \leq u \leq a+1$ et $R-a-1 \leq u \leq R-a$ de $\Sigma[e]$, on a pour tout k :*

$$\|H\|_{C^k(g)} \leq C(k)\tau.$$

Sur le domaine $\frac{1}{2}(R-1) \leq u \leq \frac{1}{2}(R+1)$ de $\Sigma[e]$, on a :

$$\|H\|_{C^k(g)} \leq C(k)\tau^2.$$

Pour tout sommet p, soit D la réunion des domaines suivants : $\Sigma[p]$ et le domaine $u \leq a+1$ de $\Sigma[e]$ pour toute arête ou rayon e issu de p. Alors on a :

$$\int_D 2H\nu\,\mathrm{d}g = 2\pi\xi(p). \tag{8}$$

Enfin, on a $\|A\|_{C^k(M,g)} \leq C$.

Les normes $C^k(M,g)$ associées à une métrique g sont définies au moyen de la dérivée covariante (voir appendice A.1).

Deux métriques g et $\tilde{g}$ sont dites *uniformément* C^k *équivalentes* si les normes C^k qu'elles définissent sur les tenseurs sont uniformément équivalentes (c'est-à-dire qu'elles sont équivalentes avec des constantes uniformes).

Elles sont dites *uniformément* C^∞ *équivalentes* si elles sont uniformément équivalentes pour tout k (les constantes peuvent dépendre de k).

La proposition A.1 fournit un critère pratique pour vérifier que deux métriques sont C^k équivalentes. Montrons maintenant la proposition 2.6.

1) $\Sigma[r]$ est le graphe de la fonction $f + \tilde{f}$, avec :

$$\tilde{f}(u,w) = \psi(u-a)\big(F(u,w) - f(u,w)\big).$$

Le graphe de f est minimal, et si $a \leq u \leq a+1$, on a $\|f\|_{C^{k+2}} \leq C(k)$ et $\|\tilde{f}\|_{C^{k+2}} \leq C(k)\tau$ d'après la proposition 2.5. En utilisant la formule pour la courbure moyenne d'un graphe, on voit que la courbure moyenne H de $\Sigma[r]$, vue comme fonction de (u,w), vérifie $\|H\|_{C^k} \leq C(k)\tau$. D'après la proposition A.1, les métriques g et $\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}w^2$ sont uniformément C^∞ équivalentes. Donc cette estimée est vraie en norme $C^k(g)$.

J'utiliserai constamment cet argument pour comparer $\Sigma[r]$ ou $\Sigma[e]$ avec la surface de Scherk $S(p)$. Pour éviter de me répéter, je citerai simplement la propriété de la surface de Scherk qui m'intéresse (ici, $H = 0$), et la proposition 2.5.

2) Pour montrer (8), on utilise la formule du flux : pour tout domaine D d'une immersion $M \to \mathbb{R}^3/T$

$$\int_D 2H\nu \,\mathrm{d}g = \int_{\partial D} \mu \,\mathrm{d}s$$

où μ est la conormale au bord. C'est une simple intégration par parties de la formule classique $\Delta_g X = 2H\nu$. Au voisinage du bord de D, $M[p]$ coïncide avec des bouts de type Scherk de directions asymptotes $\bar{v}_{p,e}$, avec $e \in E_p$. Le flux d'un tel bout est $2\pi\,\bar{v}_{p,e}$. Donc

$$\int_D 2H\nu \,\mathrm{d}g = \sum_{e \in E_p} 2\pi\,\bar{v}_{p,e} = 2\pi\,\xi(p).$$

3) Soit S_α la surface de Scherk de paramètre α. Comme $\|A\|_{C^k(S_\alpha,g)}$ est finie et dépend continûment de $\alpha \in]0, \frac{1}{4}\pi]$, on a :

$$\|A\|_{C^k(S_\alpha,g)} \leq C(\alpha_0, k) < \infty \quad \text{si } 0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \tfrac{1}{4}\pi$$

(cette constante diverge quand $\alpha_0 \to 0$). On en déduit que :

$$\|A\|_{C^k(M,g)} \leq C(\alpha_0, k).$$

En effet, sur $\Sigma[p]$, M coïncide avec $S(p)$, et sur $\Sigma[r]$ et $\Sigma[e]$, on utilise la proposition 2.5. □

2.5. Les métriques h et χ.

J'introduis maintenant deux métriques $h = \eta^2 g$ et $\chi = \rho^2 g$ sur M, conformes à g, qui serviront à définir les normes $L^2(h)$ et $C^{2,\alpha}(\chi)$. La métrique h doit satisfaire les hypothèses 3.2 qui signifient en particulier que (M, h) est proche de sphères rondes reliées par des petits cous. La métrique χ doit satisfaire les hypothèses A.2 de façon à contrôler la constante dans l'estimée de Schauder, proposition A.5. En particulier, on doit contrôler la courbure de χ, ce qui ne sera pas le cas pour h.

Pour tout tout sommet p et tout rayon r de Γ, on définit :

$$h = \chi = \tfrac{1}{2}|A|^2 g \quad \text{sur } \Sigma[p] \text{ et } \Sigma[r].$$

Comme dans l'introduction, on compactifie (M, h) et (M, χ) en ajoutant un point par bout.

Pour toute arête e, h est définie sur $\Sigma[e]$ en ajoutant un petit terme à $\frac{1}{2}|A|^2 g$ au voisinage de $u = \frac{1}{2}R$. Plus précisément, on prend :

$$\begin{aligned} h &= \tfrac{1}{2}|A|^2 g + \psi(u-b)\,\psi(R-u-b)h', \\ h' &= \mathrm{e}^{-2b}\big(\mathrm{e}^{-2(u-b)/n} + \mathrm{e}^{-2(R-u-b)/n}\big)g \end{aligned}$$

où n est la partie entière de $16\kappa + 1$ et $b = R/(2n)$. Rappelons que $R = \ell(\bar{e})\cos\theta$, donc b dépend de l'arête e et de τ. La métrique h' est choisie de façon à ce que le h-volume du domaine $b \leq u \leq R - b$ soit petit, mais qu'on ait quand même $\eta^2 \geq \tau^{1/2}$. On ne peut pas prendre $h' = \tau^{1/2} g$ parce qu'on ne contrôlerait pas la constante de Sobolev de (M, h).

On prend $\chi = g$ sur $\Sigma[e]$ si $a + 1 \leq u \leq R - a - 1$; plus précisément :

$$\begin{aligned} \chi = \big(1 - \psi(u-a)\big)\big(1 - \psi(R-u-a)\big)\tfrac{1}{2}|A|^2 g \\ + \psi(u-a)\,\psi(R-u-a)g. \end{aligned}$$

DÉFINITION 2.7. — *Pour tout sommet p, $M[p]$ est la réunion des domaines suivants de M :*

- $\Sigma[p]$;
- $\Sigma[r]$ *pour tout rayon r issu de p et*
- *le domaine $u \leq b$ de $\Sigma[e]$ pour toute arête e issue de p.*

Il faut maintenant vérifier que h vérifie les hypothèses 3.2 et que χ vérifie les hypothèses A.2. Ceci est fait dans la proposition 2.8 et dans la proposition 2.9 de la section suivante.

PROPOSITION 2.8. — *Pour tout sommet p, toute arête e et tout rayon r :*

1) *Notons g^S la métrique ronde de S^2. Sur $\Sigma[p]$, sur le domaine $u \leq a+1$ de $\Sigma[r]$, et sur les domaines $u \leq a+1$ et $u \geq R-a-1$ de $\Sigma[e]$, les métriques g, h, χ et $\nu^* g^S$ sont uniformément C^∞ équivalentes. De plus, on a $\|h - \nu^* g^S\|_{C^k(g)} \leq C(k)\tau$ sur ces domaines.*

2) *ν est injective sur $M[p]$.*

3) *Sur $\Sigma[e]$, on a $\eta^2 \geq 2\,\tau^{1/2}$.*

4) *Le h-volume de $M - \bigcup M[p]$ est inférieur à $C\tau^{4/n}$.*

5) *$\nu(M[p])$ contient S^2 privée d'un disque géodésique de rayon $\leq C\tau^{2/n}$ par arête e issue de p.*

Preuve. — Comme pour la proposition 2.6, la plupart des estimées sont obtenues par comparaison avec la surface de Scherk, en utilisant la proposition 2.5.

1) Pour la surface de Scherk $S(p)$, on a $\frac{1}{2}|A|^2 g = |K| g = \nu^* g^S$. Si $u \leq a+1$, on a $|A| \geq C\,\mathrm{e}^{-2a}$ d'après la proposition 2.1. Pour $\Sigma[e]$ et $\Sigma[r]$, on obtient en utilisant la proposition 2.5, si $u \leq a+1$:

$$|A| \geq C\,\mathrm{e}^{-2a} + O(\tau) \geq C, \quad \left\|\frac{1}{2}|A|^2 g - \nu^* g^S\right\|_{C^k(g)} \leq C(k)\tau.$$

Comme $\|A\|_{C^k(g)} \leq C(k)$, les métriques $\frac{1}{2}|A|^2 g$ et g sont uniformément C^∞ équivalentes.

2) La courbure K ne s'annule pas sur la surface de Scherk $S(p)$. Les domaines $u \leq a$ et $u \geq a+1$ de $M[p]$ coïncident à un déplacement

près avec $S(p)$, donc vérifient $K \neq 0$. Si $a \leq u \leq a+1$, en utilisant la proposition 2.5, la courbure de $M[p]$ vérifie

$$|K| \geq C\,\mathrm{e}^{-2a} + O(\tau),$$

donc $K \neq 0$ pour τ assez petit. On en déduit que ν est injective sur $M[p]$.

3) Il faut d'abord comprendre la métrique $\frac{1}{2}|A|^2 g$. Sur $\Sigma[e]$, on a :

$$\begin{cases} |A| \leq C\,\mathrm{e}^{-u} & \text{si } u \leq \frac{1}{2}R, \\ |A|^{-1} \leq C\,\mathrm{e}^{u} & \text{si } u \leq \frac{1}{2}(R-1). \end{cases} \tag{9}$$

En effet, la surface de Scherk $S(p)$ tournée de θ est le graphe de f sur le plan (U,W) donc d'après la proposition 2.1, $C^{-1}\,\mathrm{e}^{-U} \leq |A| \leq C\,\mathrm{e}^{-U}$. D'après (7), si $u \leq \frac{1}{2}R$, $U = u + O(\tau)$ donc $C^{-1}\,\mathrm{e}^{-u} \leq |A| \leq C\,\mathrm{e}^{-u}$. On obtient le résultat pour $\Sigma[e]$ en utilisant la proposition 2.5. Si $\frac{1}{2}(R-1) \leq u \leq \frac{1}{2}R$, e^{-u} et le terme correctif $O(\tau^2)$ sont du même ordre, donc on n'a pas d'estimée pour $|A|^{-1}$ (c'est normal puisque il y a un point où $|A| = 0$).

Montrons maintenant 3). Si $b+1 \leq u \leq R-b-1$, on a $h \geq h'$. Le minimum de h'/g est en $u = \frac{1}{2}R$ et vaut :

$$2\,\mathrm{e}^{-2b}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{n}\left(\frac{R}{2}-b\right)} = 2\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{n}-\frac{R}{n}+\frac{2b}{n}} \geq 2\,\mathrm{e}^{-\frac{2R}{n}}.$$

Comme $R \leq 4\kappa|\log\tau|$ et $n \geq 16\kappa$, c'est supérieur à $2\,\mathrm{e}^{-|\log\tau|/2} = \tau^{1/2}$. Si $u \leq b+1$, on a $h \geq \frac{1}{2}|A|^2 g$ et

$$\frac{1}{2}|A|^2 \geq C\,\mathrm{e}^{-2b} = C\,\mathrm{e}^{-R/n} \geq C\tau^{1/4} \geq \tau^{1/2}.$$

4) D'après (9), les métriques h et h' sont uniformément C^0 équivalentes sur le domaine $b \leq u \leq R-b$ de $\Sigma[e]$, donc il suffit d'estimer le volume pour la métrique h'. Comme les métriques g et $\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}w^2$ sont uniformément C^0 équivalentes, le h'-volume du domaine $b \leq u \leq R-b$ de $\Sigma[e]$ (dans le quotient par T) est borné, à une constante multiplicative uniforme près, par

$$2\int_{w=0}^{2\pi}\int_{u=b}^{R-b} \mathrm{e}^{-2b}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{n}(u-b)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w \leq 2\pi\,n\,\mathrm{e}^{-2b} = 2\pi n\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{n}}.$$

Comme $R \geq 4\,|\log\tau|\cos\theta$, c'est inférieur à $C\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{n}|\log\tau|} = C\tau^{4/n}$.

5) Soit ν_e la normale au demi-plan asymptote du bout de $S(p)$ correspondant à e. Sur $(\partial M[p]) \cap \Sigma[e]$, c'est-à-dire pour $u = b$, on a :

$$\left|\nu - \mathrm{e}^{i\theta}\nu_e\right| \leq C\,\mathrm{e}^{-b} \leq C\tau^{\frac{2}{n}}. \qquad \square$$

2.6. Constante de Sobolev et constante de Schauder.

Pour un domaine D muni d'une métrique h, je note $\mathrm{Sob}(D,h)$ la plus petite constante c telle que

$$\forall f \in C_c^\infty(D), \quad \|f\|_{L^2(h)} \leq c\|\,\mathrm{d}f\|_{L^1(h)}.$$

$C_c^\infty(D)$ est l'espace des fonctions lisses à support compact dans D ; $\mathrm{d}f$ est la différentielle de f et $\|\,\mathrm{d}f\|_{L^1(h)}$ est définie par $\int |\,\mathrm{d}f|_h\,\mathrm{d}h$. Bien sûr, pour une variété (M,h) compacte, $\mathrm{Sob}(M,h)$ est infinie (prendre $f =$ constante). Je note

$$\mathrm{SOB}(D,h) \leq \mathrm{Sob}(D,h)$$

la plus petite constante c telle que :

$$\forall f \in C_c^\infty(D), \quad \|f\|_{L^2(h)} \leq c\big(\|\,\mathrm{d}f\|_{L^1(h)} + \|f\|_{L^1(h)}\big).$$

PROPOSITION 2.9.

