ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PAUL BÉZIVIN
FRANÇOIS GRAMAIN

Solutions entières d'un système d'équations aux différences. II

Annales de l'institut Fourier, tome 46, n° 2 (1996), p. 465-491
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_2_465_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
46, 2 (1996), 465–491

SOLUTIONS ENTIÈRES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES. II

par J.-P. BÉZIVIN et F. GRAMAIN

1. Introduction et résultats.

Soit s un entier naturel positif. Pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \mathbf{C}^s$, on pose

$$\langle \lambda, \beta \rangle = \lambda_1 \beta_1 + \ldots + \lambda_s \beta_s.$$

Considérons la fonction entière $z \mapsto f(z) = \exp(\langle z, \gamma \rangle)$ de la variable $z \in \mathbf{C}^s$, où γ est un élément non nul de $\mathbf{C}^s$. Il est immédiat que le $\mathbf{C}(z)$-sous-espace vectoriel de l'espace M des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}^s$ engendré par les translatées de f dans la direction γ, c'est-à-dire par toutes les fonctions $z \mapsto f(z + k\gamma)$ $(k \in \mathbf{N})$, est de dimension 1 sur $\mathbf{C}(z)$.

Plus généralement, soit f une fonction méromorphe de la forme

$$f(z) = \sum_{\lambda \in \Gamma} R_\lambda(z) \exp(\langle z, \lambda \rangle),$$

où Γ est une partie finie de $\mathbf{C}^s$ et les $R_\lambda(z)$ des fractions rationnelles à s variables complexes. Le sous-espace vectoriel de M engendré sur $\mathbf{C}(z)$ par les translatées de f dans la direction γ est alors de dimension finie; il en résulte que f vérifie une équation aux différences non triviale dans la direction γ, de la forme

$$\sum_{0 \leq k \leq N} P_k(z) f(z + k\gamma) = 0,$$

Mots-clés : Équations aux différences – Polynômes exponentiels – Équations différentielles linéaires.
Classification math. : 39A – 39B – 34A – 33B – 30D.

où les P_k sont des polynômes non tous nuls en s variables complexes.

Dans cet article, nous allons examiner la réciproque de cette propriété. Plus précisément, nous allons démontrer que si la fonction entière f vérifie suffisamment d'équations aux différences finies distinctes (nous verrons plus loin la signification à donner à cette expression), alors $f(z)$ s'écrit sous la forme

$$\sum_{\lambda \in \Gamma} R_\lambda(z) \exp(\langle z, \lambda \rangle),$$

où les λ sont des éléments de $\mathbf{C}^s$ et les $R_\lambda(z)$ des fractions rationnelles en s variables complexes.

Cette question avait été posée par D. W. Masser, à la suite des travaux de F. Gramain sur les fonctions entières f d'une variable complexe telles que $f(\mathbf{Z}[i]) \subset \mathbf{Z}[i]$ (*cf.* [Gra], [Mas]). Dans l'article [BéGra], une réponse partielle avait été donnée à ce problème dans le cas d'une variable complexe. Nous verrons comment compléter ce travail et donner une solution générale, au moins dans le cas d'une variable. Dans le cas de plusieurs variables, nous serons obligés de nous imposer une condition technique (voir plus bas), sur les directions des équations aux différences finies que nous considérerons. Nous allons démontrer les résultats suivants.

THÉORÈME 1.1. — *Soit s un entier positif, et, pour tout $j = 1, \dots, 2s$, soit θ_j un polynôme exponentiel en s variables complexes. Soient d'autre part γ_j ($j = 1, \dots, 2s$) des éléments $\mathbf{R}$-linéairement indépendants de $\mathbf{C}^s$.*

On suppose que, pour tout $j = 1, \dots, 2s$, la fonction f, entière sur $\mathbf{C}^s$, vérifie une équation aux différences finies non triviale

$$\sum_{0 \le k \le N_j} P_{k,j}(z) f(z + k\gamma_j) = \theta_j(z),$$

où les $P_{k,j}$ sont des polynômes à s variables complexes, non tous nuls. On suppose de plus que les γ_j engendrent s droites complexes.

Alors f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme.

La condition que les γ_j engendrent s droites complexes est la condition restrictive sur les directions des équations aux différences annoncée plus haut. Cela ne semble être qu'une condition technique due à notre méthode de démonstration. Il est probable que la seule condition, plus naturelle, que les γ_j ($j = 1, \dots, 2s$) soient $\mathbf{R}$-linéairement indépendants soit suffisante pour assurer la même propriété.

Pour $s = 1$, les deux conditions coïncident, de sorte que nous obtenons le résultat suivant.

COROLLAIRE 1.2. — *Soient α et β deux nombres complexes non nuls, tels que $\alpha/\beta \notin \mathbf{R}$, et f une fonction entière d'une variable complexe vérifiant le système de deux équations aux différences*

$$\begin{cases} \sum\limits_{0\le k\le K} P_k(z)f(z+k\alpha) = \Phi(z) \\ \sum\limits_{0\le m\le M} Q_m(z)f(z+m\beta) = \Psi(z), \end{cases}$$

où les P_k et Q_m sont des polynômes, avec $P_K Q_M \neq 0$, et où Φ et Ψ sont des polynômes exponentiels.

Alors f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme.

Ce résultat permet d'enlever dans le théorème 6.1 de [BéGra] l'hypothèse restrictive qu'un déterminant construit à partir des coefficients des deux équations aux différences soit non nul.

Pour $s = 1$, nous étudierons aussi le cas d'un système d'une équation différentielle et d'une équation aux différences. Nous parviendrons aussi dans ce cas à enlever la condition restrictive du théorème 8.1 de [BéGra], pour donner la réponse générale.

THÉORÈME 1.3. — *Soit α un nombre complexe non nul, et f une fonction entière d'une variable complexe vérifiant le système des deux équations*

$$\begin{cases} \sum\limits_{0\le k\le K} Q_k(z)f(z+k\alpha) = \Phi(z) \\ \sum\limits_{0\le m\le M} P_m(z)f^{(m)}(z) = \Psi(z), \end{cases}$$

où les P_k et Q_m sont des polynômes, avec $P_K Q_M \neq 0$, et où Φ et Ψ sont des polynômes exponentiels.

Alors f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme.

Enfin, nous donnerons aussi le cas à s variables, sans l'hypothèse restrictive que les pas récurrents engendrent s droites complexes, quand les équations aux différences sont à coefficients constants.

THÉORÈME 1.4. — *Soit s un entier positif, et, pour tout $j = 1,\dots,2s$, θ_j un polynôme exponentiel en s variables complexes. Soient* *d'autre part* γ_j $(j = 1, \dots, 2s)$ *des éléments* $\mathbf{R}$*-linéairement indépendants de* $\mathbf{C}^s$. *On suppose que, pour tout* $j = 1, \dots, 2s$, *la fonction* f, *entière sur* $\mathbf{C}^s$, *vérifie une équation aux différences finies non triviale de la forme*

$$\sum_{0 \le n \le N_j} a_{n,j} f(z + n\gamma_j) = \theta_j(z),$$

où les $a_{n,j}$ *sont des constantes complexes non toutes nulles.*

Alors f *est un polynôme exponentiel.*

Nous avons eu récemment communication d'un manuscrit de Jean-Jacques Loeb, ([Loe]), où celui-ci démontre le théorème 1.4, par une méthode différente de celle que nous utiliserons. Cette méthode lui permet, toujours dans le cas de coefficients constants, d'aborder le cas où la fonction f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^s$.

2. Réductions du problème.

Nous commençons par montrer qu'il suffit de démontrer les théorèmes 1.1, 1.3, 1.4 et le corollaire 1.2 dans le cas où les polynômes exponentiels apparaissant dans les seconds membres des équations sont nuls.

Pour cela, il suffit de remarquer que si Φ est un polynôme exponentiel en s variables, et $\gamma \in \mathbf{C}^s \setminus \{0\}$, les translatées de Φ dans la direction γ engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$. Il en résulte que Φ est dans le noyau d'un opérateur non nul, aux différences dans la direction γ, et à coefficients constants. En composant cet opérateur avec l'opérateur aux différences dans la direction γ et à coefficients polynômes (ou à coefficients constants dans le cas du théorème 1.4) qui apparaît au premier membre, on trouve le résultat annoncé. En ce qui concerne le théorème 1.3, il faut de plus remarquer que tout polynôme exponentiel à une variable est dans le noyau d'un opérateur différentiel à coefficients constants non trivial. Nous nous contenterons donc de démontrer les résultats quand les seconds membres sont nuls.

Nous revenons maintenant sur les hypothèses du théorème 1.1 concernant les pas récurrents. Les éléments γ_j $(1 \le j \le 2s)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{R}$. L'ensemble des droites complexes $\mathbf{C}\gamma_j$ $(j = 1, \dots, 2s)$ engendrées a donc un cardinal compris entre s et $2s$. Supposons, comme dans le théorème 1.1, que ce cardinal soit s. Alors on peut regrouper deux par deux ces éléments, et quitte à changer les indices, supposer que $\mathbf{C}\gamma_j = \mathbf{C}\gamma_{j+s}$ $(j = 1, \dots, s)$. Il résulte du fait que les γ_j $(j = 1, \dots, 2s)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{R}$ que $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ est une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^s$.

Soit $\{e_j;\ j = 1, \dots, s\}$ la base canonique de $\mathbf{C}^s$. On peut alors, par un changement de base dans $\mathbf{C}^s$, se ramener au cas où $\gamma_j = \alpha_j e_j$ et $\gamma_{j+s} = \beta_j e_j$, avec $\alpha_j, \beta_j \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $\alpha_j/\beta_j \notin \mathbf{R}$. La fonction f sera remplacée par une fonction g de la forme $g(z) = f(Mz)$, où M est une matrice inversible à coefficients complexes, et il est clair que démontrer que g est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme est équivalent à démontrer cette propriété pour f.

Nous pouvons donc supposer que le système vérifié par f est de la forme

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \le m \le M_j} A_{j,m}(z) f(z_1, \dots, z_j + m\alpha_j, \dots, z_s) = 0 \\ \displaystyle\sum_{0 \le n \le N_j} B_{j,n}(z) f(z_1, \dots, z_j + n\beta_j, \dots, z_s) = 0 \end{cases}$$

pour $j = 1, \dots, s$.

