ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PASCAL AUSCHER
PHILIPPE TCHAMITCHIAN

Calcul fonctionnel précisé pour des opérateurs elliptiques complexes en dimension un (et applications à certaines équations elliptiques complexes en dimension deux)

Annales de l'institut Fourier, tome 45, n° 3 (1995), p. 721-778
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_3_721_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 3 (1995), 721-778

CALCUL FONCTIONNEL PRÉCISÉ POUR DES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES COMPLEXES EN DIMENSION UN (ET APPLICATIONS À CERTAINES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES COMPLEXES EN DIMENSION DEUX)

par P. AUSCHER et P. TCHAMITCHIAN

0. INTRODUCTION

L'objet de ce travail est en premier lieu une étude précise du calcul fonctionnel associé à un opérateur du type $b(x)Da(x)D$, où $a(x)$ et $b(x)$ sont deux fonctions mesurables bornées et à parties réelles strictement positives et D est l'opérateur de dérivation $-i\dfrac{d}{dx}$ en dimension 1.

De tels opérateurs, qui appartiennent à une classe un peu plus large que celle des maximaux-accrétifs, se prêtent à un calcul fonctionnel holomorphe permettant de définir puissances fractionnaires, semi-groupe de Poisson, etc. Cependant des problèmes comme celui de la détermination du domaine de leurs racines carrées, ou bien des propriétés L^p de leurs résolvantes ou autres fonctions de ces opérateurs, échappent aux méthodes abstraites et requièrent l'usage des méthodes d'analyse réelle.

Ces dernières peuvent donner à peu près complètement les propriétés de continuité d'un opérateur à partir de la description de son noyau et de ses propriétés de compensation. C'est pourquoi nous nous sommes attachés à obtenir des estimations optimales sur les noyaux des fonctions de $T =$

Mots-clés : Équations elliptiques complexes – Opérateurs de Calderón-Zygmund – Problèmes aux limites – Principe du maximum faible – Racine carrée d'opérateurs elliptiques – Calcul fonctionnel – Espaces de Hardy.
Classification math. : 35J15 – 35J25 – 42B20 – 47A20 – 47F05 – 42B30.

$bDaD$. En particulier, nous montrons que, si l'on l'écrit $T^{1/2} = R^{(a,b)}D$, alors $R^{(a,b)}$ est un opérateur d'intégrale singulière dont le noyau est de Calderón-Zygmund, et qui dépend analytiquement du couple (a, b). Pour parvenir à estimer le noyau de $R^{(a,b)}$, nous utilisons le calcul fonctionnel et une première estimation de base sur le noyau de la résolvante de T, qui provient d'une observation simple sur certains commutateurs. Les propriétés de compensation, également nécessaires à la compréhension de $R^{(a,b)}$, sont assez faciles à obtenir, et impliquent que ce dernier est un opérateur de Calderón-Zygmund (c'est-à-dire, outre les estimations sur son noyau, est continu sur L^2, et donc sur L^p, $1 < p < +\infty$). Un tel résultat généralise celui de Kenig et Meyer [KM], qui dans le cas $a = b$, ont prouvé que $R^{(a,a)}$ est l'intégrale de Cauchy sur le graphe de la primitive de $1/a(x)$, *i.e.*,

$$R^{(a,a)}f(x) = v.p.\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)\,dy}{z(y) - z(x)}, \quad \text{avec } z' = \frac{1}{a}.$$

Il en résulte aussi une nouvelle démonstration de la conjecture de Kato pour ces opérateurs, qui affirme que le domaine de $T^{1/2}$ est l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$. Ce résultat a été démontré par R. Coifman, A. McIntosh et Y. Meyer [CMcM] lorsque $b(x) = 1$, puis C. Kenig et Y. Meyer ont étendu ce résultat au cas général [KM]. Nos résultats prolongent directement ces travaux, mais en utilisant une méthode différente. En particulier, nous ne recourons plus à un développement multi-linéaire (ni d'ailleurs aux ondelettes [AT1], [AT2], dont l'application à ce problème semble limitée à la dimension un). Nous croyons que l'approche de la conjecture de Kato développée dans ce travail peut s'étendre à plusieurs dimensions où cette question est toujours ouverte (cf [Mc1]), et y apporter de nouvelles informations, ce qui était notre motivation originale pour ce travail (cf [AT3]).

Une autre application des estimations sur les fonctions de T est qu'elles permettent de définir et d'étudier des espaces de Hardy associés à T, notés $\mathcal{H}^p_{a,b}$, $1/2 < p \leq 1$, à l'aide de fonctions maximales. Nous démontrons que ces espaces s'identifient à l'image par b des espaces de Hardy classiques. L'un des arguments employés est un principe de Harnack faible pour le gradient des solutions satisfaisant une équation elliptique $\mathrm{div}(A\nabla u) = 0$, en dimension deux, la matrice étant accrétive et indépendante de l'une des variables. Ce principe est utilisé pour contrôler une fonction d'aire.

Cela nous amène à la deuxième partie de ce travail, qui étudie certains problèmes avec conditions au bord sur le demi-plan pour $Lu = \mathrm{div}(A\nabla u) =$

0, dans le cas où, de plus, A est diagonale. Ceci signifie qu'on peut mettre l'équation sous la forme $\partial_t^2 u - Tu = 0$ pour un certain opérateur $T = bDaD$.

Dans le cas symétrique réel, ces problèmes sont en général résolus à l'aide d'une étude fine de la mesure harmonique pour L. Mais dans le cas accrétif, il est connu que le principe du maximum n'est plus vrai *a priori* même dans une version affaiblie en dimension supérieure ou égale à deux [CFK] (et que les solutions ne sont plus localement bornées lorsque $n \geq 5$ [MNP]).

Dans le cas qui nous occupe, nous montrons que l'on peut résoudre dans L^p les problèmes de Dirichlet, de Neumann et de régularité avec estimations de certaines fonctions maximales non-tangentielles. Nous montrons qu'il existe un principe du maximum faible pour ces équations. L'existence de solutions est une conséquence du calcul fonctionnel précisé pour T. L'unicité repose sur des techniques relativement classiques dans le cadre des équations elliptiques et met en évidence l'importance du caractère bi-dimensionnel du problème.

Remerciements. Cet article a connu plusieurs versions. Les commentaires d'A. McIntosh ont amélioré la première et de fructueuses conversations avec J. Pipher a conduit à la seconde. Un travail de R. Coifman et S. Semmes proche de la première partie du nôtre nous a alors été indiqué par A. Nahmod. Dans cette seconde version, nous avions conjecturé le résultat sur les espaces de Hardy que nous démontrons ici et nous devons à un referee anonyme une suggestion essentielle. Nous tenons à remercier ces personnes.

I. CALCUL FONCTIONNEL ET CONJECTURE DE KATO POUR *bDaD*

I.1. Enoncé des principaux résultats.

On dénote par E_δ l'ensemble constitué des fonctions mesurables à valeurs complexes, bornées et prenant leurs valeurs dans un demi-espace $\operatorname{Re} z \geq \delta$. Une fonction f est dite accrétive si $f \in E_\delta$ pour un $\delta > 0$; les bornes de f sont par définition le plus grand $\delta > 0$ tel que $f \in E_\delta$, et $\|f\|_\infty$. Pour simplifier l'exposition, on prendra le plus souvent $\delta = 1$. Si $a(x), b(x) \in E_1$, on pose $A = \|a\|_\infty$ et $B = \|b\|_\infty$.

On appelle D l'opérateur $-id/dx$ dont le domaine est $H^1(\mathbb{R}) = H^1$ et T l'opérateur $bDaD$ dont le domaine $\mathcal{D}(T)$ est l'espace des fonctions f de H^1 telles que aDf appartienne aussi à H^1. Les lettres a et b ont désigné ici les opérateurs de multiplication ponctuelle par $a(x)$ et $b(x)$ respectivement. Il n'y aura en général pas de confusion possible entre ces fonctions et les opérateurs de multiplication associés. Si besoin est, nous distinguerons $T(a)$, la fonction $T(a)(x)$ de Ta, le composé de T avec l'opérateur de multiplication par $a(x)$.

Nous faisons dans la section I.3 quelques rappels sur les propriétés générales de T. On construit sa racine carrée par la formule de Kato

$$T^{1/2}f = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}(1+u^2T)^{-1}Tf\,du\,, \quad f \in \mathcal{D}(T).$$

THÉORÈME A. — *La racine carrée de T se factorise en RD où R est un opérateur de Calderón-Zygmund borné et inversible sur L^2 ($\mathbb{R}$) et vérifiant $R(a^{-1}) = \widetilde{R}(b^{-1}) = 0$ dans BMO. L'inverse de R est donné par l'identité*

$$R^{-1} = -a^{-1}\widetilde{R}\,b^{-1}. \tag{1.1}$$

Enfin, le noyau-distribution, $R(x,y)$, de R vérifie en dehors de la diagonale les estimations

$$|R(x,y)| \le \frac{C_0A^3B^3}{|x-y|},$$
$$|\partial_x R(x,y)| \le \frac{C_0A^4B^2}{|x-y|^2},$$
$$|\partial_y R(x,y)| \le \frac{C_0A^2B^4}{|x-y|^2},$$

où C_0 est une constante numérique.

Dans cet énoncé et pour toute la suite, $\widetilde{R}$ désigne l'adjoint réel de R défini par $(Rf,g) = (\widetilde{R}g,f)$. La notation (S,g) désigne l'application de dualité bilinéaire entre distributions et fonctions de test. Nous la distinguons de la forme sesquilinéaire $\langle f,g\rangle = \int f\bar{g}$ utilisée notamment sur L^2.

Au vu des exemples donnés dans l'introduction, les estimations sur le noyau de R sont les meilleures possibles sauf dans leur dépendance en A et B. Quant à (1.1), elle généralise une conséquence immédiate des formules de Plemelj pour l'intégrale de Cauchy lorsque $a(x) = b(x)$.

On en déduit alors la conjecture de Kato dans ce cas.

COROLLAIRE B. — *Le domaine de* $T^{1/2}$ *est l'espace* H^1. *De plus, pour tout* $1 < p < \infty$, $T^{1/2}$ *s'étend en un opérateur continu et inversible de* $\dot{W}^{1,p}$ *sur* L^p.

Nous établirons un résultat plus précis quant à l'action de $T^{1/2}$ sur des espaces type Sobolev, ainsi que sur les espaces limites lorsque $p = 1$ et $p = +\infty$.

On appelle E l'ouvert de L^∞ constitué de la réunion des ensembles E_δ, $\delta > 0$.

THÉORÈME C. — *L'application* $(a, b) \mapsto (bDaD)^{1/2}$ *est analytique de* $E \times E$ *à valeurs dans* $\mathcal{L}(H^1, L^2)$.

Ce théorème nous a conduit à étendre à une classe plus générale les estimations multi-linéaires de [CMcM]. Le résultat suivant concerne le semi-groupe associé à la racine carrée, *i.e.*, le semi-groupe de Poisson de $T = bDaD$.

THÉORÈME D. — *L'opérateur* $(bDaD)^{1/2}$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $\mathcal{S} = \{S(t), t > 0\}$ *borné sur* L^2. *De plus, pour tout* $t > 0$, $S(t)$ *admet une extension continue à* L^p, $1 \le p \le +\infty$ *et* $\mathcal{S}$ *s'étend en un semi-groupe borné sur* L^p *si* $1 \le p < +\infty$, *et sur* $\mathcal{C}_b$ *si* $p = +\infty$. *Le noyau,* $\mathcal{P}_t(x, y)$, *de* $S(t)$ *appartient à* L^∞ $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *et pour un* $C \ge 0$ *ne dépendant que de* A *et* B, *on a*

$$|\mathcal{P}_t(x, y)| \le \frac{Ct}{|x - y|^2 + t^2}.$$

Enfin, on désigne par $u^*(x) = \sup_{\{(t,y); |y-x| \le t\}} |S(t)f(y)|$, *la fonction non-tangentielle maximale de* f *sous l'action du semi-groupe. Alors pour* $f \in L^p$, $1 < p \le +\infty$, $\|u^*\|_p \sim \|f\|_p$.

On a désigné par $\mathcal{C}_b$ l'espace des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme. La dernière partie est valide sous l'hypothèse plus faible que $|S(t)f(x)| < +\infty$ pour presque tout (t, x) : f est choisie en fait dans un espace de distributions approprié, $\mathcal{L}'_b$, dont on donnera une définition précise en section I.8.

Ces estimations seront en fait obtenues pour des fonctions plus générales de T. L'exemple du noyau de Poisson lorsque $a(x) = b(x) = 1$ montre que l'estimation ci-dessus est optimale.

L'application aux équations aux dérivées partielles concerne les problèmes de Dirichlet et de Neumann pour l'opérateur $\partial_t^2 - T$ sur le demi-plan supérieur dont l'existence et l'unicité des solutions sont discutées dans la deuxième partie.

Finalement, on peut obtenir une théorie des espaces de Hardy abstraite liée au calcul fonctionnel pour $bDaD$ et relier celle-ci à la théorie classique. Pour $p > 0$, désignons par $\mathcal{H}^p$ l'espace de Hardy réel dans la version de Stein et Weiss. On appelle $\mathcal{H}^p_{a,b}$ l'espace des distributions $f \in \mathcal{L}'_b$ telle que $u^* \in L^p$ où u^* est définie dans le théorème D. Comme on le verra, cet espace est bien défini si $p > 1/2$ et avec cette définition $\mathcal{H}^p_{1,1} = \mathcal{H}^p$. On a le résultat suivant.

THÉORÈME E. — *Pour* $1/2 < p \leq 1$, *on a*

$$b\mathcal{H}^p = \mathcal{H}^p_{a,b}.$$

Plus précisément, pour $f \in \mathcal{L}'_b$,

$$\|u^*\|_p \sim \|b^{-1} f\|_{\mathcal{H}^p}$$

où les constantes dans l'équivalence ne dépendent pas de f.

L'espace $b\mathcal{H}^p$ est muni de la topologie image de $\mathcal{H}^p$ par la multiplication par b, *i.e.*, le membre de droite dans l'équivalence ci-dessus définit la norme de cet espace. Ce résultat sera prouvé en trois temps, les deux premiers faisant l'objet de la section I.8 et le dernier de la section II.4.

I.2. L'estimation fondamentale.

On s'intéresse à l'opérateur $L = DaD + b^{-1}$ où $a, b \in E_1$. Pour $f \in H^1$ il vient

$$\mathrm{Re}\,\langle Lf, f\rangle \geq B^{-2}(\|f\|_2^2 + \|Df\|_2^2).$$

L^{-1} est donc bien défini et est continu de H^{-1} dans H^1 avec une norme majorée par B^2 (si $b(x)$ est à valeurs réelles, il convient de remplacer systématiquement B^2 par B dans toutes les estimations). On appelle $P(x, y)$ son noyau-distribution.