1) *La constante de Sobolev* $\mathrm{SOB}(M,h)$ *et le volume* $\mathrm{Vol}(M,h)$ *sont uniformément bornés.*

2) *Notons* $\mathcal{L}_h u = \Delta_h u + |A|^2\eta^{-2}u$. *Pour toute fonction* u *de classe* H^2 *et tout* $\lambda \in [-1,1]$, *on a :*

$$\|u\|_{C^0} \leq C\big(\|u\|_{L^2(M,h)} + \|\mathcal{L}_h u + \lambda u\|_{L^2(M,h)}\big).$$

3) *Notons* $\mathcal{L}_\chi u = \Delta_\chi u + |A|^2\rho^{-2}u$. *Pour toute fonction* u *de classe* $C^{2,\alpha}$ *et tout* $\lambda \in [-1,1]$, *on a l'estimée de Schauder :*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(M,\chi)} \leq C\left(\|u\|_{C^0} + \left\|\mathcal{L}_\chi u + \frac{\eta^2}{\rho^2}\lambda u\right\|_{C^{0,\alpha}(M,\chi)}\right).$$

Les constantes C *sont uniformes.*

Preuve.

1) M est recouverte par les $\Sigma[p]$, $\Sigma[e]$ et $\Sigma[r]$. Il est facile de construire une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, uniformément bornée en norme $C^1(h)$. Par exemple, si e est une arête issue de p, $\Sigma[p] \cap \Sigma[e]$ est le domaine $a-1 \leq u \leq a$. On utilise la fonction $\psi(u-a+1)$. Elle est uniformément bornée en norme $C^1(h)$ puisque les métriques $\mathrm{d}h$ et $\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}w^2$ sont uniformément C^∞ équivalentes sur $\Sigma[p] \cap \Sigma[e]$.

Par un argument classique (voir [1], page 44), il suffit donc de montrer que $\mathrm{SOB}(D,h)$ est uniformément bornée pour $D = \Sigma[p]$, $\Sigma[e]$ et $\Sigma[r]$.

Si $D = \Sigma[p]$ ou $\Sigma[r]$, ν est injective donc $\mathrm{SOB}(D, \nu^* g^S)$ est uniformément bornée (par la constante de Sobolev de la sphère ronde). Comme h est uniformément C^∞ équivalente à $\nu^* g^S$, $\mathrm{SOB}(D,h)$ est uniformément bornée d'après le 1) du lemme 2.10.

Sur $\Sigma[e]$, on vérifie facilement en utilisant (9) que h est uniformément C^0 équivalente sur $\Sigma[e]$ à la métrique $\tilde{h}$ suivante :

$$\tilde{h} = \left(\mathrm{e}^{-2u} + \mathrm{e}^{-2(R-u)} + \mathrm{e}^{-2b}\left(\mathrm{e}^{-\frac{2}{n}(u-b)} + \mathrm{e}^{-\frac{2}{n}(R-u-b)}\right)\right)\left(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}w^2\right).$$

Le lemme 2.10 garantit que $\mathrm{Sob}(\Sigma[e], h)$ est uniformément bornée.

2) C'est un processus classique d'itération des normes L^p (voir le théorème 8.17 de Gilbarg Trudinger [4]). On a seulement besoin de contrôler la constante de Sobolev, le volume et le coefficient $|A|^2\eta^{-2} + \lambda$. Comme on a $\eta^2 \geq \frac{1}{2}|A|^2$ sur M, il est borné par 3.

3) L'estimée de Schauder vient de la proposition A.5. Les normes de Hölder globales sur (M,χ) sont définies au moyen d'un recouvrement de M par des domaines Ω_i vérifiant les hypothèses A.2. La norme locale $\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega_i,\chi)}$ est définie au moyen d'une carte, et la norme globale $\|u\|_{C^{k,\alpha}(M,\chi)}$ est le sup de ces normes. Il faut donc exhiber un tel recouvrement, vérifiant les hypothèses A.2.

On peut clairement recouvrir (M,χ) par des domaines Ω_i convexes, tels que chaque Ω_i est inclus dans un $\Sigma[p]$, $\Sigma[e]$ ou $\Sigma[r]$, et tels que pour tout $x \in M$ il existe un i pour lequel $B(x,r) \subset \Omega_i$ pour un r uniforme.

Ensuite il faut trouver des coordonnées x_i, y_i sur Ω_i telles que les métriques $\mathrm{d}x_i^2 + \mathrm{d}y_i^2$ et χ soient uniformément C^3 équivalentes sur Ω_i. Sur $\Sigma[e]$, χ est uniformément C^∞ équivalente à $\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}w^2$, donc on utilise les coordonnées (u,w). Sur $\Sigma[p]$ et $\Sigma[r]$, χ est uniformément C^∞ équivalente à $\nu^* g^S$, donc il suffit d'utiliser un système de coordonnées sur la sphère ronde. Ceci montre que (M, χ) vérifie les hypothèses A.2.

À noter que comme le diamètre des Ω_i doit être uniformément borné, le nombre des Ω_i dépend de τ. Mais la constante dans l'estimée de Schauder ne dépend pas du nombre des Ω_i.

Il reste à vérifier la dernière hypothèse de la proposition A.5, c'est-à-dire montrer que

$$\| |A|^2 \rho^{-2} + \lambda \eta^2 \rho^{-2} \|_{C^{0,\alpha}(M,\chi)} \leq C. \tag{10}$$

Sur $\Sigma[p]$ et $\Sigma[r]$, on a $\rho^2 = \eta^2 = \frac{1}{2} |A|^2$; donc :

$$|A|^2 \rho^{-2} + \lambda \eta^2 \rho^{-2} = 2 + \lambda.$$

Sur $\Sigma[e]$, on a d'après la définition de ρ^2 et η^2, pour tout entier k (on a juste besoin de $k = 1$) :

$$\begin{cases} \|1/\rho^2\|_{C^k(g)} \leq C(k), & \|\eta^2\|_{C^k(g)} \leq C(k), \\ \|\eta^2/\rho^2\|_{C^k(g)} \leq C(k), & \| |A|^2 \|_{C^k(g)} \leq C(k), \\ \| |A|^2 \rho^{-2} + \lambda \eta^2 \rho^{-2} \|_{C^k(g)} \leq C(k). & \end{cases} \tag{11}$$

Sur $\Sigma[e]$, les métriques g et χ sont uniformément C^∞ équivalentes (elles sont égales si $a + 1 \leq u \leq R - a - 1$) donc ces estimées sont vraies en norme $C^k(\chi)$, ce qui montre (10). □

LEMME 2.10.

1) *Si deux métriques h, h' sont uniformément C^0 équivalentes sur D, alors on a :*

$$C^{-1} \operatorname{Sob}(D, h') \leq \operatorname{Sob}(D, h) \leq C \operatorname{Sob}(D, h').$$

2) *Pour toute métrique h sur D, si λ est constant, on a l'égalité* $\operatorname{Sob}(D, \lambda^2 h) = \operatorname{Sob}(D, h)$.

3) *Soient h_1, h_2 deux métriques conformes sur D. Alors :*

$$\operatorname{Sob}(D, h_1 + h_2) \leq \sqrt{2} \sup\big(\operatorname{Sob}(D, h_1), \operatorname{Sob}(D, h_2)\big).$$

4) *Notons* $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ *le quotient de* $\mathbb{R}^2$ *par la translation* $(0, 2\pi)$, $z = u + iw$ *et* $\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}w^2$ *la métrique euclidienne sur* $\mathbb{R}^2$. *Alors, pour tout* $n \geq 1$,

$$\mathrm{Sob}(\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z},\, \mathrm{e}^{-\frac{2u}{n}}(\,\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}w^2)) \leq Cn^{1/2}.$$

Preuve. — Tout ceci est très élémentaire.

1) Si les métriques h et h' sont uniformément C^0 équivalentes, les normes ponctuelles $|\ |_h$ et $|\ |_{h'}$ sur les tenseurs sont uniformément équivalentes, et $C^{-1}\,\mathrm{d}g' \leq \mathrm{d}g \leq C\,\mathrm{d}g'$, ce qui montre 1).

2) Pour tout λ, même non constant, on a $\|f\|_{L^2(\lambda^2 h)} = \|\lambda f\|_{L^2(h)}$ et $\|\,\mathrm{d}f\|_{L^1(\lambda^2 h)} = \|\lambda\,\mathrm{d}f\|_{L^1(h)}$. On en déduit le résultat si λ est constant.

3) Posons :

$$\begin{aligned} &h = h_1 + h_2, \quad h_i = \lambda_i^2 h, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1,\\ &c = \sup\bigl(\mathrm{Sob}(D, h_1), \mathrm{Sob}(D, h_2)\bigr). \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(h)} &\leq \|\lambda_1^2 f\|_{L^2(h)} + \|\lambda_2^2 f\|_{L^2(h)} = \|f\|_{L^2(h_1)} + \|f\|_{L^2(h_2)}\\ &\leq c\,\bigl(\|\,\mathrm{d}f\|_{L^1(h_1)} + \|\,\mathrm{d}f\|_{L^1(h_2)}\bigr) = c\,\bigl(\|\lambda_1 df\|_{L^1(h)} + \|\lambda_2\,\mathrm{d}f\|_{L^1(h)}\bigr)\\ &= c\|(\lambda_1 + \lambda_2)\,\mathrm{d}f\|_{L^1(h)} \leq \sqrt{2}c\|\,\mathrm{d}f\|_{L^1(h)} \end{aligned}$$

car $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \sqrt{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} = \sqrt{2}$.

4) Soit

$$\begin{aligned} \Phi : \bigl(\mathbb{C} - 0, \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}w^2\bigr) &\longrightarrow \bigl(\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}, n^{-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{2u}{n}}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}w^2)\bigr),\\ z &\longmapsto -n\log z. \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire montre que Φ est un revêtement isométrique à n feuillets. Pour toute fonction $u \in C_c^\infty(\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z})$, la fonction $v = u \circ \Phi$ est dans $C_c^\infty(\mathbb{C} - 0)$, donc l'inégalité de Sobolev habituelle de $\mathbb{R}^2$ donne

$$\|v\|_{L^2} \leq C\|\mathrm{d}v\|_{L^1}.$$

Comme Φ est un revêtement isométrique à n feuillets,

$$\sqrt{n}\,\|u\|_{L^2} \leq Cn\|\mathrm{d}u\|_{L^1}\,,$$

$$\mathrm{Sob}\,\bigl(\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}, n^{-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{2u}{n}}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}w^2)\bigr) \leq Cn^{1/2}.$$

On en déduit le résultat en multipliant la métrique par n^2, ce qui ne change pas la constante de Sobolev. □

2.7. Construction des difféomorphismes D_ξ.

Dernier détail technique : pour identifier les espaces de fonctions sur $M(\tau,0)$ et $M(\tau,\xi)$, on construit un difféomorphisme

$$D_\xi : M(\tau,0) \longrightarrow M(\tau,\xi).$$

PROPOSITION 2.11. — *Pour tout ξ tel que $|\xi| \leq \tau$, il existe un difféomorphisme $D_\xi : M(\tau,0) \to M(\tau,\xi)$, dépendant continûment de (τ,ξ), tel que les normes χ et $(D_\xi)^*\chi$ soient uniformément C^∞ équivalentes, et $D_\xi \circ \sigma = \sigma \circ D_\xi$ (où σ est la symétrie par rapport au plan horizontal).*

Preuve. — Je note $M = M(\tau,0)$ et $M' = M(\tau,\xi)$. J'utilise des primes pour noter tout ce qui concerne M', et pas de prime pour ce qui concerne M.

1) Pour tout sommet p, $S(p)$ et $S'(p)$ sont les translatés de la même surface de Scherk. $D_\xi : \Sigma[p] \to \Sigma'[p]$ est cette translation.

2) Pour tout rayon r d'extrémité p, on définit $D_\xi : \Sigma[r] \to \Sigma'[r]$ en envoyant le point de coordonnées (u,w) de $\Sigma[r]$ sur le point de coordonnées (u',w') de $\Sigma'[r]$, avec :

$$\begin{aligned}(u',w') &= \Phi(u,w) = \big(1-\psi(u-a)\big)(u,w) + \psi(u-a)\phi'(u,w),\\ \phi'(U',W') &= \big(U'\cos\theta - f'(U',W')\sin\theta, W'\big).\end{aligned}$$

Pour τ assez petit, Φ est un difféomorphisme avec $\|\mathrm{d}\Phi^{\pm 1}\|_{C^k} \leq C(k)$.

Si $a-1 \leq u \leq a$, les définitions de D_ξ sur $\Sigma[p]$ et $\Sigma[r]$ coïncident.