3. Quelques lemmes.

LEMME 3.1. — *Soient $s \ge 1$ un entier positif, $Z_1, \dots, Z_{s-1}$ et T des indéterminées. On note $\mathbf{C}[\underline{Z}] := \mathbf{C}[Z_1, \dots, Z_{s-1}]$, de sorte que, pour $s = 1$, on a $\mathbf{C}[\underline{Z}] = \mathbf{C}$. Soient α et β deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$ et soient A et B des polynômes non nuls et de contenu 1 dans l'anneau $\mathbf{C}[\underline{Z}]\,[T]$ des polynômes en l'indéterminée T.*

Alors il existe des entiers K_0 et L_0 et un polynôme $H \in \mathbf{C}[\underline{Z}]\,[T]$ tels que l'on ait

$$\operatorname{pgcd}\Big(\prod_{0 \le k \le K} A(\underline{Z}, T + k\alpha), \prod_{0 \le \ell \le L} B(\underline{Z}, T + \ell\beta) \Big) = H(\underline{Z}, T)$$

pour tout couple $(K, L) \in \mathbf{N}^2$ vérifiant $K > K_0$ et $L > L_0$.

De plus on a les estimations $\deg_T H \le \deg_T A \cdot \deg_T B$, $\deg_{\underline{Z}} H \le \deg_T A \cdot \deg_{\underline{Z}} B$ et $\deg H \le \deg_T A \cdot \deg B$, si $\deg$ désigne le degré total.

Démonstration. — D'après le lemme de Gauss (sur le contenu d'un produit), les produits $\prod_{0 \le k \le K} A(\underline{Z}, T + k\alpha)$ et $\prod_{0 \le \ell \le L} B(\underline{Z}, T + \ell\beta)$ sont de contenu 1.

Soient $A(\underline{Z},T) = \prod_{i\in I} A_i(\underline{Z},T)$ et $B(\underline{Z},T) = \prod_{j\in J} B_j(\underline{Z},T)$ les décompositions de A et B en produits de facteurs irréductibles. Alors $A(\underline{Z},T+k\alpha) = \prod_{i\in I} A_i(\underline{Z},T+k\alpha)$ et $B(\underline{Z},T+\ell\beta) = \prod_{j\in J} B_j(\underline{Z},T+\ell\beta)$ sont les décompositions en produits de facteurs irréductibles de $A(\underline{Z},T+k\alpha)$ et $B(\underline{Z},T+\ell\beta)$.

Notons $A_{i,k} = A_i(\underline{Z},T+k\alpha)$ et $B_{j,\ell} = B_j(\underline{Z},T+\ell\beta)$. Le polynôme $A_{i,k}$ est un facteur de $\prod_{0\le\ell\le L} B(\underline{Z},T+\ell\beta)$ si et seulement s'il existe un couple (j,ℓ) tel que $A_{i,k} = B_{j,\ell}$.

Vérifions que, pour (i,j) fixé, il existe au plus un couple (k,ℓ) tel que $A_{i,k} = B_{j,\ell}$: en effet, si $(k',\ell') \neq (k,\ell)$ vérifiait aussi $A_{i,k'} = B_{j,\ell'}$, on aurait

$$\begin{aligned} A_i(\underline{Z},T) &= A_i(\underline{Z},(T-k\alpha)+k\alpha) = B_j(\underline{Z},(T-k\alpha)+\ell\beta) \\ &= B_j(\underline{Z},(T-k\alpha+\ell\beta-\ell'\beta)+\ell'\beta) \\ &= A_i(\underline{Z},(T-k\alpha+\ell\beta-\ell'\beta)+k'\alpha) = A_i(\underline{Z},T+x), \end{aligned}$$

avec $x = (k'-k)\alpha + (\ell-\ell')\beta \neq 0$ puisque α et β sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Ainsi le polynôme A_i serait périodique en T, donc dans $\mathbf{C}[\underline{Z}]$, ce qui est exclu, puisque le contenu de A est 1.

Cela montre la finitude de l'ensemble des $(k,\ell) \in \mathbf{N}^2$ pour lesquels il existe (i,j) vérifiant $A_{i,k} = B_{j,\ell}$. Il existe donc des entiers K_0 et L_0 tels que

- si $k > K_0$ le polynôme $A(\underline{Z},T+k\alpha)$ est étranger à tous les polynômes $B(\underline{Z},T+\ell\beta)$ $(\ell \in \mathbf{N})$;
- si $\ell > L_0$ le polynôme $B(\underline{Z},T+\ell\beta)$ est étranger à tous les polynômes $A(\underline{Z},T+k\alpha)$ $(k \in \mathbf{N})$.

Le pgcd considéré est donc le pgcd H des deux polynômes

$$\prod_{0\le k\le K_0} A(\underline{Z},T+k\alpha) \quad \text{et} \quad \prod_{0\le\ell\le L_0} B(\underline{Z},T+\ell\beta)$$

dès que $K > K_0$ et $L > L_0$.

De plus, pour un i fixé, l'identité $A_{i,k} = B_{j,\ell}$ n'a lieu qu'au plus une fois pour chaque $j \in J$. Cela fournit pour le pgcd H un facteur du type $\prod_{j\in J_i} B_j(\underline{Z},T+\ell_j\beta)$, avec $J_i \subset J$, donc de degré en $\underline{Z} \le \deg_{\underline{Z}} B$ et de degré en $T \le \deg_T B$. On a donc $\deg_T H \le \operatorname{card} I.\deg_T B$, $\deg_{\underline{Z}} H \le \operatorname{card} I.\deg_{\underline{Z}} B$ et $\deg H \le \operatorname{card} I.\deg B$. Il suffit de remarquer que $\operatorname{card} I \le \deg_T A$ pour conclure. □

LEMME 3.2. — *Avec les hypothèses et les notations du lemme 3.1, si M et N sont des entiers naturels non nuls, on pose*

$$\Delta_\alpha(\underline{Z},T) = \operatorname{pgcd}\Big(A(\underline{Z},T) \prod_{1\le k\le M} H(\underline{Z},T+k\alpha); \prod_{\substack{0\le k\le M\\ k\ne m}} H(\underline{Z},T+k\alpha), 1\le m\le M\Big)$$

et

$$\Delta_\beta(\underline{Z},T) = \operatorname{pgcd}\Big(B(\underline{Z},T) \prod_{1\le \ell\le N} H(\underline{Z},T+\ell\beta); \prod_{\substack{0\le \ell\le N\\ \ell\ne n}} H(\underline{Z},T+\ell\beta), 1\le n\le N\Big),$$

les pgcd étant pris dans l'anneau $\mathbf{C}[\underline{Z}]\ [T]$ *des polynômes en l'indéterminée* T.

Alors les polynômes

$$A^*(\underline{Z},T) = \frac{A(\underline{Z},T) \prod_{1\le k\le M} H(\underline{Z},T+k\alpha)}{\Delta_\alpha(\underline{Z},T)}$$

et

$$B^*(\underline{Z},T) = \frac{B(\underline{Z},T) \prod_{1\le \ell\le N} H(\underline{Z},T+\ell\beta)}{\Delta_\beta(\underline{Z},T)}$$

sont premiers entre eux dans $\mathbf{C}[\underline{Z}]\ [T]$ *et de contenu* 1.

Démonstration. — Soit $P\in \mathbf{C}[\underline{Z}][T]\setminus \mathbf{C}[\underline{Z}]$ un polynôme irréductible (de contenu 1). Si Q est un élément non nul de $\mathbf{C}[\underline{Z}]\ [T]$, on note $\operatorname{ord}_P Q$ la multiplicité de P en tant que diviseur de Q. Il s'agit de vérifier que $\operatorname{ord}_P A^* = 0$ ou $\operatorname{ord}_P B^* = 0$.

D'après la preuve du lemme 3.1, par construction de H on a

$$\operatorname{ord}_P H = \min\Big\{\sum_{k\ge 0} \operatorname{ord}_P A(\underline{Z},T+k\alpha); \sum_{\ell\ge 0} \operatorname{ord}_P B(\underline{Z},T+\ell\beta)\Big\}.$$

Par symétrie, il suffit donc de voir que, si $\operatorname{ord}_P H = \sum_{k\ge 0} \operatorname{ord}_P A(\underline{Z},T+k\alpha)$, alors on a $\operatorname{ord}_P A^* = 0$. Et pour cela il suffit de vérifier que, pour tout entier m $(1\le m\le M)$, on a

$$S_m = \operatorname{ord}_P \prod_{\substack{0\le k\le M\\ k\ne m}} H(\underline{Z},T+k\alpha) - \operatorname{ord}_P A(\underline{Z},T) \prod_{1\le k\le M} H(\underline{Z},T+k\alpha) \ge 0.$$

Or

$$\begin{aligned}S_m &= \operatorname{ord}_P H(\underline{Z},T) - \operatorname{ord}_P H(\underline{Z},T+m\alpha) - \operatorname{ord}_P A(\underline{Z},T)\\ &= \sum_{k\geq 0}\operatorname{ord}_P A(\underline{Z},T+k\alpha) - \sum_{k\geq 0}\operatorname{ord}_P A(\underline{Z},T+m\alpha+k\alpha) - \operatorname{ord}_P A(\underline{Z},T)\\ &= \sum_{1\leq k\leq m-1}\operatorname{ord}_P A(\underline{Z},T+k\alpha)\geq 0,\end{aligned}$$

et le lemme est démontré. □

LEMME 3.3. — *Soient $t\geq 1$ un entier positif, $U,V_1,\dots,V_t,Z$ et T des indéterminées, et soient $P\in \mathbf{C}[U,\underline{V},Z]\setminus\{0\}$ et $Q\in\mathbf{C}[U,\underline{V},T]\setminus\{0\}$. Si le résultant $R\in\mathbf{C}[\underline{V},Z,T]$ obtenu en éliminant U entre P et Q est nul, alors chacun des polynômes P et Q admet un facteur non constant dans $\mathbf{C}[U,\underline{V}]$.*

Démonstration. — Le fait que $R=0$ montre que les degrés en U de P et Q sont ≥ 1. Par symétrie il suffit de montrer que Q admet un facteur non constant $L\in\mathbf{C}[U,\underline{V}]$.

