ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ÉTIENNE MATHERON

Sigma-idéaux polaires et ensembles d'unicité dans les groupes abéliens localement compacts

Annales de l'institut Fourier, tome 46, nº 2 (1996), p. 493-533

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_2_493_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
46, 2 (1996), 493-533

SIGMA-IDÉAUX POLAIRES ET ENSEMBLES D'UNICITÉ DANS LES GROUPES ABÉLIENS LOCALEMENT COMPACTS

par Étienne MATHERON

Introduction.

Cet article est consacré à l'étude des propriétés descriptives de certains σ-idéaux de fermés issus de l'Analyse Harmonique et de la Théorie de la Mesure. On s'intéressera tout particulièrement aux fermés d'unicité et d'unicité au sens large d'un groupe abélien localement compact.

Les notations et définitions suivantes seront constamment utilisées.

Si X est un espace localement compact à base dénombrable d'ouverts, on note $C_b(X)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur sur X (à valeurs complexes), $C_0(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X tendant vers 0 à l'infini, et $M(X)$ l'ensemble des mesures boréliennes bornées sur X.

Si X est un espace Polonais (i.e séparable et complètement métrisable), on note $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des fermés de X, et $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des compacts de X. On munira toujours $\mathcal{F}(X)$ de la structure borélienne d'Effros (engendrée par les ensembles de la forme $\{F \in \mathcal{F}(\mathbf{G});\ \ F \cap V \neq \varnothing\}$, où V est un ouvert de $\mathbf{G}$) et $\mathcal{K}(X)$ de la topologie de Hausdorff (engendrée par les ensembles de la forme $\{K \in \mathcal{K}(\mathbf{G});\ \ K \subseteq V_0,\ K \cap V_1 \neq \varnothing, \dots, K \cap V_n \neq \varnothing\}$, où $V_0, V_1, \dots, V_n$ sont des ouverts de $\mathbf{G}$). Il est bien connu que $\mathcal{F}(X)$ est un espace borélien standard et que $\mathcal{K}(X)$ est un espace Polonais, compact si X est compact (voir par exemple [Ke2]). Évidemment, $\mathcal{K}(X)$ est un borélien de $\mathcal{F}(X)$.

Mots-clés : Ensembles d'unicité – Groupes localement compacts – Bandes de mesures – Troisième classe de Baire.
Classification math. : 43A46 – 04A15.

On dit qu'une partie $\mathcal{I}$ de $\mathcal{F}(X)$ est *héréditaire* si $\forall E \in \mathcal{I}\ \ \mathcal{K}(E) \subseteq \mathcal{I}$; que $\mathcal{I}$ est un *idéal de* $\mathcal{F}(X)$ si $\mathcal{I}$ est héréditaire et stable par réunion finie ; et que $\mathcal{I}$ est un *σ-idéal de* $\mathcal{F}(X)$ si $\forall (E_n) \subseteq \mathcal{I}$, $\forall E \in \mathcal{F}(X)$, $\big(E \subseteq \bigcup_n E_n\big) \Rightarrow (E \in \mathcal{I})$. On définit de même les σ-idéaux de $\mathcal{K}(X)$. Pour toute partie B de $\mathcal{F}(X)$, on pose

$$
\begin{aligned}
& B^{\mathrm{ext}} = \{A \subseteq X;\ \exists (F_n)_{n\in\omega} \subseteq B,\ \ A \subseteq \bigcup F_n\}\,, \\
& B^{\mathrm{perf}} = \{A \subseteq X;\ \forall V \text{ ouvert de } X,\ \ V \cap A \neq \varnothing \Rightarrow V \cap A \notin B^{\mathrm{ext}}\} \\
\text{et}\quad & B^{\mathrm{loc}} = \mathcal{P}(X) \setminus B^{\mathrm{perf}}\,.
\end{aligned}
$$

On note aussi B_σ le σ-idéal de $\mathcal{F}(X)$ engendré par B. Enfin, si $\mathcal{I}$ est un σ-idéal de $\mathcal{F}(X)$ (ou de $\mathcal{K}(X)$), on dit qu'une partie B de $\mathcal{I}$ est une *base* de $\mathcal{I}$ si B est héréditaire et $B_\sigma = \mathcal{I}$.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe abélien localement compact non discret à base dénombrable d'ouverts. Notons $\mathbf{\Gamma}$ le groupe dual de $\mathbf{G}$. Par transformation de Fourier, on identifie $L^1(\mathbf{\Gamma})$ avec une sous algèbre de $C_0(\mathbf{G})$, que l'on note $A(\mathbf{G})$. Le dual de $A(\mathbf{G})$ est l'espace $PM(\mathbf{G})$ des *pseudomesures* sur $\mathbf{G}$. Comme $A(\mathbf{G})$ est dense dans $C_0(\mathbf{G})$, $M(\mathbf{G})$ se plonge de manière évidente dans $PM(\mathbf{G})$.

$PM(\mathbf{G})$ s'identifie à $L^\infty(\mathbf{G})$ par transformation de Fourier : si $S \in PM(\mathbf{G})$ et $g \in L^1(\mathbf{\Gamma})$, alors $\langle S, \hat{g}\rangle = \int_{\mathbf{\Gamma}} g(\gamma)\hat{S}(\gamma^{-1})\, d\gamma$.

On dit qu'une pseudomesure S est une *pseudofonction* si $\hat{S}$ admet un représentant dans $C_0(\mathbf{\Gamma})$. On note $PF(\mathbf{G})$ l'ensemble des pseudofonctions. Une *mesure de Rajchman* est un élément de $M(\mathbf{G}) \cap PF$.

Il est facile de vérifier que $PF(\mathbf{G})$ est stable par A-multiplication. On montre également sans peine que toute mesure absolument continue par rapport à une mesure de Rajchman est encore de Rajchman, et donc que la famille des mesures de Rajchman positives est une *bande de mesures*.

DÉFINITION. — *On dit qu'un fermé $E \subseteq \mathbf{G}$ est un* ensemble d'unicité, *ou* de type U, *s'il ne porte aucune pseudofonction non nulle, et un ensemble* d'unicité au sens large, *ou de type U_0, s'il ne porte aucune mesure de Rajchman non nulle (ou encore si $\mu(E) = 0$ pour toute mesure de Rajchman positive μ). On pose aussi $M = \mathcal{F}(\mathbf{G}) \setminus U$ (ensembles de* multiplicité*) et $M_0 = \mathcal{F}(\mathbf{G}) \setminus U_0$ (ensembles de* multiplicité au sens strict*).*

Il n'est pas difficile de montrer que U et U_0 sont de σ-idéaux de $\mathcal{F}(\mathbf{G})$ (voir [T] ou la section 1). Dans le cas du groupe $\mathbf{T}$, les propriétés descriptives de ces deux σ-idéaux ont été étudiées en détail (voir [KL1]). Les résultats les plus significatifs semblent être les suivants :

1) U et U_0 sont des vrais $\mathbf{\Pi}_1^1$ de $\mathcal{K}(\mathbf{T})$, c'est-à-dire des ensembles $\mathbf{\Pi}_1^1$ (coanalytiques) non boréliens. Plus précisément, si $E \subseteq \mathbf{T}$ est un ensemble de multiplicité, alors $U \cap \mathcal{K}(E)$ est un vrai $\mathbf{\Pi}_1^1$ de $\mathcal{K}(E)$ ([Kau2]) ; et si E est de type M_0, alors $U_0 \cap \mathcal{K}(E)$ est un vrai $\mathbf{\Pi}_1^1$ de $\mathcal{K}(E)$ ([DSR]).

2) Tout fermé de type M (resp. M_0) contient une famille non dénombrable d'ensembles de type M (resp. M_0) deux à deux disjoints (Kaufman, voir [KL1]).

3) U_0 possède une base borélienne, en fait, $G_{\delta\sigma}$ ([KL2], [DSR] ; voir aussi [Ly]). Par contre, U ne possède pas de base borélienne ([DSR]).

4) Si $A \subseteq \mathbf{T}$ est un ensemble $\mathbf{\Sigma}_1^1$ (analytique) dont tous les compacts sont de type U_0, alors $A \in U_0^{\text{ext}}$ ([DSR] ; voir aussi [KL2]). Cette propriété est fausse si on remplace U_0 par U ([DSR]).

Dans le cas général d'un groupe abélien localement compact non discret à base dénombrable d'ouverts, V. Tardivel a montré ([T]) que U et U_0 sont des vrais $\mathbf{\Pi}_1^1$ de $\mathcal{F}(\mathbf{G})$.

Dans cet article, on étend tous les résultats précédents au cadre des groupes abéliens localement compacts. Tous ces résultats sont des conséquences (plus ou moins directes) d'un théorème général établi dans la section 1. On déduit également de ce théorème l'existence d'une quantité surprenante de familles «naturelles» de compacts qui sont exactement de troisième classe dans la hiérarchie de Baire, et une démonstration très simple, par un argument de complexité, du fait que tout groupe abélien localement non discret à base dénombrable contient des ensembles de Dirichlet qui ne sont pas de synthèse harmonique. Dans le cas du cercle unité, ce dernier résultat est dû à T.W. Körner ([Kö3]), avec une construction directe.

L'article se divise en trois parties.

Dans la première partie, on étudie la complexité descriptive d'un famille de σ-idéaux dont la définition est analogue à celle de U et U_0, et suffisamment générale pour englober ces deux cas de référence. On se donne un espace localement compact à base dénombrable d'ouverts X, une algèbre de Banach régulière $A \subseteq C_b(X)$, et un opérateur $\Lambda : A^* \to C_b(Y)$, où Y est un espace localement compact. On pose ensuite $\mathcal{B} = \{S \in A^*; \Lambda S \in C_0(Y)\}$, et on note $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ l'ensemble des fermés de X qui ne portent aucun élément non nul de $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}$ est stable par A-multiplication, il est facile de montrer que $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ est un σ-idéal de $\mathcal{F}(X)$. Le résultat principal que l'on obtient alors dans ce cadre peut se résumer grossièrement de la manière suivante : si $\mathcal{G}$ est un G_δ héréditaire de $\mathcal{K}(X)$ contenu dans $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$, qui est l'intersection de «gros» ouverts de $\mathcal{K}(X)$, mais dont tous les éléments sont «petits», alors il n'existe pas d'ensemble $\mathbf{\Pi}_3^0$ (i.e $F_{\sigma\delta}$) $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{K}(X)$ tel que $\tilde{\mathcal{G}}_f \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{B}}$, où $\tilde{\mathcal{G}}_f$ désigne l'ensemble des compacts de X qui sont réunion d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{G}$ disjoints. En particulier, $\tilde{\mathcal{G}}_f$ est un vrai $\mathbf{\Sigma}_3^0$ ($G_{\delta\sigma}$) de $\mathcal{K}(X)$, et, par un argument classique, $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ n'est pas borélien dans $\mathcal{F}(X)$.

Dans la deuxième partie, on étudie les ensembles d'unicité d'un groupe abélien localement compact non discret à base dénombrable d'ouverts. En utilisant le résultat de la première partie, on démontre la version «locale» du théorème de V. Tardivel : si E est un fermé de multiplicité, alors $U \cap \mathcal{F}(E)$ est un vrai $\mathbf{\Pi}_1^1$ de $\mathcal{F}(E)$. En suivant la méthode de G. Debs et J. Saint-Raymond ([DSR]), on en déduit que le σ-idéal U ne possède pas de base borélienne. On montre aussi que si E est de type M, il n'existe pas d'idéal $\mathbf{\Pi}_3^0$ de $\mathcal{K}(E)$ contenant la famille des ensembles de Dirichlet et contenu dans U. Ce résultat permet par exemple de démontrer que la famille des ensembles de type U' est un vrai $\mathbf{\Sigma}_3^0$ dans tout ensemble de multiplicité, et que tout fermé de multiplicité contient un ensemble de Dirichlet qui n'est pas de de synthèse harmonique. Enfin, on démontre que tout fermé de multiplicité contient un parfait de compacts de multiplicité deux à deux disjoints.

Dans la troisième partie, on étudie une famille particulière de bandes de mesures, (qu'on a appelées *bandes de première espèce*), dont le «prototype» est la bande des mesures de Rajchman positives d'un groupe abélien localement compact. On montre que si E est un espace compact métrisable et $\mathcal{B} \subseteq M_+(E)$ est une bande de première espèce, alors l'ensemble $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ des compacts de E négligeables pour toutes les mesure de $\mathcal{B}$ n'est «presque jamais» borélien. Plus précisément, si $E \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$ et si $\mathcal{G}$ est un G_δ dense héréditaire de $\mathcal{K}(E)$, alors il n'existe pas d'ensemble $\mathbf{\Pi}_3^0$ tel que $\tilde{\mathcal{G}}_f \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{B}}$. Lorsque $\mathcal{B}$ est la bande des mesures de Rajchman, on en déduit (outre le fait que U_0 est un vrai $\mathbf{\Pi}_1^1$ dans tout ensemble de type M_0) que les ensembles de type U_0', les ensembles de Helson et les ensemble WTP forment des vrais $\mathbf{\Sigma}_3^0$ dans tout ensemble de type M_0, et que $M_0^p = U_0^{\mathrm{perf}}$ est un vrai $\mathbf{\Pi}_3^0$ dans tout ensemble de type M_0. Dans le cas général, on caractérise les bandes de première espèce dont le σ-idéal polaire est borélien : en fait, $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ est borélien si et seulement $\mathcal{B} = M_+(A)$, où $A \subseteq E$

est un ensemble $\mathbf{\Delta}_2^0$ (c'est-à-dire à la fois F_σ et G_δ). On en déduit que si $\mathcal{B}$ contient une mesure diffuse non nulle, alors il existe une famille non dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}$ à supports deux à deux disjoints. On montre aussi que le σ-idéal $\mathcal{I}_\mathcal{B}$ possède toujours la propriété de recouvrement : si A est un ensemble $\mathbf{\Sigma}_1^1$ négligeable pour toutes les mesures de $\mathcal{B}$, alors $A \in (\mathcal{I}_\mathcal{B})^{\mathrm{ext}}$. Enfin, on montre que $\mathcal{I}_\mathcal{B}$ admet une base $\mathbf{\Sigma}_3^0$ naturelle, qui est l'analogue de la famille U_0'. Dans le cas des mesures de Rajchman, on étend ainsi (en les améliorant parfois) tous les résultats cités au début de cette introduction sur les ensembles de type U_0 du cercle unité.

1. Résultats généraux.

Dans cette partie, la lettre A désigne une algèbre de Banach régulière de fonctions de $C_b(X)$, où X est un espace localement compact à base dénombrable d'ouverts.

On fixe une partie P de A témoignant de la «régularité» de A : pour tout compact $K \subseteq X$ et tout ouvert V contenant K, il existe une fonction $f \in P$ à support contenu dans V et identiquement égale à 1 sur K.

Puisque A est une algèbre régulière, on peut définir le *support* d'un élément S de A^* : $\mathrm{supp}(S)$ est le plus petit fermé en dehors duquel S s'annule, autrement dit le plus petit fermé $F \subseteq \mathbf{G}$ vérifiant la propriété suivante : $\forall f \in A$ *à support compact disjoint de* F $\langle f, S\rangle = 0$.

Dans la suite, on supposera que les fonctions à support compact sont denses dans A, ce qui entraîne en particulier que si $S \in A^*$ est $\neq 0$, alors $\mathrm{supp}(S) \neq \varnothing$.

Si $S \in A^*$ et $\varphi \in A$, on définit $\varphi.S \in A^*$ en posant, pour $g \in A$ $\langle \varphi.S, g\rangle = \langle S, \varphi g\rangle$. Il est clair que $\mathrm{supp}(\varphi.S) \subseteq \mathrm{supp}(S) \cap \mathrm{supp}(\varphi)$.

On dira qu'une partie $\mathcal{B}$ de A^* est *stable par P-multiplication* si $\forall S \in \mathcal{B} \forall \varphi \in P$ $\varphi.S \in \mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ est une partie de A^*, on pose, pour tout fermé $E \subseteq X$,

$$\mathcal{B}(E) = \{S \in \mathcal{B}^*;\ \mathrm{supp}(S) \subseteq E\},$$

puis

$$\mathcal{I}_\mathcal{B} = \{E \in \mathcal{F}(X);\ \mathcal{B}(E) = \{0\}\}.$$

PROPOSITION. — *Soit $\mathcal{B} \subseteq A^*$ un cône convexe fermé en norme, stable par P-multiplication.*

1) *$\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ est un σ-idéal de $\mathcal{F}(X)$.*

2) *Si $E \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$ et si V est un ouvert de X tel que $V \cap E \neq \varnothing$, alors $\mathcal{B}_V(E) = \{S \in \mathcal{B}(E);\ \mathrm{supp}(S) \cap V \neq \varnothing\}$ est un ouvert dense de $\mathcal{B}(E)$.*

3) *Pour tout fermé $E \subseteq X$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *$E \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$.*

b) *E est le support d'un élément de $\mathcal{B}$.*

Démonstration.