Si $u \geq a+1$, $\Sigma[r]$ coïncide avec $S(p)$ et $\Sigma'[r]$ coïncide avec $S'(p)$ tourné de θ. D_ξ envoie le point de coordonnées (u,w) de $\Sigma[r]$ sur le point de coordonnées $(U',W') = \phi'^{-1}(u',w') = (u,w)$ de $\Sigma'[r]$. Donc D_ξ est la restriction d'un déplacement de $\mathbb{R}^3$. En particulier, c'est une isométrie pour les métriques $\chi = |K|g$ et $\chi' = |K'|g'$.

3) Pour toute arête e d'extrémités p_1, p_2, D_ξ envoie le point de coordonnées (u,w) de $\Sigma[e]$ sur le point de coordonnées (u',w') de $\Sigma'[e]$,

avec :

$$\begin{aligned}(u', w') = \Phi(u, w) = &\big(1 - \psi(u - a)\big)(u, w)\\ &+ \psi(u - a)\psi(R - u - a)\Big(\frac{R'}{R}u, w\Big)\\ &+ \big(1 - \psi(R - u - a)\big)(R' - R - u, w).\end{aligned}$$

Comme on a $|1 - R'/R| \leq C\tau$, pour τ assez petit, Φ est un difféomorphisme avec $\|\mathrm{d}\Phi^{\pm 1}\|_{C^k} \leq C(k)$. Comme les métriques χ et $\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}w^2$ (resp. χ' et $\mathrm{d}u'^2 + \mathrm{d}w'^2$) sont uniformément C^∞ équivalentes, les métriques $D_\xi^*\chi'$ et χ sont uniformément C^∞ équivalentes. □

3. L'opérateur linéarisé.

3.1. Introduction.

Comme dans l'introduction, on introduit la :

Définition 3.1. — *Le noyau approché de $\mathcal{L}_h$ est l'espace engendré par les vecteurs propres de $\mathcal{L}_h$ pour les valeurs propres dans* $[-1, 1]$. *On le note $\mathcal{K}$. Enfin, on note $\mathcal{P}$ la projection de $L^2(M, h)$ sur $\mathcal{K}$.*

Clairement $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_h \subset \mathcal{K}$. Si f est perpendiculaire au sens L^2 à $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_h$, par l'alternative de Fredholm, l'équation $\mathcal{L}_h u = f$ a une unique solution u. Si en plus f est perpendiculaire à $\mathcal{K}$, alors $\|u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$ (considérer une famille totale de fonctions propres de $\mathcal{L}_h$).

Le but de cette partie est de trouver une base suffisamment explicite de $\mathcal{K}$. Je rassemble ci-dessous les propriétés de la surface initiale dont on a besoin ici, de façon à rendre cette section indépendante du reste de la construction. Je me place dans un cadre un peu plus général pour une éventuelle utilisation future.

Hypothèse 3.2. — *Le couple (M, h) est une variété riemannienne lisse compacte de dimension 2, dépendant du paramètre $\tau > 0$. Le volume $\operatorname{Vol}(M, h)$ et la constante de Sobolev $\operatorname{SOB}(M, h)$ sont uniformément bornés. $\mathcal{L}_h$ est l'opérateur différentiel*

$$\mathcal{L}_h u = \Delta_h u + a u$$

où a est une fonction C^∞, uniformément bornée sur M.

La variété M contient un nombre fini de domaines disjoints $M[p]$, $p \in V$ où V est un ensemble fini, tels que pour tout $\epsilon_1 > 0$, si τ est assez petit, on ait :

1) *pour tout $p \in V$, on a $a \equiv 2$ sur $M[p]$.*

2) *(Chaque $M[p]$ est proche d'une sphère ronde.) Pour tout $p \in V$, il existe une application lisse injective $\nu_p : M[p] \to S^2$, telle que si on note g^S la métrique ronde de S^2,*

$$\|h - \nu_p^* g^S\|_{C^0(M[p],h)} \leq \epsilon_1$$

et $\nu_p(M[p])$ contient S^2 privée d'un nombre fini, indépendant de τ, de disques géodésiques de rayon ϵ_1.

3) *(Les $M[p]$ recouvrent presque tout M.) Le h-volume de $M - \bigcup M[p]$ est inférieur à ϵ_1.*

4) *(Symétries.) G est un groupe fini qui agit sur V, sur (M, h) par isométrie et sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ par symétrie, c'est-à-dire que G est un sous groupe de $\mathrm{O}(3)$. La situation ci-dessus est invariante par G, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$,*

$$g(M[p]) = M[g(p)], \qquad g^*h = h,$$
$$a \circ g = a, \qquad g^*\nu_{g(p)} = \nu_p.$$

$g^*\nu_p$ est le transport habituel des champs de vecteurs, c'est-à-dire $g^*\nu_p(x) = g^{-1}\nu_p(g(x))$.

D'après la proposition 2.8, la surface initiale (M, h) construite dans la partie 2 vérifie ces hypothèses si ν_p est la normale, $V = V(\Gamma)$ et $a = |A|^2/\eta^2$, $G = \mathbb{Z}_2$ agit sur V trivialement (c'est-à-dire que $g(p) = p$ pour tout p) et sur $\mathbb{R}^3$ et M par la symétrie par rapport au plan horizontal $x_3 = 0$.

On étend ν_p à M en posant $\nu_p = 0$ sur $M - M[p]$. Bien sûr, $\nu_p : M \to \mathbb{R}^3$ n'est pas continue sur le bord de $M[p]$.

On note $\nu_{p,i} : M \to \mathbb{R}$ la i-ième composante de ν_p pour $i = 1, 2, 3$.

PROPOSITION 3.3. — *Sous les hypothèses 3.2, si τ est assez petit, $\mathcal{K}$ est de dimension $3|V|$, où $|V|$ est le cardinal de V. Pour tout $\epsilon > 0$, si τ est assez petit, il existe une base $\{e_{p,i}\,,\ p \in V,\ i = 1, 2, 3\}$ de $\mathcal{K}$ telle que si l'on note $e_p = (e_{p,1}, e_{p,2}, e_{p,3}) : M \to \mathbb{R}^3$:*

1) $\|e_{p,i} - \nu_{p,i}\|_{L^2} \leq \epsilon$

2) *pour tout $g \in G$ et tout $p \in V$, on a $g^*e_{g(p)} = e_p$.*

Remarque. — Cette proposition nous donne une base de $\mathcal{K}$ qui est proche au sens L^2 des fonctions $\nu_{p,i}$, avec les mêmes symétries. Par régularité elliptique standard, les fonctions $e_{p,i}$ sont C^∞. Bien sûr, $e_{p,i}$ n'est pas supportée sur $M[p]$ comme $\nu_{p,i}$.

Le reste de cette partie est consacré à la preuve de cette proposition, au moyen des résultats de l'appendice B de Kapouleas.

3.2. Les résultats de l'appendice B de Kapouleas.

Soient (M_1, h_1) et (M_2, h_2) deux variétés riemanniennes compactes, éventuellement à bord, et

$$L_i u = \Delta u + a_i u$$

où a_i est une fonction C^∞ sur M_i. Le théorème 3.5 ci-dessous permet de comparer le spectre de L_1 avec celui de L_2 si les hypothèses suivantes sont satisfaites. $C_0^\infty(M_i)$ est l'espace des fonctions C^∞ sur M_i nulles au bord.

HYPOTHÈSE 3.4. — *Il existe des réels positifs c, ϵ_2 tels que :*

1) *M_2 contient un point où l'application exponentielle est injective sur une boule de rayon $1/c$. L'image de cette boule par l'application exponentielle est de courbure bornée par c.*

2) *Pour $i = 1, 2$, $\mathrm{Vol}(M_i, h_i)$ et $\mathrm{SOB}(M_i, h_i)$ sont bornés par c.*

3) *$|a_i| < c$ sur M_i.*

4) *Il existe des applications linéaires $F_1 : C_0^\infty(M_1) \to C_0^\infty(M_2)$ et $F_2 : C_0^\infty(M_2) \to C_0^\infty(M_1)$ telles que pour tous $f, g \in C_0^\infty(M_i)$,*

$$\begin{aligned}
&\big|\langle f, g\rangle - \langle F_i(f), F_i(g)\rangle\big| \leq \epsilon_2 \|f\|_\infty \|g\|_\infty\,,\\
&\big\|\mathrm{d}F_i(f)\big\|_{L^2} \leq (1+\epsilon_2)\|\mathrm{d}f\|_{L^2} + \epsilon_2\|f\|_\infty\,,\\
&\Big|\int_{M_j} a_j F_i(f)^2 - \int_{M_i} a_i f^2\Big| \leq \epsilon_2 \|f\|_\infty^2 \quad \textit{pour } j \neq i.
\end{aligned}$$

Quelques remarques pour le lecteur sceptique qui a le courage d'aller voir dans l'appendice B de Kapouleas [5] :

- L'hypothèse 1) ne sert qu'à garantir que la n-ième valeur propre de L_2 est bornée par $C(n, c)$.

• Kapouleas se limite au cas de $a_i = 0$. L'hypothèse 3) et la dernière hypothèse de 4) permettent d'étendre ses résultats aux opérateurs de la forme $L_i = \Delta + a_i$, où a_i est une fonction.

• L'hypothèse B.1.6 1) de Kapouleas n'est pas raisonnable (car jamais vérifiée dans ses exemples) et heureusement on peut s'en passer.

• L'hypothèse B.1.6 4) ne me semble pas utile, mais sera de toute façon vérifiée.

On note $\lambda_{i,1} < \lambda_{i,2} \leq \lambda_{i,3} \leq \cdots$ les valeurs propres de L_i et $f_{i,n}$ une famille orthonormée de vecteurs propres. Si M_i a un bord, on considère les valeurs propres pour le problème de Dirichlet, c'est-à-dire :

$$L_i f_{i,n} + \lambda_{i,n} f_{i,n} = 0 \text{ sur } M_i\,, \quad f_{i,n} = 0 \text{ sur } \partial M_i.$$

LEMME 3.5 (Lemme B.2.2 de Kapouleas). — *Supposons que les hypothèses* 3.4 *soient vérifiées pour des réels* c, ϵ_2. *Pour tout entier* k *et tout réel* $\delta > 0$, *soit* $P_{k,\delta}$ *la projection orthogonale de* $L^2(M_1, h_1)$ *sur l'espace engendré par :*

$$\{f_{1,\ell}\,;\ |\lambda_{1,\ell} - \lambda_{2,k}| \leq \delta\}.$$

Alors pour tout entier k,

$$|\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}| \leq C(k,c)\epsilon_2\,,$$
$$\left\|F_2(f_{2,k}) - P_{k,\delta}(F_2(f_{2,k}))\right\|_{L^2} \leq C(k,c,\delta)\sqrt{\epsilon_2}.$$

3.3. Preuve de la proposition 3.3.

C'est une application du théorème 3.5. On prend :

$$(M_1, h_1) = (M, h) \quad L_1 u = \Delta_h u + au.$$

La variété (M_2, h_2) est définie de la façon suivante : à chaque $p \in V$, on associe une sphère ronde notée $M^S[p]$. On a l'application injective $\nu_p : M[p] \to M^S[p]$. Notons M^S la réunion disjointe des $M^S[p]$. On prend :

$$(M_2, h_2) = (M^S, g^S), \quad L_2 u = \Delta u + 2u.$$

Les trois premières hypothèses de 3.4 sont vérifiées pour une constante c uniforme. Il faut maintenant définir les applications F_1 et F_2 de l'hypothèse 4). Par hypothèse, $\nu_p(M[p])$ couvre tout $M^S[p]$ sauf des petits disques géodésiques de rayon ϵ_1. Soit C_p l'ensemble des centres de ces disques. Soit $\psi_p^S : M^S[p] \to [0,1]$ définie par

$$\psi_p^S(x) = 1 - \psi\left(\frac{2\log d(x, C_p)}{\log \epsilon_1} - 1\right).$$

La fonction ψ est la fonction définie dans la section 1.3 ; d est la distance sur la sphère ronde. On a :

$$\psi_p^S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } d(x, C_p) \geq \epsilon_1^{1/2} \\ 0 & \text{si } d(x, C_p) \leq \epsilon_1. \end{cases}$$

On définit $\psi_p : M \to [0,1]$ par $\psi_p = \psi_p^S \circ \nu_p$ sur $M[p]$ et 0 sur $M - M[p]$. Comme ψ_p^S est nulle sur $\nu_p(\partial M[p])$, la fonction ψ_p est C^∞.

On définit $F_1 : C^\infty(M_1) \to C^\infty(M_2)$ et $F_2 : C^\infty(M_2) \to C^\infty(M_1)$ par

$$F_1(f) = \begin{cases} \psi_p^S \cdot (f \circ \nu_p^{-1}) & \text{sur } \{x, d(x, C_p) \geq \epsilon_1\} \subset \nu_p(M[p]), \\ 0 & \text{sur } \{x, d(x, C_p) \leq \epsilon_1\}\,; \end{cases}$$

$$F_2(f) = \begin{cases} \psi_p \cdot (f \circ \nu_p) & \text{sur } M[p], \\ 0 & \text{sur } M - \bigcup M[p]. \end{cases}$$

LEMME 3.6. — *Pour tout ϵ_2, si τ est assez petit, F_1 et F_2 vérifient l'hypothèse* 4) *de* 3.4.