Notons $Q=\sum\limits_{\ell} Q_\ell(U,\underline{V})T^\ell$ et soit $L\in\mathbf{C}[U,\underline{V}]$ le pgcd dans $\mathbf{C}(\underline{V})[U]$ des Q_ℓ, choisi de contenu $1\in\mathbf{C}[\underline{V}]$: il existe des polynômes $A_\ell\in\mathbf{C}[U,\underline{V}]$ et $B\in\mathbf{C}[\underline{V}]\setminus\{0\}$ tels que $\sum\limits_{\ell} A_\ell(U,\underline{V})Q_\ell(U,\underline{V}) = B(\underline{V})L(U,\underline{V})$.

Fixons $\underline{v}\in\mathbf{C}^t$ et $z\in\mathbf{C}$ tels que $P(U,\underline{v},z)\neq 0$ et $B(\underline{v})\neq 0$. Alors le polynôme $P(U,\underline{v},z)$ n'a qu'un nombre fini de racines et, comme $R=0$, pour tout $t\in\mathbf{C}$, le polynôme $Q(U,\underline{v},t)$ a au moins une racine commune avec $P(U,\underline{v},z)$. Il existe donc une infinité de valeurs de t pour lesquelles cette racine est la même, disons $u\in\mathbf{C}$: le polynôme $Q(u,\underline{v},T)\in\mathbf{C}[T]$ est le polynôme nul. Il en résulte que $Q_\ell(u,\underline{v})=0$ pour tout ℓ, donc que $L(u,\underline{v})=0$, ce qui montre que le polynôme L n'est pas constant. Or L a été choisi de contenu $1\in\mathbf{C}[\underline{V}]$ et il divise tous les Q_ℓ dans $\mathbf{C}(\underline{V})[U]$, c'est donc un facteur de Q dans $\mathbf{C}[U,\underline{V}]$. □

LEMME 3.4. — *Soient $n\geq 1$ un entier positif, $U_1,\dots,U_n$ et T des indéterminées, et soient α et β deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Si P et Q sont des éléments non nuls de $\mathbf{C}[\underline{U},T]$, alors il existe une partie S de mesure nulle de $\mathbf{C}^n$ telle que l'ensemble des $\omega\in\mathbf{C}$ pour lesquels il existe $\underline{u}\notin S$ vérifiant $P(\underline{u},e^{\omega\alpha})=Q(\underline{u},e^{\omega\beta})=0$ soit un ensemble fini.*

Démonstration. — Chacun des polynômes P et Q a une décomposition

$$P(\underline{U},T) = p_1(T)p_2(\underline{U})\prod_{i\in I} P_i(\underline{U},T)\ ,\ Q(\underline{U},T) = q_1(T)q_2(\underline{U})\prod_{j\in J} Q_j(\underline{U},T),$$

où p_1 et $q_1 \in \mathbf{C}[T]$, p_2 et $q_2 \in \mathbf{C}[\underline{U}]$, et les P_i et Q_j sont des polynômes irréductibles dans $\mathbf{C}[\underline{U},T]$ faisant effectivement intervenir les indéterminées $\underline{U}$ et T.

Alors les égalités $P(\underline{u},e^{\omega\alpha}) = Q(\underline{u},e^{\omega\beta}) = 0$ peuvent se produire de différentes manières.

Première manière. – Les égalités $p_1(e^{\omega\alpha}) = q_1(e^{\omega\beta}) = 0$ ne donnent qu'un nombre fini de $\omega \in \mathbf{C}$. En effet, si a est un zéro de p_1 et b un zéro de q_1, et si $e^{\omega_0\alpha} = a$ et $e^{\omega_0\beta} = b$, alors on a $e^{\omega\alpha} = a$ si et seulement si $\omega = \omega_0 + 2ik\pi/\alpha$ $(k \in \mathbf{Z})$ et $e^{\omega\beta} = b$ si et seulement si $\omega = \omega_0 + 2i\ell\pi/\beta$ $(\ell \in \mathbf{Z})$. Mais α et β sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, donc l'égalité $\omega_0 + 2ik\pi/\alpha = \omega_0 + 2i\ell\pi/\beta$ n'est réalisée que pour $k = \ell = 0$. Ainsi le nombre des $\omega \in \mathbf{C}$ vérifiant $p_1(e^{\omega\alpha}) = q_1(e^{\omega\beta}) = 0$ est majoré par $\min(\deg p_1, \deg q_1)$.

Deuxième manière. – Les égalités $p_2(\underline{u}) = 0$ ou $q_2(\underline{u}) = 0$ définissent une sous-variété algébrique de $\mathbf{C}^n$, stricte (c'est-à-dire $\neq \mathbf{C}^n$) car $p_2q_2 \neq 0$. C'est une partie de mesure nulle de l'ensemble exceptionnel S cherché.

Troisième manière. – On peut aussi être dans la situation où il existe $j \in J$ tel que

$$p_1(e^{\omega\alpha}) = 0 = Q_j(\underline{u},e^{\omega\beta})$$

(ou dans la situation symétrique obtenue en échangeant les rôles de P et Q).

L'équation $p_1(e^{\omega\alpha}) = 0$ a un nombre au plus dénombrable de racines $\omega \in \mathbf{C}$. Pour chacune de ces valeurs de ω, l'équation $Q_j(\underline{u},e^{\omega\beta}) = 0$ définit une sous-variété algébrique de $\mathbf{C}^n$, de mesure nulle car $Q_j(\underline{U},e^{\omega\beta}) \neq 0$. En effet les facteurs du type $T - e^{\omega\beta}$ de Q ont été regroupés dans le polynôme q_1.

Cette situation contribue encore à S par une partie de mesure nulle, puisque c'est une réunion dénombrable de sous-variétés algébriques strictes de $\mathbf{C}^n$.

Quatrième manière. – Le seul cas restant à étudier est celui où il existe $i \in I$ et $j \in J$ tels que $P_i(\underline{u},e^{\omega\alpha}) = Q_j(\underline{u},e^{\omega\beta}) = 0$.

En oubliant les indices, il s'agit d'étudier les équations $P(\underline{u}, e^{\omega\alpha}) = Q(\underline{u}, e^{\omega\beta}) = 0$, où P et Q sont irréductibles et dépendent effectivement de $\underline{U}$ et de T. On est alors amené à distinguer deux cas :

Premier cas. – Il existe un entier m, $1 \leq m < n$, tel que, en notant $\underline{U}_1 = (U_1, \dots, U_m)$ et $\underline{U}_2 = (U_{m+1}, \dots, U_n)$, on ait $P(\underline{U}, T) = P((\underline{U}_1, \underline{0}), T)$ et $Q(\underline{U}, T) = Q((\underline{0}, \underline{U}_2), T)$.

Comme le polynôme P n'est pas nul, l'équation $P(\underline{u}, T) = 0$ définit une variété algébrique $S_1 \times \mathbf{C}^{n-m} \neq \mathbf{C}^n$. Pour chaque $\underline{u}_1 \notin S_1$, l'équation $P((\underline{u}_1, \underline{0}), e^{\omega\alpha}) = 0$ a un nombre au plus dénombrable de solutions $\omega \in \mathbf{C}$. Pour chacune de ces valeurs ω, l'équation $Q((\underline{0}, \underline{u}_2), e^{\omega\beta}) = 0$ définit une sous-variété algébrique $S_2(\underline{u}_1, \omega)$ de $\mathbf{C}^{n-m}$, et cette variété n'est pas $\mathbf{C}^{n-m}$ car Q n'a pas de facteur de la forme $T - e^{\omega\beta}$.

On obtient ainsi la contribution $\displaystyle\bigcup_{\underline{u}_1 \notin S_1} \bigcup_{\substack{\omega \\ P((\underline{u}_1, \underline{0}), e^{\omega\alpha}) = 0}} \{\underline{u}_1\} \times S_2(\underline{u}_1, \omega)$ à l'ensemble S. Si $H(\underline{u}_1) = 0$ est une équation de la variété S_1, cette contribution est la projection A sur $\mathbf{C}^n$ (l'espace des $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$) de l'image réciproque B de $\mathbf{C}^\times \times \{(0,0)\}$ par l'application continue $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \omega) \mapsto (H(\underline{u}_1), P((\underline{u}_1, \underline{0}), e^{\omega\alpha}), Q((\underline{0}, \underline{u}_2), e^{\omega\beta}))$. L'ensemble B est localement fermé dans $\mathbf{C}^n$ (intersection de l'ouvert image réciproque de $\mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^2$ et du fermé image réciproque de $\mathbf{C} \times \{(0,0)\}$), donc réunion dénombrable de compacts. Sa projection A, réunion dénombrable de parties compactes, est donc un ensemble borélien, et, comme toutes ses coupes (à $\underline{u}_1$ fixé) sont de mesure nulle, il est de mesure nulle.

Deuxième cas. – Les polynômes P et Q sont tous deux de degré ≥ 1 en l'une des indéterminées U_i.

En changeant le nom et l'ordre des indéterminées (U_i devient U et les autres U_j sont regroupés en $\underline{V}$), on suppose que $P(U, \underline{V}, Z)$ et $Q(U, \underline{V}, Z)$ dépendent effectivement de U. Par hypothèse, P et Q n'ont pas de facteur non constant dans $\mathbf{C}[U, \underline{V}]$, donc le lemme 3.3 montre que le résultant $R(\underline{V}, Z, T)$ obtenu en éliminant U entre $P(U, \underline{V}, Z)$ et $Q(U, \underline{V}, T)$ n'est pas nul. Il existe donc un polynôme non nul $H \in \mathbf{C}[\underline{V}]$ tel que, pour tout $\underline{v} \in \mathbf{C}^{n-1}$ vérifiant $H(\underline{v}) \neq 0$, on ait $R(\underline{v}, Z, T) \neq 0$. Comme α et β sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, les fonctions $z \mapsto e^{\alpha z}$ et $z \mapsto e^{\beta z}$ sont algébriquement indépendantes, donc la fonction entière de type exponentiel $z \mapsto R(\underline{v}, e^{\alpha z}, e^{\beta z})$ a un nombre au plus dénombrable de zéros $\omega \in \mathbf{C}$.