1) Il est clair que $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ est une partie héréditaire de $\mathcal{F}(X)$. D'après le théorème de Baire, il suffit donc de vérifier que si $S \in \mathcal{B}$, alors $\mathrm{supp}(S) \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$. Soient $S \in \mathcal{B}$ et V un ouvert de X tel que $\mathrm{supp}(S) \cap V \neq \varnothing$. En utilisant la propriété de «régularité» de P, on vérifie facilement qu'il existe une fonction $\varphi \in P$ telle que $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq V$ et $\varphi.S \neq 0$. Comme $\mathrm{supp}(\varphi.S) \subseteq V \cap \mathrm{supp}(S)$, l'hypothèse faite sur $\mathcal{B}$ entraîne que $\overline{V \cap \mathrm{supp}(S)} \notin \mathcal{I}_{\mathcal{B}}$. Ceci démontre 1).

2) Fixons $E \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$ et un ouvert $V \subseteq X$ tel que $V \cap E \neq \varnothing$. D'après la définition du support, il est clair que $\mathcal{B}_V(E)$ est un ouvert de $\mathcal{B}(E)$ (en fait, $\mathcal{B}_V(E)$ est même un ouvert préfaible de $\mathcal{B}(E)$). On a $\mathcal{B}(E) \setminus \mathcal{B}_V(E) = \mathcal{B}(E \setminus V)$. Comme $\mathcal{B}$ est stable par addition, on en déduit que $\mathcal{B}(E) \setminus \mathcal{B}_V(E) + \mathcal{B}_V(E) \subseteq \mathcal{B}_V(E)$. D'autre part, puisque $E \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$ et $\mathcal{B}$ est stable par homothétie, tout voisinage de 0 dans A^* contient un élément de $\mathcal{B}_V(E)$. La remarque précédente permet donc d'écrire : $\mathcal{B}(E) \setminus \mathcal{B}_V(E) \subseteq \overline{\mathcal{B}_V(E)}$. Il en résulte que $\mathcal{B}_V(E)$ est dense dans $\mathcal{B}(E)$, ce qui démontre 2).

3) On a déjà vu que si $S \in \mathcal{B}$, alors $\mathrm{supp}(S) \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$. Comme X est à base dénombrable d'ouverts, l'implication inverse résulte de 2) et du théorème de Baire. □

Par exemple, si $\mathbf{G}$ est un groupe abélien localement compact, et si on pose $A = A(\mathbf{G})$, $\mathcal{B} = PF$ ou $\mathcal{B} = M(\mathbf{G}) \cap PF$, alors on déduit de la proposition précédente que U et U_0 sont des σ-idéaux de $\mathcal{F}(\mathbf{G})$. On se donne maintenant un espace localement compact non compact à base dénombrable d'ouverts Y, et un opérateur linéaire $\Lambda : A^* :\longrightarrow C_b(Y)$. Pour alléger les notations, on écrira toujours $\tilde{S}$ au lieu de $\Lambda(S)$.

On fixe aussi un cône convexe w^*-fermé $\mathcal{C} \subseteq A^*$, et on pose enfin

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} \cap \{S \in A^*;\ \mathrm{supp}(S) \text{ est compact et } \tilde{S} \in C_0(Y)\}.$$

Notation. — On note τ la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Y.

Dans toute la suite, on supposera que la restriction de Λ à $\mathbf{B_1}(PM)$ est continue de $(\mathbf{B_1}(PM),\, w^*)$ dans $(C_b(Y),\, \tau)$ (ce qui revient à dire que Λ est w^*-τ continu sur les parties bornées de A^*).

Exemples.

1) Soit $\mathbf{G}$ un groupe abélien localement compact à base dénombrable d'ouverts. Si $S \in PM(\mathbf{G})$ et $\varphi = \hat{f} \in A(\mathbf{G})$, alors $\widehat{\varphi.S} = f * \hat{S}$ admet un représentant continu. Pour toute fonction $\varphi \in A(\mathbf{G})$, on peut donc définir un opérateur $\Lambda_\varphi : A^* \to C_b(\mathbf{\Gamma})$ en posant $\Lambda_\varphi(S) = \widehat{\varphi.S}$. Il découle du théorème d'Ascoli que cet opérateur est continu de $(\mathbf{B_1}(PM), w^*)$ dans $(C_b(\mathbf{\Gamma}), \tau)$. En effet, si $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$ est un caractère de $\mathbf{G}$, alors $\gamma\varphi$ est un élément bien défini de $A(\mathbf{G})$ (si $\varphi = \hat{f}$, $\gamma\varphi$ est la transformée de Fourier de $\delta_\gamma * \varphi$), l'application $\theta : \gamma \mapsto \gamma\varphi$ est continue de $\mathbf{\Gamma}$ dans $A(\mathbf{G})$ en vertu de la continuité des translations dans $L^1(\mathbf{\Gamma})$, et on vérifie, en utilisant le théorème de Fubini, que si $S \in PM(\mathbf{G})$, alors $\Lambda_\varphi(S) = S \circ \theta$. Soit maintenant E un compact de $\mathbf{G}$, et choisissons une fonction $\varphi \in A(\mathbf{G})$ égale à 1 au voisinage de E. On a $\varphi.S = S$ pour toute pseudomesure S portée par E, donc l'opérateur Λ_φ coïncide sur $PM(E)$ avec la transformation de Fourier.

a) Si on pose $X = \mathbf{G}$, $A = A(\mathbf{G})$, $\mathcal{C} = PM(E)$, et $\Lambda = \Lambda_\varphi$, on obtient alors

$$\mathcal{B} = PF \cap PM(E) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \{F \in \mathcal{F}(\mathbf{G});\ F \cap E \in U\}.$$

b) Si on pose $X = E$, $A = C(E)$, $\mathcal{C} = M_+(E)$, et si on note Λ la restriction de Λ_φ à $M(E)$, alors $\mathcal{B}$ devient l'ensemble des mesures de Rajchman positives portées par E, et $\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = U_0 \cap \mathcal{K}(E)$. Remarquons que si $P = A(\mathbf{G})$ dans le cas **a)** et $P = C_+(E)$ dans le cas **b)**, alors $\mathcal{B}$ est stable par P-multiplication.

2) Soit E un espace compact métrisable. Posons $A = C(E)$ et $\mathcal{C} = M_+(E)$. Si $(f_n)_{n\in\omega}$ une suite de fonctions positives, bornée dans $C(E)$, l'opérateur $\Lambda : \mu \mapsto (\mu(f_n))_{n\in\omega}$ est évidemment continu de $(\mathbf{B_1}(M(E)),\, w^*)$ dans (l^∞, w^*), et $\mathcal{B} = \big\{\mu \in M(E);\ \int f_n\, d\mu \to 0\big\}$ est stable par $C_+(E)$-multiplication. C'est un exemple de *bande de première espèce.*

On fixe à présent un G_δ héréditaire $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{K}(X)$, contenu dans $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$. On écrit $\mathcal{G} = \bigcap_{p\in\omega} \mathcal{U}^p$, où $(\mathcal{U}^p)$ est une suite décroissante d'ouverts héréditaires de $\mathcal{K}(X)$. On suppose désormais que les propriétés suivantes sont vérifiées :

(**0**) $\mathcal{B} \neq 0$.

(**1**) $\mathcal{B}$ est stable par P-multiplication.

(**2**) $\forall S \in \mathcal{B}$, $\forall \varphi_1, \dots, \varphi_n \in P$, $\forall p \in \omega$, S est dans l'adhérence préfaible de

$\{T \in \mathcal{B};\ \mathrm{supp}(T) \in \mathcal{U}^p,\ ||T|| \leqslant ||S||,\ ||\varphi_i.T|| \leqslant ||\varphi_i.S||\ \forall i \leqslant n\}$.

(**3**) $\forall S \in \mathcal{B}$, $\forall \varphi_1, \dots, \varphi_n \in P$, $\forall K_1, \dots, K_m \in \mathcal{G}$, S est dans l'adhérence préfaible de

$$\left\{ T \in \mathcal{B};\ \mathrm{supp}(T) \cap \bigcup_{j=1}^{m} K_j = \varnothing,\ ||T|| \leqslant ||S||,\ ||\varphi_i.T|| \leqslant ||\varphi_i.S||\ \forall i \leqslant n \right\}.$$

Remarques.

1) On ne change pas $\mathcal{B}$ en multipliant Λ par un scalaire. On peut donc supposer que $||\Lambda|| \leqslant 1$, ce que l'on fera dans toute la suite.

2) Soit $S \in \mathcal{B}$. Supposons que le support soit contenu dans $F_1 \cup \dots \cup F_k$, où les F_i sont des compacts de X deux à deux disjoints. L'hypothèse faite sur P et la condition (**1**) montrent alors que, pour tout $i \leqslant k$, la *restriction* $S\lceil F_i$ de S à F_i est un élément bien défini de A^*, et que $S\lceil F_i \in \mathcal{B}$.

3) En utilisant une fonction de P égale à 1 au voisinage de supp(S), on voit qu'on peut omettre l'inégalité $||T|| \leqslant ||S||$ dans les conditions (**2**) et (**3**).

Soit ω^ω l'espace de Baire des suites infinies d'entiers $\geqslant 1$. Notons $\mathbf{W}$ le sous ensemble de ω^ω défini par

$$\alpha \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \lim_{p \to \infty} \alpha(p) = +\infty.$$

Il est bien connu que $\mathbf{W}$ est un vrai $\mathbf{\Pi}_3^0$ de ω^ω (voir [Ke2]). Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

Théorème. — *Notons $\tilde{\mathcal{G}}_f$ l'ensemble des compacts de X qui sont réunion d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{G}$ deux à deux disjoints. Il existe une application continue $\alpha \mapsto E(\alpha)$ de ω^ω dans $\mathcal{K}(X) \setminus \varnothing$ telle que :*

$$\begin{cases} Si\ \alpha \notin \mathbf{W},\ E(\alpha) \in \tilde{\mathcal{G}}_f\ . \\ Si\ \alpha \in \mathbf{W},\ E(\alpha) \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}. \end{cases}$$

Corollaire 1. — *Il n'existe pas d'ensemble $\mathbf{\Pi}_3^0$ $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{K}(X)$ tel que $\tilde{\mathcal{G}}_f \setminus \{\varnothing\} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{loc}}$. En particulier, $\tilde{\mathcal{G}}_f$ est un vrai $\mathbf{\Sigma}_3^0$ de $\mathcal{K}(X)$.*

Démonstration. — Il faut simplement vérifier que $\tilde{\mathcal{G}}_f$ est $\mathbf{\Sigma}_3^0$ dans $\mathcal{K}(X)$. Soit $(V_n)_{n\in\omega}$ une base dénombrable pour la topologie de X, stable par réunion finie. Un compact $E \subseteq X$ est dans $\tilde{\mathcal{G}}_f$ si et seulement si on peut trouver des entiers $n_1, \ldots, n_k$ tels que

$$\begin{cases} E \subseteq \cup_i V_{n_i}; \\ V_{n_i} \cap V_{n_j} = \varnothing \quad \text{si } i \neq j; \\ \overline{V}_{n_i} \cap E \in \mathcal{G} \quad \text{pour tout } i. \end{cases}$$

Pour montrer que $\tilde{\mathcal{G}}$ est $\mathbf{\Sigma}_3^0$, il suffit donc de vérifier que pour tout fermé $F \subseteq X$, l'ensemble $\mathcal{G}_F = \{E \in \mathcal{K}(X);\ E \cap F \in \mathcal{G}\}$ est G_δ dans $\mathcal{K}(X)$. Rappelons qu'on a écrit $\mathcal{G} = \bigcap_{p\in\omega} \mathcal{U}^p$, où les $\mathcal{U}^p$ sont des ouverts héréditaires de $\mathcal{K}(X)$. Il est facile de vérifier que si $\mathcal{U}$ est un ouvert héréditaire de $\mathcal{K}(X)$, alors il existe une famille $\mathcal{E}$ d'ouverts de X telle que $\forall E \in \mathcal{K}(X)\ \ E \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{E},\ E \subseteq V$. Si on choisit pour tout $p \in \omega$ une famille $\mathcal{E}^p$ associée à $\mathcal{U}^p$, on peut alors écrire, pour tout compact $E \subseteq X : E \in \mathcal{G}_F \Leftrightarrow \forall p \in \omega\ \exists V \in \mathcal{E}^p\ \ E \subseteq (X \setminus F) \cup V$. Cela prouve que $\mathcal{G}_f$ est G_δ et achève la démonstration du corollaire 1. $\square$

COROLLAIRE 2. — *Il n'existe pas d'ensemble* $\mathbf{\Sigma}_1^1$ $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{F}(X)$ *tel que* $\mathcal{G}_\sigma \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{I}_\mathcal{B}$. *En particulier,* $\mathcal{I}_\mathcal{B}$ *n'est pas borélien dans* $\mathcal{F}(X)$.

La démonstration est bien connue (voir [KLW]). Elle consiste à construire (de manière très simple), en utilisant le théorème principal, une application continue $\Phi : \mathcal{K}(\mathbf{2}^\omega) \to \mathcal{K}(X)$ telle que $\Phi[\mathcal{K}(\mathbf{Q})] \subseteq \mathcal{G}_\sigma$ et $\Phi[\mathcal{K}(\mathbf{2}^\omega) \setminus \mathcal{K}(\mathbf{Q})] \cap \mathcal{I}_\mathcal{B} = \varnothing$, où $\mathbf{2}^\omega$ est l'espace de Cantor des suites infinies de 0 et de 1, et $\mathbf{Q} = \{\alpha \in \mathbf{2}^\omega;\ \exists n\ \ \alpha(k) = 0\ \ \forall k \geqslant n\}$.

Remarque. — Si A est séparable, alors $\mathcal{I}_\mathcal{B}$ est $\mathbf{\Pi}_1^1$ dans $\mathcal{F}(X)$. En effet, on peut écrire, pour tout fermé $E \subseteq X$, en notant $B_1(A^*)$ la boule unité de A^* : $E \notin \mathcal{I}_\mathcal{B} \Leftrightarrow \exists S \in B_1(A^*)$ $(S \neq 0,\ S$ *est à support compact*, $\mathrm{supp}(S) \subseteq E$ *et* $\tilde{S} \in C_0(Y))$. Comme Y est à base dénombrable d'ouverts, la relation entre parenthèse est borélienne dans $(B_1(A^*), w^*) \times \mathcal{F}(X)$; puisque $B_1(A^*)$ est un compact métrisable, on en déduit que $\mathcal{I}_\mathcal{B}$ est $\mathbf{\Pi}_1^1$.

La démonstration du théorème principal nécessite plusieurs lemmes.

Pour alléger les écritures, on utilisera parfois les notations suivantes. Si $\overline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une suite finie d'éléments de P, $\overline{K} = (K_1, \ldots, K_m)$ est une suite finie d'éléments de $\mathcal{G}$ et $p \in \omega$, on désigne par $\mathcal{A}(S, \overline{\varphi}, p)$ et

$\mathcal{A}(S,\overline{\varphi},\overline{K})$ les ensembles apparaissant dans les conditions (**2**) et (**3**). Une distance Polonaise δ étant fixée sur $\mathcal{K}(X)$, on pose aussi, pour $\varepsilon > 0$, $\mathcal{A}(S,\overline{\varphi},p,\varepsilon) = \mathcal{A}(S,\overline{\varphi},p) \cap \{T \in A^*;\ \delta(\text{supp}(T),\text{supp}(S)) < \varepsilon\}$ et $\mathcal{A}(S,\overline{\varphi},\overline{K},\varepsilon) = \mathcal{A}(S,\overline{\varphi},\overline{K}) \cap \{T \in A^*;\ \delta(\text{supp}(T),\text{supp}(S)) < \varepsilon\}$. On définit de même $\mathcal{A}(S,\overline{\varphi},p,\mathcal{N}) = \mathcal{A}(S,\overline{\varphi},p) \cap \mathcal{N}$ et $\mathcal{A}(S,\overline{\varphi},\overline{K},\mathcal{N}) = \mathcal{A}(S,\overline{\varphi},\overline{K}) \cap \mathcal{N}$ lorsque $\mathcal{N}$ est un voisinage préfaible de S dans A^*.