THÉORÈME I.1. — $P(x, y)$ *est borné sur* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *et il existe une constante numérique* C_0 *telle que*

$$|P(x,y)| \leq C_0 B^2 \exp\left\{-\frac{|x-y|}{2AB}\right\}. \tag{1.2}$$

Preuve. — On appelle X l'opérateur de multiplication ponctuelle par x. Puisque $\exp\{u(x-y)\}P(x,y)$ est le noyau-distribution de $\exp(uX)L^{-1}$ $\exp(-uX)$, l'inégalité (1.2) exprime que cet opérateur est continu de L^1 dans L^∞ si $u=\pm 1/2AB$. Compte tenu des inclusions de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^\infty$ et par dualité $L^1 \hookrightarrow H^{-1}$, la continuité de H^{-1} dans H^1 suffit.

On s'intéresse donc à $L_u = \exp(uX)L\exp(-uX)$ et on doit estimer $h(u) = \inf\{\|L_u f\|_{H^{-1}}, \|f\|_{H^1} = 1\}$. Par un calcul immédiat, il vient

$$\langle L_u f, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(x,u)F(x)\cdot\overline{F(x)}\,dx,$$

où

$$\mathcal{A}(x,u) = \begin{pmatrix} b^{-1}(x) - a(x)u^2 & iua(x) \\ iua(x) & a(x) \end{pmatrix},$$

où $F(x)$ est le vecteur de coordonnées $f(x)$ et $Df(x)$ et où $\xi\cdot\bar\eta$ désigne le produit scalaire hermitien canonique sur $\mathbb{C}^2$. On a donc

$$\operatorname{Re}\langle L_u f, f\rangle \geq \lambda(u)\left(\|f\|_2^2 + \|Df\|_2^2\right),$$

où $\lambda(u)$ est la borne inférieure par rapport à x de la plus petite des valeurs propres de la matrice $\mathcal{H} = \dfrac{1}{2}(\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)$. On a donc $\lambda(u) \leq h(u)$ et il suffit de contrôler $\lambda(u)$. Pour $u=0$, il vient $\lambda(0) \geq B^{-2}$, donc $\lambda(u)$ reste positive pour $|u|$ assez petit. Une étude plus fine de $\mathcal{H}$ nous permet de prendre $|u| < 1/AB$.

Pour le voir, posons $\operatorname{Re} b^{-1}(x) = \beta(x)$ et $a(x) = \alpha(x) + i\gamma(x)$. On a alors

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \beta - \alpha u^2 & -\gamma u \\ -\gamma u & \alpha \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique réelle et, par conséquent, ses valeurs propres sont réelles : elles sont strictement positives tant que $P = \det\mathcal{H}$ et $S = \operatorname{tr}\mathcal{H}$ restent strictement positifs. Une minoration de la plus petite valeur propre est alors P/S.

Les calculs montrent que toutes ces conditions sont réalisées uniformément par rapport à x lorsque $|u| < 1/AB$. En prenant $u = \pm 1/2AB$, et en minimisant P/S successivement par rapport à β, γ et α, on trouve $\lambda(u) \geq 3/(2B^2)$. Ceci démontre l'estimation (1.2).

Remarques. — 1) On ne peut dépasser la valeur $1/AB$ en général sauf si $a(x)$ et $b(x)$ sont réelles. On obtient alors $1/\sqrt{AB}$ ce qui est un peu meilleur et le mieux que l'on puisse faire. On s'en convainc en prenant $L = b^{-1} + aD^2$ avec a et b constantes positives pour lequel on déduit d'un calcul explicite que $P(x,y) = \dfrac{b}{2\sqrt{ab}} \exp\left\{ -\dfrac{|x-y|}{\sqrt{ab}} \right\}$.

2) Lorsque $a(x) = b(x)$, on peut en outre calculer explicitement le noyau associé. Par analogie avec le cas où $a(x) = 1$, on trouve que

$$P(x,y) = \frac{1}{2} \exp\{-(z(x) - z(y)) \cdot \operatorname{sgn}(x-y)\}$$

où $z(x)$ est définie comme dans l'introduction.

3) Cette méthode de démonstration s'applique aux opérateurs du type $P = L +$ termes d'ordre inférieurs à 1 à coefficients mesurables et bornés. On obtient alors des estimations sur le noyau de la résolvante $(z - P)^{-1}$ également en termes de la distance de z non pas au spectre de P mais à l'ensemble plus grand $\{z \in \mathbb{C}; z - P$ non inversible de H^1 sur $H^{-1}\}$. En particulier, on peut considérer $L = DaD + \lambda$ où $a \in E_1$ et λ appartient au secteur angulaire $|\theta| < \pi - \arctan \|a\|_\infty$. Le fait de pouvoir prendre λ avec une partie réelle négative a une implication intéressante sur le noyau de la chaleur pour DaD pour lequel on obtient des estimations gaussiennes similaires à celles dues à Aronson lorsque a est à valeurs réelles (voir [Da]). Les détails de cette remarque, ainsi qu'une étude similaire en dimensions supérieures, sont étudiés dans [AMcT].

4) Enfin, nous n'aurons pas besoin de toute la force de la décroissance exponentielle dans (1.2), une décroissance polynomiale d'un degré suffisant conviendrait aussi bien.

I.3. Rappels sur le calcul fonctionnel pour l'opérateur $bDaD$.

Nous renvoyons à [K] et [KM] pour les preuves des assertions qui suivent. Commençons par DaD. La forme sesquilinéaire

$$J(f,g) = \int_{\mathbb{R}} Df(x) a(x) \overline{Dg(x)}\, dx$$

définie sur H^1 vérifie

$$\operatorname{Re} J(f,f) \geq \|Df\|_2^2.$$

L'espace $\mathcal{D}$ des fonctions de H^1 telles que

$$|J(f,g)| \leq C\|g\|_2, \quad \forall\, g \in H^1$$

est le domaine d'un opérateur S qui vérifie

$$\mathrm{Re}\,\langle Sf, f\rangle \geq 0, \quad \forall\, f \in \mathcal{D}.$$

De plus, $\mathcal{D}$ est dense dans H^1 et si $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, $\lambda + S$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}$ sur L^2. En outre,

$$\|(\lambda + S)^{-1} f\|_2 \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda}\|f\|_2.$$

Ces propriétés font de S un opérateur maximal-accrétif. On note $S = DaD$, ce qui est justifié par le fait que $\mathcal{D} = \{f \in H^1, aDf \in H^1\}$.

L'opérateur $T = bDaD = bS$ est bien défini de $\mathcal{D}$ dans L^2. On posera $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$. Pour chaque $\omega < \pi$, désignons par S^o_ω (resp. S_ω) le demi-cône ouvert (resp. fermé) de sommet 0, d'axe $]0, +\infty[$ et d'angle ω. Pour $\omega = \|\arg a\|_\infty + \|\arg b\|_\infty$, si $\lambda \notin S_\omega$, en écrivant $\lambda - T = b(\lambda b^{-1} - S)$, on voit que $(\lambda - T)^{-1}$ est borné sur L^2 (c'est alors un isomorphisme de L^2 sur $\mathcal{D}(T)$) avec, si $\omega < \mu \leq \pi$ et $\lambda \notin S^o_\mu$,

$$\|(\lambda - T)^{-1} f\|_2 \leq \frac{c_\mu}{|\lambda|}\|f\|_2. \tag{1.3}$$

Un tel opérateur est dit de type ω, cf. [T], [McI2]. En particulier, on peut prendre λ réel négatif.

Soit $\varepsilon > 0$, on pose $T_\varepsilon = T + \varepsilon^2$. On construit $T_\varepsilon^{-1/2} \in \mathcal{L}(L^2)$, de norme $O(\varepsilon^{-1})$, par

$$T_\varepsilon^{-1/2} f = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1 + t^2 T_\varepsilon)^{-1} f\, dt. \tag{1.4}$$

On a $T_\varepsilon^{-1/2} T_\varepsilon^{-1/2} = T_\varepsilon^{-1}$, l'image de L^2 par $T_\varepsilon^{-1/2}$ est un sous-espace de L^2, noté V, qui ne dépend pas de ε et qui contient $\mathcal{D}(T)$ comme sous-espace dense (V étant muni de la topologie image par $T_1^{-1/2}$ de L^2). On définit $T_\varepsilon^{1/2}$ par le produit $T_\varepsilon T_\varepsilon^{-1/2}$. Alors le domaine de $T_\varepsilon^{1/2}$ est V et l'on a

$$T_\varepsilon^{1/2} T_\varepsilon^{-1/2} = I_{L^2}.$$

$T_\varepsilon^{1/2}$ se calcule par

$$T_\varepsilon^{1/2} f = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1 + t^2 T_\varepsilon)^{-1} T_\varepsilon f\, dt, \quad f \in \mathcal{D}(T), \tag{1.5}$$

l'intégrale convergeant normalement dans L^2 puisque pour $f \in \mathcal{D}(T)$,

$$\|(1+t^2T_\varepsilon)^{-1}T_\varepsilon f\|_2 \le C_f(1+t^2)^{-1}. \tag{1.6}$$

Noter que cette estimation est uniforme en ε, $\varepsilon \in [0,1]$. Enfin, les opérateurs $T_\varepsilon^{1/2}$ convergent si $\varepsilon \to 0$ pour la topologie forte dans $\mathcal{L}(V, L^2)$ vers un opérateur noté $T^{1/2}$ qui vérifie $T^{1/2}T^{1/2} = T$ et, pour $f \in \mathcal{D}(T)$,

$$T^{1/2}f = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1+t^2T)^{-1}Tf\,dt \tag{1.7}$$

où l'intégrale converge normalement dans L^2.

I.4. Rappels sur les opérateurs de Calderón-Zygmund.

Notre principal outil d'analyse réelle sera le Théorème $T(b)$ de G. David, J.-L. Journé et S. Semmes. Nous utiliserons en fait une variante de ce résultat et les estimations qui en découlent. Il est donc utile de mettre en place les notations après quoi nous énoncerons sans démonstration le $T(b)$, le lecteur pouvant se reporter, par exemple, à [DJS], [D] ou [M].

Un noyau-standard est une fonction continue $K(x,y)$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ privé de la diagonale $\Delta = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$ qui vérifie au sens des distributions les estimations

$$|K(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|},$$

et

$$|\partial_x K(x,y)| + |\partial_y K(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^2}.$$

La meilleure constante dans ces inégalités est notée $|K|_{cz}$ ou $|T|_{cz}$. Nous n'aurons pas besoin de considérer les estimations höldériennes plus faibles d'exposant inférieur à 1.

Un opérateur de Calderón-Zygmund est un opérateur linéaire et continu de L^2 dans lui-même dont le noyau-distribution, restreint hors de la diagonale, est un noyau standard. Un tel opérateur envoie L^p dans L^p si $1 < p < +\infty$, L^∞ dans BMO et l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1$ dans L^1.

Pour un opérateur T continu sur L^2, on appelle $|T|_w$ la meilleure constante C telle que pour tout $t > 0$, tout intervalle I de longueur t et tout couple de fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ supportées par I on ait

$$|(Tf,g)| \le Ct(\|f\|_\infty + t\,\|Df\|_\infty)(\|g\|_\infty + t\,\|Dg\|_\infty). \tag{1.8}$$

On remarque que cette constante est finie puisque $|T|_w \leq \|T\|_{L^2,L^2} = |T|_{2,2}$. Le lecteur familier de la théorie des intégrales singulières peut s'étonner de cette définition où, usuellement, on ne suppose pas que T soit borné.

Cela nous amène à expliquer notre énoncé du $T(b)$. Dans la suite de ce texte, nous disposerons d'opérateurs de Calderón-Zygmund, c'est-à-dire d'opérateurs déjà bornés sur L^2 mais dont la norme est mal contrôlée. Le $T(b)$ nous servira alors à améliorer ce contrôle et à obtenir des estimations uniformes par rapport à certains paramètres.

THÉORÈME T(b). — *Soient $b_1(x)$ et $b_2(x)$ deux fonctions bornées et accrétives. Il existe une constante $C \geq 0$ ne dépendant que des bornes de b_1 et b_2 telles que si T est un opérateur de Calderón-Zygmund, on ait*

$$|T|_{2,2} \leq C(|K|_{cz} + |b_2Tb_1|_w + \|T(b_1)\|_{BMO} + \|\widetilde{T}(b_2)\|_{BMO}). \tag{1.9}$$

Noter que b_2Tb_1 est déjà défini et borné sur L^2 avec notre hypothèse, donc $|b_2Tb_1|_w$ est finie. De plus, on sait que T et son adjoint envoient L^∞ dans BMO puisque T est borné sur L^2. Donc $\|T(b_1)\|_{BMO}$ et $\|\widetilde{T}(b_2)\|_{BMO}$ sont finies. Toute la force du $T(b)$ est qu'en retour ces quantités, avec $|K|_{cz}$, suffisent à contrôler la norme d'opérateur de T. On ne cherchera pas à suivre la dépendance en b_1 et b_2 de la constante dans (1.9).

Nous utiliserons principalement ce résultat de la façon suivante. Soit s un réel strictement positif. On appelle $\mathcal{F}_s$ la classe des familles d'opérateurs uniformément bornés sur L^2, T_t, dépendant mesurablement de $t > 0$ et dont les noyaux-distributions $T_t(x,y)$ sont lipschitz en (x,y) et vérifient pour tout $t > 0$

$$|T_t(x,y)| \leq C\, w_{s,t}(x-y), \tag{1.10.a}$$

$$|\partial_x T_t(x,y)| + |\partial_y T_t(x,y)| \leq \frac{C}{t}\, w_{s,t}(x-y), \tag{1.10.b}$$

où $w_s(x) = (1+|x|)^{-1-s}$, et $w_{s,t}(x) = \frac{1}{t} w_s\left(\frac{x}{t}\right)$. On appelle $|T_t|_s$ la meilleure constante dans les estimations (1.10). Si w_s peut être remplacé par une exponentielle $\omega_\delta(x) = \exp\{-\delta|x|\}$ pour un $\delta > 0$, alors on appelle $|T_t|_\delta$ la meilleure constante dans (1.10) où $w_{s,t}$ est remplacé par $\omega_{\delta,t}(x) = \frac{1}{t}\omega_\delta\left(\frac{x}{t}\right)$ et on dénote la classe ainsi construite $\mathcal{E}_\delta$.