Preuve. — Je la fais pour $i = 1$, le cas $i = 2$ étant similaire. Pour $f, g \in C^\infty(M)$, on a par changement de variable :

$$\begin{aligned} \langle F_1(f), F_1(g)\rangle_{L^2} &= \sum_p \int_{M[p]} \psi_p^2 f g \nu_p^* \,\mathrm{d}g^S \\ &= \int_M fg \,\mathrm{d}h - \int_{M - \bigcup M[p]} fg\,\mathrm{d}h \\ &\qquad - \sum_p \int_{M[p]} (1 - \psi_p^2) fg\,\mathrm{d}h \\ &\qquad\qquad - \sum_p \int_{M[p]} \psi_p^2 fg(\mathrm{d}h - \nu_p^*\,\mathrm{d}g^S). \end{aligned}$$

Le premier terme est $\langle f, g\rangle_{L^2}$. Tous les autres termes sont bornés par $C\epsilon_1 \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ en utilisant les hypothèses 3.2 et $\int_{M[p]} |1 - \psi_p^2|\,\mathrm{d}h \leq C\epsilon_1$.

Pour toute $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$\big\|\mathrm{d}F_1(f)\big\|_{L^2} \leq \sum_p \big(\|f\|_\infty \|\mathrm{d}\psi_p^S\|_{L^2} + \|\psi_p^S\,\mathrm{d}(f \circ \nu_p^{-1})\|_{L^2}\big)\,.$$

Pour le premier terme, on écrit :

$$\big|\mathrm{d}\psi_p^S(x)\big| \leq \frac{C}{r|\log \epsilon_1|}, \quad r = \mathrm{d}(x, C_p),$$
$$\big\|\mathrm{d}\psi_p^S\big\|_{L^2}^2 \leq C \int_{r=\epsilon_1}^{\epsilon_1^{1/2}} \frac{1}{r^2|\log \epsilon_1|^2} \sin r \,\mathrm{d}r \leq \frac{C}{|\log \epsilon_1|}.$$

Donc le premier terme est inférieur à $\epsilon_2\|f\|_\infty$ en prenant ϵ_1 assez petit.

Pour le deuxième terme, on écrit, en utilisant $\|h - \nu_p^* g^S\|_{C^0(h)} \leq \epsilon_1$,

$$\begin{aligned}\big\|\psi_p^S\,\mathrm{d}(f \circ \nu_p^{-1})\big\|_{L^2} &\leq \sum_p \|\mathrm{d}f\|_{L^2(M[p], \nu_p^* g^S)} \\ &\leq \sum_p (1 + C\epsilon_1)\|\mathrm{d}f\|_{L^2(M[p], h)}.\end{aligned}$$

Enfin, pour toute $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$\int a_2 F_1(f)^2 \,\mathrm{d}g^S = \sum_p \int_{M[p]} (a_2 \circ \nu_p)\psi_p^2 f^2 \nu_p^* \,\mathrm{d}g^S.$$

Par hypothèse, $a_1 \equiv 2 \equiv a_2 \circ \nu_p$ sur $M[p]$; donc c'est égal à :

$$\int_M a_1 f^2 \,\mathrm{d}h - \int_{M - \cup M[p]} a_1 f^2 \,\mathrm{d}h \\ - \sum_p \int_{M[p]} a_1(1 - \psi_p^2) f^2 \,\mathrm{d}h - \sum_p \int_{M[p]} a_1 \psi_p^2 f^2 (\mathrm{d}h - \nu_p^* \,\mathrm{d}g^S).$$

Les trois derniers termes sont bornés par $C\epsilon_1\|f\|_\infty^2$ en utilisant les hypothèses 3. □

Montrons maintenant la proposition 3.3. Les valeurs propres du laplacien sur la sphère ronde sont les nombres $k(k+1)$ avec la multiplicité $2k+1$ pour $k \in \mathbb{N}$. Les valeurs propres de $\Delta + 2$ sur M^S sont donc -2 de multiplicité $|V|$, puis 0 de multiplicité $3|V|$, puis 4 de multiplicité $5|V|$, *etc.*

On applique le théorème 3.5 avec $\delta = 1$ et $k \in \{|V|+1, \dots, 4|V|\}$, de sorte que $\lambda_{2,k} = 0$ et $P_{k,\delta} = \mathcal{P}$. La première assertion dit que $\mathcal{K}$ est de dimension $3|V|$ si ϵ_2 est assez petit.

Une base du noyau de $\Delta + 2$ sur M^S est $\{x_{p,i}\,;\ p \in V,\ i = 1.2, 3\}$, où $x_{p,i}$ est la i-ième fonction coordonnée sur la sphère ronde $M^S[p]$. Par définition,

$$F_2(x_{p,i}) = \psi_p \nu_{p,i}.$$

D'après la deuxième assertion du théorème 3.5,

$$\left\|\psi_p \nu_{p,i} - \mathcal{P}(\psi_p \nu_{p,i})\right\|_{L^2} \leq C\sqrt{\epsilon_2}.$$

On définit $e'_p = (e'_{p,1}, e'_{p,2}, e'_{p,3}) : M \to \mathbb{R}^3$ par :

$$e'_{p,i} = \mathcal{P}(\psi_p \nu_{p,i}).$$

On a d'après l'équation précédente

$$\begin{aligned}\|e'_{p,i} - \nu_{p,i}\|_{L^2} &\leq \left\|\mathcal{P}(\psi_p \nu_{p,i}) - \psi_p \nu_{p,i}\right\|_{L^2} + \|\psi_p \nu_{p,i} - \nu_{p,i}\|_{L^2} \\ &\leq C\sqrt{\epsilon_2} + C\epsilon_1.\end{aligned}$$

Il reste à combiner les fonctions $e'_{p,i} \in \mathcal{K}$ pour avoir une base de $\mathcal{K}$ qui a les symétries voulues. Pour $p \in V$, on définit $e_p = (e_{p,1}, e_{p,2}, e_{p,3}) : M \to \mathbb{R}^3$ par

$$e_p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^* e'_{g(p)}$$

avec $g^* e'_{g(p)} = g^{-1} e'_{g(p)} \circ g$. Clairement,

$$\forall g \in G, \quad g^* e_{g(p)} = e_p.$$

Chaque composante $e_{p,i}$ de e_p est combinaison linéaire à coefficients constants des fonctions $e'_{g(p),j} \circ g$ pour $j = 1, 2, 3$ et $g \in G$. Comme h et a sont invariantes par G, pour toute fonction u de $\mathcal{K}$, $u \circ g$ est encore dans $\mathcal{K}$. Donc $e'_{g(p),j} \circ g$ est dans $\mathcal{K}$ et

$$\forall p \in V,\ \forall i = 1, 2, 3, \quad e_{p,i} \in \mathcal{K}.$$

Comme $g^* \nu_{g(p)} = \nu_p$,

$$e_p - \nu_p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^* \big(e'_{g(p)} - \nu_{g(p)}\big).$$

Chaque composante $e_{p,i} - \nu_{p,i}$ est combinaison linéaire à coefficients constants des fonctions $(e'_{g(p),j} - \nu_{g(p),j}) \circ g$ pour $j = 1,2,3$ et $g \in G$. Comme h est invariante par G, on a :

$$\left\|(e'_{g(p),j} - \nu_{g(p),j}) \circ g\right\|_{L^2} = \left\|e'_{g(p),j} - \nu_{g(p),j}\right\|_{L^2} \leq C\sqrt{\epsilon_2} + C\epsilon_1.$$

Donc

$$\|e_{p,i} - \nu_{p,i}\|_{L^2} \leq \epsilon$$

en prenant τ assez petit. Comme les fonctions $\sqrt{3/4\pi}\nu_{p,i}$ sont proches d'être une famille orthonormale pour τ petit, les fonctions $e_{p,i}$ sont indépendantes pour τ petit d'après cette formule, et forment donc une base de $\mathcal{K}$. □

4. Le terme quadratique.

4.1. Expression du terme quadratique.

(Appendice C de Kapouleas.)

Dans cette section j'utilise les notations de l'appendice A.1 : pour un tenseur T, $D_g T$ est la dérivée covariante de T et $\mathrm{tr}_g\, T$ une contraction par rapport à g (par exemple $\mathrm{tr}_g\, A = 2H$).

Le terme quadratique Q_φ peut s'écrire comme une fraction. Le numérateur est combinaison linéaire finie à coefficients universels de contractions par rapport à g de termes d'un des trois types suivants :

$$A \otimes (\varphi A)^m \otimes (\mathrm{d}\varphi)^{2n} \qquad \text{avec } m + 2n \geq 2, \tag{12}$$

$$\varphi D_g A \otimes (\varphi A)^m \otimes (\mathrm{d}\varphi)^{2n+1} \qquad \text{avec } m + 2n \geq 0, \tag{13}$$

$$D_g^2 \varphi \otimes (\varphi A)^m \otimes (\mathrm{d}\varphi)^{2n} \qquad \text{avec } m + 2n \geq 1 \tag{14}$$

où m, n sont des entiers ≥ 0. Chacun de ces termes est un tenseur covariant d'ordre $2k$ pair, et on doit contracter k fois pour obtenir une fonction.

Le dénominateur est de la forme $(1 + G)^{3/2}$, où G est combinaison linéaire finie à coefficients universels de contractions par rapport à g de termes de la forme

$$(\varphi A)^m \otimes (\mathrm{d}\varphi)^{2n} \qquad \text{avec } m + 2n \geq 2. \tag{15}$$

4.2. Estimée $C^{0,\alpha}$ du terme quadratique.

Proposition 4.1. — *Soit α tel que $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{6}$. Si $\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(M,\chi)} \leq 1$, alors :*

$$\|Q_\varphi/\rho^2\|_{C^{0,\alpha}(M,\chi)} \leq C\|\varphi\|^2_{C^{2,\alpha}(M,\chi)}.$$

Preuve. — Pour vérifier l'estimée $C^{0,\alpha}$, il faut vérifier que pour chaque Ω_i du recouvrement de (M, χ) qui a servi à définir les normes de Hölder, on a :

$$\|Q_\varphi/\rho^2\|_{C^{0,\alpha}(\Omega_i,\chi)} \leq C\|\varphi\|^2_{C^{2,\alpha}(\Omega_i,\chi)}.$$

Si Ω_i est inclus dans $\Sigma[p]$ ou $\Sigma[e]$, les métriques χ et g sont uniformément C^∞ équivalentes sur Ω_i ; donc d'après la proposition A.4, et le fait que ρ^{-2} est uniformément bornée en norme $C^1(g)$, il suffit de vérifier que :

$$\|Q_\varphi\|_{C^{0,\alpha}(\Omega_i,g)} \leq C\|\varphi\|^2_{C^{2,\alpha}(\Omega_i,g)}.$$

Chaque terme du numérateur de Q_φ fait intervenir au moins deux fois φ ou ses dérivées, et les tenseurs A et D_gA sont uniformément bornés en normes $C^1(g)$. En utilisant

$$\left\|\mathrm{tr}_g(S \otimes T)\right\|_{C^{0,\alpha}(g)} \leq C\|S\|_{C^{0,\alpha}(g)}\|T\|_{C^{0,\alpha}(g)},$$

on obtient l'estimée voulue pour le numérateur.

De la même façon, le terme G du dénominateur est borné en norme $C^{0,\alpha}(g)$ par $C\|\varphi\|^2_{C^{2,\alpha}(g)}$. En prenant τ assez petit, $|G| \leq \frac{1}{2}$, donc $(1+G)^{-3/2}$ est uniformément borné en norme $C^{0,\alpha}(g)$.

Si Ω_i est inclus dans $\Sigma[r]$, χ est uniformément C^∞ équivalente à $|K|g$. L'estimée de Q_φ/ρ^2 est un peu plus délicate dans ce cas car $\rho^2 = |K|$ tend vers 0 aux bouts. Je traite ce cas dans la section suivante. □

4.3. Bouts de courbure totale finie.

Dans cette section, j'étudie Q_φ sur un bout minimal immergé de courbure totale finie dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^3/T$. On sait qu'un tel bout est conforme à $D - \{0\}$, où D est le disque unité de $\mathbb{C}$, et que sa représentation de Weierstrass $(g, \mathrm{d}h)$ s'étend méromorphiquement à l'origine (voir [10]).

Après rotation dans $\mathbb{R}^3$, on peut supposer que $g(0) = 0$. En reparamétrant, on peut écrire la représentation de Weierstrass sur un voisinage U de l'origine

$$g = z^p, \quad \mathrm{d}h = f(z) z^{p-q}\,\mathrm{d}z, \quad p, q \geq 1$$

avec f holomorphe sans zéros sur U. Les entiers p, q ont une interprétation géométrique : p est la multiplicité de l'application de Gauss au bout, et q est déterminé par le type de bout. Par exemple pour un bout de type Scherk, $q = 1$. On peut avoir $p > 1$ pour un bout de type Scherk. Par exemple si S est la surface de Scherk de période 2π, alors dans le quotient par $2\pi p$, l'application de Gauss a la multiplicité p aux bouts. Pour un bout de type caténoïde, $(p, q) = (1, 2)$. Pour un bout de type hélicoïde, $q = p + 1$, $p \geq 1$. (voir [10]).

Dans ce qui suit, je suppose qu'on a une constante c telle que :

$$\|f^{\pm 1}\|_{C^3} \leq c \quad \text{et} \quad |z| \leq c \ \text{ sur } U.$$

Pour éviter la confusion avec l'application de Gauss, je note $\mathrm{d}s^2$ (au lieu de g) la métrique du bout.