LEMME 1. — *Soient $S \in \mathcal{B}$, $\overline{\varphi} \in P^{<\omega}$, $\overline{K} \in \mathcal{G}^{<\omega}$ et $p \in \omega$. Pour tout $\varepsilon > 0$, S est préfaiblement adhérent à $\mathcal{A}(S,\overline{\varphi},p,\varepsilon)$ et à $\mathcal{A}(S,\overline{\varphi},\overline{K},\varepsilon)$.*

Démonstration. — Soient $\mathcal{F}$ une partie finie de A, $\alpha > 0$ et $V_0, V_1, \ldots, V_k$ des ouverts de X tels que $\text{supp}(S) \subseteq V_0$ et $\text{supp}(S) \cap V_j \neq \varnothing$ pour $j \geqslant 1$. Soit φ une fonction de P telle que $\text{supp}(\varphi) \subseteq V_0$ et $\varphi \equiv 1$ sur un voisinage compact de $\text{supp}(S)$. Enfin, choisissons $f_1, \ldots, f_k \in A$ vérifiant $\text{supp}(f_j) \subseteq V_j$ et $\langle f_j, S\rangle \neq 0$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$. On a $S = \varphi.S$, donc la condition (**2**) entraîne l'existence de $T' \in \mathcal{B}$ vérifiant

$$\begin{cases} |\langle T',\varphi f\rangle - \langle S,\varphi f\rangle| < \alpha & \forall f \in \mathcal{F};\\ \langle T',\varphi f_j\rangle \neq 0, & 1 \leqslant j \leqslant k;\\ ||\varphi\varphi_i.T'|| \leqslant ||\varphi_i.S|| & 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Posons $T = \varphi.T'$. D'après (**1**), T est un élément de $\mathcal{B}$, et on a

$$\begin{cases} |\langle T,f\rangle - \langle S,f\rangle| < \alpha \quad \forall f \in \mathcal{F};\\ ||\varphi_i.T|| \leqslant ||\varphi_i.S|| \quad 1 \leqslant i \leqslant n;\\ \text{supp}(T) \subseteq V_0, \quad \text{supp}(T) \cap V_j \neq \varnothing \ \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant k. \end{cases}$$

On en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, S est préfaiblement adhérent à $\mathcal{A}(S,\overline{\varphi},p,\varepsilon)$. La démonstration est identique pour $\mathcal{A}(S,\overline{\varphi},\overline{K},\varepsilon)$. □

DÉFINITION. — *Soient N un entier $\geqslant 1$ et $\varepsilon > 0$. On appelle K-suite de type (N,ε) une suite finie $\big((\overline{g}^0,\overline{K}^0),\ldots,(\overline{g}^p,\overline{K}^p)\big)$ où $\overline{g}^i = (g_0^i, \ldots, g_{N-1}^i) \in C_0(Y)^N$, $\overline{K}^i = (K_0^i, \ldots, K_{N-1}^i) \in \mathcal{K}(Y)^N$, vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(i) $|g_j^{i+1}(y) - g_j^i(y)| < \varepsilon\, 2^{-Ni-j-1}$ *si* $y \in K_{j-1}^{i+1}$ *ou* $y \notin K_j^{i+1}$ *(on pose* $K_{-1}^{i+1} = K_{N-1}^i$*).*

(ii) $K_0^0 \subseteq K_1^0 \subseteq \ldots \subseteq K_{N-1}^0 \subseteq K_0^1 \subseteq \ldots$

L'appellation *K-suite* fait référence à un article de Kechris ([Ke1]). Ce genre de suites est d'usage courant en Analyse Harmonique (voir par exemple [Kö1], [DSR] ou [KL1]).

LEMME 2.

a) *Si* $\sigma = \big((\overline{g}^0, \overline{n}^0), \dots, (\overline{g}^p, \overline{n}^p)\big)$ *est une K-suite de type* (N, ε), *alors*

$$\left\|\left\|\sum_{j=0}^{N-1} g_j^p - \sum_{j=0}^{N-1} g_j^0{}_\infty < \varepsilon + \sup_{i,j}||g_j^{i+1} - g_j^i||\right\|\right\|_\infty .$$

b) *Soient* $\sigma = \big((\overline{g}^0, \overline{K}^0), \dots, (\overline{g}^p, \overline{K}^p)\big)$ *une K-suite de type* (N, ε) *et* $Z_0, \dots, Z_{N-1}$ *des parties de* $C_0(Y)$. *On suppose que* $g_j^p \in \overline{Z_j}^\tau$ *pour tout* $j \leqslant N-1$. *Alors on peut trouver* $g_0, \dots, g_{N-1}, K_0, \dots, K_{N-1}$ *tels que* $g_j \in Z_j$ *pour tout* $j \leqslant N-1$ *et* $\sigma^\frown(\overline{g}, \overline{K}) = \big((\overline{g}^0, \overline{K}^0), \dots, (\overline{g}^p, \overline{K}^p), (\overline{g}, \overline{K})\big)$ *est une K-suite de type* (N, ε).

c) *Soient* $g_1, \dots, g_N \in C_0(Y)$ *et* $Z_1, \dots, Z_N$ *des parties de* $C_0(Y)$. *On suppose que* $g_i \in \overline{Z_i}^\tau$ *pour tout* i. *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe des fonctions* $h_1, \dots, h_N \in C_0(Y)$ *vérifiant :*

$$\begin{cases} h_i \in Z_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant N; \\ ||\displaystyle\sum_{i=1}^{N} h_i - \sum_{i=1}^{N} g_i||_\infty < \varepsilon + \mathit{Max}\{||g_i - h_i||_\infty;\ 1 \leqslant i \leqslant N\}. \end{cases}$$

Démonstration.

a) Soit $y \in Y$ fixé.

On peut écrire $\sum\limits_{j=0}^{N-1} g_j^p - \sum\limits_{j=0}^{N-1} g_j^0 = \sum\limits_{j=0}^{N-1}\sum\limits_{i=0}^{p-1}(g_j^{i+1} - g_j^i)$. Donc $\Big|\sum\limits_{j=0}^{N-1} g_j^p(y) - \sum\limits_{j=0}^{N-1} g_j^0(y) \leqslant \sum\limits_{j=0}^{N-1}\sum\limits_{i=0}^{p-1}\Big| g_j^{i+1}(y) - g_j^i(y)$. La définition d'une K-suite montre qu'il existe au plus un couple (i,j) tel que $|g_j^{i+1}(y) - g_j^i(y)| \geqslant \varepsilon\, 2^{-Ni-j-1}$. On obtient donc :

$$\left|\sum_{j=0}^{N-1} g_j^p(y) - \sum_{j=0}^{N-1} g_j^o(y)\right| < \sup_{i,j}||g_j^{i+1} - g_j^i||_\infty + \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{p-1} 2^{-Ni-j-1},$$

d'où le résultat car la somme du membre de droite est exactement $\sum\limits_{k=1}^{Np} 2^{-k}$.

b) Soit $\alpha > 0$.

Choisissons un compact $K \subseteq Y$ contenant K^p_{N-1} tel que $\sup\{|g^p_j(y)|;\ y \notin K\} < \alpha$. Par hypothèse, on peut trouver $g_0, \dots, g_{N-1} \in C_0(Y)$ et $K_0, \dots, K_{N-1} \in \mathcal{K}(Y)$ vérifiant :

$$\begin{cases} K \subseteq K_0 \subseteq \dots \subseteq K_{N-1}; \\ g_j \in Z_j, \quad j \leqslant N-; \\ |g_j(y) - g^p_j(y)| < \alpha \ \text{ si } y \in K_{j-1} \quad (\text{on pose } K_{-1} = K); \\ |g_j(y)| < \alpha \ \text{ si } y \notin K_j. \end{cases}$$

Alors $|g_j(y) - g^p_j(y)| < 2\alpha$ si $y \in K_{j-1}$ ou $y \notin K_j$. Donc $g_0, \dots, g_{N-1}$, $K_0, \dots, K_{N-1}$ conviennent si α est choisi assez petit.

La partie c) résulte immédiatement de a) et b). □

LEMME 3. — *Soient $S \in \mathcal{B}$, $\mathcal{N}$ un voisinage préfaible de S, $\overline{\varphi} \in P^{<\omega}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe deux éléments T_1 et T_2 de $\mathcal{B}$ vérifiant :*

$$\begin{cases} T_i \in \mathcal{A}(S, \overline{\varphi}, \varepsilon, \mathcal{N}), \quad i = 1, 2; \\ ||\tilde{T}_i - \tilde{S}||_\infty < \varepsilon \quad (i = 1, 2); \\ \operatorname{supp}(T_1) \cap \operatorname{supp}(T_2) = \varnothing. \end{cases}$$

Démonstration. — Fixons un entier $N > \dfrac{4}{\varepsilon}||S||$ et posons $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2}$. On construit pour $p \in \omega$ des éléments de $\mathcal{B}$, $S^p_0, \dots, S^p_{N-1}$, des compacts de Y, $K^p_0, \dots, K^p_{N-1}$, et des ouverts de X, $V^p_0, \dots, V^p_{N-1}$, vérifiant les propriétés suivantes (où on a posé $\overline{S}^i = (\tilde{S}^i_0, \dots, \tilde{S}^i_{N-1})$) :

$$\begin{cases} S^0_j = \dfrac{1}{N} S, \quad 0 \leqslant j \leqslant N-1; \\ S^p_j \in \mathcal{A}(\dfrac{1}{N} S,\ \overline{\varphi}, p)\ ,\ p \geqslant 1; \\ \big((\overline{S}^0, \overline{K}^0), \dots, (\overline{S}^p, \overline{K}^p)\big) \ \text{ est une } K\text{-suite de type } (N, \alpha)\,; \\ V^{p+1}_j \subseteq V^p_j; \\ \operatorname{supp}(S^p_j) \subseteq V^p_j; \\ \overline{V^p_j} \in \mathcal{U}^p\ ,\quad p \geqslant 1. \end{cases}$$

Pour débuter la construction, on prend par exemple $K^0_0 = \dots = K^0_{N-1} = \varnothing$, et $V^0_0 = \dots = V^0_{N-1} = X$. Supposons avoir construit $S^p_0, \dots, S^p_{N-1}$, $K^p_0, \dots, K^p_{N-1}$, $V^p_0, \dots, V^p_{N-1}$. Si on pose $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}(\frac{1}{N}S, \overline{\varphi}, p + 1) \cap \{T \in A^*;\ \operatorname{supp}(T) \subseteq V^p_j\}$ et $Z_j = \{\tilde{T};\ T \in \mathcal{A}_j\}$ $(0 \leqslant j \leqslant N-1)$, alors $S_j^p \in \overline{\mathcal{A}_j}^{w^*}$ d'après le lemme 1, et donc $\tilde{S}_j^p \in \overline{Z_j}^{\tau}$ car l'opérateur Λ est w^*-τ continu sur les parties bornées de A^*. Une application du lemme 2 b) permet donc d'achever la construction. Posons $K_j = \bigcap_{p\in\omega} \overline{V_j^p}$, $j \leqslant N-1$. Puisque les $\mathcal{U}^p$ sont héréditaires, les K_j sont des éléments de $\mathcal{G}$. D'après la condition **(3)**, S est donc dans l'adhérence préfaible de $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S,\overline{\varphi},\mathcal{N}) \cap \{T \in A^*;\ \mathrm{supp}(T) \cap \bigcup_{j=0}^{N-1} K_j = \varnothing\}$. Par suite, $\tilde{S}$ est faiblement adhérente à $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{T};\ T \in \mathcal{A}\}$ dans $C_0(Y)$. D'après le théorème de Mazur ($\mathcal{A}$ est convexe si $\mathcal{N}$ l'est), on en déduit qu'il existe $T_1 \in \mathcal{A}$ tel que $||\tilde{T}_1 - \tilde{S}||_\infty < \varepsilon$. En raisonnant comme dans le lemme 1, on peut aussi obtenir $\delta(\mathrm{supp}(T_1),\ \mathrm{supp}(S)) < \varepsilon$, et donc $T_1 \in \mathcal{A}\,(S,\overline{\varphi},\varepsilon,\mathcal{N})$.

Choisissons maintenant un entier p tel que $\mathrm{supp}(T_1) \cap \left(\bigcup_{j=0}^{N-1} \overline{V_j^p}\right) = \varnothing$, et posons $T_2 = \sum_{j=0}^{N-1} S_j^p$. On a évidemment $\mathrm{supp}(T_1) \cap \mathrm{supp}(T_2) = \varnothing$. De plus, comme $\big((\overline{S^p}),\ (\overline{K^p})\big)$ est une K-suite de type (N,α) le lemme 2 montre que

$$||\tilde{T}_2 - \tilde{S}||_\infty = \left|\left|\sum_{j=0}^{N-1} \tilde{S}_j^p - \tilde{S}\right|\right|_\infty < \alpha + \sup\{||\tilde{S}_k^l||_\infty;\ k \leqslant N-1,\ l \in \omega\}.$$

Puisque $||\tilde{S}_k^l||_\infty \leqslant ||S_k^l|| \leqslant \dfrac{1}{N}||S||$ pour tout couple (k,l), on obtient donc $||\tilde{T}_2 - \tilde{S}||_\infty < \alpha + \dfrac{2}{N}\,||S|| < \varepsilon$, ce qui achève la démonstration. □

Démonstration du Théorème principal. — Soit $\omega^{<\omega}$ l'ensemble des suites finies d'entiers $\geqslant 1$. Si $s \in \omega^{<\omega}$, on note $|s|$ la longueur. Pour $n \geqslant 1$ et $s = (s_0, \ldots, s_p) \in \omega^{<\omega}$ on pose $s^\frown n = (s_0, \ldots, s_p, n)$. Si $s,\ t \in \omega^{<\omega}$, la notation $s \preceq t$ signifie que s est un début de t. Enfin, si $\alpha \in \omega^\omega$ et $p \in \omega$, on note $\alpha\lceil_p$ la suite $(\alpha(0), \ldots, \alpha(p-1))$. Fixons des distances Polonaises d et δ respectivement sur X et $\mathcal{K}(X)$. On va construire, pour $s \in \omega^{<\omega}$:

- une famille finie $\mathcal{E}(s)$ d'ouverts de X, d'adhérences disjointes, de réunion $O(s)$;

- un compact $E(s) \subseteq X$;

- une famille $\mathcal{W}(s)$ d'ouverts de X ;

- pour chaque $W \in \mathcal{W}(s)$, une fonction $f_W \in A$;

- un élément $T(s)$ de $\mathcal{B}$ (qu'on notera parfois T_s) ;

- un compact $K(s) \subseteq Y$;

- si $|s| \geqslant 1$, $s = s'^\frown n$, des ouverts de X , $V_1(s), \ldots, V_n(s)$, d'adhérences disjointes.

Tous ces objets doivent remplir les conditions suivantes :

(1) si $|s| \geqslant 1$ alors $\bigcup\limits_{j=1}^{n} V_j(s) = O(s)$ et chaque $V_j(s)$ est réunion d'éléments de $\mathcal{E}(s)$;

(2) $E(s) \subseteq O(s)$ et, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{cases} \mathcal{E}(s^\frown n) \preceq \mathcal{E}(s) \ \ (\text{i.e } \forall V \in \mathcal{E}(s^\frown n)\ \exists V' \in \mathcal{E}(s)\ \overline{V} \subseteq V'), \\ K(s) \subseteq K(s^\frown n); \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \forall W \in \mathcal{W}(s)\,, \text{diam } (W) < 2^{-|s|}, \\ \text{supp}(f_W) \subseteq W; \end{cases}$$

(4) $E(s) \subseteq \bigcup \mathcal{W}(s)$;

(5) $E(s) = \text{supp}(T_s)$;

(6) $\forall t \preceq s,\ \forall W \in \mathcal{W}(t),\ \ \langle T(s), f_W\rangle\ > \dfrac{1}{2}$;

(7) $\delta\big(E(s^\frown n),\, E(s)\big) < 2^{-|s|}$;

(8) $\sup\ \Big\{|\tilde{T}_s(y)|;\ y \notin K(s)\Big\}\ < 2^{-|s|}$;

(9) pour tout $n \geqslant 1$, $|\tilde{T}_s(y)\ -\ \tilde{T}_{s^\frown n}(y)| < 2^{-|s|}$ si $y \in K(s)$;

(10) pour tout $n \geqslant 1$, $||\tilde{T}_s\ -\ \tilde{T}_{s^\frown n}||_\infty\ < 2^{-|s|} + \dfrac{4}{n}$;

$$(11) \begin{cases} \displaystyle\sum_{V \in \mathcal{E}(s)} ||T_s \lceil \overline{V}||\ < 2, \\ \displaystyle\sum_{\substack{V \subseteq V' \\ V \in \mathcal{E}(s)}} ||T_s \lceil \overline{V}||\ \leqslant ||T_t \lceil \overline{V}'||\ \text{ si } t \preceq s \text{ et } V' \in \mathcal{E}(t); \end{cases}$$

(12) $\forall n \geqslant 1,\ \forall j \leqslant n,\ \ \displaystyle\sum_{\substack{V \in \mathcal{E}(s^\frown n) \\ V \subseteq V_j(s^\frown n)}} ||T_{s^\frown n} \lceil \overline{V}||\ < \dfrac{2}{n}$;

(13) $\forall n \geqslant\ 1,\ \forall j \leqslant n,\ \ \overline{V}_j(s^\frown n) \in \mathcal{U}^{|s|}$;

(14) si $t^\frown n \preceq s$, $n \geqslant 1$, alors $\overline{V}_j(s^\frown n) \subseteq V_j(t^\frown n)$.