Soit $m(t)$ une fonction à valeurs complexes et bornée pour $t > 0$ et $\{T_t\}$ comme ci-dessus. Pour $\varepsilon, \varepsilon' \in]0, 1]$ on forme

$$T_{\varepsilon,\varepsilon'}(m) = \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon'} T_t\, m(t)\, \frac{dt}{t}.$$

On peut déjà remarquer que cet opérateur est borné sur L^2 avec une norme majorée par $\|m\|_\infty \log \dfrac{1}{\varepsilon\varepsilon'} \sup |T_t|_{2,2}$. La proposition suivante résume les propriétés de cet opérateur et de son comportement lorsque $\varepsilon, \varepsilon'$ tendent vers 0.

Proposition I.2. — *Soit $\{T_t\} \in \mathcal{E}_\delta$ (mêmes résultats pour $\mathcal{F}_s$, s assez grand).*

a) *Les noyaux $K_{m,\varepsilon,\varepsilon'}(x, y)$ de $T_{\varepsilon,\varepsilon'}(m)$ sont uniformément standard par rapport à $\varepsilon, \varepsilon'$ et*

$$|K_{m,\varepsilon,\varepsilon'}|_{cz} \leq C_\delta \|m\|_\infty |T_t|_\delta.$$

b) *Soient b_1 et b_2 deux fonctions bornées et accrétives. On suppose que $T_t(b_1) = 0$ pour tout $t > 0$. Alors*

$$|b_2\, T_{\varepsilon,\varepsilon'}(m)\, b_1|_w \leq C_\delta \|m\|_\infty |T_t|_\delta$$

uniformément en $\varepsilon, \varepsilon'$. De plus, si $f \in b_1 \cdot C_0^1\,(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty\,(\mathbb{R})$, à support compact, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty (T_t f, g) m(t)\, \frac{dt}{t}$ converge absolument.

c) *Si, en outre, $\widetilde{T}_t(b_2) = 0$ pour tout $t > 0$ alors les opérateurs $T_{\varepsilon,\varepsilon'}(m)$, $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, forment une famille uniformément bornée d'opérateurs de Calderón-Zygmund. Si $\varepsilon, \varepsilon'$ tendent vers 0, alors les opérateurs $T_{\varepsilon,\varepsilon'}(m)$ convergent pour la topologie faible de $\mathcal{L}(L^2)$ vers un opérateur de Calderón-Zygmund $T(m)$ tel que*

$$|T(m)|_{2,2} \leq C_\delta \|m\|_\infty |T_t|_\delta$$

et qui vérifie $T(m)(b_1) = 0$ et $\widetilde{T}(m)(b_2) = 0$ dans BMO. La constante C_δ dépend uniquement de δ et des bornes de b_1 et b_2.

La partie a) de la proposition est élémentaire et classique. La partie b) est une reformulation dans ce contexte d'un résultat de Coifman et Meyer établi lorsque les fonctions b_i sont constantes. La partie c), quant à elle, se déduit du théorème $T(b)$ et le passage à la limite est routinier.

I.5. Domaine de $(bDaD)^{1/2}$ et propriétés de continuité.

On commence par démontrer le théorème A. Par commodité, on suppose que a et b sont $\mathcal{C}^\infty$, et on s'interdit d'utiliser la régularité de façon quantitative. Nous montrerons en section I.6 comment passer au cas général. Introduisons tout d'abord quelques notations. Pour $t > 0$, on pose

$$P_t \equiv P_t^{(a,b)} \equiv (b^{-1} + t^2 DaD)^{-1} \tag{1.11}$$

et

$$Q_t \equiv Q_t^{(a,b)} \equiv P_t\, tDa. \tag{1.12}$$

Nous utiliserons la notation avec (a, b) en exposant lorsqu'il y aura un risque de confusion. Avec ces notations il vient

$$(1 + t^2 bDaD)^{-1} bDaD = Q_t \frac{D}{t}, \tag{1.13}$$

d'où

$$T^{1/2} f = \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty Q_t \frac{dt}{t} \right\} (Df). \tag{1.14}$$

Notre objectif est donc de montrer directement que cette intégrale définit un opérateur de Calderón-Zygmund avec les estimations du théorème A. Commençons par les estimations sur le noyau. D'après la proposition I.2.a, il suffit de regarder les noyaux des opérateurs Q_t.

LEMME 1.3. — *Si* $\delta = (2AB)^{-1}$ *alors*

$$|P_t(x, y)| \leq C_0 B^2 \omega_{\delta,t}(x - y), \tag{1.15}$$

où C_0 *est la constante de (1.2), et* $\{Q_t\} \in \mathcal{E}_\delta$ *avec*

$$|Q_t|_\delta \leq c(A, B). \tag{1.16}$$

La démonstration de (1.15) est une simple renormalisation à partir de l'inégalité analogue (1.2) pour $t = 1$. Soit V_t l'opérateur de dilatation par t : $(V_t f)(x) = f\left(\frac{x}{t}\right)$. Posons $a_t(x) = a(tx)$ et $b_t(x) = b(tx)$. Alors par un calcul immédiat

$$V_t^{-1} P_t^{(a,b)} V_t = P_1^{(a_t,b_t)},$$

d'où l'on tire que

$$P_t^{(a,b)}(x,y) = \frac{1}{t} P_1^{(a_t,b_t)}\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t}\right).$$

On applique alors l'inégalité (1.2) en remarquant que les bornes de a_t et b_t sont les mêmes que celles de a et b respectivement.

Le même argument de renormalisation s'applique aux opérateurs Q_t ; on suppose donc $t = 1$ et l'on oublie sa notation en indice. Les inégalités (1.16) pour $Q^{(a,b)}$ se déduisent du théorème I.1 à l'aide de quelques égalités algébriques que voici. On tire de (1.11) et (1.12) et d'identités résolvantes les égalités formelles suivantes :

$$\begin{aligned} Q^{(a,b)} &= -\widetilde{Q}^{(b,a)}, \\ Q^{(a,b)}D &= I - P^{(a,b)}b^{-1}, \\ DQ^{(a,b)} &= I - a^{-1}P^{(b,a)}. \end{aligned}$$

De plus, tous ces opérateurs sont ou bien déjà définis et bornés sur L^2 ou bien prolongeables par densité à tout L^2 en des opérateurs bornés comme on le montre aisément. Ces égalités, avec la relation $Q^{(a,b)} = P^{(a,b)}Da$, donnent pour les noyaux-distributions

$$\begin{aligned} Q^{(a,b)}(x,y) &= -ia(y)\partial_y P^{(a,b)}(x,y), \\ Q^{(a,b)}(x,y) &= -Q^{(b,a)}(y,x), \\ -i\partial_y Q^{(a,b)}(x,y) &= \delta(x-y) - P^{(a,b)}(x,y)b^{-1}(y), \\ -i\partial_x Q^{(a,b)}(x,y) &= \delta(x-y) - a^{-1}(x)P^{(b,a)}(x,y). \end{aligned}$$

Ces égalités sont prises au sens des distributions. On en déduit directement les estimations exponentielles en dehors de la diagonale pour les dérivées partielles de $Q(x,y)$. Il reste à estimer $Q(x,y)$. Cela découle de la remarque suivante appliquée à $f(x) = P(t, t \pm x)$, où t est fixé et $x > 0$ est la variable.

LEMME I.4. — *Soit $a(x) \in E_1$ avec $\|a\|_\infty = A$. Soit $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ telle que pour (presque) tout x, $|f(x)| \le w(x)$ et $|(af')'(x)| \le w(x)$ où $w\colon]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ est une fonction décroissante et localement intégrable, les dérivées étant prises au sens des distributions. Alors $|a(x)f'(x)| \le 2A^2 w(x)$ pour tout $x > 0$.*

Par des arguments classiques sur les distributions, les hypothèses impliquent en fait que les dérivées de f et af' existent presque partout au sens usuel et sont localement intégrables. Fixons $x > 0$ et $h \geq 0$, on a donc

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} (af')(y) \frac{dy}{a(y)}.$$

En intégrant par parties, on obtient l'égalité

$$\int_x^{x+h} \frac{ds}{a(s)} \cdot a(x) f'(x) = f(x+h) - f(x) - \int_x^{x+h} (af')'(y) \int_y^{x+h} \frac{ds}{a(s)}\, dy.$$

En utilisant la décroissance de w avec les hypothèses sur a on obtient

$$|(af')(x)| \leq \frac{2A^2 w(x)}{h} + \frac{hA^2 w(x)}{2}.$$

Le choix $h = 2$ fournit le résultat.

Remarques. — 1) La singularité de $Q(x,y)$ sur la diagonale est un saut. En effet, une version précise du calcul de $Q(x,y)$ montre que

$$-iQ^{(a,b)}(x,y) = H(x-y) - \int_{-\infty}^{x} a^{-1}(s) P^{(b,a)}(s,y)\, ds, \tag{1.17}$$

où H est la fonction de Heaviside. On ne peut espérer mieux car si $a(x) = b(x) = 1$ on a $Q^{(1,1)}(x,y) = \frac{i}{2}\operatorname{sgn}(x-y)\exp(-|x-y|)$. On a néanmoins $Q^{(a,b)}(x,y) \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ dans tous les cas. Noter que (1.17) est valide pour $x \to +\infty$ car l'intégrale du membre de droite dans (1.17) converge vers 1 pour tout y fixé.

2) Le lemme I.4 fournit une estimation en $C_0 A^2 B^2 \omega_\delta(x-y)$ où $\delta = 2AB$ pour $Q^{(a,b)}(x,y)$, ce qui donne $\dfrac{C_0 A^3 B^3}{|x-y|}$ pour le noyau de $\displaystyle\int_0^{+\infty} Q_t^{(a,b)} \frac{dt}{t}$, c'est-à-dire l'estimation du théorème A pour $R(x,y)$. La dépendance en A et B pour les dérivées de $R(x,y)$ s'obtient en suivant les constantes dans la preuve du lemme I.3.

3) La méthode utilisée dans [CS], section 3, s'apparente à celle ci-dessus mais ne donne pas la décroissance exponentielle.

PROPOSITION I.5. — *La suite d'opérateurs* $R_{\varepsilon,\varepsilon'} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_\varepsilon^{1/\varepsilon'} Q_t \frac{dt}{t}$ *est une suite uniformément bornée d'opérateurs de Calderón-Zygmund. Elle* *converge fortement vers l'opérateur R du théorème A lorsque ε et ε' tendent vers 0.*

Preuve. — Le lemme I.3 permet d'appliquer la proposition I.2. De plus,

$$Q_t(a^{-1}) = \widetilde{Q}_t(b^{-1}) = 0$$

pour tout $t > 0$. En effet,

$$Q_t(a^{-1})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_t(x,y)a^{-1}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} -i\partial_y P_t(x,y)\,dy = 0,$$

les intégrales étant prises au sens de Lebesgue grâce au lemme I.3. Ceci démontre $Q_t(a^{-1}) = 0$ p.p.. On obtient l'autre égalité en remarquant que $Q_t^{(a,b)} = -\widetilde{Q}_t^{(b,a)}$ pour tout $t > 0$.

On déduit de la proposition I.2.c que la suite $R_{\varepsilon,\varepsilon'}$ est une suite bornée d'opérateurs de Calderón-Zygmund et converge faiblement dans $\mathcal{L}(L^2)$. Il reste à établir la convergence forte et à identifier la limite. Il suffit de le faire sur un espace dense dans L^2.

Soit $\mathcal{E}$ le sous-espace de L^2 constitué des fonctions Dg où g décrit $\mathcal{D}(T)$, $T = bDaD$. Comme $\mathcal{D}(T)$ est dense dans H^1 et que $D(H^1)$ est dense dans L^2, l'espace $\mathcal{E}$ est dense dans L^2. Si, donc, $f = Dg \in \mathcal{E}$, on a $\frac{1}{t}Q_t f = (1+t^2T)^{-1}Tg$ d'après (1.13). Puisque $\|(1+t^2T)^{-1}Tg\|_2 \leq C(1+t^2)^{-1}$ par (1.6), l'intégrale $\int_0^\infty Q_t f \,\frac{dt}{t}$ converge normalement dans L^2 et sa limite est $T^{1/2}g$ d'après (1.7). Ceci prouve la convergence forte sur $\mathcal{E}$. On a également obtenu que $Rf = RDg = T^{1/2}g$ dès que $g \in \mathcal{D}(T)$. Ceci démontre la proposition I.5.

Pour achever la preuve du théorème A, il reste à établir l'inversibilité de R. On la prouve directement en établissant la formule (1.1) reliant R^{-1} à l'adjoint de R. Commençons par démontrer (1.1) de façon formelle.

Puisque $T^{1/2} = RD$, R^{-1} est nécessairement donné par $DT^{-1/2}$. Or

$$\begin{aligned} DT^{-1/2} &= \frac{2}{\pi} D \int_0^\infty P_t^{(a,b)} b^{-1}\,dt \\ &= a^{-1}\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty aDP_t^{(a,b)}\,dt\; b^{-1} = a^{-1}(-\widetilde{R})b^{-1} \end{aligned}$$

(remarquer que $P_t^{(a,b)} = \widetilde{P}_t^{(a,b)}$).

Bien sûr, la première intégrale ne converge pas de façon évidente. On va remplacer T par $T_\varepsilon = T+\varepsilon^2$ puis passer à la limite. Si $f \in \mathcal{D}(T)$, d'après (1.5) on a

$$\begin{aligned} T_\varepsilon^{1/2} f &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1+t^2T_\varepsilon)^{-1} T_\varepsilon f\, dt \\ &= \varepsilon^2 T_\varepsilon^{-1/2} f + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1+t^2T_\varepsilon)^{-1} T f\, dt \\ &= \varepsilon^2 T_\varepsilon^{-1/2} f + R_\varepsilon^{(a,b)} D f \end{aligned} \tag{1.18}$$

où, après changement de variable, il vient

$$R_\varepsilon^{(a,b)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/\varepsilon} Q_t\, m(\varepsilon t) \frac{dt}{t},$$

avec $m(t) = (1-t^2)^{-1/2}$. D'autre part, le même calcul à partir de la définition (1.4) de $T_\varepsilon^{-1/2}$ conduit à

$$D T_\varepsilon^{-1/2} f = \{-a^{-1}\widetilde{R}_\varepsilon^{(a,b)} b^{-1}\} f, \quad f \in L^2. \tag{1.19}$$

Observons déjà que la factorisation $T^{1/2} = RD$ implique que $H^1 \subset \mathcal{D}(T^{1/2})$. On le retrouve d'ailleurs avec (1.18) à la condition de montrer que $R_\varepsilon^{(a,b)}$ est borné sur L^2, ce qui sera fait à l'aide du lemme suivant que nous admettons pour l'instant.

Lemme I.6. — *Les opérateurs $R_\varepsilon^{(a,b)}$ sont uniformément bornés sur L^2 et convergent fortement, ainsi que leurs adjoints, vers R et son adjoint respectivement lorsque ε tend vers 0.*

En outre, ce lemme et la relation (1.19) impliquent que $\operatorname{Im}(T_\varepsilon^{-1/2}) \subset H^1$, donc $\mathcal{D}(T^{1/2}) = \mathcal{D}(T_\varepsilon^{1/2}) = \operatorname{Im}(T_\varepsilon^{-1/2}) \subset H^1$.