THÉORÈME 4.2. — *Soit Ω un bout minimal de courbure totale finie. Posons*

$$\beta = \frac{q}{q + p - 1}.$$

Alors $\chi = \rho^2\,\mathrm{d}s^2 = |K|^\beta\,\mathrm{d}s^2$ définit une métrique sur la compactification $\bar{\Omega}$ du bout. Soit α tel que $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{6}$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que si $\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega},\chi)} \leq \epsilon$, on a :

$$\|Q_\varphi/\rho^2\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega},\chi)} \leq C\|\varphi\|^2_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega},\chi)}$$

où ϵ et la constante C dépendent uniquement de α, p, q et de c. De plus, on a les estimées ponctuelles :

$$|\mathrm{d}\varphi|_g \leq C|K|^{\beta/2}\|\varphi\|_{C^1(\bar{\Omega},\chi)} \qquad |D^2_g\varphi|_g \leq C|K|^{\beta(1-\frac{1}{2q})}\|\varphi\|_{C^2(\bar{\Omega},\chi)}.$$

Pour des bouts de type Scherk avec une normale injective (comme ceux de la surface initiale), on a $\beta = 1$.

Dans cette section, une constante est dite *uniforme* si elle ne dépend que de α, p, q et c.

Preuve. — On a les formules suivantes pour la courbure, la métrique et la seconde forme fondamentale (voir [7]) :

$$\begin{aligned} K &= \frac{-16}{(|g|+|g|^{-1})^4}\,\frac{|\mathrm{d}g/g|^2}{|\mathrm{d}h|^2},\\ \mathrm{d}s^2 &= \tfrac{1}{4}\left(|g|+|g|^{-1}\right)^2|\mathrm{d}h|^2,\\ A(X,Y) &= \operatorname{Re}\Big(\frac{\mathrm{d}g}{g}(X)\,\mathrm{d}h(Y)\Big). \end{aligned}$$

Avec ces formules, on obtient :

$$\begin{aligned} |K| &= \mathcal{O}(1)|z|^{2(p+q-1)},\\ \mathrm{d}s^2 &= \lambda|\mathrm{d}z|^2, \quad \lambda = \mathcal{O}(1)|z|^{-2q},\\ A(X,Y) &= \operatorname{Re}\big(\mathcal{O}(1)z^{p-1-q}XY\big), \end{aligned}$$

où $\mathcal{O}(1)$ désigne une fonction C^∞ — holomorphe dans le cas de A — uniformément bornée sur U en norme C^3, ainsi que son inverse. Donc $|K|^\beta\,\mathrm{d}s^2 = \mathcal{O}(1)|\mathrm{d}z|^2$, ce qui montre que χ est une métrique sur U, et elle est uniformément C^3 équivalente à la métrique euclidienne $|\mathrm{d}z|^2$. D'après la proposition A.4, si $k \le 2$, la norme $C^{k,\alpha}(\chi)$ est uniformément équivalente à la norme $C^{k,\alpha}$ de la métrique euclidienne, donc il suffit de montrer les estimées pour la métrique euclidienne.

Dans ce qui suit, je note DT, $\operatorname{tr} T$ et $C^{k,\alpha}$ la dérivée tensorielle, les contractions et les normes de Hölder pour la métrique $|\mathrm{d}z|^2$. Comme je n'ai plus besoin de la représentation de Weierstrass, je note de nouveau $g = \lambda|\mathrm{d}z|^2$ la métrique du bout.

J'explique maintenant comment estimer Q_φ/ρ^2, en laissant les calculs pour les lemmes 4.3 et 4.4. Il faut d'abord estimer en norme $C^{0,\alpha}$ les tenseurs A, φA, $\mathrm{d}\varphi$, $D_g A$ et $D_g^2\varphi$. Les normes $C^{0,\alpha}$ de φ, $\mathrm{d}\varphi$ et $D^2\varphi$ sont inférieures à $\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}}$ par définition. Pour estimer $D_g^2\varphi$, j'introduis comme dans l'appendice A.1 le tenseur

$$R(X,Y,Z) = \langle \nabla_X Y - D_X Y, Z\rangle,$$

où ∇ est la connexion de la métrique g et $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire euclidien. Alors :

$$D_g^2\varphi = D^2\varphi - \operatorname{tr} R \otimes \mathrm{d}\varphi.$$

Le problème est que les tenseurs A, DA et R ne sont pas $C^{0,\alpha}$. Ce que l'on peut obtenir est des estimées du type $\big\| |z|^r A \big\|_{C^{0,\alpha}} \leq C$, avec $r > 0$ dépendant de p, q et α. Ceci est fait dans le lemme 4.3.

Ensuite, si T est un terme du type (12), (13) ou (14), on veut estimer T/ρ^2 en norme $C^{0,\alpha}$. T est contraction par rapport à g de tenseurs du type ci-dessus. L'idée est de remplacer les contractions par rapport à g par celles par rapport à la métrique euclidienne, en utilisant $\operatorname{tr}_g T = \operatorname{tr} T/\lambda$. Comme $\lambda = \mathcal{O}(1)|z|^{-2q}$, ceci introduit une puissance de $|z|$ que l'on répartit entre le facteur $1/\rho^2 = \mathcal{O}(1)|z|^{-2q}$ et les $|z|^r$ que l'on doit introduire pour les tenseurs A, DA, *etc.* Ensuite, on utilise :

$$\big\|\operatorname{tr}(S \otimes T)\big\|_{C^{0,\alpha}} \leq C \|S\|_{C^{0,\alpha}} \|T\|_{C^{0,\alpha}}.$$

Ceci est fait dans le lemme 4.4 et nous donne l'estimée voulue pour le numérateur de Q_φ divisé par ρ^2. Pour le terme G du dénominateur, l'estimée

$$\|G\|_{C^{0,\alpha}} \leq C \|\varphi\|^2_{C^{2,\alpha}}$$

est facile à obtenir. Si $\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}}$ est assez petite — inférieure à un ϵ uniforme —, on a $|G| \leq \frac{1}{2}$ et donc l'estimée $C^{0,\alpha}$ de $(1+G)^{-3/2}$.

LEMME 4.3. — *Si $\gamma \geq \alpha \geq 0$, on a :*

$$\big\| |z|^{(1+2\gamma)q} A \big\|_{C^{0,\alpha}} \leq C, \tag{16}$$

$$\big\| |z|^{(1+2\gamma)(q+1)} DA \big\|_{C^{0,\alpha}} \leq C, \tag{17}$$

$$\big\| |z|^{1+2\gamma} R \big\|_{C^{0,\alpha}} \leq C, \tag{18}$$

$$\big\| |z|^{(1+2\gamma)(q+1)} D_g A \big\|_{C^{0,\alpha}} \leq C, \tag{19}$$

$$\big\| |z|^{1+2\gamma} D_g^2 \varphi \big\|_{C^{0,\alpha}} \leq C \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}}. \tag{20}$$

Les constantes C dépendent de c, p, q, α et γ.

Preuve de (16). — Notons ∂x_1, ∂x_2 la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $z = x_1 + ix_2$; soient $A_{ij} = A(\partial x_i, \partial x_j)$ les composantes de A. Par définition, la norme $C^{0,\alpha}$ de A est le sup des $\|A_{ij}\|_{C^{0,\alpha}}$.

$$\begin{aligned} |z|^{(1+2\gamma)q} A_{ij} &= |z|^{(1+2\gamma)q} \operatorname{Re}\big(\mathcal{O}(1) z^{p-1-q}\big) \\ &= \operatorname{Re}\Big(\mathcal{O}(1) z^{p-1} \Big(\frac{|z|^{1+2\gamma}}{z}\Big)^q\Big). \end{aligned}$$

Si $\gamma \geq \alpha$, les parties réelles et imaginaires de la fonction $|z|^{1+2\gamma}/z = \bar{z}/|z|^{1-2\gamma}$ sont $C^{0,\alpha}$. Les parties réelles et imaginaires de z^{p-1} sont C^∞. $\mathcal{O}(1)$ est une fonction C^∞ de norme C^3 uniformément bornée. Donc le terme de droite est de norme $C^{0,\alpha}$ uniformément bornée, ce qui montre (16).

Preuve de (17). — Notons $A_{ijk} = DA(\partial x_i, \partial x_j, \partial x_k)$.

$$A_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_{jk} = \operatorname{Re}\left(\frac{d}{dz}\mathcal{O}(1)z^{p-1-q}\right) = \operatorname{Re}\left(\mathcal{O}(1)z^{p-2-q}\right).$$

Dans le terme de droite, $\mathcal{O}(1)$ est une fonction holomorphe dont on contrôle la norme C^2 sur U.

$$|z|^{(1+2\gamma)(q+1)}A_{ijk} = \operatorname{Re}\left(\mathcal{O}(1)z^{p-1}\left(\frac{|z|^{1+2\gamma}}{z}\right)^{q+1}\right);$$

d'où le résultat.

Preuve de (18). — Notons $R_{ijk} = R(\partial x_i, \partial x_j, \partial x_k)$. En utilisant la formule pour la connexion d'une métrique conforme (voir [2], page 182) avec $g = \lambda|\mathrm{d}z|^2$, on obtient :

$$R_{ijk} = \frac{1}{2\lambda}(\lambda_i \delta_{jk} + \lambda_j \delta ik - \lambda_k \delta_{ij}).$$

En utilisant $\nabla|z| = z/|z|$, on obtient :

$$\lambda_i = \mathcal{O}(1)x_i|z|^{-2q-2} + \mathcal{O}(1)|z|^{-2q}.$$

Les $\mathcal{O}(1)$ sont des fonctions C^∞ dont on contrôle la norme C^2.

$$|z|^{1+2\gamma}\frac{\lambda_i}{\lambda} = \mathcal{O}(1)\frac{x_i}{|z|^{1-2\gamma}} + \mathcal{O}(1)|z|^{1+2\gamma}.$$

Cette fonction est uniformément bornée en norme $C^{0,\alpha}$.

Les inégalités (19) et (20) s'obtiennent comme je l'ai déjà expliqué en écrivant $D_gT = DT - \operatorname{tr} T \otimes R$. □

Avant de continuer, montrons la dernière assertion du théorème 4.2. La première inégalité vient de $|\mathrm{d}\varphi|_g = \lambda^{-1/2}|\mathrm{d}\varphi|$ et $\lambda^{-1} = \mathcal{O}(1)|K|^\beta$. Pour la deuxième, d'après (20) avec $\gamma = \alpha = 0$, on a $|z| \times |D_g^2\varphi| \leq C\|\varphi\|_{C^2}$ donc

$$|D_g^2|_g = \lambda^{-1}|D_g^2\varphi| \leq C|z|^{2q-1}\|\varphi\|_{C^2} \leq C|K|^{(2q-1)\beta/2q}\|\varphi\|_{C^2}.$$

Le lemme suivant produit les estimées voulues pour chaque terme qui intervient dans l'expression du terme quadratique.

Pour un tenseur T d'ordre $2k$, je note $\operatorname{tr}_g^k T$ la fonction obtenue en contractant k fois par rapport à g. Cette notation est ambiguë puisqu'elle ne précise pas comment on contracte.

L'ingrédient essentiel du lemme sera la formule :

$$\operatorname{tr}_g^k T = \lambda^{-k} \operatorname{tr}^k T \quad \text{si} \quad g = \lambda |\mathrm{d}z|^2.$$

LEMME 4.4. — *Soit T un terme du type* (12), (13) *ou* (14) *et $2k$ l'ordre de T. Si $\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}} \leq 1$ et $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{6}$, alors :*

$$\|\rho^{-2} \operatorname{tr}_g^k T\|_{C^{0,\alpha}} \leq C \|\varphi\|^2_{C^{2,\alpha}}.$$

Preuve.

• Pour les termes du type (12), on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho^2} \operatorname{tr}_g^{1+m+n} A \otimes (\varphi A)^m \otimes (\mathrm{d}\varphi)^{2n} \\
&\qquad = \mathcal{O}(1) |z|^{2(m+n)q} \operatorname{tr}^{1+m+n} \varphi^m (\mathrm{d}\varphi)^{2n} \otimes A^{m+1} \\
&\qquad = \mathcal{O}(1) \operatorname{tr}^{1+m+n} \varphi^m (\mathrm{d}\varphi)^{2n} \otimes \left(|z|^{(1+2\gamma)q} A\right)^{m+1}
\end{aligned}$$

avec

$$\gamma = \frac{m+2n-1}{2m+2}.$$

Comme $m + 2n \geq 2$, on vérifie facilement que $\gamma \geq \frac{1}{6}$ donc $\gamma \geq \alpha$. D'après le lemme 4.3, la norme $C^{0,\alpha}$ de ce terme est bornée par

$$C\big(\|\varphi\|_{C^{1,\alpha}}\big)^{m+2n}$$

avec $m + 2n \geq 2$.

• Pour les termes du type (13), on a de la même façon :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho^2} \operatorname{tr}_g^{2+m+n} \varphi D_g A \otimes (\varphi A)^m \otimes (\mathrm{d}\varphi)^{2n+1} \\
&\qquad = \mathcal{O}(1) \operatorname{tr}^{2+m+n} \varphi^{m+1} (\mathrm{d}\varphi)^{2n+1} \\
&\qquad\qquad \otimes \left(|z|^{(1+2\gamma)(q+1)} D_g A\right) \otimes \left(|z|^{(1+2\gamma)q} A\right)^m
\end{aligned}$$

avec

$$\gamma = \frac{q + qm + 2qn - 1}{2(qm + q + 1)}.$$

On vérifie facilement que $\gamma \geq \frac{1}{6}$ sauf si $(q, m, n) = (1, 0, 0)$ où on obtient $\gamma = 0$. Je traite ce cas dans le lemme 4.5.