On choisit d'abord un élément $T_\varnothing$ de $\mathcal{B}$, avec $||T|| = 1$, une famille d'ouverts $\mathcal{W}(\varnothing)$ et des fonctions f_W, $W \in \mathcal{W}(\varnothing)$ vérifiant (3), (4), (6); puis on pose $O(\varnothing) = \bigcup \mathcal{W}(\varnothing)$ et $\mathcal{E}(\varnothing) = \{O(\varnothing)\}$. On choisit aussi $K_\varnothing$ vérifiant (8).

Supposons avoir mené à bien la construction pour toutes les suites de longueur $\leqslant p$ $(p \geqslant 0)$. Soient s une suite de longueur $p+1$ et n un entier $\geqslant 1$. On distingue deux cas.

1^er^ cas : $\forall q < |s| \ \ s(q) \neq n$.

Posons $T = T_s$ et fixons $\varepsilon < 0$ et $\mathcal{N}$ un voisinage préfaible convexe de T dans A^*. Le lemme 3 permet de trouver $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{B}$ vérifiant

$$\begin{cases} \operatorname{supp}(T_j) \cap \operatorname{supp}(T_k) = \varnothing \ \text{ si } j \neq k; \\ T_j \in \mathcal{N}, \ \ ||\tilde{T}_j - \tilde{T}||_\infty < \varepsilon \ , \ \ 1 \leqslant j \leqslant n; \\ ||T_j|| \leqslant ||T||, \ \ ||T_j \lceil \overline{V}|| \leqslant ||T \lceil \overline{V}|| \text{ pour tout } V \in \mathcal{E}(s); \\ \delta\big(\operatorname{supp}(T_j), \operatorname{supp}(T)\big) < \varepsilon. \end{cases}$$

Soient $U_1, \ldots, U_n$ des ouverts de X deux à deux disjoints tels que $\operatorname{supp}(T_j) \subseteq U_j$ pour tout $j \leqslant n$. Posons $T'_j = \dfrac{1}{n} T_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Le lemme 1 entraîne que T'_j est dans l'adhérence préfaible de l'ensemble

$$\mathcal{A}_j = \Big\{ S \in \mathcal{B};\ S \in \frac{1}{n}\mathcal{N},\ ||S|| \leqslant ||T'_j||,\ ||S\lceil \overline{V}|| \leqslant ||T'_j \lceil \overline{V}|| \ \forall V \in \mathcal{E}(s),$$
$$\operatorname{supp}(S) \in \mathcal{U}^{|s|},\ \delta(\operatorname{supp}(S), \operatorname{supp}(T'_j)) < \varepsilon,\ \operatorname{supp}(S) \subseteq U_j \cap O(s) \Big\}.$$

Comme $||\tilde{T}'_j||_\infty \leqslant ||T'_j|| < \dfrac{2}{n}$ d'après (11), on peut donc, en utilisant le lemme 2, trouver $S_1, \ldots, S_n$ vérifiant

$$\begin{cases} S_j \in \mathcal{A}_j, \\ ||\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \tilde{S}_j - \sum_{j=1}^{n} \tilde{T}'_j||_\infty < \varepsilon + \dfrac{4}{n}. \end{cases}$$

Choisissons des ouverts de X , $V_1, \dots, V_n$, d'adhérences disjointes, tels que $\mathrm{supp}(S_j) \subseteq V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq O(s)$, $V_j \in \mathcal{U}^{|s|}$ pour tout j, et posons

$$S = \sum_{j=1}^{n} S_j, \; F = \mathrm{supp}(S).$$

Comme $\mathcal{N}$ est convexe, on a $S \in \mathcal{N}$. De plus, $F = \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{supp}(S_j)$ car les supports des S_j sont deux à deux disjoints. La définition des S_j montre que pour un choix convenable de ε et $\mathcal{N}$ on peut obtenir :

$$\begin{cases} (6)' \;\; \forall t \preceq s, \; \forall W \in \mathcal{W}(t), \;\; \langle S, f_W \rangle \; > \dfrac{1}{2}; \\ (7)' \;\; \delta(F, \mathrm{supp}(T)) < 2^{-|s|}; \\ (9)' \;\; |\tilde{S}(y) - \tilde{T}(y)| < 2^{-|s|}, \;\; y \in K_s; \\ (10)' \; \|\tilde{S} - \tilde{T}\|_\infty < 2^{-|s|} + \dfrac{4}{n}. \end{cases}$$

Posons maintenant $\mathcal{E} = \{V \cap V_j;\ V \in \mathcal{E}(s),\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Si $V' \in \mathcal{E}(s)$ et si $V \in \mathcal{E}$ vérifie $V \subseteq V'$, alors $V = V' \cap V_j$ pour un unique $j \leqslant n$; donc $S\lceil\overline{V} = S_j\lceil\overline{V}_j = S_j\lceil\overline{V}'$. On en déduit que pour tout ouvert $V' \in \mathcal{E}(s)$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{V\in\mathcal{E}\\ V\subseteq V'}} \|S\lceil\overline{V}\| &= \sum_{j=1}^{n} \|S_j\lceil\overline{V}'\| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \|T_j'\lceil\overline{V}'\| \\ &\leqslant \|T\lceil\overline{V}'\| \;\; \text{d'après la définition des } T_j'. \end{aligned}$$

Si maintenant $t \in \omega^{<\omega}$, $t \preceq s$ et $V'' \in \mathcal{E}(t)$, on peut écrire

$$\sum_{\substack{V\in\mathcal{E}\\ V\subseteq V''}} \|S\lceil\overline{V}\| = \sum_{\substack{V'\in\mathcal{E}(s)\\ V'\subseteq V''}} \sum_{\substack{V\in\mathcal{E}\\ V\subseteq V'}} \|S\lceil\overline{V}\|.$$

Il découle donc de l'inégalité précédente et de la condition (11) que

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{V\in\mathcal{E}\\ V\subseteq V''}} \|S\lceil\overline{V}\| \leqslant \|T_t\lceil\overline{V}''\| \;\; \text{si } t \preceq s \text{ et } V'' \in \mathcal{E}(t); \\ \displaystyle\sum_{V\in\mathcal{E}} \|S\lceil\overline{V}\| < 2. \end{cases}$$

Enfin, on a pour tout $j \leqslant n$:

$$\sum_{\substack{V\in\mathcal{E}\\ V\subseteq V_j}} ||S\lceil\overline{V}|| = \sum_{V'\in\mathcal{E}(s)} ||S_j\lceil\overline{V}'|| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{V'\in\mathcal{E}(s)} ||T\lceil\overline{V}'|| < \frac{2}{n}.$$

On constate donc que si on pose $\mathcal{E}(s^\frown n) = \mathcal{E}$, $T(s^\frown n) = S$, $E(s^\frown n) = F$, $V_j(s^\frown n) = V_j$, les conditions (1), (2), (4), (7), (9),…, (13) sont vérifiées, de même que (6) pour $t \preceq s$. Pour achever la construction, il suffit alors de choisir un compact $K(s^\frown n) \subseteq Y$ contenant $K(s)$, un recouvrement ouvert $\mathcal{W}(s^\frown n)$ de $E(s^\frown n)$ par des ouverts de diamètre $< 2^{-|s|-1}$ et des fonctions f_W, $W \in \mathcal{W}(s^\frown n)$, de manière à obtenir (3), (5) et (6) pour $t = s^\frown n$.

2ème cas : $\exists q < |s| \quad s(q) = n$.

Notons q_0 le plus grand entier $< |s|$ tel que $s(q) = n$, et posons $t = s_{\lceil q_0+1}$. Posons également $T = T_s$ et $T_j = T\lceil\overline{V}_j(t)$. On a alors $T = \sum_{j=1}^n T_j$. Comme dans le premier cas, on peut, en appliquant le lemme 2 aux T_j, trouver $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{B}$ vérifiant les propriétés suivantes (où on a posé $S = \sum_{j=1}^n S_j$) :

$$\begin{cases} \operatorname{supp}(S_j) \subseteq V_j(t) \cap O(s) \text{ et } \operatorname{supp}(S_j) \in \mathcal{U}^{|s|};\\ ||S_j\lceil\overline{V}|| \leqslant ||T_j\lceil\overline{V}|| \quad \text{pour tout } V \in \mathcal{E}(s);\\ |\tilde{S}(y) - \tilde{T}(y)| < 2^{-|s|} \quad \text{si } y \in K(s);\\ ||\tilde{S} - \tilde{T}||_\infty < 2^{-|s|} + \dfrac{4}{n};\\ \delta(\operatorname{supp}(S),\, E(s)) < 2^{-|s|}. \end{cases}$$

Si $r \preceq s$ et $V' \in \mathcal{E}(r)$, alors

$$\sum_{\substack{V\in\mathcal{E}(s)\\ V\subseteq V'}} ||S\lceil\overline{V}|| \leqslant \sum_V \sum_{j=1}^n ||S_j\lceil\overline{V}|| \leqslant \sum_V \sum_j ||T_j\lceil\overline{V}||.$$

De plus, si $V \in \mathcal{E}(s)$ on a $T_j\lceil\overline{V} = \varnothing$ ou $T_j\lceil\overline{V} = T\lceil\overline{V}$ selon que $V \cap V_j(t)$ est vide ou non. Donc $\sum\limits_V \sum\limits_j \|T_j\lceil\overline{V}\| = \sum\limits_V \|T\lceil\overline{V}\|$, et on déduit de (11) :

$$(*) \qquad \forall r \preceq s \ \ \forall V' \in \mathcal{E}(r) \quad \sum_{\substack{V \in \mathcal{E}(s) \\ V \subseteq V'}} \|S\lceil\overline{V}\| \leqslant \|T(r)\lceil\overline{V}'\|.$$

Choisissons maintenant des ouverts $V_1, \ldots, V_n$ vérifiant $\mathrm{supp}(S_j) \subseteq V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq V_j(t) \cap O(s)$, $V_j \in \mathcal{U}^{|s|}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, et posons

$$\mathcal{E} = \{V \cap V_j;\ V \in \mathcal{E}(s)\}.$$

Si $V \in \mathcal{E}$ et V' est l'unique élément de $\mathcal{E}(s)$ contenant V, alors $S\lceil\overline{V} = S\lceil\overline{V}'$. On peut donc écrire $\sum\limits_{V \in \mathcal{E}} \|S\lceil\overline{V}\| = \sum\limits_{V \in \mathcal{E}(s)} \|S\lceil\overline{V}\|$. Il découle de cette remarque et de l'inégalité $(*)$ que

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{V \in \mathcal{E}} \|S\lceil\overline{V}\| \leqslant \sum_{V \in \mathcal{E}(s)} \|T_s\lceil\overline{V}\| < 2, \\ \displaystyle\sum_{\substack{V \in \mathcal{E} \\ V \subseteq V'}} \|S\lceil\overline{V}\| = \sum_{\substack{V \in \mathcal{E}(s) \\ V \subseteq V'}} \|S\lceil\overline{V}\| \leqslant \|T(r)\lceil\overline{V}'\| \quad \text{si } r \preceq s \text{ et } V' \in \mathcal{E}(r). \end{cases}$$

Enfin, on a pour tout $j \leqslant n$:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{V \in \mathcal{E} \\ V \subseteq V_j}} \|S\lceil\overline{V}\| &= \sum_{\substack{V \in \mathcal{E}(s) \\ V \subseteq V_j(t)}} \|S\lceil\overline{V}\| \\ &= \sum_{\substack{V' \in \mathcal{E}(t) \\ V' \subseteq V_j(t)}} \sum_{\substack{V \in \mathcal{E}(s) \\ V \subseteq V'}} \|S\lceil\overline{V}\| \\ &\leqslant \sum_{\substack{V' \in \mathcal{E}(t) \\ V' \subseteq V_j(t)}} \|T_t\lceil\overline{V}'\| \\ &< \frac{2}{n} \quad \text{d'après (12).} \end{aligned}$$

On peut donc poser $\mathcal{E}(s^\frown n) = \mathcal{E}$, $T(s^\frown n) = S$, $V_j(s^\frown n) = V_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ et terminer la construction comme dans le premier cas.

Ceci achève la récurrence.

Il découle de (7) que pour tout $\alpha \in \omega^\omega$ la suite $\big(E(\alpha\lceil_p)\big)_{p\in\omega}$ converge vers un compact $E(\alpha)$, et que l'application $\alpha \mapsto E(\alpha)$ est continue. Vérifions que cette application possède les propriétés requises.

a) Soit $\alpha \in \omega^\omega \setminus \mathbf{W}$.

Par définition de $\mathbf{W}$, il existe un entier $n \geqslant 1$ et une suite strictement croissante d'entiers (p_k) tels que $\alpha(p_k) = n$ pour tout $k \in \omega$. Si $k < k'$, on a, par (1), (2) et (14) :

$$\begin{aligned} E(\alpha\lceil p_{k'}+1) &\subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_j(\alpha\lceil p_{k'}+1) \\ &\subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_j(\alpha\lceil p_k+1). \end{aligned}$$

Donc $E(\alpha) \subseteq \bigcup_{k\in\omega} \bigcap_{j=1}^{n} \overline{V}_j(\alpha\lceil p_k+1)$. De plus, la condition (2) et le fait que les $\overline{V}_j(\alpha\lceil p_k+1)$ soient deux à deux disjoints entraînent que

$$\bigcap_{k\in\omega} \bigcup_{j=1}^{n} \overline{V}_j(\alpha\lceil p_k+1) = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcap_{k} \overline{V}_j(\alpha\lceil p_k+1).$$

Comme les ouverts $\mathcal{U}^p$ sont héréditaires, il résulte alors de (13) que $E(\alpha)$ est réunion de n éléments de $\mathcal{G}$ disjoints.

b) Soit maintenant $\alpha \in \mathbf{W}$.

Par (11) la suite $\big(T(\alpha\lceil p)\big)_{p\in\omega}$ est bornée dans A^*. Soit $T \in A^*$ une valeur d'adhérence préfaible de cette suite. On a $T \in \mathcal{C}$ car $\mathcal{C}$ est préfaiblement fermé. De plus, la relation $\operatorname{supp}(S) \subseteq F$ étant fermée dans $(A^*, w^*) \times \mathcal{K}(X)$, on déduit de (4) que le support de T est contenu dans $E(\alpha)$. Si V un ouvert de X tel que $V \cap E(\alpha) \neq \varnothing$, les conditions (3) et (4) entraînent l'existence d'un entier p_0 et d'un ouvert $W \in \mathcal{W}(\alpha\lceil p_0)$ tels que $W \subseteq V$. Par (6) on a $\langle T(\alpha\lceil p),\ f_W\rangle > \frac{1}{2}$ pour tout $p \geqslant p_0$, et donc $\langle T,\ f_W\rangle \geqslant \frac{1}{2}$. Puisque $\operatorname{supp}(f_W) \subseteq W \subseteq V$, on peut conclure que le support de T est exactement $E(\alpha)$. Pour achever la démontration du théorème, il suffit donc de montrer que $\tilde{T} \in C_0(Y)$. Soit $p_0 \in \omega$. Posons, pour $p \geqslant p_0$, $T_p = T(\alpha\lceil p)$ et $K_p = K(\alpha\lceil p)$. Il résulte de (9) que

$$\forall p > p_0,\ \forall y \in K_{p_0+1}\ \ |\tilde{T}_p(y)\ -\ \tilde{T}_{p_0+1}| < 2^{-p_0}.$$

On a donc $|\tilde{T}(y)\ -\ \tilde{T}_{p_0+1}| \leqslant 2^{-p_0}$, si $y \in K_{p_0+1}$. En utilisant (8) et (10), on en déduit que si $y \in K_{p_0+1} \setminus K_{p_0}$ alors

$$\begin{aligned} |\tilde{T}(y)| &\leqslant ||\tilde{T}_{p_0}\ -\ \tilde{T}_{p_0+1}||_\infty\ +\ |\tilde{T}_{p_0}(y)|\ +\ 2^{-p_0} \\ &< 3.2^{-p_0} + \frac{4}{\alpha(p_0)}\ . \end{aligned}$$

Puisque $\alpha(p) \to +\infty$ on obtient donc, en posant $K = \bigcup_p K_p$: $\lim_{\substack{y\to\infty \\ y\in K}} \tilde{T}(y) = 0$.
Enfin si $y \notin K$ il découle de (8) que $|\tilde{T}_p(y)| < 2^{-p}$ pour tout p, et donc $\tilde{T}(y) = 0$. On a donc bien $\tilde{T} \in C_0(Y)$, ce qui conclut la démonstration du théorème.