On a donc démontré que $\mathcal{D}(T^{1/2}) = H^1$, ce qui fait l'objet du corollaire B pour $p = 2$ (ceci est précisément le théorème de Kenig et Meyer).

On reprend alors l'identité (1.18) dont on prolonge le domaine de validité à $H^1 = \mathcal{D}(T^{1/2})$. Comme cet espace coïncide avec $\operatorname{Im}(T_\varepsilon^{-1/2})$, il vient pour $f \in L^2$,

$$f = T_\varepsilon^{1/2} T_\varepsilon^{-1/2} f = \varepsilon^2 T_\varepsilon^{-1/2} T_\varepsilon^{-1/2} f + R_\varepsilon^{(a,b)} D T_\varepsilon^{-1/2} f.$$

En injectant (1.19), on obtient

$$f = (1+\varepsilon^{-2} T)^{-1} f + R_\varepsilon^{(a,b)}\{-a^{-1}\widetilde{R}_\varepsilon^{(a,b)} b^{-1}\} f.$$

Comme $(1+\varepsilon^{-2}T)^{-1}$ converge fortement vers 0 avec ε, $R_\varepsilon^{(a,b)}\{-a^{-1}\widetilde{R}_\varepsilon^{(a,b)} b^{-1}\}$ converge fortement vers l'identité. Or le lemme I.6 implique que $R_\varepsilon^{(a,b)}\{-a^{-1}\widetilde{R}_\varepsilon^{(a,b)}b^{-1}\}$ converge vers $R\{-a^{-1}\widetilde{R}\,b^{-1}\}$. On a donc

$$R\{-a^{-1}\widetilde{R}\,b^{-1}\} = I.$$

Si l'on écrit $R = R^{(a,b)}$, en échangeant les rôles de a et b on a aussi

$$R^{(b,a)}\{-b^{-1}\widetilde{R}^{(b,a)}a^{-1}\} = I.$$

Mais la relation $Q_t^{(b,a)} = -\widetilde{Q}_t^{(a,b)}$ pour tout t implique $R^{(b,a)} = -\widetilde{R}^{(a,b)}$ de telle sorte qu'en conjuguant l'égalité ci-dessus par a on obtient

$$\{-a^{-1}\widetilde{R}\,b^{-1}\}R = I.$$

L'inversibilité de R est donc établie.

Passons à la démonstration du lemme I.6. Puisque l'adjoint de $R_\varepsilon^{(a,b)}$ est au signe près $R_\varepsilon^{(b,a)}$, il suffit par symétrie de se limiter à l'étude de $R_\varepsilon^{(a,b)}$. On écrit

$$R_\varepsilon^{(a,b)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/2\varepsilon} Q_t\, m(\varepsilon t)\frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi}\int_{1/2\varepsilon}^{1/\varepsilon} Q_t\, m(\varepsilon t)\frac{dt}{t}.$$

En utilisant la proposition 1.2.c pour la première intégrale et une majoration brutale pour la seconde, il vient

$$|R_\varepsilon^{(a,b)}|_{2,2} \le C|Q_t|_\delta \sup_{t\le 1/2\varepsilon} m(\varepsilon t) + C\sup_{t>0}|Q_t|_{2,2}\int_{1/2\varepsilon}^{1/\varepsilon} m(\varepsilon t)\frac{dt}{t}$$

ce qui donne une majoration indépendante de ε.

Il reste à montrer la convergence forte des $R_\varepsilon^{(a,b)}$ vers R sur un sous-espace dense dans L^2. Il suffit pour cela de comparer $R_\varepsilon^{(a,b)}$ à $R_{\varepsilon,\varepsilon}$ sur l'espace $\mathcal{E}$. Soit $f = Dg \in \mathcal{E}$, en utilisant à nouveau l'estimation $\left\|\frac{1}{t}Q_t f\right\|_2 \le C(1+t^2)^{-1}$, il vient

$$\begin{aligned}\|R_\varepsilon^{(a,b)} f - R_{\varepsilon,\varepsilon} f\|_2 &\le C\textstyle\int_0^\varepsilon (1+t^2)^{-1} m(\varepsilon t)\,dt \\ &\qquad\qquad + C\textstyle\int_\varepsilon^{1/\varepsilon}(1+t^2)^{-1}|m(\varepsilon t)-1|\,dt \\ &\le c\varepsilon.\end{aligned}$$

Le théorème A est maintenant complètement démontré modulo l'hypothèse qualitative de régularité sur les fonctions $a(x)$ et $b(x)$. Une lecture attentive de l'argument montre qu'elle n'a pas été utilisée. Pour être complet néanmoins nous démontrerons dans la section suivante un résultat d'approximation permettant de passer à la limite.

Remarque. — Le cas $a(x) = b(x)$: on a calculé précédemment $P^{(a,a)}(x,y)$ et la même technique de renormalisation que celle utilisée pour le lemme I.3 fournit

$$P_t^{(a,a)}(x,y) = \frac{1}{2t} \exp\left\{-(z(x) - z(y))\frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{t}\right\}.$$

On en déduit

$$Q_t^{(a,a)}(x,y) = -i \operatorname{sgn}(y-x) P_t^{(a,a)}(x,y) ,$$

et une simple intégration donne

$$R^{(a,a)}(x,y) = \frac{1}{\pi i\{z(y) - z(x)\}}.$$

C'est l'exemple de Kenig et Meyer présenté dans l'introduction que l'on retrouve ainsi très facilement.

Nous décrivons maintenant quelques propriétés de continuité supplémentaires pour les opérateurs $R^{(a,b)} = (bDaD)^{1/2}D^{-1}$. Rappelons que $\mathcal{H}^1$ et BMO désignent l'espace de Stein et Weiss dans sa version atomique et son dual. L'espace $W^{1,p}$ est l'espace de Sobolev muni de la norme $\|f\|_p + \|Df\|_p$ et $W^{1,2} = H^1$.

PROPOSITION I.7. — *L'opérateur $R^{(a,b)}a^{-1}$ s'étend en un isomorphisme des espaces suivants :*

$$\begin{gathered}
L^p \to L^p, \quad 1 < p < +\infty, \\
a\mathcal{H}^1 \to b\mathcal{H}^1, \\
BMO \to BMO, \\
W^{1,p} \to W^{1,p}, \quad 1 < p < +\infty, \\
\{f \in a\mathcal{H}^1; Df \in \mathcal{H}^1\} \to \{f \in b\mathcal{H}^1; Df \in \mathcal{H}^1\}, \\
\{f \in BMO; bDf \in BMO\} \to \{f \in BMO; aDf \in BMO\}.
\end{gathered}$$

Avant de démontrer ce résultat, il est bon d'observer que ces propriétés de continuité sont faciles à voir dans le cas où $a = b$ par les propriétes algébriques de l'opérateur de Cauchy.

La continuité sur L^p est une conséquence du fait que $R^{(a,b)}$ est un opérateur de Calderón-Zygmund borné sur L^2 (ceci implique clairement la seconde assertion dans le corollaire B).

La continuité sur les espaces limites est plus délicate. L'espace $a\mathcal{H}^1$ est défini comme l'image par la multiplication par $a(x)$ de l'espace $\mathcal{H}^1$, muni de la topologie image. Cet espace est décrit dans [AT1] (voir aussi [M]) où il est montré qu'il possède une base inconditionelle d'ondelettes régulières θ_λ, λ décrivant les intervalles dyadiques, adaptées à la mesure $dx/a(x)$, *i.e.* $\int \theta_\lambda(x)\,dx/a(x) = 0$ pour tout λ. Cette propriété de cancellation, la régularité et la localisation de ces ondelettes permet d'estimer $f_\lambda = R^{(a,b)}a^{-1}(\theta_\lambda)$ puisque $R^{(a,b)}(a^{-1}) = 0$. De plus, cette fonction est d'intégrale nulle contre $dx/b(x)$ car $\widetilde{R}^{(a,b)}(b^{-1}) = 0$. Cela implique que la famille $(b^{-1}f_\lambda)$ est une famille de molécules dans l'espace $\mathcal{H}^1$. Donc $R^{(a,b)}a^{-1}$ envoie continûment $a\mathcal{H}^1$ dans $b\mathcal{H}^1$. Les calculs sont standard et laissés au lecteur.

La continuité sur BMO s'obtient par dualité en reprenant la formule $\widetilde{R}^{(a,b)} = -R^{(b,a)}$ et en utilisant le résultat précédent pour $R^{(b,a)}$.

L'inversibilité dans les trois cas décrits ci-dessus découle de l'identité (1.1) sous la forme

$$(R^{(a,b)}a^{-1})^{-1} = R^{(b,a)}b^{-1},$$

identité que l'on prolonge aux espaces considérés grâce à ce qui précède.

Les trois dernières propriétés de continuité proviennent de l'égalité formelle

$$R^{(b,a)}D = aDR^{(a,b)}a^{-1}. \tag{1.20}$$

On justifie facilement cette égalité sur H^1 en revenant aux formules intégrales pour $R^{(a,b)}$ et $R^{(b,a)}$. Ensuite, on prolonge cette identité à $W^{1,p}$ et aux espaces limites en utilisant les propriétés de continuité précédemment établies. Cela ne pose pas de difficulté majeure et nous omettons les détails. Les inversibilités sont également faciles à démontrer.

Un mot cependant sur l'espace $\mathcal{F}_a \equiv \{f \in a\mathcal{H}^1; Df \in \mathcal{H}^1\}$, muni de la norme du graphe $\|f\|_a \equiv \|f\|_{a\mathcal{H}^1} + \|Df\|_{\mathcal{H}^1}$. Si $a = 1$, il s'agit de l'espace de Triebel-Lizorkin $F_1^{1,2}$ (voir, par exemple, [FJW]). Lorsque $a \neq 1$, il peut paraître bizarre de dériver les fonctions de $a\mathcal{H}^1$. Mais les ondelettes adaptées de la base ci-dessus peuvent être choisies aussi régulières que l'on veut, par exemple dans la classe de Schwartz. De plus, la dérivée d'une telle ondelette est, à une renormalisation près, une ondelette ordinaire qui oscille contre la mesure dx, c'est-à-dire une molécule de $\mathcal{H}^1$. Les combinaisons linéaires finies des ondelettes adaptées constituent donc une famille dense de fonctions régulières dans $a\mathcal{H}^1$ ($\mathcal{F}_a$ est donc dense dans $a\mathcal{H}^1$). L'espace $\mathcal{F}_a$ est finalement constitué des fonctions intégrables qui s'écrivent $f = \sum \alpha_\lambda \theta_\lambda$ avec $\left(\sum |\alpha_\lambda|^2 w(\lambda) \frac{\chi_\lambda(x)}{|\lambda|}\right)^{1/2} \in L^1$, où $w(\lambda) = 1 + |\lambda|^{-2}$, $|\lambda|$ étant la mesure de Lebesgue de l'intervalle λ et χ_λ sa fonction indicatrice. La norme L^1 de cette expression constitue une norme équivalente à $\|f\|_a$.

Par dualité, on obtient une description analogue des espaces de type BMO. Ceci achève la preuve de la proposition I.7. Le résultat suivant permet de calculer avec la racine de T sur les L^p.

PROPOSITION I.8. — *Pour $1 < p < +\infty$, on pose*

$$\mathcal{D}_p(T) = \{f \in W^{1,p}; aDf \in W^{1,p}\}.$$

Alors, au sens des opérateurs non-bornés sur L^p, il vient

$$T^{1/2}T^{1/2} = T.$$

Preuve. — Commençons par remarquer qu'en posant $\mathcal{D}_p(T^{1/2}) = \{f \in L^p; T^{1/2}f \in L^p\}$ alors $W^{1,p} = \mathcal{D}_p(T^{1/2})$ d'après le corollaire B. On utilise ensuite les résultats de la proposition I.7. Si $f \in \mathcal{D}_p(T)$, alors $T^{1/2}f = R^{(a,b)}a^{-1}(aDf) \in W^{1,p}$ car $R^{(a,b)}a^{-1}$ est borné sur $W^{1,p}$. Donc f et $T^{1/2}f \in \mathcal{D}_p(T^{1/2})$. De plus,

$$T^{1/2}T^{1/2}f = R^{(a,b)}DR^{(a,b)}Df = bDR^{(b,a)}b^{-1}R^{(a,b)}Df = bDaDf = Tf.$$

La deuxième égalité est (1.20) où les rôles de a et b sont inversés. Donc $T \subset T^{1/2}T^{1/2}$ au sens des opérateurs non bornés sur L^p. L'inclusion réciproque se montre en remontant les calculs et en utilisant l'inversibilité de $R^{(a,b)}a^{-1}$ sur $W^{1,p}$. Ceci prouve la proposition.

I.6. Résultats de perturbation.

Commençons par le résultat de perturbation analytique, c'est-à-dire le théorème C. On rappelle que E désigne l'ouvert de L^∞ constitué des fonctions à valeurs dans le demi-plan $\operatorname{Re} z \geq \delta$ pour un certain $\delta > 0$.

THÉORÈME C. — *L'application $(a, b) \mapsto (bDaD)^{1/2}$ est analytique de $E \times E$ à valeurs dans $\mathcal{L}(H^1, L^2)$.*

Preuve. — Un premier argument consiste à laisser $a(x), b(x) \in E_\delta$ dépendre de paramètres complexes z et w respectivement : $a_z(x) = a(x) + z\varepsilon_2(x)$ et $b_w(x) = b(x) + w\varepsilon_1(x)$ où $\|\varepsilon_i\|_\infty < \delta$. On utilise alors des intégrales doubles sur $|z| = |w| = 1$ par la formule de Cauchy pour définir les "dérivées" de $(b_w D a_z D)^{1/2}$ dans sa dépendance en z et w, dérivées que l'on contrôle grâce au théorème A.

Nous présentons un deuxième argument faisant apparaître des opérateurs multilinéaires liés au théorème $T(b)$. Un inconvénient cependant est que le contrôle des constantes sera bien moins bon que dans le premier argument.

Soient $a, a', b, b' \in E_1$, on pose $R = R^{(a,b)}$ et $R' = R^{(a',b')}$, $\alpha = a^{-1} - a'^{-1}$ et $\beta = b^{-1} - b'^{-1}$. On va développer R' en une série double dépendant multi-linéairement de α et β dont le premier terme est R et qui converge en norme d'opérateur pourvu que $\|\alpha\|_\infty < \varepsilon$ et $\|\beta\|_\infty < \varepsilon$, ε ne dépendant que des bornes de a et b. Cela implique clairement le théorème.