- Pour les termes du type (14)

$$\frac{1}{\rho^2}\,\mathrm{tr}_g^{1+m+n}\, D_g^2\varphi\otimes(\varphi A)^m\otimes(\mathrm{d}\varphi)^{2n}$$
$$=\mathcal{O}(1)\,\mathrm{tr}^{1+m+n}\,\varphi^m(\mathrm{d}\varphi)^{2n}$$
$$\otimes\left(|z|^{1+2\gamma}D_g^2\varphi\right)\otimes\left(|z|^{(1+2\gamma)q}A\right)^m$$

avec

$$\gamma=\frac{qm+2qn-1}{2qm+2}\cdot$$

On vérifie facilement, en utilisant $m+2n\geq 1$, que l'on a $\gamma\geq\frac{1}{6}$ sauf si $(q,m,n)=(1,1,0)$ où on obtient $\gamma=0$. Je traite ce cas dans le lemme 4.5. □

Il reste à traiter les deux termes pour lesquels cette technique n'a pas marché.

LEMME 4.5. — *Pour le terme du type* (13) *avec* $(q,m,n)=(1,0,0)$, *on a :*

$$\mathrm{tr}_g^2\,\varphi D_g A\otimes\,\mathrm{d}\varphi=0.$$

Pour le terme du type (14) *avec* $(q,m,n)=(1,1,0)$, *on a :*

$$\left\|\rho^{-2}\,\mathrm{tr}_g^2\,D_g^2\varphi\otimes\varphi A)\right\|_{C^{0,\alpha}}\leq C\|\varphi\|^2_{C^{2,\alpha}}.$$

Preuve. — Pour tout point x du bout, soit e_i une base orthonormée pour g, géodésique en x. Comme D_gA est un tenseur complètement symétrique, il n'y a qu'une façon de contracter :

$$\mathrm{tr}_g^2\,\varphi D_gA\otimes\,\mathrm{d}\varphi=\sum_{i,j}D_gA(e_j,e_i,e_i)\,\mathrm{d}\varphi(e_j).$$

Or en x,

$$\sum_i D_gA(e_j,e_i,e_i)=\sum_i e_j\cdot A(e_i,e_i)=0$$

car $\mathrm{tr}_g A=2H=0$ sur le bout.

Il y a deux façons de contracter $\varphi A\otimes D_g^2\varphi$. La première donne :

$$\mathrm{tr}_g^2(\varphi A\otimes D_g^2\varphi)=\sum_{i,j}\varphi A(e_i,e_i)D_g^2\varphi(e_j,e_j)=0.$$

La seconde donne :

$$\operatorname{tr}_g^2(\varphi A \otimes D_g^2\varphi) = \sum_{i,j} \varphi A(e_i, e_j) D_g^2\varphi(e_i, e_j).$$

On écrit $D_g^2\varphi = D^2\varphi - \operatorname{tr} R \otimes \mathrm{d}\varphi$. Le terme qui vient de $D^2\varphi$ peut s'estimer avec la technique du lemme 4.4. Le terme qui vient de $R \otimes \mathrm{d}\varphi$ est

$$\sum_{i,j,k} \varphi A(e_i, e_j) R(e_i, e_j, \partial x_k)\, \mathrm{d}\varphi(\partial x_k) = \operatorname{tr} S \otimes \mathrm{d}\varphi.$$

Je note encore $\partial x_1, \partial x_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Le tenseur S est le tenseur d'ordre 1 défini par :

$$S(X) = \sum_{i,j} A(e_i, e_j) R(e_i, e_j, X) = \operatorname{tr}_g^2(A \otimes R)(X).$$

La technique du lemme 4.4 était la suivante : on estimait d'abord A et R, et ensuite on contractait. Comme cela ne marche pas, il faut être plus fin : on contracte d'abord — on obtient le tenseur S — et on estime après.

Il se passe essentiellement la chose suivante : aucune des fonctions $z/|z|$ et $|z|/z$ n'est $C^{0,\alpha}$ pour $\alpha > 0$, mais leur produit l'est. On va voir que S/ρ^2 est uniformément borné en norme $C^{0,\alpha}$.

En utilisant $g = \lambda\langle\ ,\ \rangle$, on a :

$$R(e_i, e_j, e_k) = \frac{1}{2\lambda^2}\left(D\lambda(e_i) g(e_j, e_k) + D\lambda(e_j) g(e_i, e_k) - D\lambda(e_k) g(e_i, e_j)\right),$$

$$S(e_k) = \frac{1}{2\lambda^2} \sum_{i,k} A(e_i, e_k) D\lambda(e_i) + A(e_k, e_i) D\lambda(e_i) - A(e_i, e_i) D\lambda(e_k).$$

En utilisant la symétrie de A et $\operatorname{tr}_g A = 0$, on obtient :

$$S(X) = \lambda^{-2} \operatorname{tr}_g A \otimes D\lambda(X) = \lambda^{-3} \operatorname{tr} A \otimes D\lambda(X) = \lambda^{-3} A(\nabla\lambda, X)$$

où ∇ est le gradient pour la métrique euclidienne. En utilisant $\nabla|z| = z|z|^{-1}$, on obtient si $q = 1$,

$$\begin{aligned}\rho^{-2} S(\partial x_k) &= |z|^4 \operatorname{Re}\left(\mathcal{O}(1) z^{p-2}(\mathcal{O}(1)|z|^{-4} z + \mathcal{O}(1)|z|^{-2})\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\mathcal{O}(1) z^{p-1} + \mathcal{O}(1) z^{p-1}\bar{z}\right).\end{aligned}$$

Donc S/ρ^2 est uniformément borné en norme $C^{0,\alpha}$, ce qui montre le lemme. □

5. On trouve enfin ξ et φ.

Dans cette partie, $\tau > 0$ est un réel fixé, aussi petit qu'il sera nécessaire. $W(\Gamma)$ est l'espace des applications de $V(\Gamma)$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\xi \in W(\Gamma)$, on désigne par $M(\tau,\xi)$ la surface initiale construite dans la partie 2; σ est la symétrie par rapport au plan horizontal $x_3 = 0$; α et $\bar{\alpha}$ sont deux réels fixés (indépendants de τ) tels que $0 < \bar{\alpha} < \alpha \leq \frac{1}{6}$.

Soit $\mathcal{B}$ l'espace de Banach

$$\mathcal{B} = W(\Gamma) \times C^{2,\bar{\alpha}}(M(\tau,0),\chi).$$

Soit $\mathcal{C}$ le sous ensemble convexe de $\mathcal{B}$

$$\mathcal{C} = \{(\xi,\phi) \in \mathcal{B},\ |\xi| \leq \tau,\ \|\phi\|_{C^{2,\alpha}} \leq \tau^{7/8},\ \phi\circ\sigma = \phi\}.$$

Comme $\bar{\alpha} < \alpha$, l'injection $C^{2,\alpha} \to C^{2,\bar{\alpha}}$ est compacte, donc $\mathcal{C}$ est compact pour la norme de $\mathcal{B}$.

Soit $D_\xi : M(\tau,0) \to M(\tau,\xi)$ le difféomorphisme construit dans la section 2.7. Pour tout $(\xi,\phi) \in \mathcal{C}$, on définit φ sur $M(\tau,\xi)$ par $\varphi = \phi \circ D_\xi^{-1}$. D'après la proposition 2.11,

$$\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\chi)} \leq C\tau^{7/8}, \quad \varphi\circ\sigma = \varphi.$$

On pose :

$$f = -\frac{2H}{\eta^2} - \frac{Q_\varphi}{\eta^2};$$

f est orthogonale au noyau approché $\mathcal{K}$ si et seulement si

$$\forall p, i, \quad \langle f, e_{p,i}\rangle_{L^2(h)} = 0$$

où $e_{p,i}$ est la base de $\mathcal{K}$ construite dans la partie 3.

On note $\langle f, e_p\rangle \in \mathbb{R}^3$ le vecteur dont les composantes sont $\langle f, e_{p,i}\rangle$ pour $i = 1,2,3$. On écrit :

$$\langle f, e_p\rangle = \left\langle \frac{-2H}{\eta^2}, \nu_p\right\rangle + \left\langle -\frac{Q_\varphi}{\eta^2}, \nu_p\right\rangle + \langle f, e_p - \nu_p\rangle.$$

D'après la proposition 2.6, le premier terme est égal à :

$$\int_{M[p]} \frac{-2H}{\eta^2}\nu\, \mathrm{d}h = \int_{M[p]} -2H\nu\, \mathrm{d}g = -2\pi\xi(p).$$

On définit $\zeta(p) \in \mathbb{R}^3$ par

$$2\pi\zeta(p) = \left\langle -\frac{Q_\varphi}{\eta^2}, \nu_p \right\rangle + \langle f, e_p - \nu_p \rangle,$$

de sorte que f est perpendiculaire au noyau approché si et seulement si pour tout p on a $\zeta(p) - \xi(p) = 0$.

Comme la surface initiale, φ et les e_p sont invariantes par σ, on a $\sigma(\zeta(p)) = \zeta(p)$; donc $\zeta(p)$ est horizontal et l'application $\zeta : V(\Gamma) \to \mathbb{R}^2$ est un élément de $W(\Gamma)$. Soit u la solution de

$$\mathcal{L}_h u = f - \mathcal{P}(f).$$

On définit $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ par :

$$\mathcal{F}(\xi, \phi) = (\zeta, u \circ D_\xi).$$

Par la théorie elliptique standard, $\mathcal{F}$ est continu. On cherche un point fixe de $\mathcal{F}$; pour ceci, il suffit de montrer que $\mathcal{F}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$, c'est-à-dire estimer ζ et $u \circ D_\xi$.

5.1. Estimée L^2 de $\mathcal{L}_h u$.

Dans cette section et la suivante, p, e et r désignent respectivement un sommet, une arête et un rayon quelconques de Γ. Sur chaque domaine $\Sigma[e]$ ou $\Sigma[r]$ de $M(\tau, \xi)$, on utilise les coordonnées (u, w) introduites dans la partie 2, à ne pas confondre avec la fonction u solution de $\mathcal{L}_h u = f - \mathcal{P}(f)$.

Sur le domaine $a \leq u \leq a + 1$ de $\Sigma[e]$ ou $\Sigma[r]$, on a d'après la proposition 2.6 :

$$|H| \leq C\tau, \quad 1/\eta^2 \leq C, \quad |H/\eta^2| \leq C\tau.$$

Sur le domaine $\frac{1}{2}(R-1) \leq u \leq \frac{1}{2}(R+1)$ de $\Sigma[e]$, on a :

$$|H| \leq C\tau^2, \quad 1/\eta^2 \leq C\tau^{-1/2}, \quad |H/\eta^2| \leq C\tau^{3/2}.$$

Donc sur M, on a :

$$|H/\eta^2| \leq C\tau.$$

Sur $\Sigma[p]$ et $\Sigma[r]$, on a $\rho = \eta$; donc d'après la proposition 4.1,

$$|Q_\varphi/\eta^2| \leq C\tau^{7/4}.$$

Sur $\Sigma[e]$, on a d'après la proposition 4.1 :

$$|Q_\varphi/\rho^2| \leq C\tau^{7/4}, \quad \rho^2 \leq C, \quad \eta^{-2} \leq C\tau^{-1/2}, \quad |Q_\varphi/\eta^2| \leq C\tau^{5/4}.$$

Donc sur M, on a :

$$|Q_\varphi/\eta^2| \leq C\tau^{5/4}, \quad |f| \leq C\tau, \quad \|f\|_{L^2(h)} \leq C\tau,$$
$$\left\|\mathcal{P}(f)\right\|_{L^2(h)} \leq \|f\|_{L^2(h)} \leq C\tau.$$

Et finalement :

$$\|\mathcal{L}_h u\|_{L^2(h)} \leq C\tau.$$

5.2. Estimée $C^{0,\alpha}$ de $\mathcal{L}_\chi u$.

La fonction u est solution de :

$$\mathcal{L}_\chi u = \frac{\eta^2}{\rho^2}\mathcal{L}_h u = -\frac{2H}{\rho^2} - \frac{Q_\varphi}{\rho^2} - \frac{\eta^2}{\rho^2}\mathcal{P}(f).$$

Sur le support de H, les métriques g et χ sont uniformément C^∞ équivalentes, donc d'après la proposition 2.6, on a pour tout entier k (on a juste besoin de $k = 1$) :

$$\|H\|_{C^k(\chi)} \leq C(k)\tau, \quad \|1/\rho^2\|_{C^k(\chi)} \leq C(k), \quad \|H/\rho^2\|_{C^k(\chi)} \leq C(k)\tau.$$

Sur M, on a d'après la proposition 4.1 :

$$\|Q_\varphi/\rho^2\|_{C^{0,\alpha}(\chi)} \leq C\tau^{7/4}.$$

Il reste à estimer $\mathcal{P}(f)$. Soit u_i une base orthonormée du noyau approché, $\mathcal{L}_h u_i + \lambda_i u_i = 0$ avec $\lambda_i \in [-1,1]$. De façon équivalente, les u_i sont solutions de :

$$\mathcal{L}_\chi u_i + \frac{\eta^2}{\rho^2}\lambda_i u_i = 0.$$

En utilisant la proposition 2.9, on obtient :

$$\|u_i\|_{L^2(h)} = 1, \quad \|u_i\|_{C^0} \leq C\|u_i\|_{L^2(h)} \leq C, \quad \|u_i\|_{C^{2,\alpha}(\chi)} \leq C\|u_i\|_{C^0} \leq C.$$

D'après (11), on a :

$$\|\eta^2/\rho^2\|_{C^k(\chi)} \leq C(k).$$

Donc

$$\|\eta^2\rho^{-2}u_i\|_{C^{2,\alpha}(\chi)} \leq C.$$

Pour estimer $\mathcal{P}(f)$, on écrit :

$$\mathcal{P}(f) = \sum \langle f, u_i \rangle u_i.$$

Par Hölder,

$$\left|\langle f, u_i \rangle\right| \leq \|f\|_{L^2(h)}, \quad \left\|\eta^2\rho^{-2}\mathcal{P}(f)\right\|_{C^{2,\alpha}(\chi)} \leq C\|f\|_{L^2(h)}.$$

D'où :

$$\|\mathcal{L}_\chi u\|_{C^{0,\alpha}(\chi)} \leq C\tau.$$

5.3. Fin de la démonstration.

Comme u est orthogonale au noyau approché

$$\|u\|_{L^2(h)} \leq \|\mathcal{L}_h u\|_{L^2(h)} \leq C\tau,$$

d'après la proposition 2.9, on a :

$$\|u\|_{C^0} \leq C\left(\|u\|_{L^2(h)} + \|\mathcal{L}_h u\|_{L^2(h)}\right) \leq C\tau.$$

En utilisant l'estimée de Schauder de la même proposition,

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\chi)} \leq C\left(\|u\|_{C^0} + \|\mathcal{L}_\chi u\|_{C^{0,\alpha}(\chi)}\right) \leq C\tau.$$

D'après la proposition 2.11,

$$\|u \circ D_\xi\|_{C^{2,\alpha}(\chi)} \leq C\tau$$

où la constante C est indépendante de τ. En prenant τ assez petit, on a donc $\|u \circ D_\xi\|_{C^{2,\alpha}} \leq \tau^{7/8}$.