□

2. Ensembles d'unicité.

Dans cette section, la lettre $\mathbf{G}$ désigne un groupe abélien localement compact non discret à base dénombrable d'ouverts. Rappelons qu'on a noté U la famille des fermés d'unicité de $\mathbf{G}$, et qu'on a posé $M = \mathcal{F}(\mathbf{G}) \setminus U$. On pose aussi $M^p = U^{\text{perf}}$.

On peut reformuler la définition de U de la manière suivante : Soit $B(\mathbf{G})$ l'image par transformation de Fourier de l'algèbre de convolution $M(\mathbf{\Gamma})$. B($\mathbf{G}$) s'identifie de manière évidente avec le dual de PF. Posons, pour $E \in \mathcal{F}(\mathbf{G})$, $J_0(E) = \{f \in A(\mathbf{G})$; supp$(f)$ *est compact et disjoint de* $E\}$. Alors, d'après le théorème des bipolaires, E est un ensemble d'unicité si et seulement si $J_0(E)$ est préfaiblement dense dans $B(\mathbf{G})$ (pour la dualité avec PF).

LEMME 1. — *Si $S \in PF$ et $f \in B(\mathbf{G})$ alors $f.S \in PF$ (où on pose, pour $g \in A(\mathbf{G})$, $\langle f.S, g\rangle = \langle S, fg\rangle$.*

Démonstration. — Soient $S \in PF$ et $f = \hat{\mu} \in B(\mathbf{G})$. Posons, pour $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$, $\varphi(\gamma) = \int_{\mathbf{\Gamma}} \hat{S}(\gamma.\tau^{-1})\, d\mu(\tau)$. Alors $\varphi \in C_0(\mathbf{\Gamma})$ car $\hat{S} \in C_0(\mathbf{\Gamma})$, et on vérifie que φ est la transformée de Fourier de $f.S$. □

LEMME 2. — *Soient E un fermé d'unicité, $S \in PF$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction $f \in A$ vérifiant $f \in J(E)$ et $||f.S - S||_{PM} < \varepsilon$.*

Démonstration. — Posons $J_0(E).S = \{f.S;\ f \in J_0(E)\}$. D'après le lemme 1, $J_0(E).S$ est une partie convexe de PF. De plus, S est faiblement adhérente à $J_0(E).S$ car $E \in U$, et l'application $f \mapsto f.S$ est continue de $(B(\mathbf{G}), w^*)$ dans (PF, w). Le lemme est donc une conséquence du théorème de Mazur. □

PROPOSITION 1. — *Soient* $(E_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de fermés d'unicité et* $S \in PF$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver une pseudofonction* T *vérifiant :*

$$\begin{cases} \operatorname{supp}(T) \subseteq \operatorname{supp}(S) \ ; \\ \|T - S\|_{PM} < \varepsilon \ ; \\ \operatorname{supp}(T) \cap \Big(\bigcup_{n\in\omega} E_n\Big) = \varnothing. \end{cases}$$

Démonstration. — C'est une conséquence du lemme 2 : partant de $S_0 = S$, on peut construire une suite (S_n) de pseudofonctions vérifiant $\operatorname{supp}(S_{n+1}) \subseteq \operatorname{supp}(S_n) \setminus E_n$ et $\|S_{n+1} - S_n\|_{PM} < \varepsilon\, 2^{-n-1}$. La suite (S_n) converge en norme vers une pseudofonction T qui remplit les conditions exigées. □

DÉFINITION 1. — *On dit qu'un compact* $E \subseteq \mathbf{G}$ *est un ensemble de type* U' *s'il existe une constante* c *telle que* $\forall S \in PM(E)$ $\|S\|_{PM} \leqslant c.\overline{\lim_{\gamma\to\infty}}|\hat{S}(\gamma)|$.

Cette définition a un sens car, si S est une pseudomesure à support compact, alors $\hat{S}$ admet un représentant continu. D'autre part, il est évident que $U' \subseteq U$; en fait, on peut montrer que $E \in \mathcal{K}(\mathbf{G})$ est de type U' si et seulement si $J_0(E)$ est w^*-*séquentiellement* dense dans $B(\mathbf{G})$ (voir [KL1] ou [M]).

DÉFINITION 2. — *On dit qu'un compact* $E \subseteq \mathbf{G}$ *est un ensemble de Dirichlet s'il existe une suite* (γ_n) *de cactères tendant vers l'infini telle que* $\langle \gamma_n, x\rangle$ *converge uniformément vers* 1 *sur* E. *On note* D *la famille des ensembles de Dirichlet.*

PROPOSITION 2.

a) *D est un G_δ de $\mathcal{K}(\mathbf{G})$ et U' est un idéal $\mathbf{\Sigma}^0_3$.*

b) *Les ensembles de Dirichlet sont de type U'.*

Ces résultats sont bien connus dans le cas du cercle unité et les démonstrations sont à peu près identiques dans le cas général (voir [GMG], [Kah], [KL1] ou [M]). Vérifions simplement que U' est $\mathbf{\Sigma}^0_3$ et que D est G_δ. Un compact $E \subseteq \mathbf{G}$ est de type U' si et seulement si

$$\exists c \geqslant 0\ \forall S \in PM(\mathbf{G})\ \forall K \in \mathcal{K}(\mathbf{\Gamma})\ \forall\gamma \in \mathbf{\Gamma}\ \forall\varepsilon > 0\ \forall p \in \omega$$
$$\Big(\operatorname{supp}(S) \subseteq E \ \Rightarrow\ \exists\gamma' \notin K\ \ |\langle S, \gamma\varphi_p\rangle| < c.\langle S, \gamma'\varphi_p\rangle| + \varepsilon\Big).$$

Quand c, ε et p sont fixés, la relation entre parenthèses est G_δ en $(E,S,\gamma,K) \in \mathcal{K}(\mathbf{G}) \times (PM,w^*) \times \mathbf{\Gamma} \times \mathcal{K}(\mathbf{\Gamma})$. Puisque (PM,w^*), $\mathbf{\Gamma}$ et $\mathcal{K}(\mathbf{\Gamma})$ sont K_σ, on en déduit que U' est $\mathbf{\Sigma}_3^0$ dans $\mathcal{K}(\mathbf{G})$. Un compact E est un ensemble de Dirichlet si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0\, \forall K \in \mathcal{K}(\mathbf{\Gamma}) \;\; \exists\gamma \notin K \;\; |\gamma(x) - 1| < \varepsilon \;\; \textit{sur } E.$$

Il en résulte immédiatement que D est G_δ. □

Rappelons que l'ordre (algébrique) du groupe $\mathbf{G}$ est la borne supérieure des ordres de ses éléments, et que l'ordre topologique de $\mathbf{G}$ est $q(\mathbf{G}) =$ sup $\{n \in \omega;$ *tout voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{G}$ *possède des éléments d'ordre* $\geqslant n\}$. Comme $\mathbf{G}$ est non discret, on a $q(\mathbf{G}) \geqslant 1$.

Dans la suite, on posera $\begin{cases} \mathbf{T}_q = \mathbf{T} \text{ si } q(\mathbf{G}) = +\infty\,; \\ \mathbf{T}_q = \{z \in \mathbf{T};\ z^q = 1\} \text{ si } q(\mathbf{G}) = q < +\infty. \end{cases}$

Lemme 3. — *Soit E un compact de $\mathbf{G}$. Il existe une suite de caractères $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ tendant vers l'infini et vérifiant :*

$$\begin{cases} 1)\ \forall j,\ \ 0 < |j| < q(\mathbf{G})\,, \quad \gamma_n^j \to \infty. \\ 2)\ \textit{Si}\ \ q(\mathbf{G}) = q < +\infty\,, \quad \gamma_n^q = 1 \ \ \textit{sur } E \quad \textit{pour tout } n. \end{cases}$$

Démonstration. — Le groupe $\mathbf{G}$ possède un sous-groupe ouvert fermé $\mathbf{G}_0$ contenant E et isomorphe à $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbf{H}$, où m, p sont des entiers et $\mathbf{H}$ est un groupe compact (voir [HR]). On a $q(\mathbf{G}_0) = q(\mathbf{G})$ car $\mathbf{G}_0$ est ouvert. Comme tout caractère de $\mathbf{G}_0$ est la restriction d'un caractère de $\mathbf{G}$, on peut donc supposer que $\mathbf{G} = \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbf{H}$.

Soient $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbb{R}^p \times \mathbf{H}$ et $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ le dual de $\tilde{\mathbf{G}}$. Notons $\tilde{E}$ l'image de E par la projection naturelle de $\mathbf{G}$ sur $\tilde{\mathbf{G}}$. Si une suite $(\tilde{\gamma}_n)$ tend vers l'infini dans $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ et $\tilde{\gamma}_n^q = 1$ sur $\tilde{E}$, alors $\gamma_n = 1 \otimes \tilde{\gamma}_n$ tend vers l'infini dans $\mathbf{\Gamma}$ et $\gamma_n^q = 1$ sur E. Comme $q(\tilde{\mathbf{G}}) = q(\mathbf{G})$, on voit qu'on peut se ramener au cas où $\mathbf{G} = \mathbb{R}^p \times \mathbf{H}$.

a) Supposons $q(\mathbf{G}) = +\infty$.

Montrons d'abord la propriété suivante :

$$(*) \qquad \forall K \subseteq \mathbf{\Gamma} \text{ compact}\,,\ \forall j > 0\,,\ \ \exists\gamma \in \mathbf{\Gamma}\ \ \gamma^j \notin K.$$

Si $p \neq 0$, la propriété $(*)$ est évidente. Si $p = 0$, alors $\mathbf{G}$ est compact et $\mathbf{\Gamma}$ discret; les parties compactes de $\mathbf{\Gamma}$ sont donc finies. D'autre part, comme $\mathbf{G}$ n'est pas d'ordre borné, $\mathbf{\Gamma}$ ne l'est pas non plus; Il existe donc pour tout $j > 0$ des éléments de $\mathbf{\Gamma}^j = \{\gamma^j;\ \gamma \in \mathbf{\Gamma}\}$ d'ordre (fini ou non) arbitrairement grand. Des deux remarques précédentes, on déduit aisément $(*)$. Écrivons $\mathbf{\Gamma} = \bigcup_{n \geqslant 0} K_n$, où (K_n) est une suite strictement croissante de compacts. Si $K \subseteq \mathbf{\Gamma}$ est un compact symétrique, si n est un entier > 0 et si $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$ vérifie $\gamma^{n!} \notin K^{\leqslant n!} = \{\tau^l;\ \tau \in K,\ l \leqslant n!\}$, alors, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $0 < |k| \leqslant n$, on a $\gamma^k \notin K$. Il découle de cette remarque et de la propriété $(*)$ qu'on peut trouver une suite de caractères $(\gamma_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant : $\forall n\ \ \forall k,\ \ 0 < |k| \leqslant n,\ \ \ \gamma_n^k \notin K_n$. Le lemme est donc démontré dans le cas où $q(\mathbf{G}) = +\infty$.

b) Supposons maintenant $q(\mathbf{G}) = q < +\infty$.

Alors $p = 0$ et $\mathbf{G}$ est compact. Par définition de q, $\mathbf{G}$ possède un sous groupe ouvert $\mathbf{H}$ dont tous les éléments sont d'ordre $\leqslant q$. Comme $\mathbf{G}$ est compact, le quotient $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ est fini. Donc $\mathbf{G}$ est d'ordre borné, et il en va de même de $\mathbf{\Gamma}$. En utilisant la définition de q et un théorème de structure, on en déduit que $\mathbf{G}$ est isomorphe à un produit $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\omega \times \mathbf{G_1}$, où $\mathbf{G_1}$ est un groupe compact. On a donc $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma_1} \times \big(\oplus_{i\in\omega}\ \mathbf{H_i}\big)$, où $\mathbf{\Gamma_1}$ est le dual de $\mathbf{G_1}$ et $\mathbf{H_i} = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ pour tout i. Il est alors facile de voir que si K est une partie finie de $\mathbf{\Gamma}$, on peut trouver $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$ vérifiant

$$\begin{cases} \gamma^q = 1; \\ \gamma^k \notin K \quad \text{si} \ \ 0 < |k| \leqslant q-1. \end{cases}$$

Ceci achève la démonstration du lemme. □

Définition 3. — *Si h est une fonction de $A(\mathbf{T}_q)$, alors h s'étend de manière évidente (dans le cas où $q(\mathbf{G}) < +\infty$) en une fonction de $A(\mathbf{T})$. On peut donc définir la composée $h \circ \gamma$ pour tout caractère $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$; $h \circ \gamma$ est une fonction de $B(\mathbf{G})$, et on a $||h \circ \gamma||_{B(\mathbf{G})} = ||h||_{A(\mathbf{T}_q)}$.*

Lemme 4. — *Soit $(\gamma_n)_{n\in\omega}$ une suite de caractères telle que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n^k = \infty$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $0 < |k| < q(\mathbf{G})$. Soient également $S \in PF$ et $h \in A(\mathbf{T}_q)$. Posons, pour $n \in \omega$: $S_n = (h \circ \gamma_n).S$. Alors, quand $n \to \infty$:*

$$\begin{cases} 1)\ S_n \to \hat{h}(0).S \quad \textit{faiblement dans}\ \ PF. \\ 2)\ ||S_n||_{PM(\mathbf{G})} \to ||\hat{h}||_{PM(\mathbf{T}_q)}\ ||S||_{PM(\mathbf{G})}. \end{cases}$$

Démonstration. — Le fait que les S_n soient des pseudofonctions résulte du lemme 1. D'autre part, la suite (S_n) est bornée dans PM. En effet, on a, pour tout $n \in \omega$:

$$||S_n||_{PM} \leqslant ||h \circ \gamma_n||_{B(\mathbf{G})}\, ||S||_{PM} = ||h||_{A(\mathbf{T}_q)}\, ||S||_{PM}.$$

a) Supposons $q(\mathbf{G}) = +\infty$.

Alors $h \in A(\mathbf{T})$, $h(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\, e^{ikt}$, où $\sum |a_k| < +\infty$. Puisque la suite (S_n) est bornée dans PM, il suffit, pour montrer 1), de vérifier que $\hat{S}_n(\gamma) \to \hat{S}(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$. Fixons $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$ et $\varepsilon > 0$. On a $\hat{S}_n(\gamma) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\, \hat{S}(\gamma.\gamma_n^{-k})$. Choisissons un entier $K > 0$ tel que $\sum_{|k|>K} a_k ||S||_{PM} < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $S \in PF$ et $\lim_{n\to\infty} \gamma_n^k = \infty$ si $0 < |k| \leqslant K$, on peut trouver un entier N tel que $\sum_{0<|k|\leqslant K} |a_k|\, |\hat{S}(\gamma.\gamma_n^{-k})| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geqslant N$. On a alors $|\hat{S}_n(\gamma) - a_0\hat{S}(\gamma)| < \varepsilon$ si $n \geqslant N$. La propriété 1) est donc vérifiée. Montrons maintenant 2). La norme étant une fonction faiblement $s.c.i$ sur PF, une application de 1) à la fonction $e^{-ikt}\, h(t)$ montre que $\liminf_{n\to\infty} ||\gamma_n^k .S_n||_{PM} \geqslant |\hat{h}(k)|.||S||_{PM}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Comme $||\gamma.T||_{PM} = ||T||_{PM}$ pour tout couple $(\gamma, T) \in \mathbf{\Gamma} \times PM$, on en déduit

$$\liminf_{n\to\infty} ||S_n||_{PM} \geqslant ||\hat{h}||_{PM}\, ||S||_{PM}.$$

Il suffit donc de vérifier que $\limsup_{n\to\infty} ||S_n||_{PM} \leqslant ||\hat{h}||_{PM}.||S||_{PM}$. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons comme précédemment un entier K tel que $\sum_{|k|>K} |a_k|||S||_{PM} < \varepsilon$ et posons $L = \{\gamma \in \mathbf{\Gamma};\ |\hat{S}(\gamma)| \geqslant \varepsilon/||h||_{A(\mathbf{T})}\}$. L'ensemble L est un compact de $\mathbf{\Gamma}$ car $S \in PF$. On peut donc trouver un entier $N > 0$ tel que $\forall n \geqslant N$ $\forall l$, $0 < l \leqslant 2K$, $\gamma_n^l \notin L.L^{-1}$. Pour $n \geqslant N$, les ensembles $\gamma_n^k.L$, $|k| \leqslant K$, sont alors deux à deux disjoints. Soient $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$ et $n \geqslant N$ fixés. Le choix de N montre qu'il existe au plus un entier k vérifiant $|k| \leqslant K$ et $|\hat{S}(\gamma.\gamma_n^{-k})| \geqslant \varepsilon/||h||_{A(\mathbf{T})}$. On a donc

$$\begin{aligned} |\hat{S}_n(\gamma)| &\leqslant \sum_{|k|\leqslant K} |a_k||\hat{S}(\gamma.\gamma_n^{-k})| + \sum_{|k|>K} |a_k|||S||_{PM} \\ &< 2\varepsilon + ||S||_{PM}||\hat{h}||_{PM}. \end{aligned}$$

Ainsi $||S_n||_{PM} \leqslant 2\varepsilon + ||S||_{PM}||\hat{h}||_{PM}$ pour tout $n \geqslant N$, ce qui démontre 2).

b) Supposons maintenant $q(\mathbf{G}) < +\infty$.