Reprenons les notations $P_t^{(a,b)}$, $Q_t^{(a,b)}$. La plupart du temps nous omettons l'indice t pour simplifier l'exposition. Rappelons également certaines identités algébriques reliant ces opérateurs :

$$\begin{aligned} P^{(a,b)} &= (b^{-1} + DaD)^{-1}, \\ Q^{(a,b)} &= P^{(a,b)} Da = bDP^{(b,a)}, \\ DP^{(b,a)}D &= b^{-1} - b^{-1}P^{(a,b)}b^{-1}. \end{aligned}$$

En utilisant ces relations et des identités résolvantes classiques, on obtient

$$P^{(b',a')} - P^{(b,a)} = P^{(b,a)}\alpha P^{(b',a')} - Q^{(b,a)}\beta Q^{(a',b')}, \tag{1.21}$$

$$Q^{(a',b')} - Q^{(a,b)} = P^{(a,b)}\beta Q^{(a',b')} + Q^{(a,b)}\alpha P^{(b',a')}. \tag{1.22}$$

En itérant ces deux formules dans (1.22), puis en intégrant en t on obtient le développement cherché et dont il faut établir la convergence. Décrivons le terme général W_n.

Soient (a_i, b_i), $n+1$ couples de fonctions dans E_1 et α_i, n fonctions bornées à valeurs réelles ou complexes. On supposera pour simplifier que les fonctions a_i et b_i sont uniformément bornées par $M > 1$ (par hypothèse, leur partie réelle est minorée par 1). On appelle $S_t^{(i)}$ soit l'opérateur $P_t^{(a_i,b_i)}$, soit $Q_t^{(a_i,b_i)}$. Alors il vient

$$W_n = \int_0^\infty S_t^{(0)}\alpha_1 S_t^{(1)} \dots \alpha_n S_t^{(n)} \frac{dt}{t} \tag{1.23}$$

avec la condition que l'un au moins des $S_t^{(i)}$ est un $Q_t^{(a_i,b_i)}$. Le théorème C découle alors du théorème suivant.

THÉORÈME I.9. — *W_n est un opérateur de Calderón-Zygmund et il existe $C \geq 0$ ne dépendant que de M tel que*

$$|W_n|_{2,2} + |W_n|_{cz} \leq C^{n+1} \|\alpha_1\|_\infty \cdots \|\alpha_n\|_\infty. \tag{1.24}$$

De plus, l'intégrale (1.23) définissant W_n converge fortement dans $\mathcal{L}(L^2)$.

Preuve. — On effectue une récurrence sur n. Pour $n = 0$, W_0 n'est autre que $R^{(a,b)}$ et l'estimation découle du théorème A.

On suppose que (1.24) est vraie pour tous les W_{n-1} du type précédent. Observer que ceci implique que W_{n-1} et son adjoint envoient L^∞ dans BMO avec une norme contrôlée par le membre de droite de (1.24) au rang $n-1$.

Tout d'abord, il convient de raisonner sur les opérateurs $W_{n,\varepsilon,\varepsilon'}$ définis à l'aide des intégrales tronquées en 0 et en $+\infty$ puis de passer à la limite forte sur un sous-espace dense de L^2 lié au domaine de Da_nD. Nous omettons cette étape et, par abus, raisonnons directement sur les opérateurs W_n.

La première remarque est que l'estimation

$$|W_n|_{cz} \leq C^{n+1} \|\alpha_1\|_\infty \cdots \|\alpha_n\|_\infty$$

s'obtient directement à l'aide du lemme I.3 sans utiliser l'hypothèse de récurrence (voir proposition I.2.a).

Les W_n faciles à traiter sont ceux pour lesquels le mot $M_{n+1} = S_t^{(0)} \dots \alpha_n S_t^{(n)}$ commence et finit par un Q_t. Grâce aux propriétés de cancellation de ces derniers, on applique la proposition I.2.c sans utiliser l'hypothèse de récurrence.

Viennent ensuite les W_n pour lesquels le mot M_{n+1} commence par un Q_t et finit par un P_t (ou l'inverse). Quitte à passer à l'adjoint on peut encore appliquer la proposition I.2.b, ce qui implique que $|b_0^{-1} W_n b_n^{-1}|_w \leq C^n \|\alpha_1\|_\infty \cdots \|\alpha_n\|_\infty$ et que $\widetilde{W_n}(b_0^{-1}) = 0$ (dans BMO puisque l'on travaille avec l'opérateur tronqué qui est déjà borné sur L^2). Ensuite, on remarque que $P_t^{(a_n,b_n)}(b_n^{-1}) = 1$ pour tout $t > 0$, ce qui donne immédiatement $W_n(b_n^{-1}) = W_{n-1}(\alpha_n) \in BMO$ d'après l'hypothèse de récurrence. On applique alors le théorème $T(b)$ en collectant les différentes estimations.

Arrivent enfin les termes pour lesquels le mot M_{n+1} commence et finit par un P_t. On ne peut donc plus utiliser les parties b) et c) de la proposition I.2. Commençons par observer, comme précédemment, que $W_n(b_n^{-1}) = W_{n-1}(\alpha_n)$ et $\widetilde{W}_n(b_0^{-1}) = W_{n-1}(\alpha_0)$ où les W_{n-1} ne sont pas les mêmes dans les deux cas mais appartiennent à la classe étudiée au rang $n-1$. Il nous manque donc le contrôle de $|b_0^{-1}W_nb_n^{-1}|_w$ pour conclure avec le théorème $T(b)$.

On prend $f \in C_0^1([0,1])$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ à support dans [0,1] et on démontre

$$|(b_0^{-1}W_nb_n^{-1}f, g)| \leq C(\|f\|_\infty + \|Df\|_\infty)\|g\|_\infty$$

ce qui implique (1.8) pour $I = [0,1]$. Le cas général où [0,1] est remplacé par un intervalle I arbitraire s'y ramène par homogénéité.

On calcule tout d'abord $(M_{n+1}b_n^{-1}(f), b_0^{-1}g)$. On part de $M_{n+1} = M_n\alpha_nP_t^{(a_n,b_n)}$ et en utilisant à nouveau $P_t^{(a_n,b_n)}(b_n^{-1}) = 1$ on obtient

$$\begin{aligned}&(M_{n+1}b_n^{-1}(f), b_0^{-1}g)\\ &\quad= (M_n\alpha_n\{P_t^{(a_n,b_n)}b_n^{-1}(f) - P_t^{(a_n,b_n)}(b_n^{-1})\cdot f\}, b_0^{-1}g) + (M_n\alpha_n(f), b_0^{-1}g).\end{aligned}$$

Le deuxième terme dans le membre de droite, une fois intégré contre dt/t, s'écrit $(W_{n-1}\alpha_nf, b_0^{-1}g)$, ce qui se majore par $|W_{n-1}|_{2,2}\|\alpha_n\|_\infty\|f\|_\infty\|g\|_\infty$ par l'hypothèse de récurrence et puisque f et g sont à supports dans [0,1].

Pour traiter le premier terme on distingue deux cas. Si $t \leq 1$, on utilise la relation $P_t^{(a_n,b_n)}b_n^{-1}(f) - f = -Q_t^{(a_n,b_n)}(tDf)$. Or $|M_n\alpha_nQ_t^{(a_n,b_n)}|_{2,2} \leq C^{n+1}\|\alpha_1\|_\infty \cdots \|\alpha_n\|_\infty$ uniformément en t d'où

$$\int_0^1 |(M_n\alpha_nQ_t^{(a_n,b_n)}(tDf), b_0^{-1}g)|\frac{dt}{t} \leq C^{n+1}\|\alpha_1\|_\infty \cdots \|\alpha_n\|_\infty\|Df\|_\infty\|g\|_\infty$$

puisque Df et g sont supportées par [0,1].

Si $t \geq 1$, on écrit explicitement le produit scalaire en utilisant la localisation de f et g, la différence entre $P_t^{(a_n,b_n)}b_n^{-1}(f)$ et f ne jouant plus aucun rôle. On a par exemple

$$(M_n\alpha_nP_t^{(a_n,b_n)}b_n^{-1}(f), b_0^{-1}g) = \int_0^1\int_0^1 K(x,y)f(y)g(x)\,dxdy$$

où $K(x,y)$ est le noyau-distribution de $M_n\alpha_nP_t^{(a_n,b_n)}b_n^{-1}$. Ce noyau s'estime par

$$C^{n+1}\|\alpha_1\|_\infty \cdots \|\alpha_n\|_\infty\|b_n^{-1}\|_\infty(\omega_{\delta,t} * \cdots * \omega_{\delta,t})(x-y)$$

où $n+1$ termes figurent dans la convolution. On a

$$(\omega_{\delta,t} * \cdots * \omega_{\delta,t})(x-y) \leq C(\delta,\delta')^{n+1}\omega_{\delta',t}(x-y)$$

lorsque $0 < \delta' < \delta$. Ceci implique que

$$|K(x,y)| \leq \frac{C'^{n+1}}{t}\|\alpha_1\|_\infty \dots \|\alpha_n\|_\infty \|b_n^{-1}\|_\infty, \quad x,y \in [0,1].$$

D'où

$$\int_1^\infty |(M_n\alpha_n P_t^{(a_n,b_n)} b_n^{-1} f, b_0^{-1} g)| \frac{dt}{t} \leq C'^{n+1}\|\alpha_1\|_\infty \dots \|\alpha_n\|_\infty \|b_n^{-1}\|_\infty \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

On fait de même pour le deuxième terme. La constante C a changé de ligne en ligne mais un examen attentif de l'argument montre que l'on peut choisir C indépendante de n dans (1.24). Ceci achève la preuve du théorème I.9.

Remarques. — 1) Usuellement les estimations sur les opérateurs multi-linéaires sont obtenues en s'appuyant sur des estimations quadratiques à la Littlewood-Paley (voir [CMcM], [CJ], [FJK] et [CDM] par exemple) du style

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty |S_t^{(0)}\alpha_1 S_t^{(1)} \dots \alpha_n S_t^{(n)} f|^2 \, dx \frac{dt}{t} \leq C_n \|f\|_2^2$$

où $S_t^{(0)}$ est un Q_t, les autres étant des P_t. Ici, au contraire, nous obtenons cette inégalité en corollaire car elle découle de la continuité sur L^2 de l'opérateur qui provient du mot

$$S_t^{(n)\star}\alpha_n^\star \dots S_t^{(1)\star}\alpha_0^\star S_t^{(0)\star} S_t^{(0)}\alpha_1 S_t^{(1)} \dots \alpha_n S_t^{(n)}.$$

Cependant, on peut aussi suivre S. Semmes [S] et utiliser une inégalité quadratique pour les opérateurs Q_t annulant une fonction accrétive (ou plus généralement para-accrétive) et procéder à nouveau par récurrence.

2) La croissance polynomiale obtenue dans [CMcM] (voir également [CJ]) pour les opérateurs multi-linéaires est liée à la propriété que $P^{(1,1)}$ est une contraction sur L^∞, ce qui n'est pas le cas pour $P^{(a,b)}$ en général et nous ne savons pas si la croissance exponentielle dans (1.24), suffisante pour notre propos, peut être améliorée.

3) Nous avons démontré, en fait, un résultat plus fort puisque l'application $(a,b) \to R^{(a,b)}$ est analytique en norme d'opérateur de Calderón-Zygmund, ce qui implique une dépendance analytique en norme $\mathcal{L}(L^p)$, $1 < p < +\infty$.

4) Le théorème 3 de [CS] montre que si ε est assez petit l'opérateur $L(\alpha) = (e^{\alpha} D e^{-\alpha} D)^{1/2} D^{-1}$ est borné sur L^2 et analytique réel comme fonction de $\alpha \in BMO_r$ (l'indice r signifie à valeurs réelles et l'indice c à valeurs complexes) avec $\|\alpha\|_{BMO} < \varepsilon$ (la dépendance étant en fait analytique en norme d'opérateur de Calderón-Zygmund). Il est également souligné que ce résultat s'étend au cas de l'opérateur $L(a,b,\alpha) = (e^{\alpha} b D e^{-\alpha} a D)^{1/2} D^{-1}$ pour $(a,b,\alpha) \in L_r^\infty \times L_r^\infty \times BMO_r$ avec $N(a,b,\alpha) = \sup(\|1-a\|_\infty, \|1-b\|_\infty, \|\alpha\|_{BMO}) < \varepsilon$ petit, ce qui permet de prolonger analytiquement sur $L_c^\infty \times L_c^\infty \times BMO_c$ sous la condition $N(a,b,\alpha) < \varepsilon$. On peut remarquer que $L(a,b,0) = R^{(a,b)}$; il est donc probable qu'en conjuguant les théorèmes A et C avec le résultat sus-dit de [CS] on puisse lever la restriction sur a et b et montrer que $L(a,b,\alpha)$ est analytique sur $E \times E \times BMO_c$ pourvu que $\|\alpha\|_{BMO} < \varepsilon(a,b)$, $\varepsilon(a,b)$ ne dépendant que des bornes de a et b.

Enfin, le résultat qui permet d'enlever l'hypothèse de régularité portant sur $a(x)$ et $b(x)$ à la section précédente s'énonce comme suit.

PROPOSITION I.10. — *Soient $a_m(x)$ et $b_m(x)$ deux suites de fonctions uniformément bornées dans E_1 qui convergent presque partout vers $a(x)$ et $b(x)$ respectivement quand m tend vers $+\infty$. Alors $(b_m D a_m D)^{1/2}$ converge fortement vers $(bDaD)^{1/2}$ dans $\mathcal{L}(H^1, L^2)$.*

Preuve. — On appelle R_m et R les opérateurs $(b_m D a_m D)^{1/2} D^{-1}$ et $(bDaD)^{1/2} D^{-1}$. Il suffit d'établir que R_m converge fortement vers R dans $\mathcal{L}(L^2)$. On reprend l'égalité (1.22) qui s'écrit ici

$$Q^{(a_m,b_m)} - Q^{(a,b)} = P^{(a,b)}(b^{-1} - (b_m)^{-1}) Q^{(a_m,b_m)} + Q^{(a,b)}(a^{-1} - (a_m)^{-1}) P^{(b_m,a_m)}.$$

On peut donc écrire $R_m - R$ comme la somme de deux opérateurs U_m et V_m auxquels s'appliquent les estimations du théorème précédent : ce sont deux opérateurs de Calderón-Zygmund uniformément bornés par rapport à m. Il suffit donc de montrer leur convergence forte vers 0 sur un sous-espace dense, par exemple $\mathcal{C}_0^\infty$. De plus, on peut supposer que U_m et V_m sont remplacés par leurs versions tronquées. On conclut alors en utilisant à bon escient le théorème de convergence dominée de Lebesgue (utiliser les estimations uniformes en m pour les noyaux de $Q^{(a_m,b_m)}$ et $P^{(b_m,a_m)}$). Les détails ne sont pas difficiles et sont laissés au lecteur.