Il reste à estimer ζ. Par Hölder et la proposition 3.3, pour tout ϵ, si τ est assez petit,

$$\begin{aligned} |2\pi\zeta(p)| &\leq \|\nu_p\|_{L^2(h)}\|Q_\varphi/\eta^2\|_{L^2(h)} + \|f\|_{L^2(h)}\|e_p - \nu_p\|_{L^2(h)} \\ &\leq C\tau^{5/4} + C\epsilon\tau \end{aligned}$$

où les constantes C sont indépendantes de τ. En prenant ϵ et τ assez petit, on obtient $|\zeta| \leq \tau$.

On a donc $(\zeta, u \circ D_\xi) \in \mathcal{C}$. Le théorème du point fixe de Schauder (théorème 11.1 de Gilbarg Trudinger [4]) nous donne un point fixe $(\xi, \phi) = (\zeta, u \circ D_\xi)$ de $\mathcal{F}$. Comme $\xi = \zeta$, on a $\mathcal{P}(f) = 0$. Comme $\varphi = \phi \circ D_\xi^{-1} = u$, φ est solution sur $M(\tau, \xi)$ de

$$\Delta\varphi + |A|^2\varphi = -2H - Q_\varphi$$

qui est l'équation que l'on cherchait initialement à résoudre. □

Il reste à vérifier que $X_\varphi = X + \varphi\nu$ a les propriétés voulues. Pour τ assez petit, $|\varphi A| \leq C\tau^{7/8} < 1$ donc X_φ est une immersion. *A priori*, X_φ n'est que de classe $C^{2,\alpha}$. Mais comme X_φ est minimale, X_φ est en fait analytique.

Si Γ ne contient pas deux rayons qui pointent dans la même direction, pour τ assez petit, le graphe $\Gamma(\tau, \xi)$ est plongé, donc si τ est assez petit, X et X_φ aussi.

Enfin, X_φ est de courbure totale finie : d'après le théorème 4.2, la condition $\|\varphi\|_{C^2(X)} \leq 1$ implique que $|d\varphi|_g$ et $|D_g^2\varphi|_g$ sont bornés par $C|K|^{1/2}$, où K est la courbure de la surface initiale. Comme $|K|$ décroît exponentiellement pour des bouts de type Scherk, $|\mathrm{d}\varphi|_g$ et $|D_g^2\varphi|_g$ aussi. Ceci garantit que le graphe de φ sur M aura des bouts de courbure totale finie, donc de type Scherk.

A. Appendice.

A.1. Normes C^k.

Les notations de cette partie sont celles de [3]. Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n, éventuellement à bord. Je note $T_qM = (T^*M)^{\otimes q}$ les tenseurs covariants d'ordre q sur (M, g). La métrique g de M induit une métrique sur T_qM :

$$g(S, T) = \sum_{i_1, \ldots, i_q} S(e_{i_1}, \ldots, e_{i_q})\, T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_q})$$

où e_i est une base orthonormée. Cette définition ne dépend pas de la base orthonormée.

Je note $|T|_g$ la norme associée à ce produit scalaire.

Pour un tenseur T d'ordre q, la dérivée covariante D_gT est le tenseur d'ordre $q+1$ défini par :

$$D_gT(X, X_1, \dots, X_q) = X \cdot T(X_1, \dots, X_q) - \sum_{i=1}^{q} T(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_q)$$

D_g^kT est défini par récurrence par :

$$D_g^{k+1}T = D_g(D_g^kT).$$

Pour une fonction, D_gf est la différentielle et ne dépend pas de la métrique, et D_g^2f est le hessien de f.

Pour un tenseur T d'ordre q, on définit $\|T\|_{C^k(g)}$ par

$$\|T\|_{C^k(g)} = \sum_{i=0}^{k} \sup_{x\in M} \left|D_g^iT(x)\right|_g.$$

Pour un tenseur d'ordre q, la contraction $\operatorname{tr}_{g;i,j} T$ est le tenseur d'ordre $(q-2)$ obtenu en contractant aux places i et j par rapport à la métrique g, c'est-à-dire que par exemple :

$$\operatorname{tr}_{g;1,2} T(X_3, \cdots X_q) = \sum_k T(e_k, e_k, X_3, \cdots X_q).$$

Cette définition ne dépend pas de la base orthonormée pour g.

La dérivée covariante et les contractions vérifient :

$$D_g \operatorname{tr}_{g;i,j} T = \operatorname{tr}_{g;i+1,j+1} D_gT,$$
$$D_g(S \otimes T) = (D_gS) \otimes T + S \otimes (D_gT).$$

On en déduit que :

$$\|\operatorname{tr}_g T\|_{C^k(g)} \le \|T\|_{C^k(g)}.$$

Deux métriques g, g' sont dites C^k *équivalentes pour une constante* c si elles vérifient :

$$\|g\|_{C^k(g')} \le c, \quad \|g'\|_{C^k(g)} \le c.$$

Proposition A.1. — *Soient g, g' deux métriques sur M. Supposons qu'il existe une constante c telle que :*

$$\|g\|_{C^k(g')} \leq c \qquad \|g'\|_{C^0(g)} \leq c.$$

Alors g et g' sont C^k équivalentes pour une constante ne dépendant que de c, q, k, n, et les normes $C^k(g)$ et $C^k(g')$ sur T_qM sont équivalentes par des constantes ne dépendant que de c, q, k, n.

Dans ce qui suit, une constante est dite *uniforme* si elle ne dépend que de c, n. Par exemple, si les métriques sont conformes, $g' = \lambda g$, elles sont uniformément C^k équivalentes si pour des constantes uniformes :

$$\|\lambda\|_{C^k(g)} \leq C, \quad \|\lambda^{-1}\|_{C^0} \leq C.$$

Pour un difféomorphisme ϕ entre deux domaines de $\mathbb{R}^n$, la norme $\|\mathrm{d}\phi\|_{C^k}$ est définie comme le sup des normes C^k des coefficients de la matrice de $d\phi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Notons $\mathrm{d}x^2$ la métrique euclidienne. Alors $\phi^*\mathrm{d}x^2$ et $\mathrm{d}x^2$ sont uniformément C^k équivalentes équivaut à :

$$\|\mathrm{d}\phi\|_{C^k} \leq C, \quad \|\mathrm{d}\phi^{-1}\|_{C^0} \leq C.$$

Preuve de cette proposition par récurrence sur k. — Si $k = 0$, les normes ponctuelles $|T|_g$ et $|T|_{g'}$ sont uniformément équivalentes. En effet, soient e_i une base orthonormée pour g et e'_i une base orthonormée pour g'. Alors,

$$|g|_{g'} = \Big(\sum_{i,j} g(e'_i, e'_j)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C\,;$$

donc pour tout i, on a $|e'_i|_g \leq C$. Maintenant, pour tout tenseur T,

$$\begin{aligned} |T|^2_{g'} &= \sum T(e_{i_1}, \dots, e_{i_q})^2 \\ &\leq \sum \big(T(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) g(e_{j_1}, e'_{i_1}), \dots, g(e_{j_q}, e'_{i_q})\big)^2. \end{aligned}$$

Comme $|g(e_j, e'_i)| \leq C$, c'est borné par $C|T|^2_g$.

Supposons maintenant que la proposition soit vraie pour k, et montrons-la pour $k+1$. On suppose donc que $\|g\|_{C^{k+1}(g')} \leq C$. Il faut évaluer D_gT en norme $C^k(g)$.

$$\begin{aligned} D_gT(X, X_1, \cdots X_q) &= D_{g'}T(X, X_1, \cdots X_q) \\ &\quad + \sum_j T(X_1, \cdots (\nabla'_X Xj - \nabla_X X_j) \cdots X_q) \end{aligned}$$

où ∇' est la connexion de la métrique g'. Posons :

$$R(X,Y,Z) = g(\nabla'_X Y - \nabla_X Y, Z).$$

On écrit le dernier terme de $D_g T$ comme

$$\sum_{j,k} T(X_1, \cdots X_{j-1}, e_k, \cdots X_q) R(X, X_j, e_k)$$
$$= \sum_j \operatorname{tr}_{g;j,q+3}(T \otimes R)(X_1, \cdots X_q, X, X_j).$$

C'est-à-dire que $D_g T$ est égale à $D_{g'} T$ plus des termes qui sont — à permutation des indices près — de la forme $\operatorname{tr}_g(T \otimes R)$. On remarque que $R(X,Y,Z)$ est symétrique en X, Y et que :

$$D_{g'} g(X,Y,Z) = -R(X,Y,Z) - R(X,Z,Y).$$

Comme dans la preuve du théorème de Levi Civita, on obtient :

$$R(X,Y,Z) = \tfrac{1}{2}\big(D_{g'}g(Z,X,Y) - D_{g'}g(X,Y,Z) - D_{g'}g(Y,Z,X)\big).$$

Par hypothèse de récurrence, les normes $C^k(g)$ et $C^k(g')$ sont uniformément équivalentes, donc pour tout tenseur T,

$$\|D_{g'}T\|_{C^k(g)} \leq C\|D_{g'}T\|_{C^k(g')} \leq C\|T\|_{C^{k+1}(g')}.$$

En particulier pour $T = g$,

$$\|D_{g'}g\|_{C^k(g)} \leq C\|g\|_{C^{k+1}(g')} \leq C.$$

On en déduit que $\|R\|_{C^k(g)} \leq C$ et

$$\|D_g T\|_{C^k(g)} \leq C\|D_{g'}T\|_{C^k(g)} + C\|T\|_{C^k(g)}.$$

D'où $\|T\|_{C^{k+1}(g)} \leq C\|T\|_{C^{k+1}(g')}$. En prenant $T = g'$, on obtient la première assertion, ce qui permet d'inverser les rôles de g et g' et montre la deuxième assertion pour tout T. □

A.2. Normes $C^{k,\alpha}$.

Pour définir une norme globale $C^{k,\alpha}$, on suppose que (M,g) vérifie les hypothèses suivantes, pour une constante $c > 0$ et un entier k.

HYPOTHÈSE A.2. — *(M,g) est compacte, de dimension n, et est recouverte par un nombre fini d'ouverts Ω_i tels que pour une constante c :*

1) Chaque Ω_i est convexe (pour les géodésiques de la métrique g), de diamètre inférieur à c, et pour tout point x de M, il existe un Ω_i tel que la boule de centre x et de rayon $1/c$ soit contenue dans Ω_i.

2) On a des domaines $U_i \subset \mathbb{R}^n$ et des paramétrisations $\varphi_i : U_i \to \Omega_i$ telles que les métriques $\varphi_i^* g$ et $\mathrm{d}x^2$ sont C^{k+1} équivalentes pour la constante c sur U_i (on rappelle que $\mathrm{d}x^2$ est la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$).

Dans cette section et la suivante, une constante est dite *uniforme* si elle ne dépend que de c, n, α. À noter que ces l'hypothèses impliquent que le rayon d'injectivité de (M,g) est uniformément minoré, et que sa courbure est uniformément bornée.