Dans ce cas on peut écrire $h(z) = \sum_{k=o}^{q-1} a_k z^k$, $a_0, \ldots, a_{q-1} \in \mathbb{C}$, et par suite $(h\circ\gamma).S = \sum_{k=0}^{q-1} a_k\gamma^k.S$, pour tout caractère γ. Il suffit alors de répéter la démonstration précédente. Le lemme est donc entièrement démontré. □

LEMME 5. — *Soient S une pseudofonction à support compact, $\varepsilon > 0$, $\mathcal{N}$ un voisinage faible de S dans PF et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des fonctions de $B(\mathbf{G})$. Pour tout compact $K \subseteq \mathbf{\Gamma}$, on peut trouver un caractère γ et une pseudofonction T vérifiant*

$$\begin{cases} T \in \mathcal{N}, \quad ||\varphi_i.T||_{PM} \leqslant ||\varphi_i.S||_{PM}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\ ; \\ \operatorname{supp}(T) \subseteq \operatorname{supp}(S); \\ \gamma \notin K; \\ |\gamma(x) - 1| < \varepsilon \quad \text{sur} \quad \operatorname{supp}(T). \end{cases}$$

Démonstration. — Choisissons une fonction $h \in A(\mathbf{T}_q)$ dont le support est contenu dans $\{z \in \mathbf{T}_q;\ |z-1| < \varepsilon\}$ et telle que $\hat{h}(0) = 1 = ||\hat{h}||_{PM}$. L'existence d'une telle fonction est facile à vérifier (si $q(\mathbf{G}) < +\infty$, cela revient à trouver un polynôme non nul de degré $\leqslant q-1$ s'annulant sur $\mathbf{T}_q \setminus \{1\}$). Soient E un voisinage compact de $\operatorname{supp}(S)$ et (γ_n) une suite de caractères (donnée par le lemme 3) vérifiant $\lim_{n\to\infty} \gamma_n^k = 1$ si $0 < |k| < q(\mathbf{G})$, et $\gamma_n^q = 1$ sur E (si $q(\mathbf{G}) = q < +\infty$). On définit $S_n = (h \circ \gamma_n).S$ comme dans le lemme 4. Puisque γ_n est à valeurs dans $\mathbf{T}_q$ au voisinage du support de S et que $\operatorname{supp}(S)$ est compact, le choix de h entraîne que le support de S_n est contenu dans l'ensemble

$$\operatorname{supp}(S) \cap \{x \in \mathbf{G};\ |\gamma_n(x) - 1| < \varepsilon\}.$$

De plus, comme les $\varphi_i.S$ sont des pseudofonctions, on a d'après le lemme 4 :

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_i.S_n = \varphi_i.S \quad \text{faiblement dans } PF; \\ ||S_n||_{PM} \leqslant (1+\alpha_n)||S||_{PM}\ , \quad ||\varphi_i.S_n||_{PM} \leqslant (1+\alpha_n)||\varphi_i.S||_{PM} \end{cases}$$

où $\alpha_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Il suffit donc de poser $T = \dfrac{1}{1+\alpha_n} S_n$ et $\gamma = \gamma_n$, pour n suffisamment grand. □

On peut maintenant appliquer le théorème de la section 1. Rappelons que $\mathbf{W}$ est le sous ensemble de ω^ω défini par $\alpha \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \lim_{p\to\infty} \alpha(p) = +\infty$, et que $\tilde{D}_f$ désigne l'ensemble des compacts de $\mathbf{G}$ qui sont réunion d'un nombre fini d'ensembles de Dirichlet deux à deux disjoints.

THÉORÈME 1. — *Soit $E \subseteq \mathbf{G}$ un fermé de multiplicité. Il existe une application continue $\alpha \mapsto E(\alpha)$ de ω^ω dans $\mathcal{K}(E) \setminus \{\varnothing\}$ vérifiant :*

$$\begin{cases} \text{(i)} \;\; Si\ \alpha \notin \mathbf{W}\,, \quad E(\alpha) \in \tilde{D}_f. \\ \text{(ii)} \;\; Si\ \alpha \in \mathbf{W}\,, \quad E(\alpha) \ \ est\ de\ type\ \ M^p. \end{cases}$$

Démonstration. — Puisque U est un σ-idéal, tout fermé de multiplicité contient un compact de multiplicité. On peut donc supposer que E est compact, et choisir une fonction $\varphi \in A(\mathbf{G})$ égale à 1 au voisinage de E. On applique le théorème de la section 1 avec $A = P = A(\mathbf{G})$, $\mathcal{C} = PM(E)$, $\Lambda(S) = \hat{\varphi.S}$ et $\mathcal{G} = D \cap \mathcal{K}(E)$. Avec les notations de la section 1, on a $\mathcal{B} = PF(E)$ et $\mathcal{I}_\mathcal{B} = \{F \in \mathcal{F}(\mathbf{G});\ F \cap E \in U\}$. Un instant de reflexion montre que les éléments de $(\mathcal{I}_\mathcal{B})^{\mathrm{perf}}$ sont tous contenus dans E, et donc que $(\mathcal{I}_\mathcal{B})^{\mathrm{perf}} = M^p \cap \mathcal{K}(E)$. Soit (L_p) une suite de compacts de $\mathbf{\Gamma}$ telle que $\mathbf{\Gamma} = \bigcup_{p\in\omega} L_p$ et que tout compact de $\mathbf{\Gamma}$ soit contenu dans l'un des L_p. Pour tout $p \in \omega$, posons

$$\mathcal{U}^p = \{K \in \mathcal{K}(E);\ \exists \gamma \notin L_p\ \ |\gamma(x) - 1| < 2^{-p}\ \ \forall x \in K\}.$$

Les $\mathcal{U}^p$ sont des ouverts héréditaires de $\mathcal{K}(E)$ et on a $\bigcap_{p\in\omega} \mathcal{U}^p = D \cap \mathcal{K}(E)$. On sait que $PF(E)$ est stable par A-multiplication. Pour démontrer le théorème 1, il suffit donc de vérifier les deux conditions suivantes :

(2) $\forall S \in PF(E)$, $\forall \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in A$, $\forall p \in \omega$, S est dans l'adhérence préfaible de

$$\{T \in PF(E);\ \mathrm{supp}(T) \in \mathcal{U}^p,\ ||\varphi_i.T||_{PM} \leqslant ||\varphi_i.S||_{PM}\ \ \forall i \leqslant n\}.$$

(3) $\forall S \in PF(E)$, $\forall K_1, \ldots, K_m \in D$, $\forall \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in A$, S est dans l'adhérence préfaible de

$$\{T \in PF(E);\ \mathrm{supp}(T) \cap \left(\bigcup_{j=1}^m K_j\right) = \varnothing,\ ||\varphi_i.T|| \leqslant ||\varphi_i.S||\ \forall i \leqslant n\}.$$

La propriété (**2**) est une conséquence immédiate du lemme 5. Pour (**3**), on applique les propositions 1 et 2 : d'après la proposition 1, les ensembles de Dirichlet sont des ensembles d'unicité ; d'après la proposition 2, il en résulte que si $S \in PF(E)$ et $K_1, \ldots, K_m$ sont des ensembles de Dirichlet, alors S est fortement adhérente à $\{T \in PF;\ \mathrm{supp}(T) \subseteq \mathrm{supp}(S),\ \mathrm{supp}(T) \cap \bigcup_j K_j = \varnothing\}$, donc également à l'ensemble figurant dans la condition (**3**). Le théorème 1 est donc démontré. □

COROLLAIRE 1. — *Si $E \subseteq \mathbf{G}$ un fermé de multiplicité, alors $\tilde{D}_f \cap \mathcal{K}(E)$ et $U' \cap \mathcal{K}(E)$ sont des vrais $\mathbf{\Sigma}_3^0$ de $\mathcal{K}(E)$.*

COROLLAIRE 2. — *Si $E \subseteq \mathbf{G}$ est un fermé de multiplicité, il n'existe pas d'idéal $\mathbf{\Pi}_3^0$ de $\mathcal{K}(\mathbf{G})$ contenant $D \cap \mathcal{K}(E)$ et contenu dans U.*

COROLLAIRE 3. — *Si $E \subseteq \mathbf{G}$ est un fermé de multiplicité, alors $U \cap \mathcal{F}(E)$ est un vrai $\mathbf{\Pi}_1^1$ de $\mathcal{F}(E)$.*

DÉFINITIONS 4. — *Pour tout fermé $E \subseteq \mathbf{G}$, posons $N(E) = \overline{M(E)}^{w^*}$ (adhérence préfaible de $M(E)$ dans PM). On dit qu'un fermé E est un ensemble de synthèse harmonique si $N(E) = PM(E)$; que E est un ensemble de Helson si $N(E) = M(E)$; et que E est un ensemble WTP si $M(E) = PM(E)$, autrement dit si E est à la fois un ensemble de Helson et un ensemble de synthèse.*

Rappelons deux résultats qui comptent parmi les plus célèbres concernant ces trois familles de fermés.

1) $\mathcal{H}$ (la famille des ensembles de Helson) et WTP sont stables par réunion finie (Varopoulos, voir [Va1], [Va2], [GMG] ou [LP]).

2) Il existe des ensembles de Helson qui ne sont pas d'unicité (Körner [Kö2] dans $\mathbf{T}$). Plus précisément, tout fermé de multiplicité contient un ensemble de Helson et de multiplicité (Kaufman [Kau1] dans $\mathbf{T}$, Saeki [Sa] dans le cas général).

LEMME 6.

a) *Les ensembles WTP sont de type U'.*

b) *$\mathcal{H} \cap \mathcal{K}(\mathbf{G})$ et $WTP \cap \mathcal{K}(\mathbf{G})$ sont $\mathbf{\Sigma}_3^0$ dans $\mathcal{K}(\mathbf{G})$.*

c) *Si E est un ensemble de Helson, alors $WTP \cap \mathcal{K}(E)$ est G_δ dans $\mathcal{K}(E)$.*

Démonstration. — Pour une démonstration de a), voir par exemple [KL] ou [GMG].

b) Un fermé $E \subseteq \mathbf{G}$ est un ensemble de Helson si et seulement si

$$\alpha(E) = \inf \left\{ \frac{||\mu||_{PM}}{||\mu||_M};\ \mu \in M(E),\ \mu \neq 0 \right\} > 0$$

($\alpha(E)$ est la *constante de Helson* de E). On en déduit facilement que $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}(\mathbf{G})$ est $\mathbf{\Sigma}_3^0$ dans $\mathcal{K}(\mathbf{G})$. Si (f_n) est une suite dense dans la boule unité de A, alors un compact E est WTP si et seulement si $\exists c\ \forall n\ \forall S \in PM(E)\ \ |\langle S, f_n\rangle| \leqslant c||f_n||_\infty$. On en conclut aisément que $WTP \cap \mathcal{K}(\mathbf{G})$ est $\mathbf{\Sigma}_3^0$ (*cf* la démonstration de *c*)).

Pour démontrer *c*), fixons un compact de Helson E. Soit α la constante de Helson de E. Si $F \subseteq E$ est un ensemble WTP, alors toute pseudomesure S portée par F est une mesure, et de plus $||S||_M \leqslant \alpha||S||_{PM}$. On a donc

$$(*) \qquad \forall f \in A\ \ \forall S \in PM(F)\ \ |\langle f, S\rangle| \leqslant \alpha||S||_{PM}||f\lceil F||_{C_0(F)}.$$

Inversement, puisque A est dense dans $C_0(\mathbf{G})$, tout fermé F vérifiant la propriété $(*)$ est WTP. Soit maintenant (f_n) une suite dense en norme dans A. D'après ce qui précède, on peut écrire, pour tout compact $F \subseteq E$:

$$F \in WTP \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall S \in \mathbf{B_1}(PM)\ ,\ \forall n \in \omega, \\ \big(\mathrm{supp}(S) \subseteq F \text{ et } |\langle f_n,\ S\rangle| > \alpha\big) \Rightarrow \big(\exists x \in F\ \ |f_n(x)| > 1\big). \end{cases}$$

La relation entre parenthèses est G_δ dans le couple (F, S). Comme $\mathcal{K}(E) \times \mathbf{B_1}(PM)$ est compact, on en déduit que $WTP \cap \mathcal{K}(E)$ est G_δ. □

THÉORÈME 2. — *Tout fermé de multiplicité contient un ensemble de Dirichlet qui n'est pas de synthèse harmonique.*

Démonstration. — Soit $E \subseteq \mathbf{G}$ un fermé de multiplicité. D'après le théorème de Körner, Kaufman et Saeki, on peut supposer que E est aussi un ensemble de Helson. D'après le lemme 6 (et le théorème de Varopoulos), $WTP \cap \mathcal{K}(E)$ est alors un idéal G_δ de $\mathcal{K}(E)$, contenu dans U. D'après le corollaire 2 du théorème 1, $WTP \cap \mathcal{K}(E)$ ne peut donc pas contenir $D \cap \mathcal{K}(E)$. □

LEMME 7.

a) *Soient E un fermé quelconque de $\mathbf{G}$ et $(x_n)_{n\in\omega}$ une suite de points de E. Pour toute fonction $f \in I(E) = \{\varphi \in A(\mathbf{G});\ \varphi \equiv 0$ sur $E\}$ et pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi \in A(\mathbf{G})$ nulle au voisinage de $\{x_n\,;\ n \in \omega\}$ telle que $||\varphi - f||_A < \varepsilon$.*

b) *Si E est un fermé quelconque de $\mathbf{G}$ et (x_n) est une suite de points de E, il existe un G_δ $G \subseteq E$ contenant tous les x_n et vérifiant la propriété suivante :*

$$\forall S \in PM(E) \ \ \mathrm{supp}(S) \subseteq G \Rightarrow S \in N(E).$$

c) *Si $E \subseteq \mathbf{G}$ est un ensemble de Helson, il existe un G_δ dense de E dont tout fermé est WTP.*

Démonstration.

a) Rappelons d'abord que les singletons de $\mathbf{G}$ vérifient une propriété très forte de synthèse harmonique : si $x \in \mathbf{G}$ et $f \in A(\mathbf{G})$ s'annule en x, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \in A(\mathbf{G})$ nulle au voisinage de x elle que $||gf - f||_A < \varepsilon$ (voir [HR] ou [R]). Fixons maintenant $f \in I(E)$ et $\varepsilon > 0$. D'après la remarque précédente, on peut construire par induction des fonctions $g_n \in A$ et des ouverts $V_n \subseteq \mathbf{G}$ vérifiant

$$\begin{cases} x_n \in V_n; \\ g_n \equiv 0 \ \text{ sur } \ V_n; \\ ||g_0.f - f||_A < \varepsilon/2; \\ ||g_0 \dots g_{n+1}.f - g_0 \dots g_n.f||_A < \varepsilon\, 2^{-n-1}. \end{cases}$$

Posons $\varphi_n = g_0 \dots g_n f \ \ (n \in \omega)$. On a $\varphi_n \equiv 0$ sur $\bigcup_{k=0}^{n} V_k$, et la suite (φ_n) converge en norme vers une fonction $\varphi \in A$. La fonction φ est nulle sur $V = \bigcup_{n\in\omega} V_n$, et on a $||\varphi - f||_A < \varepsilon$. Puisque V contient tous les x_n, ceci démontre a).

b) Une pseudomesure S est dans $N(E)$ si et seulement si $\langle f,\ S\rangle = 0$ pour toute fonction $f \in I(E)$. Comme $I(E)$ est séparable en norme, il suffit donc de montrer que pour toute fonction $f \in I(E)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $V \subseteq \mathbf{G}$ contenant tous les x_n tel que $\forall S \in PM(E)$ $\mathrm{supp}(S) \subseteq V \Rightarrow |\langle f,\ S\rangle| < \varepsilon\, ||S||_{PM}$. C'est évidemment une conséquence de a).

La partie c) résulte immédiatement de a) et b). □

THÉORÈME 3. — *Le σ-idéal U ne possède pas de base borélienne.*

Démonstration. — D'après la proposition 1, U est *calibré* (voir [DSR]) ; d'après le corollaire 3 du théorème 1, $U \cap \mathcal{F}(E)$ est un vrai $\mathbf{\Pi}_1^1$ de $\mathcal{F}(E)$ si $E \notin U$; d'après le lemme 7 et le théorème de Körner, Kaufman et Saeki, il existe un G_δ de $\mathbf{G}$ dont tous les sous fermés sont dans U mais qui n'est pas recouvrable par une suite de fermés d'unicité. Le théorème 3 est donc une conséquence d'un résultat de G. Debs et J. Saint-Raymond ([DSR] Th. 6). □

Pour terminer cette section, on va démontrer le théorème suivant, qui est une conséquence très simple des résultats de la section 1.