Fixons donc $\underline{v} \in \mathbf{C}^{n-1}$ et $\omega \in \mathbf{C}$ tels que $H(\underline{v}) \neq 0$ et $R(\underline{v}, e^{\omega\alpha}, e^{\omega\beta}) = 0$. Il existe alors $u \in \mathbf{C}$ tel que $P(u, \underline{v}, e^{\omega\alpha}) = Q(u, \underline{v}, e^{\omega\beta}) = 0$. Si le polynôme

$P(U, \underline{v}, e^{\omega\alpha})$ de $\mathbf{C}[U]$ n'est pas identiquement nul, il n'y a qu'un nombre fini de tels u. Il reste à voir que, quitte à choisir $\underline{v}$ hors d'une sous-variété algébrique stricte de $\mathbf{C}^{n-1}$ indépendante de ω, on est bien dans cette situation : notons $P(U, \underline{V}, T) = \sum_k \varphi_k(\underline{V}, T)U^k$. Comme le polynôme P est irréductible et fait intervenir effectivement l'indéterminée U, les polynômes φ_k sont premiers entre eux dans $\mathbf{C}(\underline{V})[T]$: il existe des polynômes $W_k \in \mathbf{C}[\underline{V}, T]$ et $W \in \mathbf{C}[\underline{V}]\setminus\{0\}$ tels que $\sum_k W_k(\underline{V}, T)\varphi_k(\underline{V}, T) = W(\underline{V})$. Alors, si $W(\underline{v}) \neq 0$, pour tout $t \in \mathbf{C}$ il existe k tel que $\varphi_k(\underline{v}, t) \neq 0$. Il en résulte que, si $W(\underline{v}) \neq 0$, pour tout choix de $\omega \in \mathbf{C}$, le polynôme $P(U, \underline{v}, e^{\omega\alpha}) \in \mathbf{C}[U]$ n'est pas nul.

Notons $\mathcal{V}$ la sous-variété de $\mathbf{C}^{n-1}$ des zéros du produit $H(\underline{V})W(\underline{V})$. La contribution de ce cas à l'ensemble exceptionnel S est la réunion pour $\underline{v} \notin \mathcal{V}$ des $D(\underline{v}) \times \{\underline{v}\}$, où $D(\underline{v})$ est l'ensemble (dénombrable) des $u \in \mathbf{C}$ pour lesquels il existe $\omega \in \mathbf{C}$ tel que $P(u, \underline{v}, e^{\omega\alpha}) = Q(u, \underline{v}, e^{\omega\beta}) = 0$. C'est la projection sur $\mathbf{C}^n$ (l'espace des $(u, \underline{v})$) de l'image réciproque de $\mathbf{C}^\times \times \{(0,0)\}$ par l'application continue

$$(u, \underline{v}, z) \longmapsto (H(\underline{v})W(\underline{v}), P(u, \underline{v}, e^{\alpha z}), Q(u, \underline{v}, e^{\beta z})).$$

C'est donc, comme plus haut, un ensemble borélien et, comme toutes ses coupes (à $\underline{v}$ fixé) sont de mesure nulle, il est de mesure nulle. $\square$

LEMME 3.5. — *Soient α un nombre complexe non nul, $s \geq 2$ et $M \geq 0$ des nombres entiers, $T, Z_1, \ldots, Z_{s-1}$ et Z_s des indéterminées. On notera $\underline{Z} = (Z_1, \ldots, Z_{s-1})$. Pour $0 \leq m \leq M$, soient $A_m \in \mathbf{C}[\underline{Z}, Z_s]$ des polynômes non tous nuls. Alors il existe une partie S de $\mathbf{C}^{s-1}$ de mesure nulle et un polynôme non nul $R \in \mathbf{C}[T]$ tels que, pour tout $\underline{\zeta} \in \mathbf{C}^{s-1} \setminus S$, le degré d de tout polynôme non nul $P \in \mathbf{C}[Z_s]$ vérifiant $\sum_{0\leq m\leq M} A_m(\underline{\zeta}, Z_s)P(Z_s + m\alpha) = 0$ est un zéro de R.*

Démonstration. — On note X l'opérateur défini par

$$Xf(z_1, \ldots, z_{s-1}, z_s) = f(z_1, \ldots, z_{s-1}, z_s + \alpha).$$

On définit alors le "polynôme indiciel" de l'opérateur $\sum_{0\leq m\leq M} A_m(\underline{Z}, Z_s)X^m$.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$ on pose $S_k(\underline{Z}, Z_s) = \sum_{0\leq m\leq M} A_m(\underline{Z}, Z_s)(m\alpha)^k$ (toujours avec la convention que $0^0 = 1$), et on note $a_k = \deg_{Z_s} S_k - k$. Il existe des a_k différents de $-\infty$: sinon on aurait $S_k = 0$ pour tout k; mais les équations $S_k = 0$ $(0 \leq k \leq M)$ peuvent être considérées comme un système de Cramer en les inconnues A_m, car son déterminant est le déterminant de Vandermonde construit sur les $m\alpha$ $(0 \leq m \leq M)$, donc n'est pas nul. Cela contredirait le fait que les A_m ne sont pas tous nuls.

L'ensemble des a_k est majoré (par le plus grand des degrés en Z_s des A_m) : soit $a \in \mathbf{Z}$ son élément maximal et soit I l'ensemble des $k \in \mathbf{N}$ pour lesquels on a $a_k = a$. Pour $k \in I$ on note $s_k(\underline{Z})Z_s^{a+k}$ le terme de plus haut degré en Z_s de $S_k(\underline{Z}, Z_s)$.

On pose alors

$$Q(\underline{Z}, T) = \sum_{k \in I} s_k(\underline{Z}) \binom{T}{k},$$

où $\binom{T}{k} = \dfrac{T(T-1)\dots(T-k+1)}{k!}$. Le polynôme $Q(\underline{Z}, T)$ n'est pas nul car les polynômes binomiaux sont de degrés tous distincts et les $s_k(\underline{Z})$ sont tous non nuls. Dans l'anneau factoriel $\mathbf{C}[T]$ $[\underline{Z}]$ on écrit $Q(\underline{Z}, T) = R(T)Q_1(\underline{Z}, T)$ et on dit que le contenu $R \in \mathbf{C}[T]$ de Q est le polynôme indiciel de l'opérateur considéré.

Soient alors $\underline{\zeta} \in \mathbf{C}^{s-1}$ et $P \in \mathbf{C}[Z_s]$ tels que

$$\sum_{0 \leq m \leq M} A_m(\underline{\zeta}, Z_s) P(Z_s + m\alpha) = 0.$$

La formule de Taylor

$$P(Z_s + m\alpha) = \sum_{k \geq 0} \frac{(m\alpha)^k}{k!} P^{(k)}(Z_s),$$

la somme étant en fait finie, permet d'écrire la relation précédente sous la forme

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{0 \leq m \leq M} A_m(\underline{\zeta}, Z_s) \frac{(m\alpha)^k}{k!} P^{(k)}(Z_s) = \sum_{k \geq 0} S_k(\underline{\zeta}, Z_s) \frac{1}{k!} P^{(k)}(Z_s) = 0.$$

Or, si P est de degré d, on a $\deg_{Z_s}\left(S_k(\underline{Z}, Z_s)\frac{1}{k!}P^{(k)}(Z_s)\right) = a_k + k + d - k = a_k + d$ si $d \geq k$, et $= -\infty$ sinon. Il en résulte que le coefficient (nul) du terme de degré $a + d$ en Z_s dans l'identité ci-dessus est le produit du coefficient dominant de P par $\sum_{k \in I} s_k(\underline{\zeta}) \binom{d}{k} = Q(\underline{\zeta}, d)$; on a donc $Q(\underline{\zeta}, d) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \{\underline{\zeta} \in \mathbf{C}^{s-1};\ Q_1(\underline{\zeta}, n) = 0\}$ est une sous-variété algébrique stricte de $\mathbf{C}^{s-1}$, puisque, le contenu de $Q_1 \in \mathbf{C}[T]$ $[\underline{Z}]$ étant 1, Q_1 n'est pas divisible par $T - n$. Il en résulte que, si $\underline{\zeta}$ n'est pas dans $S = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} S_n$, on a $R(d) = 0$. $\square$

LEMME 3.6. — *Soient $f_1, \dots, f_k$ des applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. L'application de $\mathbf{C}^k$ dans $\mathbf{C}$ qui à $(z_1, \dots, z_k)$ associe le déterminant* $\det(f_j(z_i))_{1\leq i,j\leq k}$ *est identiquement nulle si, et seulement si, les applications $f_1, \dots, f_k$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbf{C}$.*

Démonstration. — C'est clair, par récurrence sur k. □

LEMME 3.7. — *Soient $s \geq 2$ un nombre entier, $\alpha \in \mathbf{C}^{s-1} \setminus \{0\}$ et $H \in \mathbf{C}[\underline{\zeta}, z]$ un polynôme non nul en les s indéterminées $(\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}, z)$. Soient A_m $(1 \leq m \leq M)$ des éléments non tous nuls de $\mathbf{C}[\underline{\zeta}, z]$. Alors il existe une partie finie S de $\mathbf{C}$ telle que, si $f\ : \mathbf{C}^s \to \mathbf{C}$ est une fonction vérifiant la relation non triviale aux différences finies $\sum\limits_{0\leq m\leq M} A_m(\underline{\zeta}, z) f(\underline{\zeta} + m\alpha, z) = 0$, alors, pour tout $u \in \mathbf{C} \setminus S$ la fonction de $s-1$ variables $\underline{\zeta} \mapsto g_u(\underline{\zeta}) = H(\underline{\zeta}, u) f(\underline{\zeta}, u)$ satisfait une relation non triviale de la forme $\sum\limits_{0\leq m\leq M} B_{m,u}(\underline{\zeta}) g_u(\underline{\zeta} + m\alpha) = 0$, où les $B_{m,u}$ sont des éléments non tous nuls de $\mathbf{C}[\underline{\zeta}]$.*

Démonstration. — Soit $u \in \mathbf{C}$. Spécialisons la relation aux différences satisfaite par f au point $z = u$ et multiplions-la par le produit, pour $0 \leq m \leq M$, des $H(\underline{\zeta} + m\alpha, u)$. On obtient une relation aux différences satisfaite par la fonction g_u. Cette relation n'est pas triviale dès que u n'est pas dans dans la réunion de l'ensemble fini des zéros communs aux $A_m[\underline{\zeta}, z] \in \mathbf{C}[\underline{\zeta}]\ [z]$ et de l'ensemble fini des zéros du produit des $H(\underline{\zeta} + m\alpha, z)$. □

4. Preuves du théorème 1.1 et du corollaire 1.2.

Nous allons procéder par récurrence sur l'entier s. Nous rappelons tout d'abord le résultat suivant (qui se déduit du théorème 6.1 de [BéGra]).