I.7. Le calcul fonctionnel et le semi-groupe de Poisson.

Nous reprenons les notations de la section I.3. Posons $S(t) = \exp(-tT^{1/2})$ (qui est, bien sûr, à définir). Cet opérateur intervient dans la résolution du problème suivant

$$(P) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - Tu = 0, \ t > 0, \\ u(0) = f \in L^2, \ u(\infty) = 0, \end{cases}$$

dont une solution est formellement donnée par $u(t) = S(t)f$. On sait résoudre explicitement dans les cas suivants. Lorsque $a(x) = b(x) = 1$, $S(t)$ est le semi-groupe de Poisson dont le noyau est $\dfrac{t}{\pi(x^2+t^2)}$. Si $a(x) = b(x)$ est à valeurs complexes, en prenant $z = z(x)$ et Γ comme dans l'introduction, les fonctions $v(t,z) = u(t,x)$ et $g(z) = f(x)$ vérifient

$$\begin{cases} \partial_t^2 v + \partial_z^2 v = 0, \ t > 0, \ z \in \Gamma, \\ v(0) = g \in L^2(\Gamma), \ v(\infty) = 0. \end{cases}$$

Ce problème se résout sous la forme $v(t,z) = F_+(z+it) - F_-(z-it)$ où F_+ (resp. F_-) est le prolongement holomorphe de g au-dessus (resp. au-dessous) de Γ. Cette méthode fournit aussi le noyau de Poisson pour ce problème. La même approche appliquée au problème de Neumann pour $\partial_t^2 + \partial_z^2$ fournit d'ailleurs une autre méthode de calcul de $R^{(a,a)}$ [A].

Dans le cas général, on peut définir le semi-groupe $S(t)$, $t > 0$, en utilisant la théorie des opérateurs de type ω , puisque $T^{1/2}$ est de type $\omega/2 < \pi/2$ (voir [K], chapitre IX, ou [T]). Nous donnerons dans un instant une construction de $S(t)$, le théorème D résumant ses propriétés. L'application à l'équation $\partial_t^2 u - Tu = 0$ fait l'objet de la seconde partie de l'article.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de développer plus avant le calcul fonctionnel pour T. Fixons $\omega < \mu < \pi$ où ω est défini dans la section I.3. Soit η réel strictement positif et $m = [\eta]$ sa partie entière. On dit que $\phi(z) \in \Phi_\eta$ si ϕ est holomorphe sur S^o_μ, de classe C^m sur S_μ, et si pour tout $z \in S_\mu$

$$|\phi(z) - \phi(0)| \leq c|z|^\eta, \quad \text{pour } |z| \leq 1$$

et

$$|\phi(z)| \leq c(1+|z|)^{-\nu}$$

où ν est assez grand, par exemple $\nu > 10$. Cette classe de fonctions dépend essentiellement de η et plus marginalement de μ et ν. Par exemple, si $\phi \in \Phi_\eta$ alors $z\phi'(z) \in \Phi_\eta$ (quitte à choisir μ et ν plus petits). On notera $p_\eta(\phi)$ la meilleure constante c dans les deux inégalités ci-dessus.

Soit $\phi \in \Phi_\eta$, alors en suivant [McI2], pour chaque $t > 0$ on peut définir un opérateur borné sur L^2 par

$$\phi_t(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\phi(t^2 z) - \phi(0)(1+t^2 z)^{-k})(z-T)^{-1}dz \\ +\phi(0)(1+t^2T)^{-k} \tag{1.25}$$

où k est assez grand et γ est un contour constitué de deux demi-droites $re^{\pm i\theta}$ avec $\omega < \pi - \theta < \mu$. Cette définition est indépendante du choix de k et de γ et coïncide avec la définition usuelle où l'on prend la limite forte pour $\varepsilon \to 0$ de la suite d'opérateurs

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \phi(t^2 z)(z - T_\varepsilon)^{-1}dz$$

avec $T_\varepsilon = T + \varepsilon^2$. La formule (1.25) a l'avantage d'être exploitable directement. En effet, l'intégrale dans (1.25) converge normalement dans $\mathcal{L}(L^2)$ d'après (1.3) et la définition de ϕ, et $|\phi_t(T)|_{2,2}$ est uniformément majorée en t.

On peut vérifier que si ϕ, $\psi \in \Phi_\eta$ alors $\phi\psi \in \Phi_\eta$ et $\phi_t(T)\psi_t(T) = (\phi\psi)_t(T)$, ce qui est la règle usuelle du calcul fonctionnel. De plus, on voit facilement que si $t \to 0$ alors $\phi_t(T)$ converge fortement vers $\phi(0)\,Id$ dans $\mathcal{L}(L^2)$. Enfin, $t\dfrac{d}{dt}\phi_t(T) = \psi_t(T)$ où $\psi(z) = 2z\phi'(z)$.

Le cas qui nous intéresse directement est $\phi(z) = e^{-z^{1/2}}$ où $z^{1/2}$ est la racine carrée de z dont la partie réelle est positive. Cette fonction appartient à Φ_η pour $\eta = 1/2$. On note $S(t)$ l'opérateur $\phi_t(T)$. Il suit des remarques précédentes que $S(t), t > 0$, définit un semi-groupe uniformément borné sur L^2. Comme $\dfrac{d}{dt}\phi_t(T)f = t^{-1}\psi_t(T)f$ où $\psi(z) = -e^{-z^{1/2}}z^{1/2}$, il vient facilement que $\dfrac{d}{dt}\phi_t(T)f$ converge dans L^2 pour $t \to 0$ si et seulement si $f \in \mathcal{D}(T^{1/2})$ et la limite est $-T^{1/2}f$. On a donc construit le semi-groupe borné sur L^2 dont le générateur infinitésimal est $-T^{1/2}$. Dans notre cas, on sait que $\mathcal{D}(T^{1/2}) = H^1$.

Les estimations sur le noyau de la résolvante de T permettent de décrire le noyau de $\phi_t(T)$. On reprend la définition de $\mathcal{F}_s$ donnée par (1.10).

LEMME I.11. — *Soient $0 < \eta$ et $\phi \in \Phi_\eta$ avec la restriction que $\eta \leq 1$ si $\phi(0) \neq 0$. Alors $\{\phi_t(T)b\}$, $\left\{t\frac{d}{dt}\phi_t(T)b\right\} \in \mathcal{F}_{2\eta}$, et $\{taD\phi_t(T)b\}, \{t\phi_t(T)bDa\} \in \mathcal{F}_{2\eta+1}$, et il existe une constante c ne dépendant que de η et des bornes de a et b telle que*

$$|\phi_t(T)b|_{2\eta} + \left|t\frac{d}{dt}\phi_t(T)b\right|_{2\eta} + |taD\phi_t(T)b|_{2\eta+1} + |t\phi_t(T)bDa|_{2\eta+1} \leq cp_\eta(\phi).$$

De plus, si $K_t(x,y)$ désigne le noyau de $\phi_t(T)$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x,y)\,dy = \phi(0). \tag{1.26}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_t(x,y)b^{-1}(x)\,dx = \phi(0)b^{-1}(y). \tag{1.27}$$

Noter que ce résultat n'est plus valide lorsque $\phi(0) \neq 0$ et $\eta > 1$: les estimations sur les noyaux sont dans ce cas celles que l'on obtiendrait en prenant $\eta = 1$.

Dans certains cas (comme pour la résolvante de T), la meilleure décroissance à l'infini pour le noyau de $\phi_t(T)b$ provient du fait que ϕ est holomorphe ou méromorphe sur le plan complexe ce qui permet de changer le contour d'intégration.

La preuve de ce lemme est très simple. Il suffit de reprendre la formule (1.25), d'utiliser les estimations vérifiées par ϕ et d'appliquer le lemme I.3 à la résolvante $(z-T)^{-1}$. Pour appliquer ce lemme, on remarque que si on prend $z \notin S_\theta^o$ pour $\theta > \omega$ alors on peut écrire $-z^{-1} = t^2e^{i\alpha}e^{i\beta}$ où $|\alpha| + \|\arg a\|_\infty \leq (\pi-\theta+\omega)/2 < \pi/2$, $|\beta| + \|\arg b\|_\infty \leq (\pi-\theta+\omega)/2$ et $t > 0$. Il s'ensuit que $e^{i\alpha}a$ et $e^{i\beta}b$ sont uniformément accrétives, *i.e.*, leurs bornes sont uniformes par rapport à $z \notin S_\theta^o$. On écrit alors

$$(z-T)^{-1} = -z^{-1}((e^{i\beta}b)^{-1} + t^2De^{i\alpha}aD)^{-1}(e^{i\beta}b)^{-1}$$

et on est ramené au lemme I.3. Nous laissons les détails au lecteur. Les relations (1.26-7) sont une conséquence directe des mêmes égalités pour la résolvante.

Ce résultat permet de démontrer le théorème D, ce que nous faisons maintenant. Grâce au lemme précédent, on a l'estimation souhaitée sur le noyau de "Poisson" $\mathcal{P}_t(x,y)$, *i.e.*, le noyau de l'opérateur $S(t)$, ainsi que sur ses dérivées par rapport aux variables t, x.

Il est clair que pour tout $t > 0$, $S(t)$ est borné sur L^p si $1 \leq p \leq +\infty$. En utilisant (1.26) et les lemmes classiques sur les approximations de l'identité, il vient $\|S(t)f - f\|_p \to 0$ si $t \to 0$ lorsque $f \in L^p$, $1 \leq p < +\infty$. On en déduit aisément que $\mathcal{S} = \{S(t), t > 0\}$ s'étend en un semi-groupe borné sur L^p si $1 \leq p < +\infty$, dont le générateur est $T^{1/2}$, prolongé par continuité à $W^{1,p}$ pour $p > 1$.

Pour $p = +\infty$, on remplace L^∞ par $\mathcal{C}_b$, l'espace des fonctions uniformément continues et bornées. On déduit du lemme I.11 que le noyau $\mathcal{P}_t(x,y)$ est uniformément continu en x pour tout y fixé. Par conséquent $S(t)$ est borné sur $\mathcal{C}_b$. On en tire que $\|S(t)f - f\|_\infty \to 0$ si $t \to 0$ et $f \in \mathcal{C}_b$. Enfin, la formule de semi-groupe se vérifie aisément sur $\mathcal{C}_b$ de telle sorte que $\mathcal{S}$ est un semi-groupe borné sur $\mathcal{C}_b$.

Remarque. — On peut aussi montrer que $\mathcal{S}$ s'étend en un semi-groupe faiblement borné sur L^∞ où l'on a remplacé convergence forte par convergence au sens de la topologie faible étoile $\sigma^*(L^\infty, L^1)$ dans $S(t) \to 0, t \to 0$. Cela revient à savoir si le semi-groupe transposé est borné sur L^1, ce qui provient de la relation

$$\widetilde{S}(t) = b^{-1}S(t)b, \tag{1.28}$$

où $\widetilde{S}(t)$ est le transposé (réel) de $S(t)$. Cette formule s'obtient facilement à partir de la relation algébrique formelle $\widetilde{T} = b^{-1}Tb$, $T = bDaD$.

Les propriétés du semi-groupe vis-à-vis de la fonction non-tangentielle maximale $u^*(x) = \sup_{\{(t,y);|y-x|\leq t\}} |S(t)f(y)|$ sont faciles. Tout d'abord on a classiquement $u^*(x) \leq cMf(x)$ par les estimations du lemme I.11 où Mf est la fonction maximale de Hardy-Littlewood. Donc $\|u^*\|_p \leq c_p\|f\|_p$. D'autre part, on a aisément $\|f\|_p \leq \sup_{t>0} \|S(t)f\|_p \leq \|u^*\|_p$.

Nous terminons cette section par une proposition que nous utiliserons dans la deuxième partie. Elle permet de justifier les calculs formels sur le semi-groupe.

Corollaire I.12. — *Soient* $1 \leq p \leq +\infty$, $f \in L^p$, *et* $u(t) = S(t)f$, $t > 0$. *Alors*

(i) $u(t)$, $aDu(t)$, $\partial_t u(t)$, $bDaDu(t)$ *et* $\partial_t^2 u(t) \in \mathcal{C}(]0, +\infty[, L^p)$ *si* $p < +\infty$

et $\in \mathcal{C}(]0,+\infty[,\mathcal{C}_b)$ *si* $p=+\infty$;

(ii) *pour tout* $t>0$,

$$\partial_t^2 u(t) - bDaDu(t) = 0, \tag{1.29}$$

où l'égalité a lieu dans L^p ;

(iii) *si, de plus,* $f \in W^{1,p}$ *et* $1<p<+\infty$, *alors* $Du(t) \to Df$ *et* $\partial_t u(t) \to -(bDaD)^{1/2} f$ *pour* $t \to 0$, *les convergences ayant lieu en norme* L^p.

L'assertion (i) est presque une conséquence directe du lemme I.11, qui implique que les fonctions $u(t)$, $aDu(t)$, $\partial_t u(t)$, $bDaDu(t)$ et $\partial_t^2 u(t)$ appartiennent à L^p ($\mathcal{C}_b$ si $p=+\infty$). La continuité par rapport à la variable t ne pose pas de problème.

Pour $1<p<+\infty$, l'assertion (ii) découle du théorème D et de la proposition I.8. En effet, le calcul abstrait sur les semi-groupes ([K], chapitre IX) implique que $S(t)f \in \mathcal{D}_p((T^{1/2})^n)$ si $f \in L^p$ et $n \in \mathbb{N}$. Or si $n=2$, la proposition I.8 fournit $\mathcal{D}_p((T^{1/2})^2) = \mathcal{D}_p(bDaD)$ pourvu que $1<p<+\infty$. Ceci démontre (1.29) dans ce cas.

Le cas $p=1$ s'obtient en observant que si $u(t)=S(t)f$ et si $f \in L^1$ alors $u(t) \in L^p$ pout tout $p \geq 1$ et tout $t>0$. En effet, $|S(t)f(x)| \leq C \displaystyle\int \frac{t}{t^2+|x-y|^2} |f(y)|\,dy \in L^p * L^1 \subset L^p$ d'après le lemme I.11. On est donc ramené au cas précédent, l'égalité (1.29) ayant lieu dans L^p, $p>1$, et aussi dans L^1 grâce à (i).

Il reste le cas $p=+\infty$ qui s'obtient par dualité. Soit $f \in L^\infty$ et $h \in L^1$ telle que $h=b^{-1}S(\varepsilon)g$ pour un $\varepsilon>0$ et $g \in L^1 \cap L^2$. On montre que

$$(\partial_t^2 S(t)f, h) = (bDaDS(t)f, h). \tag{1.30}$$

Une fois cette égalité obtenue, on passe à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ ce qui fournit (1.30) pour tout $h \in L^1 \cap L^2$ et (1.29) est démontré. Le passage à la limite est justifié par le fait que $S(\varepsilon) \to I$ fortement dans L^1, par (1.29) et (i) appliqué à $S(t)f$, ce qui permet d'utiliser le théorème de convergence dominée.