THÉORÈME 4. — *Notons $\mathbf{2}^\omega$ l'espace de Cantor des suites infinies de 0 et de 1. Si $E \subseteq \mathbf{G}$ est un fermé de multiplicité, il existe une application continue $\alpha \mapsto K_\alpha$ de $\mathbf{2}^\omega$ dans $\mathcal{K}(E)$ telle que :*

$$\begin{cases} K_\alpha \in M \quad \textit{pour tout} \quad \alpha \in \mathbf{2}^\omega; \\ K_\alpha \cap K_\beta = \varnothing \quad \textit{si} \quad \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Démonstration. — Soient E un fermé de multiplicité (que l'on peut supposer compact), $T_\varnothing$ une pseudofonction non nulle portée par E, et f une fonction de $A(\mathbf{G})$ telle que $\langle T_\varnothing,\ f\rangle\ > \frac{1}{2}$. Notons $2^{<\omega}$ l'ensemble des suite finies de 0 et de 1. Le lemme 1.3 permet de construire, pour $s \in 2^{<\omega}$, une pseudofonction T_s portée par E et un ouvert V_s de E vérifiant :

$$\begin{cases} ||T_s||_{PM} \leqslant ||T_\varnothing||_{PM}, \\ \operatorname{supp}(T_s) \subseteq V_s, \\ \overline{V}_{s^\frown i} \subseteq V_s \quad (i=0,\ 1) \quad \overline{V}_{s^\frown 0} \cap \overline{V}_{s^\frown 1} = \varnothing, \\ \delta(\overline{V}_{s^\frown i},\, \overline{V}_s) < 2^{-|s|} \quad \text{(où } \delta \text{ est une distance Polonaise sur } \mathcal{K}(E)), \\ \langle T_s, f\rangle\ > \dfrac{1}{2}, \\ ||T_s\ -\ T_{s^\frown i}||_{PM}\ < 2^{-|s|}. \end{cases}$$

Posons, pour $\alpha \in \mathbf{2}^\omega$, $K_\alpha = \bigcap_{p\in\omega} \overline{V}(\alpha\lceil_p)$. Il est clair que l'application $\alpha \mapsto K_\alpha$ est continue de $\mathbf{2}^\omega$ dans $\mathcal{K}(E)$. Pour tout $\alpha \in \mathbf{2}^\omega$, la suite $\big(T(\alpha\lceil_p)\big)_{p\in\omega}$ est bornée dans PM, donc elle possède une valeur d'adhérence

T_α, non nulle car $\langle T_\alpha, f\rangle \geqslant \frac{1}{2}$. On vérifie facilement que $\mathrm{supp}(T_\alpha) \subseteq K_\alpha$ et $T_\alpha \in PF$. Ceci achève la démonstration.

□

3. Bandes de première espèce.

Dans cette section, la lettre E désigne un espace compact métrisable (non vide!). On note $M_+(E)$ l'ensemble de mesures positives sur E et $\mathbf{P}(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur E. Si $A \subseteq E$ est un ensemble borélien (ou simplement universellement mesurable), on pose $M_+(A) = \{\mu \in M_+(E);\ \mu(E \setminus A) = 0\}$. Sauf mention contraire, $M_+(E)$ et $\mathbf{P}(E)$ seront toujours munis de la topologie préfaible induite par $M(E)$.

DÉFINITION 1. — *Soit $\mathcal{B}$ une partie de $M_+(E)$. On dit que $\mathcal{B}$ est une bande si $\mathcal{B}$ est un cône convexe, fermé en norme, héréditaire pour l'ordre. Si $\mathcal{B} \subseteq M_+(E)$ est une bande, on note $\mathcal{B}'$ la bande orthogonale à $\mathcal{B}$, qui est l'ensemble des mesures positives étrangères à toutes les mesures de $\mathcal{B}$, et $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ le σ-idéal polaire de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire l'ensemble des compacts de E négligeables pour tous les éléments de $\mathcal{B}$. Puisque $\mathcal{B}$ est une bande, cette dernière notation est en accord avec celle de la section 1.*

DÉFINITION 2. — *On dira qu'une bande $\mathcal{B}$ est une bande de première espèce s'il existe un espace localement compact à base dénombrable d'ouverts Y et une application continue $\theta : Y \to C(E)$ tels que $\theta[Y]$ soit borné dans $C(E)$ et $\mathcal{B} = \{\mu \in M_+(E);\ \mu \circ \theta \in C_0(Y)\}$.*

Remarques.

1) Si $\mathcal{B}$ est une bande de première espèce, alors $\mathcal{B}$ est évidemment borélienne et *fortement convexe*; et $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ est $\mathbf{\Pi}^1_1$ dans $\mathcal{K}(E)$. La définition précédente fait implicitement référence à un résultat de G. Debs ([D]) : Si $\mathcal{B}$ est une bande borélienne fortement convexe, alors il existe un filtre borélien $\mathcal{F}$ sur ω et une suite $(f_n) \subseteq C_+(E)$ tels que $\mathcal{B} = \{\mu \in M_+(E);\ \lim_{\mathcal{F}} \mu(f_n) = 0\}$ et $\mathcal{B}' = \{\mu \in M_+(E);\ \overline{\lim_{\mathcal{F}}}\, \mu(f_n) = \mu(1)\}$.

2) En fait, il est facile de montrer que si $\mathcal{B}$ est une bande de première espèce, alors $\mathcal{B} \cap \mathbf{B}_1(M(E))$ est $\mathbf{\Pi}^0_3$ dans $\mathbf{B}_1(M(E))$. On peut

se demander si la réciproque est vraie. Cette question peut se formuler de la manière suivante : Si X est un espace de Banach séparable et si C est une partie fortement convexe et $\mathbf{\Pi}_3^0$ de $(\mathbf{B_1}(X^*), w^*)$, existe-t-il une application $\varphi : \mathbf{B_1}(X^*) \to \mathbf{B_1}(l^\infty)$ *affine* et w^*-w^* continue telle que $C = \varphi^{-1}(c_0)$? (C'est un résultat plausible car $c_0 \cap \mathbf{B_1}(l^\infty)$ est un vrai $\mathbf{\Pi}_3^0$ de $\mathbf{B_1}(l^\infty)$.)

Exemples.

1) Si $\mathbf{G}$ est un groupe abélien localement compact à base dénombrable d'ouverts et E est un compact de $\mathbf{G}$, alors l'ensemble des mesures de Rajchman positives portées par E est une bande de première espèce (voir section 1).

2) Si (f_n) est une suite de fonctions positives, bornée dans $C(E)$, alors $\mathcal{B} = \{\mu \in M_+(E);\ \mu(f_n) \to 0\}$ est une bande de première espèce. Par exemple, la bande des mesures *diffuses* (i.e. ne chargeant pas les points) est de cette forme; dans ce cas, $\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \mathcal{K}_\omega(E)$, l'ensemble des compacts dénombrables de E. Dans toute la suite, la lettre $\mathcal{B}$ désigne (sauf indication contraire) une bande de première espèce, avec «témoins» Y et $\theta : Y \to C(E)$.

Le premier théorème de cette section est un résultat de «décomposition» pour le σ-idéal $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$.

Si $\mu \in M_+(E)$, on pose $\tilde{\mu} = \mu \circ \theta$ et $R(\mu) = \varlimsup_{y \to \infty} |\tilde{\mu}(y)|$; pour tout $\varepsilon > 0$, on note $R^\varepsilon(E)$ (ou simplement R^ε) l'ensemble $\{\mu \in \mathbf{P}(E);\ R(\mu) < \varepsilon\}$; enfin, on pose

$$\mathcal{I}'_{\mathcal{B}} = \{F \in \mathcal{K}(E);\ \exists c > 0\ \forall \mu \in \mathbf{P}(F)\quad R(\mu) \geqslant c\}.$$

Il est clair que $\mathcal{I}'_{\mathcal{B}}$ est une partie héréditaire de $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$. Dans le cas des mesures de Rajchman, $\mathcal{I}'_{\mathcal{B}}$ n'est autre que la famille bien connue des ensembles de type U_0' (voir [KL1]).

Il n'est pas difficile de montrer, comme pour les ensembles de type U' (*cf* section 2), que $\mathcal{I}'_{\mathcal{B}}$ est la réunion d'une suite de G_δ héréditaires de $\mathcal{K}(E)$. On en déduit sans peine que $(\mathcal{I}'_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$ est $\mathbf{\Pi}_3^0$ dans $\mathcal{K}(E)$.

Lemme 1. — *Si $F \in (\mathcal{I}'_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $R^\varepsilon(F)$ est dense dans $\mathbf{P}(F)$.*

La démonstration n'est pas difficile. □

LEMME 2. — *Soient ε, $\varepsilon' > 0$ et C une partie convexe de $R^{\varepsilon}(E)$. Si $\mu \in R^{\varepsilon'}(E) \cap \overline{C}^{w^*}$, il existe une mesure $\nu \in C$ vérifiant* $||\tilde{\nu} - \tilde{\mu}||_{\infty} < \varepsilon + \varepsilon'$.

La démonstration est analogue à celle du lemme 1.2. □

THÉORÈME 1. — *La famille $\mathcal{I}'_{\mathcal{B}}$ est une base de $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que tout fermé non vide et $\mathcal{I}'_{\mathcal{B}}$-parfait porte un élément de $\mathcal{B} \cap \mathbf{P}(E)$. Fixons $F \in (\mathcal{I}'_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$, $F \neq \varnothing$. Les lemmes 1 et 2 permettent de construire une suite $(\mu_n) \subseteq \mathbf{P}(F)$ vérifiant

$$\begin{cases} R(\mu_n) < 2^{-n} \ ; \\ ||\tilde{\mu}_{n+1} - \tilde{\mu}_n||_{\infty} < 2^{-n}. \end{cases}$$

On vérifie facilement que si $\mu \in \mathbf{P}(F)$ est une valeur d'adhérence de la suite (μ_n), alors $\tilde{\mu} \in C_0(Y)$. Ceci achève la démonstration. □

COROLLAIRE. — *La famille $(\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$ est $\mathbf{\Pi}^0_3$ dans $\mathcal{K}(E)$.*

On va maintenant étudier les propriétés descriptives du σ-idéal $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$.

LEMME 3. — *Soit $\mathcal{B}$ une partie convexe de $\mathbf{P}(E)$ telle que $\mathbf{P}(\overline{V}) \cap \mathcal{B} \neq \varnothing$ pour tout ouvert non vide $V \subseteq E$. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert dense de $\mathcal{K}(E)$, alors l'ensemble $\mathbf{P}_{\mathcal{U},\mathcal{B}} = \{\mu \in \mathbf{P}(E);\ \mu \in \mathcal{B},\ \mathrm{supp}(\mu) \in \mathcal{U}\}$ est dense dans $\mathbf{P}(E)$.*

Démonstration.— Soit $\mathcal{U}$ un ouvert dense de $\mathcal{K}(E)$. Pour montrer que $\mathbf{P}_{\mathcal{U},\mathcal{B}}$ est dense dans $\mathbf{P}(E)$, il suffit de vérifier que l'on peut approcher toute combinaison convexe de masses de Dirac par un élement de $\mathbf{P}_{\mathcal{U},\mathcal{B}}$. Fixons une mesure $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, où $x_i \in E$, $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum \lambda_i = 1$. Soient $\mathcal{F}$ une partie finie de $C(E)$ et $\varepsilon > 0$. Fixons également un nombre $\alpha > 0$. Choisissons des ouverts $V_1, \ldots, V_n \subseteq E$ deux à deux disjoints tels que

$$\begin{cases} x_i \in V_i \quad \text{pour tout} \quad i \leqslant n; \\ \forall i \leqslant n \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad \mathrm{osc}(f, V_i) < \varepsilon, \end{cases}$$

où $\mathrm{osc}(f, V_i)$ désigne l'oscillation de f sur V_i . Puisque $\mathcal{U}$ est dense dans $\mathcal{K}(E)$, on peut trouver un élément F de $\mathcal{U}$ vérifiant $F \subseteq \cup_i V_i$ et $F \cap V_i \neq \varnothing$

pour tout $i \leqslant n$. Comme $\mathcal{U}$ est ouvert, on peut également trouver des ouverts $W_1, \ldots, W_p \subseteq E$ tels que $F \in \mathcal{U}(W_1, \ldots, W_p) \subseteq \mathcal{U}$, où

$$\mathcal{U}(W_1, \ldots, W_p) = \{K \in \mathcal{K}(E);\ K \subseteq \cup_j W_j,\ K \cap W_j \neq \varnothing\ \forall j \leqslant p\}.$$

On a alors $V_i \cap \cup_j W_j \neq \varnothing$ pour tout $i \leqslant n$. L'hypothèse faite sur $\mathcal{B}$ entraîne l'existence de mesures $\nu_1, \ldots, \nu_n,\ \nu'_1, \ldots, \nu'_p$ telles que

$$\begin{cases} \nu_i,\ \nu'_j \in \mathcal{B},\quad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p; \\ \operatorname{supp}(\nu'_j) \subseteq W_j,\quad \operatorname{supp}(\nu_i) \subseteq V_i \cap W,\quad \text{où}\quad W = \cup_j W_j. \end{cases}$$

Posons

$$\nu_\alpha = (1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ \nu_i\ +\ \frac{\alpha}{p} \sum_{j=1}^{p} \nu'_j.$$

Comme $\mathcal{B}$ est convexe, on a $\nu_\alpha \in \mathcal{B}$. De plus $\operatorname{supp}(\nu_\alpha) \in \mathcal{U}$ par définition des W_j. Si $f \in \mathcal{F}$, on peut écrire

$$\int f\, d\mu - \int f\, d\nu_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{\overline{V}_i} (f(x_i) - f)\, d\nu_i + \alpha\Big(\frac{1}{p} \sum_j \langle \nu'_j, f\rangle - \sum_i \lambda_i \langle \nu_i, f\rangle\Big).$$

Donc, en posant $M = \sup\ \{||f||_\infty;\ f \in \mathcal{F}\}$, on obtient

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad |\langle f, \nu_\alpha\rangle - \langle f, \mu\rangle| < \varepsilon\ +\ 2\alpha M.$$

Il suffit donc de choisir α assez petit pour obtenir $|\langle \nu_\alpha, f\rangle - \langle \mu, f\rangle| < \varepsilon,\ f \in \mathcal{F}$. Ceci achève la démonstration du lemme. □

THÉORÈME 2. — *Soit $\mathcal{G}$ un G_δ dense héréditaire de $\mathcal{K}(E)$. On suppose que $E \in (\mathcal{I}_\mathcal{B})^{\text{perf}}$ et que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{I}_\mathcal{B}$. Alors il n'existe pas d'ensemble $\mathbf{\Pi}^0_3$ $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{K}(E)$ tel que $\tilde{\mathcal{G}}_f \setminus \{\varnothing\} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq (\mathcal{I}_\mathcal{B})^{\text{loc}}$.*

Démonstration. — Ecrivons $\mathcal{G} = \bigcap \mathcal{U}_p$, où $(\mathcal{U}_p)$ est une suite décroissante d'ouverts héréditaires de $\mathcal{K}(E)$. On applique le théorème de la section 1 à $A = C(E)$, $P = C_+(E)$, $\Lambda : \mu \mapsto \mu \circ \theta$ et $\mathcal{C} = M_+(E)$. Il s'agit de vérifier les trois propriétés suivantes :

(1) Si $f \in C_+(E)$ et $\mu \in \mathcal{B}$, alors $f.\mu \in \mathcal{B}$.

(2) Si $\mu \in \mathcal{B}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C_+(E)$, alors μ est dans l'adhérence préfaible de $\{\nu \in \mathcal{B};\ \operatorname{supp}(\nu) \in \mathcal{U}^p,\ ||\nu||_M \leqslant ||\mu||_M,\ ||\varphi_i.\nu||_M \leqslant ||\varphi_i.\mu||_M\}$.

(3) Si $\mu \in \mathcal{B}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C_+(E)$, $K_1, \dots, K_p \in \mathcal{G}$, alors μ est dans l'adhérence préfaible de $\{\nu \in \mathcal{B};\ ||\nu||_M \leqslant ||\mu||_M,\ ||\varphi_i.\nu||_M \leqslant ||\varphi_i.\mu||_M,\ \mathrm{supp}(\nu) \cap (\cup_j K_j) = \varnothing\}$.

La propriété **(1)** est vérifiée car $\mathcal{B}$ est une bande.