THÉORÈME 4.1. — *Soient α et $\beta \in \mathbf{C}^\times$ vérifiant $\alpha/\beta \notin \mathbf{R}$, et f une fonction entière satisfaisant les relations*

$$\begin{cases} \sum\limits_{0\leq m\leq s} U_m(z) f(z + m\alpha) = 0 \\ \sum\limits_{0\leq n\leq t} V_n(z) f(z + n\beta) = 0, \end{cases}$$

où $U_m \in \mathbf{C}[X]$ $(0 \leq m \leq s)$, $V_n \in \mathbf{C}[X]$ $(0 \leq n \leq t)$, $U_0V_0 \neq 0$ et $\mathrm{pgcd}(U_0, V_0) = 1$. *Alors f est un polynôme exponentiel.*

Ceci étant rappelé, soient s un entier positif et f une solution entière d'un système d'équations aux différences de la forme

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0\leq m\leq M_j} A_{j,m}(z) f(z_1,\dots,z_j+m\alpha_j,\dots,z_s)=0 \\ \displaystyle\sum_{0\leq n\leq N_j} B_{j,n}(z) f(z_1,\dots,z_j+n\beta_j,\dots,z_s)=0 \end{cases}$$

pour $j=1,\dots,s$.

Nous allons distinguer la variable z_s; nous posons désormais $z=(z_1,\dots,z_s)=(z^*,z_s)$, avec $z^*=(z_1,\dots,z_{s-1})$.

Pour $j=s$ on a le système

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0\leq m\leq M_s} A_{s,m}(z^*,z_s) f(z^*,z_s+m\alpha_s)=0 \\ \displaystyle\sum_{0\leq n\leq N_s} B_{s,n}(z^*,z_s) f(z^*,z_s+n\beta_s)=0. \end{cases}$$

Nous notons $T_\alpha(z^*)$ (resp. $T_\beta(z^*)$) le contenu de $A_{s,0}(z^*,z_s)$ (resp. $B_{s,0}(z^*,z_s)$) comme polynôme de $\mathbf{C}[z^*]$ $[z_s]$. Soit $H(z^*,z_s)$ le polynôme associé à $A_{s,0}(z^*,z_s)/T_\alpha(z^*)$ et $B_{s,0}(z^*,z_s)/T_\beta(z^*)$ par le lemme 3.1. La fonction $g(z^*,z_s)=H(z^*,z_s)f(z^*,z_s)$ vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0\leq m\leq M_s} A_{s,m}(z^*,z_s) \prod_{j\neq m} H(z^*,z_s+j\alpha_s) g(z^*,z_s+m\alpha_s)=0 \\ \displaystyle\sum_{0\leq n\leq N_s} B_{s,n}(z^*,z_s) \prod_{j\neq n} H(z^*,z_s+j\beta_s) g(z^*,z_s+n\beta_s)=0. \end{cases}$$

En divisant la première équation par le pgcd des termes
$A_{s,0}(z^*,z_s) \prod_{1\leq j\leq m} H(z^*,z_s+j\alpha_s)$ et des $\prod_{j\neq m} H(z^*,z_s+j\alpha_s)$ pour $m>0$,
et la seconde par le pgcd des
$B_{s,0}(z^*,z_s) \prod_{1\leq j\leq n} H(z^*,z_s+j\beta_s)$, $\prod_{j\neq n} H(z^*,z_s+j\beta_s)$, pour $n>0$,
on trouve un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0\leq m\leq M_s} A^*_{s,m}(z^*,z_s) g(z^*,z_s+m\alpha_s)=0 \\ \displaystyle\sum_{0\leq n\leq N_s} B^*_{s,n}(z^*,z_s) g(z^*,z_s+n\beta_s)=0 \end{cases}$$

avec la propriété, grâce au lemme 3.2, que les termes $A^*_{s,0}(z^*,z_s)$ et $B^*_{s,0}(z^*,z_s)$ n'ont plus comme facteurs communs possibles que des polynômes en z^*.

Nous introduisons le résultant de ces deux polynômes en la variable z_s, que nous notons $R(z^*)$, et qui est donc un polynôme non nul en $s-1$ variables complexes.

Nous démontrons maintenant le résultat envisagé pour $s = 1$. Dans ce cas, nous nous sommes ramenés au cas signalé plus haut, où les deux polynômes $A_0^*(z_1)$ et $B_0^*(z_1)$ n'ont pas de racine commune. Par suite, on peut appliquer le théorème 4.1, et il en résulte que $g(z_1)$ est un polynôme exponentiel. Comme f est le quotient de g par un polynôme, on a bien démontré le cas général pour une variable, c'est-à-dire le corollaire 1.2.

Ceci étant posé, nous continuons notre démonstration du cas général, en supposant $s \geq 2$. Les deux polynômes $A_{s,0}^*(z^*, z_s)$ et $B_{s,0}^*(z^*, z_s)$ étant non nuls, on choisit deux coefficients $a(z^*)$ et $b(z^*)$ non nuls de ceux-ci. On note S_1 la partie de $\mathbf{C}^{s-1}$ formée des z^* tels que $a(z^*)b(z^*)R(z^*) = 0$. Il est clair que S_1 est une partie négligeable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{C}^{s-1}$. Le fait que $a(z^*)b(z^*)$ soit non nul nous assure que les équations spécialisées en un tel point $z^* \notin S_1$ ne sont pas triviales.

Soit maintenant ℓ_α (resp. ℓ_β) le maximum des degrés en z_s des polynômes $A_{s,j}^*(z^*, z_s)$ (resp. $B_{s,j}^*(z^*, z_s)$). On définit les polynômes P et Q par

$$P(z^*, X) = \sum_{0 \leq j \leq M_s} a_j(z^*)X^j, \quad Q(z^*, X) = \sum_{0 \leq j \leq N_s} b_j(z^*)X^j,$$

où l'on a noté a_j (resp. b_j) les coefficients de $z_s^{\ell_\alpha}$ (resp. de $z_s^{\ell_\beta}$) dans $A_{s,j}^*(z^*, z_s)$ (resp. $B_{s,j}^*(z^*, z_s)$). D'après le lemme 3.4, il existe une partie S_2 de $\mathbf{C}^{s-1}$, négligeable pour la mesure de Lebesgue, et un ensemble fini Ω, tels que, pour tout $z^* \notin S_2$, tout $\omega \in \mathbf{C}$ solution de $P(z^*, \exp(\omega)) = Q(z^*, \exp(\omega)) = 0$ appartient à Ω.

Pour chaque $\omega \in \Omega$, on regarde l'équation suivante, en l'inconnue $P \in \mathbf{C}[z]$

$$\sum_{0 \leq m \leq M_s} A_{s,m}^*(z^*, z_s)P(z_s + m\alpha_s)\exp(m\omega\alpha_s) = 0.$$

D'après le lemme 3.5, il existe pour chacun de ces ω une partie S_ω de $\mathbf{C}^{s-1}$, négligeable pour la mesure de Lebesgue, et un entier d_ω, tels que, si z^* n'appartient pas à S_ω et si P est solution de l'équation précédente, alors le degré de P est plus petit que d_ω. Appelons S_3 la réunion des S_ω et d le maximum des d_ω pour $\omega \in \Omega$. La partie S_3 est une partie de $\mathbf{C}^{s-1}$ négligeable pour la mesure de Lebesgue, et si un polynôme P est solution d'une des équations précédentes pour un $\omega \in \Omega$, alors son degré est majoré par d.

Soit S l'ensemble réunion de S_1, S_2 et S_3. Pour $z^* \notin S$, la fonction $g(z^*, z_s)$ considérée comme fonction entière de la variable z_s est solution du système

$$\begin{cases} \sum\limits_{0 \leq m \leq M_s} A^*_{s,m}(z^*, z_s) g(z^*, z_s + m\alpha_s) = 0 \\ \sum\limits_{0 \leq n \leq N_s} B^*_{s,n}(z^*, z_s) g(z^*, z_s + n\beta_s) = 0. \end{cases}$$

Comme on l'a déjà vu, ce système vérifie les hypothèses du théorème 4.1; il en résulte que $g(z^*, z_s)$ est un polynôme exponentiel, de la forme $g(z^*, z_s) = \sum\limits_{\omega} P_\omega(z_s) \exp(\omega z_s)$, où les ω sont dans $\mathbf{C}$ et les P_ω des polynômes non nuls. En utilisant l'indépendance linéaire sur $\mathbf{C}(z_s)$ des fonctions $z_s \mapsto \exp(\omega z_s)$, il en résulte que, pour tout ω, on a

$$\sum_{0 \leq m \leq M_s} A^*_{s,m}(z^*, z_s) P_\omega(z_s + m\alpha_s) \exp(m\omega\alpha_s) = 0$$

et

$$\sum_{0 \leq n \leq N_s} B^*_{s,n}(z^*, z_s) P_\omega(z_s + n\beta_s) \exp(n\omega\beta_s) = 0.$$

En considérant les termes de plus haut degré en z_s de ces deux équations, il vient

$$P(z^*, \exp(\omega\alpha_s)) = Q(z^*, \exp(\omega\beta_s)) = 0,$$

où P et Q sont les polynômes définis auparavant; par suite, compte tenu du fait que z^* n'appartient pas à l'ensemble S_2, il en résulte que les ω appartiennent à l'ensemble fixe Ω indépendant de z^* introduit plus haut.