Pour un tenseur T d'ordre q sur $\mathbb{R}^n$, notons $T_{i_1,\dots,i_q}$ ses composantes sur la base orthonormée canonique. On définit :

$$[T]_{\alpha;x,y} = \sup_{i_1,\dots,i_q} \frac{|T_{i_1,\dots,i_q}(x) - T_{i_1,\dots,i_q}(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Pour un domaine U de $\mathbb{R}^n$, on définit la semi-norme :

$$[T]_{\alpha;U} = \sup_{x,y\in U} [T]_{\alpha;x,y}.$$

Pour un tenseur T sur M, on définit :

$$\begin{aligned}
&[T]_{\alpha;\Omega_i,g} = [\varphi_i^* T]_{\alpha;U_i}, \\
&\|T\|_{C^{k,\alpha}(\Omega_i,g)} = \|T\|_{C^k(\Omega_i,g)} + [D_g^k T]_{\alpha;\Omega_i,g}, \\
&\|T\|_{C^{k,\alpha}(M,g)} = \sup_i \|T\|_{C^{k,\alpha}(\Omega_i,g)}.
\end{aligned}$$

On vérifie que

$$\|S \otimes T\|_{C^{0,\alpha}} \leq \|S\|_{C^{0,\alpha}} \|T\|_{C^{0,\alpha}}$$

et si (M,g) vérifie les hypothèses A.2, on a des constantes uniformes C telles que :

$$\|\operatorname{tr}_g T\|_{C^{0,\alpha}(\Omega_i,g)} \leq C \|T\|_{C^{0,\alpha}(\Omega_i,g)}, \quad \|T\|_{C^{0,\alpha}(\Omega_i,g)} \leq C \|T\|_{C^1(\Omega_i,g)}.$$

La norme C^1 de droite est celle définie au moyen de la dérivée covariante.

La notation $C^{k,\alpha}(M,g)$ est justifiée par le fait que si on a un autre recouvrement de M par des Ω'_j, qui vérifie les hypothèses A.2, la norme $C^{k,\alpha}$ définie avec les Ω'_j sera uniformément équivalente à celle définie avec les Ω_i. Plus généralement, on a :

PROPOSITION A.3. — *Soient g et g' deux métriques sur M. Supposons qu'il existe un recouvrement de (M,g) (resp. (M,g')) par des ouverts Ω_i (resp. Ω'_j) qui vérifie les hypothèses* A.2 *pour un entier k et une constante c. Si les métriques g et g' sont C^{k+1} équivalentes pour la constante c, alors les normes $C^{k,\alpha}(M,g)$ et $C^{k,\alpha}(M,g')$ définies au moyen de ces recouvrements sont équivalentes par des constantes ne dépendant que de c, k, n, α.*

Preuve par récurrence sur k. — Si $k = 0$, on a des paramétrisations :

$$\varphi_i : U_i \to \Omega_i, \quad \varphi'_j : U'_j \to \Omega'_j.$$

Notons d la distance pour la métrique g et d' la distance pour la métrique g'. Il existe un r uniforme tel que $d'(p,q) < r$ implique $d(p,q) < 1/c$. Pour tout $x, y \in U'_j$, si $d'(\varphi'_j(x), \varphi'_j(y)) \geq r$, $|x-y|$ est uniformément minoré ; donc :

$$[\varphi'^{\,*}_j T]_{\alpha;x,y} \leq 2\|\varphi'^{\,*}_j T\|_{C^0}|x-y|^{-\alpha} \leq C\|T\|_{C^0(g')} \leq C\|T\|_{C^0(g)}.$$

Si $d'(\varphi'_j(x), \varphi'_j(y)) < r$, soit γ l'unique géodésique minimisante pour la métrique g' reliant $\varphi'_j(x)$ et $\varphi'_j(y)$. Par convexité, γ est incluse dans Ω'_j. Par définition de r, γ est incluse dans $B(\varphi'_j(x), 1/c)$; donc il existe un ouvert Ω_i tel que $\gamma \subset \Omega_i$. Le difféomorphisme $\phi = \varphi_i^{-1} \circ \varphi'_j$ est défini sur un voisinage de $\varphi'^{\,-1}_j(\gamma)$. Les métriques $\phi^* \mathrm{d}x^2$ et $\mathrm{d}x^2$ sont uniformément C^1 équivalentes, donc $\|\mathrm{d}\phi\|_{C^1} \leq C$. Notons ϕ_i^j les composantes de la matrice de $\mathrm{d}\phi$ sur la base orthonormée canonique $\partial x_1 \cdots \partial x_n$ de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que $\mathrm{d}\phi(\partial x_i) = \sum \phi_i^j \partial x_j$. Pour tout tenseur S d'ordre q sur U_i, on écrit :

$$\phi^* S(x)(\partial x_{i_1}, \ldots, \partial x_{i_q}) = \sum S_{j_1,\ldots,j_q}(\phi(x))\phi_{i_1}^{j_1} \cdots \phi_{i_q}^{j_q}(x)$$

$$\begin{aligned}[\phi^* S]_{\alpha;x,y} \leq \sum \big|S_{j_1,\ldots,j_q}(\phi(y))\big| &\times \left| \frac{\phi_{i_1}^{j_1} \cdots \phi_{i_q}^{j_q}(x) - \phi_{i_1}^{j_1} \cdots \phi_{i_q}^{j_q}(y)}{|x-y|^\alpha} \right| \\ &+ \left| \frac{S_{j_1,\ldots,j_q}(\phi(x)) - S_{j_1,\ldots,j_q}(\phi(y))}{|\phi(x)-\phi(y)|^\alpha} \right| \\ &\qquad \times \left| \frac{\phi(x)-\phi(y)}{x-y} \right|^\alpha \big|\phi_{i_1}^{j_1} \cdots \phi_{i_q}^{j_q}(x)\big|.\end{aligned}$$

En utilisant les accroissements finis le long de $\varphi'^{\,-1}_j(\gamma)$ — dont la longueur est bornée par $C|x-y|$ —, on obtient :

$$[\phi^* S]_{\alpha;x,y} \leq C\|S\|_{C^{0,\alpha}(U_i)}.$$

En appliquant ceci à $S = \varphi_i^* T$, on obtient :

$$[\varphi'^{\,*}_j T]_{\alpha;x,y} = [\phi^* \varphi_i^* T]_{\alpha;x,y} \leq C\|\varphi_i^* T\|_{C^{0,\alpha}(U_i)},$$

d'où $\|T\|_{C^{0,\alpha}(M,g')} \leq C\|T\|_{C^{0,\alpha}(M,g)}$.

Ensuite, si la proposition est vraie pour k, montrons-la pour $k+1$. On procède comme pour la proposition A.1. On écrit D_gT comme $D_{g'}T$ plus des termes qui sont — à permutation d'indices près — de la forme $\mathrm{tr}(T\otimes R)$ avec $\|R\|_{C^{k+1}} \leq C$, donc en particulier $\|R\|_{C^{k,\alpha}} \leq C$. On en déduit :

$$\|D_gT\|_{C^{k,\alpha}(g)} \leq \|D_{g'}T\|_{C^{k,\alpha}(g)} + C\|T\|_{C^{k,\alpha}(g)}.$$

Par hypothèse de récurrence, les normes $C^{k,\alpha}(g)$ et $C^{k,\alpha}(g')$ sont uniformément équivalentes, donc on obtient :

$$\|D_gT\|_{C^{k,\alpha}(g)} \leq C\|T\|_{C^{k+1,\alpha}(g')}.$$

ce qui montre la proposition. □

On a souvent besoin de la version locale de la proposition précédente :

PROPOSITION A.4. — *Soit Ω un domaine convexe (pour la métrique g) de (M,g), et g' une métrique C^{k+1} équivalente à g pour une constante c sur U. Supposons qu'on ait des paramétrisations*

$$\varphi : U \to \Omega, \quad \varphi' : U' \to \Omega$$

vérifiant l'hypothèse 2) de A.2. Alors les normes $C^{k,\alpha}(\Omega,g)$ et $C^{k,\alpha}(\Omega,g')$ définies au moyen de ces paramétrisations sont équivalentes par des constantes ne dépendant que de c,k,n,α.

À noter que Ω n'a pas besoin d'être convexe pour la métrique g'. La preuve est exactement la même : pour relier deux points de Ω, on utilise la géodésique $\gamma \subset \Omega$ minimisante pour la métrique g. On utilise les accroissements finis le long de $\varphi^{-1}(\gamma) \subset U$ et ${\varphi'}^{-1}(\gamma) \subset U'$. □

A.3. Estimée de Schauder.

PROPOSITION A.5. — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte vérifiant les hypothèses A.2 pour $k=2$ et une constante c. Soit $Lu = \Delta_g u + au$, où a est une fonction de norme $C^{0,\alpha}(g)$ inférieure à c. Alors on a l'estimée de Schauder :*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(M,g)} \leq C\big(\|u\|_{C^0} + \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(M,g)}\big).$$

La constante C ne dépend que de c,n,α. Elle ne dépend pas du nombre d'ouverts Ω_i du recouvrement.

Preuve. — On utilise l'estimée de Schauder intérieure pour un domaine de $\mathbb{R}^n$ (corollaire 6.3 de Gilbarg-Trudinger [4]). Définissons :

$$L_i u = (L(u \circ \varphi_i^{-1})) \circ \varphi_i = \Delta_{\varphi_i^* g} u + (a \circ \varphi_i) u.$$

En utilisant la formule pour le laplacien en coordonnées locales, on voit que $\Delta_{\varphi_i^* g}$ est uniformément elliptique — au sens où l'ellipticité est contrôlée par une constante uniforme — et à coefficients uniformément $C^{0,\alpha}$ bornés. La fonction $a \circ \varphi_i$ est uniformément $C^{0,\alpha}$ borné sur U_i par hypothèse. Soit $\Omega_i' \subset\subset \Omega_i$ l'ensemble des points dont la distance au bord de Ω_i est supérieure à $1/(2c)$, et $U_i' = \varphi_i^{-1}(\Omega_i')$. Alors $d(U_i', \partial U_i)$ est uniformément minoré. Enfin, le diamètre de U_i est borné. Pour tout fonction $u \in C^{2,\alpha}(M)$, l'estimée de Schauder intérieure appliquée à la fonction $u \circ \varphi_i$ sur U_i donne :

$$\|u \circ \varphi_i\|_{C^{2,\alpha}(U_i')} \leq C\big(\|u \circ \varphi_i\|_{C^0(U_i)} + \|L_i(u \circ \varphi_i)\|_{C^{0,\alpha}(U_i)}\big).$$

Le terme de droite est inférieur à $C(\|u\|_{C^0} + \|Lu\|_{C^{0,\alpha}})$. Cette estimée nous donne déjà l'estimée C^2 de u.

Pour obtenir l'estimée $C^{2,\alpha}$, il faut estimer $\|\varphi_i^* D_g^2 u\|_{C^{0,\alpha}(U_i)}$ pour tout i. Comme les métriques $\varphi_i^* g$ et $\mathrm{d}x^2$ sont uniformément C^3 équivalentes sur U_i, on a d'après la proposition A.4 :

$$\|D^2_{\varphi_i^* g} u \circ \varphi_i\|_{C^{0,\alpha}(U_i')} \leq C \|u \circ \varphi_i\|_{C^{2,\alpha}(U_i')}.$$

Comme $D^2_{\varphi_i^* g} u \circ \varphi_i = \varphi_i^* D_g^2 u$, on obtient :

$$\|\varphi_i^* D_g^2 u\|_{C^{0,\alpha}(U_i')} \leq C(\|u\|_{C^0} + \|Lu\|_{C^{0,\alpha}}).$$

Il reste à étendre cette estimée à U_i tout entier. On procède comme pour la proposition A.3. Pour tout $x, y \in U_i$, si $d(\varphi_i(x), \varphi_i(y)) \geq 1/(2c)$, alors $|x - y|$ est uniformément minoré et

$$[\varphi_i^* D_g^2 u]_{\alpha; x, y} \leq C \|u\|_{C^2}.$$

Si $d(\varphi_i(x), \varphi_i(y)) < 1/(2c)$, il existe un j tel que $B(x, 1/c) \subset \Omega_j$. Alors $\varphi_i(x)$ et $\varphi_i(y)$ sont dans Ω_j'. Posons $\phi = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$. Comme dans la proposition A.3, on a :

$$[\varphi_i^* D_g^2 u]_{\alpha; x, y} = [\phi^* \varphi_j^* D_g^2 u]_{\alpha; x, y} \leq C \|\varphi_j^* D_g^2 u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega_j')},$$

ce qui montre la proposition. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. AUBIN, Non linear Analysis on Manifolds, Monge Ampere Equations, Springer Verlag, 1982.

[2] M.P. DO CARMO, Riemannian Geometry, Birkhäuser, 1992.

[3] S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, Riemannian Geometry, second edition, Springer Verlag, 1990.

[4] D. GILBARG and N.S. TRUDINGER, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd Edition, Springer Verlag, 1983.

[5] N. KAPOULEAS, Complete constant mean curvature surfaces in euclidean three–space, Annals of Math., 131 (1990), 239–330.

[6] H. KARCHER, Embedded minimal surfaces derived from Scherk's examples, Manuscripta Math., 62 (1988), 83–114.

[7] H. KARCHER, Construction of Minimal Surfaces, Surveys in Geometry, University of Tokyo (1989), 1–96, et Lecture Notes n° 12, SFB256, Bonn (1989).

[8] H. KARCHER, The triply periodic surfaces of Alan Schoen and their constant mean curvature companions, Manuscripta Math., 64 (1989), 291–357.

[9] H. KARCHER, Construction of higher genus embedded minimal surfaces, Geom. and Top. of Submanifolds III World Sc. (1990), 174–191.

[10] W.H. MEEKS, H. ROSENBERG, The Geometry of Periodic Minimal Surfaces, Comment. Math. Helvetici, 68 (1993), 538–578.

[11] H. ROSENBERG, Some recent developments in the theory of properly embedded minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$, Séminaire Bourbaki, n° 759 (1992).

Manuscrit reçu le 30 octobre 1995,
accepté le 26 avril 1996.

Martin TRAIZET,
Université Paris VII
UFR de Mathématiques
2 place Jussieu
75251 Paris Cedex 05 (France).
traizet@mathp7.jussieu.fr