Passons à la démonstration de (1.30). En passant au transposé et en utilisant (1.28) il vient

$$(\partial_t^2 S(t)f, h) = (f, \partial_t^2 \widetilde{S}(t)h) = (f, b^{-1}\partial_t^2 S(t)(bh)).$$

L'équation (1.29) dans L^2 donne

$$b^{-1}\partial_t^2 S(t)(bh) = b^{-1}bDaDS(t)(bh) = b^{-1}S(t)bDaD(bh) = \widetilde{S}(t)DaD(bh).$$

La deuxième égalité est justifiée par le choix de h car $bh = S(\varepsilon)g \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_2(bDaD)$, espace sur lequel $S(t)$ et $bDaD$ commutent. En insérant ces égalités et en transposant, on a donc

$$(f, b^{-1}\partial_t^2 S(t)(bh)) = (f, \widetilde{S}(t)DaD(bh)) = (bDaDS(t)f, h).$$

Il reste à voir (iii). Soit $f \in W^{1,p}$. Comme $W^{1,p} = \mathcal{D}_p((bDaD)^{1/2})$, on a $\partial_t u(t) = S(t)(-(bDaD)^{1/2}f) \to -(bDaD)^{1/2}f$ en norme L^p si $t \to 0$. En outre, $Du(t) = R^{-1}(bDaD)^{1/2}S(t)f = -R^{-1}\partial_t u(t) \to R^{-1}(bDaD)^{1/2}f = Df$ pour $t \to 0$. Le corollaire est donc démontré.

I.8. Calcul fonctionnel et espaces de Hardy.

Dans cette section, nous démontrons une partie du théorème E. La démonstration complète se fait en trois étapes consistant à prouver les inclusions continues suivantes :

i) $b\mathcal{H}^p \hookrightarrow \mathcal{H}^p_{a,b}$.

ii) $b^{-1}\mathcal{H}^p_{a,b} \hookrightarrow \mathcal{H}^p_{a,1}$.

iii) $\mathcal{H}^p_{a,1} \hookrightarrow \mathcal{H}^p$.

Les arguments diffèrent dans les trois cas : i) est une simple conséquence de la décomposition atomique des espaces de Hardy; pour ii) en suivant Fefferman et Stein [FS], on développe une théorie des fonctions maximales pour $\mathcal{H}^p_{a,b}$ s'appuyant sur les fonctions de l'opérateur $bDaD$ (nous devons à un referee anonyme cette suggestion). Ce sont ces deux points que nous développons maintenant. La dernière inclusion sera démontrée à la fin de l'article à l'aide d'une fonction d'aire appropriée.

Rappelons que pour définir $\mathcal{H}^p_{a,b}$, on suppose *a priori* que la distribution f est telle que $S(t)f(y)$ existe en presque tout (t, y). Il nous faut décrire ces distributions.

On désigne par $\mathcal{L}_b$ l'espace de Banach composé des fonctions m telle que mb soit Lipschitzienne et vérifie

$$N_s(m) \equiv \sup\{\, (|m(z)| + |(mb)'(z)|)(1+|z|)^{1+s}\,;\, z \in \mathbb{R}\} < +\infty$$

pour $s = 1/2$. On aura besoin de considérer d'autres valeurs de s par la suite.

Cet espace dépend de la fonction accrétive b (fixée une fois pour toutes). Cet espace n'est pas vide : on peut constater facilement que pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ $K_t(x, \cdot) \in \mathcal{L}_b$ où $K_t(x, y)$ est le noyau d'un opérateur $\phi_t(T)$ étudié dans le lemme I.11 (rappelons que $T = bDaD$). On appelle $\mathcal{L}'_b$ l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{L}_b$. Pour $f \in \mathcal{L}'_b$, $\phi_t(T)f(x)$ est défini comme $(K_t(x, \cdot), f)$ où $(,)$ est la forme de dualité. Cette forme coïncide avec l'intégrale $\int K_t(x, y)f(y)\,dy$ si f est dans un L^p. On peut remarquer que chaque espace L^p, $1 < p$, s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{L}'_b$. Il en est de même de $b\mathcal{H}^p$, $1 \geq p > 1/2$, en utilisant la décomposition atomique de $\mathcal{H}^p$ (la valeur minimale $1/2$ vient du fait que les fonctions dans l'espace $b\mathcal{L}_b$ ne sont pas mieux que Lipschitz). Avec ces remarques on peut commencer la preuve du théorème E. Dans ce qui suit $1 \geq p > 1/2$.

Preuve de i). — D'après la décomposition atomique de $\mathcal{H}^p$, il suffit de montrer que si g est un atome $\mathcal{H}^p$ (normalisé en norme L^∞ par exemple, cf. [GC-RF]) et $f = bg$ alors $\|u^*\|_p < +\infty$ où $u(t, x) = S(t)f(x)$. Il suffit de s'en convaincre en écrivant

$$S(t)f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_t(x, y)b(y)g(y)\,dy$$

et d'observer que $\mathcal{P}_t(x, y)b(y)$ est régulier en y et bien localisé d'après le lemme I.11. On suit alors ligne à ligne l'argument présenté par exemple dans [GC-RF].

Preuve de ii). — L'idée est d'adapter les techniques de Fefferman et Stein en remplaçant la convolution, *i.e.*, l'action des fonctions de l'opérateur D, par celle des fonctions de $T = bDaD$ et d'utiliser le calcul fonctionnel associé. Cela permet d'obtenir une famille de fonctions maximales équivalentes à celle donnée par u^*. Les techniques sont plus délicates à cause du manque de régularité de b et a.

On se donne une fonction $\varphi \in \mathcal{F}_\eta$ avec $\eta > 10$, $p_\eta(\varphi) = 1$ et $\varphi(0) = 1$. Pour $f \in \mathcal{L}'_b$, on définit

$$M^*_\varphi f(x) = \sup_{|x-y| \leq t} |\varphi_t(T)f(y)|.$$

On désigne par $A = \{A_t\}$ une famille mesurable d'opérateurs bornés sur L^2 dont le noyau vérifie presque partout les inégalités

$$|A_t(x, y)b(y)| + |ta(y)\partial_y(A_t(x, y)b(y))| + |t^2\partial_y\{a(y)\partial_y(A_t(x, y)b(y))\}|$$

$$\leq w_{2,t}(x-y) = \frac{t^2}{(t+|x-y|)^3}. \tag{1.31}$$

Pour $f \in \mathcal{L}_b'$, la fonction $A_t f(x)$ est bien définie comme une fonction mesurable de t, x puisque $A_t(x,\cdot) \in \mathcal{L}_b$. On pose alors

$$M_A^* f(x) = \sup_{|x-y|\leq t} |A_t f(y)|$$

et ensuite

$$M_{\mathcal{A}} f(x) = \sup_{A\in\mathcal{A}} M_A^* f(x),$$

où $\mathcal{A}$ est constitué de toutes les familles A ayant les propriétés précédentes. Remarquons qu'à une constante multiplicative près, $\{\varphi_t(T)\}$ vérifie (1.31) d'après le lemme I.11.

On rappelle enfin que u^* est la fonction maximale non-tangentielle de $S(t)f(x)$. Le lemme clé est le suivant.

LEMME I.13. — *Avec les notations précédentes, si $f \in \mathcal{L}_b'$ et $1/2 < p \leq 1$, alors les quantités $\|u^*\|_p$, $\|M_{\mathcal{A}} f\|_p$ et $\|M_\varphi^* f\|_p$ sont équivalentes.*

Étape 1 : preuve de $\|M_{\mathcal{A}} f\|_p \leq c_p \|M_\varphi^* f\|_p$.

On se donne $A \in \mathcal{A}$. L'idée est de représenter l'opérateur A_t à l'aide des opérateurs $\varphi_\tau(T)$. On part de l'identité

$$\varphi_t(T)^2 - Id = 2\int_0^t \psi_\tau(T)\varphi_\tau(T)\,\frac{d\tau}{\tau}$$

où $\psi(z) = 2z\varphi'(z)$, *i.e.*, $\tau \dfrac{d}{d\tau}\varphi_\tau(T) = \psi_\tau(T)$. Ainsi, A_t est de la forme

$$A_t = -\int_0^t B_{\tau,t}\varphi_\tau(T)\,\frac{d\tau}{\tau} + B_t\varphi_t(T). \tag{1.32}$$

Posons $A_t^\sharp = t^2 A_t T$ qui est bien défini d'après (1.31). Par le calcul fonctionnel pour T,

$$B_{\tau,t} = 2A_t\psi_\tau(T) = 4\tau^2 A_t T\ (\varphi')_\tau(T) = 4\frac{\tau^2}{t^2}A_t^\sharp\ (\varphi')_\tau(T)$$

(c'est une forme abstraite d'intégration par parties). D'après l'hypothèse et le lemme I.11 appliqué à $\varphi' \in \mathcal{F}_{\eta-1}$, les noyaux de $A_t^\sharp$ et $(\varphi')_\tau(T)$ sont contrôlés par $w_{2,t}(x-y)$ et $w_{2,\tau}(x-y)$ respectivement. Comme l'échelle définie par t est plus grande que celle définie par τ, la convolution de ces noyaux est de l'ordre de $cw_{2,t}(x-y)$ où c est une constante numérique. Pour $f \in \mathcal{L}'_b$, il vient donc

$$\left|\int_0^t B_{\tau,t}\varphi_\tau(T)f(x)\,\frac{d\tau}{\tau}\right| \leq c\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \frac{\tau^2}{t^2}\frac{t^2}{(t+|x-y|)^3}|\varphi_\tau(T)f(y)|\,dy\frac{d\tau}{\tau}.$$

Ensuite, on fixe $z \in \mathbb{R}$ et on suppose que $|z-x| \leq t$. On décompose la bande d'intégration $S=[0,t]\times\mathbb{R}$ en la réunion disjointe des régions T_k, $k=0,1,\ldots$ où $T_0=\{(\tau,y)\in S\,;\,|y-z|\leq\tau\}$ et $T_k=\{(\tau,y)\in S\,;\,\tau 2^{k-1}<|y-z|\leq \tau 2^k\}$. Sur T_k, on a $|\varphi_\tau(T)f(y)| \leq F_{2^k}(z)$ où $F_a(z)=\sup_{|z-y|\leq a\tau}|\varphi_\tau(T)f(y)|$. En observant que

$$\int_{T_k}\frac{\tau^2}{t^2}\frac{t^2}{(t+|x-y|)^3}\,dy\frac{d\tau}{\tau} \leq 12(k+1)4^{-k},$$

il vient donc

$$\left|\int_0^t B_{\tau,t}\varphi_\tau(T)f(x)\,\frac{d\tau}{\tau}\right| \leq 12c\sum_0^\infty 4^{-k}(k+1)F_{2^k}(z).$$

Des majorations directes montrent que $B_t\varphi_t(T)f(x)$ est contrôlé par une quantité du même ordre. On a donc

$$|A_tf(x)| \leq c\sum_0^\infty 4^{-k}(k+1)F_{2^k}(z),$$

puis

$$M_{\mathcal{A}}f(z) \leq c\sum_0^\infty 4^{-k}(k+1)F_{2^k}(z).$$

Finalement, le même argument géométrique que dans [FS] fournit l'inégalité

$$\int(F_a(z))^p\,dz \leq c(1+a)\int(F_1(z))^p\,dz.$$

On en déduit

$$\int M_{\mathcal{A}}f(z)^p\,dz \leq c_p\int(F_1(z))^p\,dz$$

avec

$$c_p = c_p\sum_0^\infty 4^{-kp}(k+1)^p2^k < +\infty$$

puisque $p > 1/2$. Ceci démontre la première étape.

Remarque. — On ne peut pas prendre $A_t = S(t)$ car le noyau de Poisson ne décroît pas assez vite.

Étape 2 : On construit une fonction φ comme ci-dessus et on montre que $M_\varphi^* f(x) \leq cu^*(x)$ p.p..

Suivant [FS], il existe une fonction $X(s)$ à décroissance rapide sur $[1, +\infty)$ telle que

$$\int_1^{+\infty} s^n X(s)\, ds = \delta_{0,n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On a désigné par $\delta_{j,k}$ le symbole de Kronecker. Posons, pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$,

$$\varphi(z) = \int_1^{+\infty} e^{-sz^{1/2}} X(s)\, ds.$$

On vérifie facilement que $\varphi(0) = 1$ et que $\varphi \in \mathcal{F}_\eta$ pour tout $\eta > 0$. De plus, on obtient sans difficulté à l'aide de (1.25) que

$$\varphi_t(T) = \int_1^{+\infty} S(st) X(s)\, ds$$

en reprenant la définition du semi-groupe.

Soit $f \in \mathcal{L}_b'$ et x, y, t avec $|x - y| \leq t$. Si $s \geq 1$ on a donc $|x-y| \leq st$, d'où $|S(st)f(y)| \leq u^*(x)$. On obtient alors l'inégalité souhaitée avec $c = \int_1^{+\infty} |X(s)|\, ds$.

Étape 3 : On montre que $u^*(x) \leq cM_{\mathcal{A}} f(x)$ p.p..

L'idée ici est de décomposer le noyau de Poisson $\mathcal{P}_\tau(x, y)$ en une intégrale convergente de noyaux $A_t(x, y)$ vérifiant (1.31). On utilise la régularisation suivante.

Si $z(x)$ est une primitive de $1/a(x)$, alors $\alpha(x, y) = (z(x) - z(y)).\mathrm{sgn}\,(x - y)$ appartient à un secteur fermé strictement contenu dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, z \geq 0$. Cela permet de poser

$$F_t(x, y) = \varphi\left(\frac{\alpha(x, y)}{t}\right)$$

où φ est, par exemple, la fonction définie dans l'étape précédente. En utilisant le fait que $\varphi'(0) = 0$, on voit qu'à un facteur c/t près, $F_t(x, y)$

vérifie (1.31) où l'on a remplacé $b(y)$ par 1 (si $\varphi'(0) \neq 0$, on introduit une singularité de type Dirac pour la “dérivée seconde”, comme c'est le cas avec la fonction de la remarque 2, section I.2).