Comme z^* n'appartient pas à l'ensemble S_3, les polynômes P_ω $(\omega \in \Omega)$ sont de degré majoré par une constante d indépendante de $z^* \notin S$. Il existe donc une partie finie I de $\mathbf{N} \times \mathbf{C}$ (contenue dans $\{0, ..., d\} \times \Omega$, donc indépendante de $z^* \notin S$) telle que, pour tout $z^* \notin S$ et tout $z_s \in \mathbf{C}$ on ait

$$(*) \qquad g(z^*, z_s) = \sum_{(j,\omega) \in I} a_{j,\omega}(z^*) z_s^j \exp(\omega z_s).$$

Les fonctions $z_s \mapsto z_s^j \exp(\omega z_s)$ $((j, \omega) \in I)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbf{C}$. Par le lemme 3.6, il existe donc des nombres $u_k \in \mathbf{C}$ $(1 \leq k \leq \mathrm{card}(I))$ tels que le déterminant construit sur les $u_k^j \exp(\omega u_k)$ ne soit pas nul. Il en résulte qu'il existe des $\lambda_{j,\omega,k} \in \mathbf{C}$ $((j,\omega) \in I,\ 1 \leq k \leq \mathrm{card}(I))$ tels que, pour tout $(j, \omega) \in I$ et tout $z^* \notin S$ on ait

$$a_{j,\omega}(z^*) = \sum_{1 \leq k \leq \mathrm{card}(I)} \lambda_{j,\omega,k} g(z^*, u_k).$$

Le membre de droite de chacune de ces identités est une fonction entière de la variable $z^* \in \mathbf{C}^{s-1}$, donc $a_{j,\omega}$ se prolonge en une fonction entière sur

$\mathbf{C}^{s-1}$. Comme S est d'intérieur vide (car il est de mesure nulle) et que g est entière sur $\mathbf{C}^s$, il en résulte que l'égalité $(*)$ se prolonge en une identité sur $\mathbf{C}^s$.

Le lemme 3.7 montre que, quitte à choisir les u_k hors d'une partie finie de $\mathbf{C}$, ce qui est possible puisque le déterminant du lemme 3.6 est, dans le cas où nous l'utilisons, une fonction entière non identiquement nulle, les fonctions $z^* \mapsto g(z^*, u_k)$ satisfont des relations non triviales aux différences dans les $2(s-1)$ directions définies par les α_j et β_j $(1 \leq j \leq s-1)$. Ainsi le $\mathbf{C}(z^*)$-espace vectoriel engendré par les translatées de chacune des $g(z^*, u_k)$ dans la direction α_j (resp. β_j) est de dimension finie. La relation exprimant les $a_{j,\omega}$ en fonction de g montre alors qu'il en est de même pour ceux-ci.

L'hypothèse de récurrence appliquée à ces fonctions montre qu'il existe des polynômes non nuls dont le produit par les $a_{j,\omega}$ est un polynôme exponentiel. Il existe donc un polynôme non nul $V(z^*)$ tel que $V(z^*)g(z^*, z_s) = V(z^*)H(z^*, z_s)f(z^*, z_s)$ soit un polynôme exponentiel, ce qui termine la démonstration. □

5. Le cas d'un système différence-différentiel.

Dans cette partie, nous allons compléter les résultats de [BéGra] dans le cas d'une variable complexe et d'un couple d'une équation aux différences à coefficients polynômes et d'une équation différentielle à coefficients polynômes.

Nous aurons tout d'abord besoin du théorème 8.1 de [BéGra], que nous rappelons, en renvoyant le lecteur à cet article pour les notations.

Proposition 5.1. — *Soit $X = e^D$ et f une fonction entière vérifiant*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0\le m\le s} U_m(X) z^m f = 0 & (1) \\ \displaystyle\sum_{0\le n\le t} V_n(D) z^n f = 0 & (2) \end{cases}$$

où $U_m \in \mathbf{C}[X]$ $(0 \leq m \leq s)$, $V_n \in \mathbf{C}[D]$ $(0 \leq n \leq t)$ et $U_s V_t \neq 0$.

On pose, pour $1 \leq i, j \leq s+t$,

$$a_{i,j} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0\le m\le s} (-1)^{m-s+j-i} \binom{t-i}{m-s+j-i} \tau^{m-s+j-i} U_m(X) & \text{si } 1\le i\le t \\ \displaystyle\sum_{0\le n\le t} (-1)^{n+j-i} \binom{s+t-i}{n+j-i} V_n^{(n+j-i)}(D) & \text{si } t+1\le i\le s+t. \end{cases}$$

Si $\det(a_{i,j}) \in \mathbf{C}[X, D]$ *n'est pas nul, alors* f *est un polynôme exponentiel.*

On en déduit le résultat suivant.

COROLLAIRE 5.2. — *Soient* $\alpha \in \mathbf{C}^\times$ *et* f *une fonction entière d'une variable complexe vérifiant le système des deux équations suivantes :*

$$\begin{cases} \sum\limits_{0 \le k \le K} Q_k(z) f(z + k\alpha) = 0 \\ \sum\limits_{0 \le m \le M} P_m(z) f^{(m)}(z) = 0 \end{cases}$$

où les P_k *et* Q_m *sont des polynômes, avec* $P_M Q_K \neq 0$.

Si les polynômes Q_0 *et* P_M *sont premiers entre eux, alors* f *est un polynôme exponentiel.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que, sous l'hypothèse que les polynômes Q_0 et P_M sont premiers entre eux, le déterminant introduit dans la proposition 5.1 est non nul. Nous traduisons pour cela ces équations sous la forme (1) et (2) de la proposition 5.1 (voir [BéGra] pour les détails) et nous allons calculer le coefficient du terme de plus haut degré en D dans le terme constant du déterminant $\det(a_{i,j})$, considéré comme polynôme en la variable X.

Ce terme s'obtient en spécialisant tout d'abord X en 0. L'opérateur τ n'est autre que l'opérateur $X\dfrac{d}{dX}$. Il en résulte que $\tau^k U$, spécialisé en $X = 0$ est nul si $k > 0$. Il en résulte que, pour $1 \le i \le t$, le coefficient $a_{i,j}$ est nul si $j - i - s \ge 1$, et égal à $U_{s+i-j}(0)$ dans le cas contraire. L'équation (1) montre que $Q_0(z) = \sum\limits_k U_k(0) z^k$. On cherche maintenant le coefficient du terme de plus haut degré en D. On remarque pour cela que le maximum des degrés des polynômes V_n est M et que, si b_n est le coefficient de D^M dans V_n, alors $P_M(z) = \sum\limits_{0 \le n \le t} b_n z^n$.

D'après les expressions données dans la proposition 5.1, si $t + 1 \le i \le s + t$, le coefficient de D^M dans $a_{i,j}$ est nul si $j - i > 0$ et égal à b_{i-j} dans le cas contraire. Il en résulte que le coefficient cherché n'est autre que le résultant de Sylvester des deux polynômes P_M et Q_0, qui est non nul, puisque P_M et Q_0 sont premiers entre eux, ce qui termine la démonstration. □

Nous aurons besoin de quelques lemmes, analogues à ceux de la partie 3.

LEMME 5.3. — *Soient Z une indéterminée, et A et B des polynômes non nuls dans l'anneau $\mathbf{C}[Z]$. Alors il existe un entier K_0 et un polynôme $H \in \mathbf{C}[Z]$ tels que l'on ait*

$$\operatorname{pgcd}\Big(\prod_{0\le k\le K} A(Z+k), B(Z)^K\Big) = H(Z)$$

pour tout $K \in \mathbf{N}$ vérifiant $K > K_0$.

Démonstration. — Le polynôme $A(Z+k)$ est premier au polynôme B dès que k est assez grand et l'assertion en résulte. □

LEMME 5.4. — *Avec les hypothèses et les notations du lemme 5.3, si M est un entier naturel non nul, on pose*

$$\Delta(Z) = \operatorname{pgcd}\Big(A(Z) \prod_{1\le k\le M} H(Z+k);\ \prod_{\substack{0\le k\le M\\ k\ne m}} H(Z+k), 1 \le m \le M\Big)$$

le pgcd *étant pris dans l'anneau $\mathbf{C}[Z]$ des polynômes en l'indéterminée Z.*

Alors les polynômes

$$A^*(Z) = \frac{A(Z) \prod_{1\le k\le M} H(Z+k)}{\Delta(Z)} \qquad \text{et} \qquad B(Z)$$

sont premiers entre eux dans $\mathbf{C}[Z]$.

Démonstration. — Le polynôme H ne possède comme zéros éventuels que les zéros de B. Soit θ une racine de B. Alors on a $\operatorname{ord}_\theta(H) = \sum_{k\ge 0} \operatorname{ord}_{\theta+k}(A)$. En effet, pour N assez grand ($N > K_0+1$) on a $N \operatorname{ord}_\theta(B) > \operatorname{ord}_\theta(H)$.

Pour $m \ge 1$ posons

$$S_m = \operatorname{ord}_\theta \prod_{\substack{0\le k\le M\\ k\ne m}} H(Z+k) - \operatorname{ord}_\theta \frac{A(Z) \prod_{1\le k\le M} H(Z+k)}{\Delta(Z)}.$$

On a

$$S_m = -\operatorname{ord}_{\theta+m}(H) + \operatorname{ord}_\theta(H) - \operatorname{ord}_\theta(A).$$

D'autre part on a $\operatorname{ord}_\theta(H) \ge \sum_{k\ge m} \operatorname{ord}_{\theta+k}(A)$, et il en résulte, comme dans le lemme 3.3, que $\operatorname{ord}_\theta(A^*) = 0$. □

Nous passons maintenant à la démonstration du théorème 1.3.

Nous prenons pour A le coefficient constant Q_0 de l'équation aux différences vérifiée par f, et pour B le coefficient P_M de l'équation différentielle vérifiée par f. Soit H le polynôme associé par le lemme 5.1 à ces deux polynômes. Nous posons $g(z) = H(z)f(z)$. En multipliant l'équation aux différences dont f est solution par $\prod_{0\leq j\leq K} H(z+j)$ on voit que $g(z)$ satisfait

$$\sum_{0\leq k\leq K} Q_k(z) \prod_{\substack{0\leq j\leq K\\ j\neq k}} H(z+j)g(z+k) = 0.$$

De même, en multipliant l'équation différentielle par $H(z)^{M+1}$, on obtient la relation

$$\sum_{0\leq m\leq M} C_m(z)g^{(m)}(z) = 0,$$

où $C_M(z) = P_M(z)H(z)^M$.