La propriété **(2)** est une conséquence du lemme 3. En effet, si $\varphi \in C_+(E)$ et $\mu \in M_+(E)$ alors $||\varphi.\mu||_M = \langle \varphi, \mu \rangle$, donc l'application $\mu \mapsto ||\varphi.\mu||_M$ est continue sur $M_+(E)$: de cette remarque et à l'aide du lemme 3, on déduit facilement (2).

Enfin, la propriété **(3)** est également une conséquence du lemme 3 : si $K_1, \dots, K_m$ sont des éléments de $\mathcal{G}$, alors $K = \bigcup_j K_j$ appartient à $\mathcal{I}_\mathcal{B}$, donc est maigre dans E car $E \in (\mathcal{I}_\mathcal{B})^{\mathrm{perf}}$. On peut donc appliquer le lemme 3 avec $\mathcal{U} = \mathcal{K}(E \setminus K)$. Ceci achève la démonstration du théorème 2. □

COROLLAIRE 1. — *Si $E \in (\mathcal{I}_\mathcal{B})^{\mathrm{perf}}$ et si $\mathcal{I}_\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{K}(E)$, alors $\mathcal{I}_\mathcal{B}$ n'est pas borélien dans $\mathcal{K}(E)$.*

Démonstration. — Si $\mathcal{I}_\mathcal{B}$ était borélien, alors, d'après le «Théorème de dichotomie pour les σ-idéaux de compacts» ([KLW]), il serait en fait G_δ, ce qui contredirait le théorème 2. □

COROLLAIRE 2. — *Si $\mu \in \mathbf{P}(E)$ est une mesure diffuse et si (f_n) est une suite de fonctions positives, bornée dans $C(E)$, telle que $\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = 0$, alors il existe une mesure $\nu \in \mathbf{P}(E)$ étrangère à μ telle que $\lim_{n\to\infty} \nu(f_n) = 0$.*

Démonstration. — Soit $F = \mathrm{supp}(\mu)$. Posons $\mathcal{B}_1 = L^1(\mu) \subseteq M_+(F)$ et $\mathcal{B}_2 = \{\nu \in M_+(F);\ \nu(f_n) \to 0\}$. Par hypothèse, $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$, $F \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}_1})^{\mathrm{perf}}$ et $\mathcal{I}_{\mathcal{B}_1}$ est dense dans $\mathcal{K}(F)$. De plus $\mathcal{I}_{\mathcal{B}_1} = \{K \in \mathcal{K}(F);\ \mu(K) = 0\}$ est G_δ dans $\mathcal{K}(F)$. D'après le corollaire 1, $\mathcal{B}_1$ n'est donc pas une bande de première espèce; en particulier, $\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_1 \neq \varnothing$, ce qui achève la démonstration. □

COROLLAIRE 3. — *Si $E \in (\mathcal{I}_\mathcal{B})^{\mathrm{perf}}$ et si $\mathcal{I}$ est un σ-idéal G_δ dense dans $\mathcal{K}(E)$, alors il existe une mesure non nulle de $\mathcal{B}$ dont le support est un élément de $\mathcal{I}$.*

Le corollaire 3 généralise un résultat de Kechris ([Ke1]) obtenu (pour la bande des mesures de Rajchman) dans le cas où E est un ensemble de type M_0^p dans le groupe $\mathbf{T}$.

COROLLAIRE 4. — *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe abélien localement compact non discret à base dénombrable d'ouverts. Si* $E \subseteq \mathbf{G}$ *est un ensemble de type* M_0*, alors* $U_0 \cap \mathcal{F}(E)$ *est un vrai* $\mathbf{\Pi}_1^1$ *de* $\mathcal{F}(E)$*,* $U_0' \cap \mathcal{K}(E)$*,* $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}(E)$*,* $WTP \cap \mathcal{K}(E)$ *sont des vrais* $\mathbf{\Sigma}_3^0$ *de* $\mathcal{K}(E)$*, et* $M_0^p \cap \mathcal{K}(E)$ *est un vrai* $\mathbf{\Pi}_3^0$ *de* $\mathcal{K}(E)$ *(où on a posé* $M_0^p = U_0^{\mathrm{perf}}$*).*

Compte tenu du corollaire 3 et du lemme 6, il suffit de vérifier que si $E \subseteq \mathbf{G}$ est de type M_0^p, alors $WTP \cap \mathcal{K}(E)$ contient un G_δ héréditaire dense dans $\mathcal{K}(E)$. Pour une démonstration, voir [M]. □

COROLLAIRE 5. — *Si* $E \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$*, tout sous-ensemble de* E *ayant la propriété de Baire et non maigre dans* E *contient le support d'une mesure non nulle de* $\mathcal{B}$*. En particulier, si* $A \subseteq E$ *un ensemble* $\mathbf{\Sigma}_1^1$ *négligeable pour toutes les mesures de* $\mathcal{B}$*, alors* A *est maigre dans* E*.*

Démonstration. — Si $A \subseteq E$ possède la propriété de Baire et n'est pas maigre dans E, alors A contient un G_δ , G, dense dans un ouvert non vide de E. Comme l'adhérence de tout ouvert de E est dans $(\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$, on peut appliquer le corollaire 3 avec $\mathcal{I} = \mathcal{K}(G)$. □

COROLLAIRE 6. — *Le* σ*-idéal* $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ *possède la propriété de recouvrement : si* $A \subseteq E$ *est un ensemble* $\mathbf{\Sigma}_1^1$ *dont tous les compacts sont dans* $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$*, alors* $A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{ext}}$*.*

Démonstration. — Si $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ ne possèdait pas la propriété de recouvrement, alors, d'après un théorème de Solecki ([So]), il existerait un un G_δ , $G \subseteq E$, tel que $\mathcal{K}(G) \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ et $\overline{G} \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$. Cela contredirait le corollaire 5. □

Au vu du théorème 2, il est naturel de se demander s'il existe une caractérisation simple des bandes de première espèce dont le σ-idéal polaire est G_δ. C'est effectivement le cas.

THÉORÈME 3. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le* σ*-idéal* $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ *est* G_δ*.*

(ii) $B = M_+(A)$ *où* $A \subseteq E$ *est* $\mathbf{\Delta}_2^0$ *(i.e à la fois* F_σ *et* G_δ*).*

(iii) *Il existe une suite* $(g_n) \subseteq C(E)$, *avec* $0 \leqslant g_n \leqslant 1$ *pour tout* n, *telle que :*

$$\begin{cases} \mathcal{B} = \{\mu \in M_+(E);\ \lim\limits_{n\to\infty} \mu(g_n) = 0\}; \\ \mathcal{B}' = \{\mu \in M_+(E);\ \lim\limits_{n\to\infty} \mu(g_n) = \|\mu\|\} \\ \quad = \{\mu \in M_+(E);\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mu(g_n) = \|\mu\|\}. \end{cases}$$

La démonstration utilise le lemme suivant.

LEMME 4. — *Soient* $\mathcal{B}$ *une bande de mesures et* X *une partie quelconque de* E. *Il existe une partition de* E *de la forme* $E = A \cup B \cup C$, *où* C *est fermé,* A *et* B *sont* $\boldsymbol{\Delta}^0_2$, *et*

(i) $A \cap X = \varnothing$;

(ii) $M_+(B) \cap \mathcal{B} = \{0\}$;

(iii) $C \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}}$ *et* $X \cap C$ *est dense dans* C.

Démonstration. — Soit $\mathcal{V}$ la famille de tous les ouverts V de E pouvant se décomposer sous la forme

$$V = A \cup B \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A,\ B \in \boldsymbol{\Delta}^0_2\ ,\ A \cap B = \varnothing; \\ A \cap X = \varnothing; \\ M_+(B) \cap \mathcal{B} = \{0\}. \end{cases}$$

Notons V_0 la réunion de tous éléments de $\mathcal{V}$ et posons $C = E \setminus V_0$. On peut écrire $V_0 = \bigcup\limits_{n\in\omega} (A_n \cup B_n)$, où les A_n, B_n sont $\boldsymbol{\Delta}^0_2$, $A_n \cap X = \varnothing$ et $M_+(B_n) \cap \mathcal{B} = \{0\}$ pour tout n. Les ensembles $A' = \bigcup\limits_n A_n$ et $B' = \bigcup\limits_n B_n$ sont $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$. On a $X \cap A' = \varnothing$, et $M_+(B') \cap \mathcal{B} = \{0\}$ car $\mathcal{B}$ est une bande. Comme V_0 est $\boldsymbol{\Delta}^0_2$, on peut trouver deux $\boldsymbol{\Delta}^0_2$ disjoints A et B tels que $A \subseteq A'$, $B \subseteq B'$ et $V_0 = A \cup B$. Ceci montre que V_0 est encore un élément de $\mathcal{V}$. Par définition de V_0, si V est un ouvert de E tel que $V \cap E \neq \varnothing$, alors on ne peut pas écrire $V \cap C = A_1 \cup B_1$, où A_1 et B_1 sont des $\boldsymbol{\Delta}^0_2$ disjoints tels que $A_1 \cap X = \varnothing$ et $M_+(B_1) \cap \mathcal{B} = \{0\}$; en particulier on a $V \cap C \cap X \neq \varnothing$, et $V \cap C$ porte un élément non nul de $\mathcal{B}$. Le lemme est donc démontré. □

Démonstration du théorème 3.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Si $\mathcal{B} = M_+(A)$, alors $\mathcal{B}' = M_+(E \setminus A)$. Puisque A est $\mathbf{\Delta}_2^0$, la fonction caractéristique de A est de première classe de Baire. Il suffit donc de prendre pour (g_n) une suite de fonctions continues convergeant ponctuellement vers $\mathbf{1}_A$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Si la propriété (iii) est vraie, on peut écrire

$$\mu \in \mathcal{B}' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \forall N \;\; \exists n \geqslant N \quad \mu(g_n) > \mu(1) - \varepsilon.$$

Donc $\mathcal{B}'$ est G_δ dans $M_+(E)$. Comme d'autre part on a, pour tout compact $K \subseteq E$, l'équivalence

$$K \notin \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \exists \mu \notin \mathcal{B}' \quad \mu(K) = \mu(1),$$

on en conclut que $\mathcal{K}(E) \setminus \mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ est K_σ et donc que (i) est vérifiée.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Remarquons d'abord que, d'après un théorème de G. Mokobodzki sur les bandes boréliennes fortement convexes (voir [D], [DM] ou [KL1]), la bande $\mathcal{B}$ est une bande *polaire*; autrement dit, $\mathcal{B} = \{\mu \in M_+(E);\ \mu(K) = 0\ \forall K \in \mathcal{I}_{\mathcal{B}}\}$. D'après le lemme 4, on peut trouver trois ensembles disjoints A, B, C avec $A, B \in \mathbf{\Delta}_2^0$ et C fermé, tels que

$$\begin{cases} \mathcal{K}(A) \cap \mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \{\varnothing\}, \\ M_+(B) \cap \mathcal{B} = \{0\}, \\ C \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})^{\mathrm{perf}} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}(C) \cap \mathcal{I}_{\mathcal{B}} \quad \text{est dense dans} \quad \mathcal{K}(C). \end{cases}$$

Si $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ est G_δ, on a nécessairement $C = \varnothing$ d'après le théorème 2, et donc $E = A \cup B$. Les propriétés de A et B montrent alors que $\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \mathcal{K}(B)$. Puisque $\mathcal{B}$ est une bande polaire, on en déduit que $\mathcal{B} = M_+(A)$, ce qui prouve (ii). Le théorème est donc entièrement démontré. □

COROLLAIRE 1. — *Si $\mathcal{B}$ contient une mesure diffuse non nulle, alors il existe un parfait (non vide) d'éléments de $\mathcal{K}(E) \setminus \mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ deux à deux disjoints.*

Démonstration. — Comme $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ est $\mathbf{\Pi}_1^1$, il suffit de montrer que E n'est pas *mince*, c'est-à-dire qu'il existe une famille non dénombrable d'éléments de $\mathcal{K}(E) \setminus \mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ deux à deux disjoints (voir [KLW], Th. 3.2). Si E est mince, alors, d'après les propositions 2 et 3 de [Del], il existe une mesure

$\mu \in M_+(E)$ telle que $\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \{K \in \mathcal{K}(E);\ \mu(K) = 0\}$; en particulier, $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$ est G_δ (on peut aussi appliquer les théorèmes 3.10 et 3.13 de [KLW]). Le théorème 3 permet d'en déduire que $\mathcal{B} = M_+(A)$, où A est un G_δ de E, nécessairement *dénombrable* car E est supposé mince. Cela contredit l'hypothèse faite sur $\mathcal{B}$. □

Comme les mesures de Rajchman sont des mesures diffuses, on obtient le résultat suivant :

COROLLAIRE 2. — *Si* **G** *est un groupe abélien localement compact à base dénombrable d'ouverts, tout ensemble de type* M_0 *dans* **G** *contient une famille non dénombrable d'ensembles de type* M_0 *deux à deux disjoints.*

Remarque. — On peut montrer (voir [M]) que les supports des mesures diffuses de $\mathcal{B}$ sont exactement les compacts à la fois parfaits et $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$-parfaits.

BIBLIOGRAPHIE

[D] G. DEBS, Polar σ-ideals of compact sets, à paraître dans Trans. AMS.

[DSR] G. DEBS, J. Saint-Raymond, Ensembles d'unicité et d'unicité au sens large, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 37-3 (1987), 217-239.

[DFM] C. DELLACHERIE, D. FEYEL, G. MOKOBODZKI, Intégrales de capacités fortement sous-additive, Sem. Prob. Strasbourg XVI, Springer L.N.M., 920, 8-28.

[Del] C. DELLACHERIE, Appendice à l'exposé précédent, 920, 29-40.

[DM] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER, Probabilités et Potentiel, Vol. 3, Hermann, Paris, 1984.

[GMG] C.C. GRAHAM, O.C. Mc GEHEE, Essays in commutative harmonic analysis, Grund. d. math. Wissen, Vol 238, Springer-Verlag, New York, 1979.

[HR] E. HEWITT, K.A. ROSS, Abstract Harmonic Analysis, Vol. 1 et 2, Springer-Verlag, New-york, Heidelberg, Berlin, 1963 et 1970.

[Kah] J.P. KAHANE, Séries de Fourier absolument convergentes, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[Kau1] R. KAUFMAN, M sets and distributions, Astérisque, 5 (1973).

[Kau2] R. KAUFMAN, Absolutely convergent Fourier series and some classes of sets, Bull. Sc. Math., 109 (1985), 363-372.

[Ke1] A. KECHRIS, Hereditary properties of the class of closed sets of uniqueness for trigonometric series, Israel J. M., 73-2 (1991), 189-198.

[Ke2] A. KECHRIS, Classical Descriptive Set Theory, Springer, New-York, 1995.

[KL1] A. KECHRIS, A. LOUVEAU, Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 128, Cambridge University Press (1987).

[KL2] A. KECHRIS, A. LOUVEAU, Covering Theorems for uniqueness and extended uniqueness sets, Colloq. Math., 59-1 (1990), 63-79.

[KLW] A.KECHRIS, A. LOUVEAU, W. H. WOODIN, The structure of σ-ideals of compact sets, Trans. AMS, 301-1 (1987), 263-288.

[Kö1] T.W. KÖRNER, Some results on Kronecker, Dirichlet and Helson sets, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 20-2 (1970), 219-324.

[Kö2] T.W. KÖRNER, A pseudofunction on a Helson set, Astérisque, 5 (1973).

[Kö3] T.W. KÖRNER, A Helson set of uniqueness but not of synthesis, Colloq. Math., 62-1 (1991), 67-71.

[LP] L.-A. LINDAHL, F. POULSEN, Thin sets in harmonic analysis, Marcel Decker, New York, 1971.

[Ly] R. LYONS, A new type of sets of uniqueness, Duke Math. J., 57 (1988), 431-458.

[M] E. MATHERON, Analyse Harmonique et Théorie Descriptive des Ensembles, Thèse de Doctorat, Université Paris 6 (1994).

[R] W. RUDIN, Fourier Analysis on groups, Interscience Tract n^o 12, Wiley, New-York, 1962.

[Sa] S. SAEKI, Helson sets which disobey Spectral Synthesis, Proc. AMS, 47-2 (1975), 371-377.

[So] S. SOLECKI, Covering analytic sets by families of closed sets, à paraître.

[T] V. TARDIVEL, Fermés d'unicité dans les groupes abéliens localement compacts, Studia Math., 91 (1988), 1-15.

[Va1] N.T. VAROPOULOS, Sur la réunion de deux ensembles de Helson, C.R.A.S., Paris, 271 (1970), 251-253.

[Va2] N.T. VAROPOULOS, Groups of continuous fonctions in Harmonic Analysis, Acta. Math., 1250 (1970), 109-14.

Manuscrit recu le 31 août 1995,
accepté le 9 janvier 1996.

Étienne MATHERON,
Equipe d'Analyse
Université Paris VI
Boite 186
4, Place Jussieu
75252 Paris cedex 05 (France).