En divisant les coefficients de la première équation par $\Delta(z)$, on trouve une nouvelle équation aux différences à coefficients polynômes

$$\sum_{0\leq k\leq K} Q_k^*(z)g(z+k) = 0.$$

Par le lemme 5.4, le polynôme Q_0^* et le polynôme C_M sont premiers entre eux; par la proposition 5.2, la fonction entière g est alors un polynôme exponentiel, et ceci termine la démonstration du théorème 1.3. □

6. Le cas général à coefficients constants.

Nous démontrons maintenant le théorème 1.4.

Soient donc γ_j $(j = 1, \ldots, 2s)$ des éléments de $\mathbf{C}^s$, que nous supposons $\mathbf{R}$-linéairement indépendants. On suppose que la fonction entière f vérifie le système

$$\text{(S)} \qquad \sum_{0\leq n\leq N_j} a_{n,j} f(z+n\gamma_j) = 0,$$

où, pour chaque j, les $a_{n,j}$ sont des éléments non tous nuls de $\mathbf{C}$. En particulier, on peut toujours supposer que $a_{0,j} \neq 0$. Avant de commencer la démonstration, nous aurons besoin de quelques notations et quelques lemmes. Pour $z \in \mathbf{C}^s$, on pose $||z|| = (|z_1|^2 + \ldots + |z_s|^2)^{1/2}$. Nous rappelons qu'une fonction g entière sur $\mathbf{C}^s$ est dite de type exponentiel s'il existe deux constantes positives A et$B$ telles que $|g(z)| \leq A \exp(B||z||)$ pour tout $z \in \mathbf{C}^s$.

On montre de la même façon que dans [BéGra] que l'espace des fonctions entières de type exponentiel opère sur l'espace des fonctions entières sur $\mathbf{C}^s$ de la façon suivante : si g est entière de type exponentiel, $g(z) = \sum_{n \in \mathbf{N}^s} a_n z^n$, et si f est entière, on pose

$$g(x)(f) = \sum_{n \in \mathbf{N}^s} a_n \frac{\partial^{n_1}}{\partial z_1^{n_1}} \cdots \frac{\partial^{n_s}}{\partial z_s^{n_s}} f(z).$$

Pour $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s) \in \mathbf{C}^s$, l'opérateur de translation $f \mapsto f(z+\gamma)$ peut se voir comme l'opérateur différentiel d'ordre infini $\exp\left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \ldots + \gamma_s \frac{\partial}{\partial z_s}\right)$ en raison de la formule de Taylor.

On note désormais $x_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$, de sorte que le système précédent devient, en posant $P_j(X) = \sum_{0 \leq n \leq N_j} a_{n,j} X^n$,

$$\text{(S)} \qquad P_j(\exp(\langle \gamma_j, x \rangle))(f) = 0, \text{ avec } P_j(0) \neq 0.$$

Soit $g = (g_1, \ldots, g_p)$ un p-uplet de fonctions entières de type exponentiel sur $\mathbf{C}^s$. On pose, pour $z \in \mathbf{C}^s$, $||g||(z) = (|g_1(z)|^2 + \ldots + |g_p(z)|^2)^{1/2}$. Avec ces notations, on a le résultat suivant.

LEMME 6.1. — *Pour qu'une fonction entière h de type exponentiel sur $\mathbf{C}^s$ appartienne à la racine de l'idéal engendré par les fonctions $g_1, \ldots, g_p$ dans l'espace des fonctions entières de type exponentiel, il faut et il suffit qu'il existe un entier $k \in \mathbf{N}$ et des constantes positives A et B telles que l'on ait*

$$|h(z)|^k \leq A||g||(z) \exp(B||z||) \text{ pour tout } z \in \mathbf{C}^s.$$

Démonstration. — C'est le corollaire 4, p. 566 de [Sko]. □

LEMME 6.2. — *On pose $g_j(z) = P_j(\exp(\langle \gamma_j, z \rangle))$ pour $j = 1, \ldots, 2s$, où $P_j(0) \neq 0$ et les $\gamma_j \in \mathbf{C}^s$ sont $\mathbf{R}$-linéairement indépendants. Il existe un nombre réel positif R et une constante positive C tels que, pour tout $z \in \mathbf{C}^s$ vérifiant $||z|| \geq R$, on ait*

$$||g||(z) = (|g_1(z)|^2 + \ldots + |g_{2s}(z)|^2)^{1/2} \geq C.$$

Démonstration. — Nous allons raisonner par l'absurde. Si ce n'était pas le cas, il en résulterait l'existence d'une suite z_n d'éléments de $\mathbf{C}^s$, telle que $||z_n||$ tende vers l'infini et $g_j(z_n)$ tende vers zéro pour tout j.

On note $u_{j,1},\dots,u_{j,N_j}\in\mathbf{C}^\times$ les zéros de P_j (pas forcément distincts), où N_j est le degré de P_j. Soit D une constante positive, et A_j le coefficient du terme de plus haut degré de P_j. L'inégalité $|P_j(\exp(\langle\gamma_j,z\rangle))|<D$ s'écrit

$$|A_j|\prod_{k=1}^{N_j}|\exp(\langle\gamma_j,z\rangle)-u_{j,k}|<D.$$

On en déduit que, quitte à extraire une sous-suite de la suite z_n, il existe pour tout j une racine fixée u_j de P_j telle que $\exp(\langle\gamma_j,z_n\rangle)=u_j+\varepsilon_j(z_n)$, où $\varepsilon_j(z_n)$ tend vers zéro si n tend vers l'infini. Fixons une détermination du logarithme. Comme u_j est non nul, on a, pour tout n assez grand, $\langle\gamma_j,z_n\rangle=\log u_j+\mu_j(z_n)+2i\pi\omega_j(z_n)$, avec $\mu_j(z_n)$ de limite nulle quand n tend vers l'infini, et $\omega_j(z_n)\in\mathbf{Z}$ pour tous n et j.

Soit $k\in\{1,\dots,s\}$. Comme les γ_j forment une $\mathbf{R}$-base de $\mathbf{C}^s$, il existe des $\theta_{j,k}\in\mathbf{R}$ tels que

$$\sum_{j=1}^{2s}\theta_{j,k}\gamma_j=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)\in\mathbf{C}^s,$$

où le 1 intervient à la k-ième place. Posons $z_n=(z_{1,n},\dots,z_{s,n})$. Il en résulte que

$$z_{k,n}=\sum_{j=1}^{2s}\theta_{j,k}\langle\gamma_j,z_n\rangle=\sum_{j=1}^{2s}\theta_{j,k}\log u_j+\sum_{j=1}^{2s}\theta_{j,k}\mu_j(z_n)+2i\pi\sum_{j=1}^{2s}\theta_{j,k}\omega_j(z_n).$$

Par suite $\mathrm{Ré}(z_{k,n})=\mathrm{Ré}\Big(\sum_{j=1}^{2s}\theta_{j,k}\log u_j\Big)+\phi_k(z_n)$, où $\phi_k(z_n)$ tend vers zéro si n tend vers l'infini. Il en résulte que les parties réelles des $z_{k,n}$ sont majorées en valeur absolue par une constante M_1 indépendante de n et de k.

On fait le même raisonnement, en exprimant l'élément $(0,\dots,0,-i,0,\dots,0)$, où le $-i$ est à la k-ième place, pour exprimer $-iz_{k,n}$; il existe donc des $\theta^*_{j,k}\in\mathbf{R}$ tels que

$$\mathrm{Im}(z_{k,n})=\mathrm{Ré}(-iz_{k,n})=\mathrm{Ré}\Big(\sum_{j,k}\theta^*_{j,k}\log u_j\Big)+\phi_{k,2}(z_n),$$

avec encore la propriété que $\phi_{k,2}(z_n)$ tend vers zéro si n tend vers l'infini.

Par conséquent, il existe M_2 telle que $|\operatorname{Im}(z_{k,n})| \leq M_2$ pour tous k et n. Il existe donc une constante M telle que $||z_n|| \leq M$ pour tout n, ce qui contredit le fait que $||z_n||$ tende vers l'infini et termine la démonstration du lemme. □

LEMME 6.3. — *Sous les hypothèses du lemme 6.2, la variété analytique*

$$V = \{z \in \mathbf{C}^s;\ P_j(\exp(\langle \gamma_j, z \rangle)) = 0,\ \ j = 1, \ldots, 2s\}$$

est constituée d'un nombre fini de points.

Démonstration. — Si $z \in V$, alors, pour tout $j = 1, \ldots, 2s$, on a $\exp(\langle \gamma_j, z \rangle) = u_j$, où u_j est l'un des zéros de P_j. Il en résulte que $\langle \gamma_j, z \rangle = \log u_j + 2i\pi k_j$, où $k_j \in \mathbf{Z}$. Avec les notations de la preuve du lemme 6.2, on a donc

$$\text{Ré}(z_k) = \text{Ré}\Big(\sum_{j=1}^{2s} \theta_{j,k} \log u_j\Big) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z_k) = \text{Ré}\Big(\sum_{j=1}^{2s} \theta_{j,k}^{*} \log u_j\Big).$$

Ceci montre que les $(\text{Ré}(z_k), \operatorname{Im}(z_k))$ appartiennent à un ensemble fini, de sorte que l'ensemble V est bien fini. □

LEMME 6.4. — *Soit V la variété analytique du lemme précédent. Soient $k \in \{1, \ldots, 2s\}$ et P un polynôme à une variable, s'annulant sur la projection de V sur la k-ième composante de $\mathbf{C}^s$. Alors il existe un entier M_k tel que $P(z_k)^{M_k}$ appartienne à l'idéal engendré dans l'espace des fonctions entières de type exponentiel par les $g_j(z) = P_j(\exp(\langle \gamma_j, z \rangle))$.*

Démonstration. — On peut supposer que $N_j = \deg P_j$ est non nul pour tout j, sinon il n'y a rien à démontrer.

Nous allons d'abord démontrer qu'il existe des constantes positives h, C et D telles que, pour tout $z \in \mathbf{C}^s$ tel que $||z|| \leq D$, on ait $||G||(z) \geq C d(z, V)^h$, où on a noté $||G||(z) = \Big(\sum_1^{2s} |g_j(z)|^2\Big)^{1/2}$ et $d(z, V)$ la distance de z à V.

Posons $N = \max N_j$, soit $\zeta \in V$ et montrons que $||G||(z) \geq d(z, V)^{N+2}$ pour tout $z \in B(\zeta, R)$, où R est assez petit.

Si cela était faux, il existerait une suite z_n tendant vers ζ, telle que l'on ait $||G||(z_n) < d(z_n, V)^{N+2}$. Notons qu'alors $z_n \neq \zeta$ pour tout n.

On a $d(z_n, V) = ||z_n - \zeta||$ dès que n est assez grand, puisque V est constitué d'un nombre fini de points. Il en résulte que, pour tout $j = 1, \ldots, 2s$, on a

$$|P_j(\exp(\langle \gamma_j, z \rangle))| < ||z_n - \zeta||^{N+2}.$$

Quitte à extraire une sous-suite de la suite z_n, cela entraîne qu'il existe une racine a_j de P_j telle que

$$|\exp(\langle \gamma_j, z_n \rangle) - a_j| \le |\frac{1}{A_j}|^{1/N_j} ||z_n - \zeta||^{(N+2)/N_j},$$

où A_j est le coefficient du terme de plus haut degré de P_j. En passant à la limite quand n tend vers l'infini, il vient $a_j = \exp(\langle \gamma_j, \zeta \rangle)$, d'où, en posant $k_j = (N+1)/N_j > 1$,

$$|\exp(\langle \gamma_j, z_n - \zeta \rangle) - 1| \le |a_j|^{-1} |\frac{1}{A_j}|^{1/N_j} ||z_n - \zeta||^{(N+2)/N_j} < ||z_n - \zeta||^{k_j}$$

pour n assez grand. Cela se traduit par $\exp(\langle \gamma_j, z_n - \zeta \rangle) = 1 + \eta_n ||z_n - \zeta||^{k_j}$, où η_n est un nombre complexe de module plus petit que 1. Pourvu que n soit assez grand, on peut donc écrire $\langle \gamma_j, z_n - \zeta \rangle = \log(1 + \eta_n ||z_n - \zeta||^{k_j})$.

Posons $m = \inf\{k_j;\ j = 1, \ldots, N_j\}$. On utilise les $\theta_{l,k}$ et $\theta^*_{l,k}$ introduits dans le lemme 6.2, et on en déduit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout n assez grand, on ait $||z_n - \zeta|| \le c ||z_n - \zeta||^m$. Comme $m > 1$ et $||z_n - \zeta|| > 0$, il en résulte que la suite $||z_n - \zeta||$ ne tend pas vers zéro si n tend vers l'infini, ce qui est contradictoire.

Il existe donc un nombre réel $R > 0$ et un entier h tels que, pour tout $\zeta \in V$ et tout $z \in \bigcup_{\zeta \in V} B(\zeta, R)$, on ait $||G||(z) \ge d(z, V)^h$. Soit $D > R + \max\{|\zeta|;\ \zeta \in V\}$. Sur le complémentaire de la réunion pour $\zeta \in V$ des boules ouvertes $B(\zeta, R)$ dans la boule fermée de centre 0 et de rayon D, la fonction $||G||$, continue et ne s'annulant pas, est minorée par une constante positive c_1. Soit C une constante positive telle que $C \max\{d(z, V)^h;\ z \in \overline{B}(0, D)\} \le c_1$ et $C \le 1$. On a alors $||G||(z) \ge C d(z, V)^h$ pour tout $z \in \overline{B}(0, D)$, ce qui démontre l'assertion.

Compte tenu du lemme 6.2, on peut supposer la constante C choisie de façon que l'on ait $||G||(z) \ge C$ pour tout $z \in \mathbf{C}^s$ vérifiant $||z|| \ge D$.

Soit maintenant $z = (z_1, \ldots, z_s) \in \mathbf{C}^s$, et considérons le polynôme P comme un polynôme en la variable z, de sorte que P s'annule sur V. Le polynôme P possède donc pour tout $\zeta \in V$ au moins une racine qui est la k-ième composante de ζ. Soit Ω l'ensemble de ces nombres complexes (qui peut avoir a priori un cardinal inférieur à celui de V, deux éléments de V pouvant avoir même projection). On a donc

$$|P(z)| = |Q(z_k)| \prod_{\omega\in\Omega} |z_k - \omega|,$$

où Q est un polynôme, donc est borné en module sur $\overline{B}(0,D)$. Il en résulte qu'il existe une constante C_1 positive telle que

$$|P(z)| \leq C_1 \prod_{\omega\in\Omega} |z_k - \omega|$$

pour tout $z \in \overline{B}(0,D)$.

Mais il existe $\zeta_0 \in V$ de projection ω_0 tel que $||z-\zeta_0|| = d(z,V)$. On a donc $|z_k - \omega_0| \leq d(z,V)$, et comme $\prod_{\omega\neq\omega_0} (z_k - \omega)$ est majoré en module par une constante indépendante de $z \in \overline{B}(0,D)$ et $\zeta_0 \in V$, il en résulte l'existence d'une constante positive C_2 telle que $|P(z)| \leq C_2 d(z,V)$ pour tout $z \in \overline{B}(0,D)$. D'après ce qui précède, il existe une constante positive C_3 telle que $|P(z)|^h \leq C_3||G||(z)$ pour tout $z \in \overline{B}(0,D)$.

Soit maintenant A une constante positive. Comme $|P(z)|\exp(-A||z||)$ tend vers zéro si $||z||$ tend vers l'infini, et comme $||G||(z) \geq C$ pour $||z|| \geq D$, il existe une constante η telle que $|P(z)|^h \leq \eta||G||(z)\exp(A||z||)$ pour tout z tel que $||z|| \geq D$.

Finalement, il existe une constante M telle que

$$|P(z)|^h \leq M||G||(z)\exp(A||z||)$$

pour tout $z \in \mathbf{C}^s$, et une application du lemme 6.1 termine la démonstration. □

LEMME 6.5. — *Soit f une fonction entière de s variables complexes. On suppose que f vérifie un système d'équations aux dérivées partielles*

$$Q_k\Big(\frac{\partial}{\partial z_k}\Big)(f) = 0,$$

où Q_k, pour $k = 1,\dots,s$, est un polynôme non nul en une variable.

Alors f est un polynôme exponentiel.

Démonstration. — On procède par récurrence sur l'entier s. Le résultat est bien connu pour $s = 1$. Supposons-le acquis pour $s-1$. Posons $f(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}^{s-1}} \omega_n(z_s) z_1^{n_1}\dots z_{s-1}^{n_{s-1}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^{s-1}$ on a $Q_s\Big(\dfrac{\partial}{\partial z_s}\Big)(\omega_n(z_s)) = 0$. Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbf{N}^{s-1}$, on peut écrire $\omega_n(z_s) = \sum_{j,\ell} c_{j,\ell,n} z_s^\ell \exp(a_j z_s)$, où les indices j,l et les a_j appartiennent à des ensembles finis, ne dépendant que du polynôme Q_s, et les $c_{j,\ell,n}$ sont des constantes complexes. Il en résulte que $f(z) = \sum_{j,\ell} \psi_{j,\ell}(z_1,\dots,z_{s-1}) z_s^\ell \exp(a_j z_s)$.

Les fonctions $z_s \mapsto z_s^\ell \exp(a_j z_s)$ étant linéairement indépendantes sur $\mathbf{C}$, on peut exprimer les $\psi_{j,\ell}$ comme combinaisons linéaires de fonctions de la forme $f(z_1,\dots,z_{s-1},\eta)$, où les η sont des nombres complexes convenablement choisis. Il en résulte que ce sont des fonctions entières, et qu'elles vérifient un système d'équations aux dérivées partielles analogue à celui dont nous étions partis, mais en $s-1$ variables. L'hypothèse de récurrence permet alors de terminer la démonstration. □

Nous passons maintenant à la démonstration du théorème 1.4.

Supposons donc que f est solution du système $P_j(\exp(\langle\gamma_j,x\rangle))(f)=0$. Le lemme 6.3 montre que la variété $V = \{z\in\mathbf{C}^s; P_j(\exp(\langle\gamma_j,z\rangle)) = 0, j=1,\dots,2s\}$ est un ensemble fini. Il existe donc pour tout k un polynôme non nul en la k-ième composante de $z \in \mathbf{C}^s$ qui s'annule sur V. Il résulte du lemme 6.4 qu'il existe des fonctions entières de type exponentiel $q_{j,k}(z)$ et des polynômes non nuls en une variable Q_k tels que

$$Q_k(z_k) = \sum_{j=1}^{2s} q_{j,k}(z) P_j(\exp(\langle\gamma_j,z\rangle)).$$

L'opérateur différentiel $Q_k\Big(\dfrac{\partial}{\partial z_k}\Big)$ est la somme d'opérateurs différentiels d'ordre infini que l'on peut appliquer à la fonction entière f et on a $Q_k\Big(\dfrac{\partial}{\partial z_k}\Big)(f) = 0$ pour tout $k = 1,\dots,s$. Ainsi la fonction entière f est solution d'un système d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

Le lemme 6.5 montre alors que f est un polynôme exponentiel, ce qui termine la démonstration. □

BIBLIOGRAPHIE

[BéGra] J.-P. BÉZIVIN et F. GRAMAIN, Solutions entières d'un système d'équations aux différences, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 43-3 (1993), 791–814.

[Gra] F. GRAMAIN, Sur le théorème de Fukasawa-Gelfond, Invent. Math., 63 (1981), 495–506.

[Loe] J.-J. LOEB, Communication personnelle, mars 1995.

[Mas] D. W. MASSER, On certain functional equations in several variables; Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1982, D. Bertrand et M. Waldschmidt ed., Progress in Math. 31, 173–190, Birkhäuser, Boston 1983.

[Sko] H. SKODA, Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^{e} série, 5 (1972), 545–579.

[Wal] M. WALDSCHMIDT, Nombres Transcendants, Springer Lecture Notes in Math. 402, Berlin, 1974.

Manuscrit reçu le 22 mars 1995,
accepté le 19 février 1996.

J.-P. BÉZIVIN,
Université de Caen
Mathématiques
Esplanade de la Paix
F-14032 Caen cedex
&
F. GRAMAIN,
Université de Saint-Étienne
Mathématiques
23, rue du Docteur Paul Michelon
F-42023 Saint Étienne cedex 2.