Fixons x', x et $\tau > 0$ avec $|x' - x| \leq \tau$. Pour $t \geq \tau$, posons $m_t = F_t(x, \cdot)\mathcal{P}_\tau(x, \cdot)$. On constate alors que $m_t \in \mathcal{L}_b$ avec $N_1(m_t) < +\infty$ uniformément en $t \geq \tau$ et que $N_{1/2}(m_t - \mathcal{P}_\tau(x, \cdot))$ converge vers 0 si $t \to +\infty$. On en déduit que, si $f \in \mathcal{L}_b'$ alors

$$\lim_{t\to+\infty} (m_t, f) = (\mathcal{P}_\tau(x, \cdot), f) = S(\tau)f(x).$$

Les m_t sont ainsi des versions régulières de $S(\tau)$, qui permettent d'écrire

$$S(\tau)f(x) = \int_\tau^{+\infty} \frac{d(m_t, f)}{dt}\, dt + (m_\tau, f). \tag{1.33}$$

On a

$$\frac{dm_t(y)}{dt} = -\frac{\alpha(x, y)}{t^2}\varphi'\left(\frac{\alpha(x, y)}{t}\right)\mathcal{P}_\tau(x, y).$$

En utilisant $\varphi'(z) = O(|z|^\eta)$ pour tout $\eta > 0$ au voisinage de 0 (dans un secteur) et la décroissance rapide à l'infini de $\varphi'(z)$, on voit par des calculs sans difficulté que cette dérivée est de la forme $c\tau t^{-2}A_t^\tau(x, y)$ où c est une constante numérique indépendante de t, τ, x, y et où $A^\tau = \{A_t^\tau\}_t \in \mathcal{A}$. De même $(m_\tau, f) = cB_\tau f(x)$ où $B = \{B_\tau\} \in \mathcal{A}$. On tire de ces remarques et de (1.33) que

$$|S(\tau)f(x)| \leq c\int_\tau^{+\infty} A_t^\tau f(x)\tau t^{-2}\, dt + cB_\tau f(x).$$

Comme $|x' - x| \leq \tau \leq t$, on a donc

$$|S(\tau)f(x)| \leq c\int_\tau^{+\infty} M_{A^\tau}^* f(x')\tau t^{-2}\, dt + cM_B^* f(x') \leq cM_{\mathcal{A}} f(x'),$$

d'où l'on déduit l'inégalité désirée. Le lemme est complètement démontré.

Passons à la démonstration de l'inclusion ii).

Commençons par remarquer que si $m \in \mathcal{L}_b$ alors $bm \in \mathcal{L}_1$. Par dualité, si $f \in \mathcal{L}_b'$ alors $b^{-1}f \in \mathcal{L}_1'$. Soit $f \in \mathcal{H}_{a,b}^p \subset \mathcal{L}_b'$, alors $b^{-1}f \in \mathcal{L}_1'$. D'après le lemme I.13, on montre que $b^{-1}f \in \mathcal{H}_{a,1}^p$ en estimant dans L^p la fonction maximale non-tangentielle $v^*(x)$ de $v(t, x) = \varphi_t(DaD)(b^{-1}f)(x)$ où φ est comme dans le lemme. Or le lemme I.11 montre immédiatement que $\varphi_t(DaD)b^{-1} = cA_t$ où c est une constante indépendante de t et où

$A = \{A_t\} \in \mathcal{A}$. En reprenant la première étape du lemme I.13, on a donc que $v^*(x) = cM_A^* f(x) \in L^p$, qui est la conclusion cherchée.

Remarque. — Par le même argument, on peut voir que $b^{-1}\mathcal{H}^p_{a,b} \hookrightarrow a^{-1}\mathcal{H}^p_{a,a}$. Ce dernier espace peut s'étudier grâce à l'intégrale de Cauchy sur la courbe dont $z(x) = \int_0^x a^{-1}(y)\,dy$ définit une représentation paramétrique. On trouve dans [M], p. 358, une preuve de l'égalité $a^{-1}\mathcal{H}^1_{a,a} = \mathcal{H}^1$. On pourrait sans doute conclure la preuve du théorème E pour les autres valeurs de p de cette façon. Une voie plus directe est celle que nous présentons en section II.4. Signalons que nous ne savons pas comment montrer iii) à l'aide des fonctions maximales. Le lecteur peut se convaincre que l'argument ci-dessus pour montrer ii) ne marche pas pour iii).

II. ÉQUATIONS ELLIPTIQUES SOUS FORME DIVERGENCE EN DIMENSION 2

II.1. Un théorème de régularité locale.

On suppose que Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que $A(X), X \in \Omega$, est une matrice bornée, à coefficients mesurables complexes, et uniformément accrétive, *i.e.*, il existe $\lambda > 0$, appelée constante d'ellipticité de A telle que pour tous $\xi, \zeta \in \mathbb{C}^2$,

$$\operatorname{Re} A(X)\xi \cdot \bar{\xi} \geq \lambda |\xi|^2 \ \text{ p.p.},$$

et

$$|A(X)\xi \cdot \bar{\zeta}| \leq \lambda^{-1} |\xi||\zeta| \ \text{ p.p.}.$$

Si l'on pose $L = \operatorname{div}(A\nabla)$, alors une fonction L-harmonique sur Ω est une solution (faible) de $Lu = 0$ sur Ω au sens où u une fonction dans $H^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla \varphi = 0.$$

THÉORÈME II.1. — *Toute fonction L-harmonique sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est localement bornée et höldérienne : il existe $\eta = \eta(\lambda) \in]0,1]$ et $C = C(\lambda)$ tels que si $Lu = 0$ sur Ω,*

$$\sup_{X \in B_r} |u(X)| \leq C \left(\frac{1}{|B_{2r}|} \int_{B_{2r}} |u|^2 \right)^{1/2}, \tag{2.1}$$

$$\sup_{X,Y\in B_r} \frac{|u(X)-u(Y)|}{|X-Y|^\eta} \le Cr^{-\eta}\left(\frac{1}{|B_{2r}|}\int_{B_{2r}} |u|^2\right)^{1/2}, \tag{2.2}$$

où B_r désigne une boule, r son rayon, $|B_r|$ son volume, B_{2r} la boule double de même centre avec la condition que $\overline{B_{2r}} \subset \Omega$, les intégrales étant calculées par rapport à la mesure de Lebesgue.

Ce résultat remonte probablement à Morrey [Mo, pp. 145–147]. On trouve dans [G] une approche différente dont nous rappelons brièvement et sans démonstration les ingrédients essentiels.

1) Inégalité de Cacciopoli : si $Lu = 0$ sur Ω alors

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2 \le \frac{C(\lambda)}{r^2}\int_{B_{2r}} |u|^2. \tag{2.3}$$

Remarquer que l'on peut remplacer u par $u - u_{2r}$ où u_{2r} est la moyenne de u sur B_{2r}.

2) Inclusions de Poincaré-Sobolev : si $p \in]1,2]$ alors

$$\left(\frac{1}{|B_{2r}|}\int_{B_{2r}} |u-u_{2r}|^2\right)^{1/2} \le C(p)r\left(\frac{1}{|B_{2r}|}\int_{B_{2r}} |\nabla u|^p\right)^{1/p}. \tag{2.4}$$

En combinant (2.3) et (2.4) on obtient une inégalité de Hölder inversée

$$\left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |\nabla u|^2\right)^{1/2} \le C(p,\lambda)\left(\frac{1}{|B_{2r}|}\int_{B_{2r}} |\nabla u|^p\right)^{1/p}.$$

3) Amélioration dans les inégalités de Hölder inversées : il existe $q = q(p,\lambda) > 2$ et $C = C(p,\lambda) > 0$, où p est fixé dans $]1,2[$, telles que

$$\left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |\nabla u|^q\right)^{1/q} \le C\left(\frac{1}{|B_{2r}|}\int_{B_{2r}} |\nabla u|^2\right)^{1/2}. \tag{2.5}$$

4) Inclusions de Morrey : $W^{1,q}_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty_{\text{loc}}(\Omega) \cap C^\eta_{\text{loc}}(\Omega)$ pour $\eta = 1 - 2/q$.

En combinant (2.3) et (2.5) on obtient (2.1) et (2.2). On notera que seule la quatrième étape est spécifique à la dimension 2. En fait, ce théorème n'est plus valable en dimensions supérieures ou égales à 5 sous cette forme générale [MNP].

Remarque. — Notons que l'on peut déduire de (2.1) l'inégalité

$$\sup_{X\in B_r} |u(X)| \leq C\left(\frac{1}{|B_{2r}|}\int_{B_{2r}} |u|^p\right)^{1/p}, \tag{2.1'}$$

pour tout $0 < p \leq +\infty$ où $C = C(p,\lambda)$. Voir [G]. Cette inégalité peut s'interpréter comme un principe de Harnack faible.

A priori, l'exposant η dans (2.2) est arbitrairement petit [G] mais si la matrice ne dépend que de l'une des variables, on a un peu mieux. On note $X = (t,x)$ le point courant de $\mathbb{R}^2$. On se donne une matrice accrétive et bornée et on suppose que $A(X) = A(x)$ sur l'ouvert Ω. L'équation $Lu = 0$ s'écrit formellement

$$\partial_t(\alpha\partial_t u + \beta\partial_x u) + \partial_x(\gamma\partial_t u + \delta\partial_x u) = 0, \tag{2.6}$$

où $A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$.

THÉORÈME II.2. — *Sous les hypothèses ci-dessus, toute fonction L-harmonique u sur Ω est localement lipschitzienne. De plus,*

$$\sup_{X\in B_r} |\nabla u(X)| \leq C\left(\frac{1}{|B_{2r}|}\int_{B_{2r}} |\nabla u|^2\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

pour toute boule B_r telle que $\overline{B_{2r}} \subset \Omega$, où $C = C(\lambda)$ ne dépend que de la constante d'ellipticité.

On peut déduire de ce théorème un résultat de comparaison entre u et son gradient, que l'on utilisera en section II.4.

Le théorème II.2 est une conséquence du lemme suivant.

LEMME II.3. — *Sous les hypothèses précédentes, si u est une fonction L-harmonique sur Ω alors il en est de même de $\partial_t u$, et $\gamma\partial_t u + \delta\partial_x u$ est $\tilde{L}$-harmonique sur Ω, où $\tilde{L} = \operatorname{div}(\tilde{A}\nabla)$ et $\tilde{A} = \det A^{-1}\,{}^tA$.*

Supposons le lemme II.3 démontré, une application du théorème II.1 montre que $\partial_t u$ et $\gamma\partial_t u + \delta\partial_x u$ sont localement bornées et vérifient une estimation du type (2.1). Comme $\operatorname{Re}\delta = \operatorname{Re} Ae_2\cdot e_2 \geq \lambda > 0$, $e_2 = (0,1)$, on voit que $\partial_x u$ est aussi localement bornée et, en outre, ∇u vérifie (2.7).

Le lemme II.3 se démontre en 2 étapes.

Étape 1 : $A(x) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

On rappelle le lemme classique suivant (cf [GT], chapitre 8 ou [H], chapitre 17).

LEMME II.4. — *Soit $A(X), X \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, une matrice accrétive, bornée, à coefficients $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $k \geq 0$, les conditions $u \in H^{k+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $\operatorname{div}(A\nabla u) \in H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ impliquent $u \in H^{k+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

L'espace $H^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, désigne l'espace de Sobolev des fonctions $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telles que les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre m appartiennent à $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Si, donc, u est une fonction L-harmonique sur Ω, $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\partial_t u$ est bien définie. Comme $A(x)$ ne dépend pas de t, on a

$$\int_\Omega A\nabla(\partial_t u)\cdot\nabla\varphi = \int_\Omega \partial_t(A\nabla u)\cdot\nabla\varphi = -\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla(\partial_t\varphi) = 0$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$. Donc $\partial_t u$ est une fonction L-harmonique.

Passons au terme $\gamma\partial_t u + \delta\partial_x u$. La forme $dv = (\alpha\partial_t u + \beta\partial_x u)dx - (\gamma\partial_t u + \delta\partial_x u)dt$ est exacte sur Ω d'après (2.6). Donc $v = v(t,x)$ est définie à une constante près sur chaque composante connexe de Ω par les conditions

$$\begin{cases} \partial_x v = \alpha\partial_t u + \beta\partial_x u \\ \partial_t v = -(\gamma\partial_t u + \delta\partial_x u). \end{cases}$$

L'argument précédent s'applique à $\partial_t v$ pourvu que v soit une fonction $\tilde{L}$-harmonique sur Ω car $\tilde{A}$ est évidemment indépendante de t. Or, il vient

$$\begin{cases} \partial_x u = \det A^{-1}\ (\alpha\partial_t v + \gamma\partial_x v) \\ \partial_t u = -\det A^{-1}\ (\beta\partial_t v + \delta\partial_x v). \end{cases}$$

Ceci implique que $\operatorname{div}(\tilde{A}\nabla v) = \partial_t(\partial_x u) + \partial_x(-\partial_t u) = 0$. Dans [Mo], section 5.5, la fonction v est dite conjuguée à u.

Étape 2 : passage à la limite.

Soit $\Phi \in \mathcal{C}^\infty_0([-1,1])$, $\Phi \geq 0$ et $\int \Phi = 1$. On pose $\Phi_j(x) = 2^j\Phi(2^j x)$. Soit A comme dans l'énoncé du théorème II.2 (on suppose A définie sur $\mathbb{R}^2$ pour simplifier) et λ sa constante d'ellipticité. Les matrices $A_j(x) = A * \Phi_j(x)$, où $*$ désigne la convolution sur $\mathbb{R}$, sont à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ et sont uniformément elliptiques. On appelle $\alpha_j = \alpha * \Phi_j$, etc, les coefficients de A_j et $L_j = \operatorname{div}(A_j\nabla)$.

Fixons B une boule ouverte arbitraire dans Ω avec $\overline{B} \subset \Omega$ et u une fonction L-harmonique sur Ω. Nous allons montrer que $\partial_t u$ et $\gamma\partial_t u + \delta\partial_x u$ appartiennent à $H^1(B_1)$ où B_1 désigne la boule de même centre que B et de rayon moitié. Ce résultat implique facilement que $L(\partial_t u) = 0$ et $\tilde{L}(\gamma\partial_t u + \delta\partial_x u) = 0$ sur B_1 car les intégrations par parties formelles sont alors justifiées. Comme B_1 est arbitraire dans Ω cela implique le lemme II.3.

Puisque $u \in H^1(B)$, $L_j u \in H^{-1}(B)$. Comme $\int_B \operatorname{Re} A_j \nabla u \cdot \nabla \bar{v}$ est une forme coercitive sur $H_0^1(B)$, il existe d'après Lax-Milgram une unique solution $w_j \in H_0^1(B)$ à l'équation $L_j w = -L_j u$, c'est-à-dire

$$\int_B A_j \nabla w \cdot \nabla \varphi = -\int_B A_j \nabla u \cdot \nabla \varphi,$$

pour toute $\varphi \in H_0^1(B)$. La fonction $u_j = w_j + u$ est donc L_j-harmonique sur B et

$$\int_B |\nabla u_j|^2 \leq C(\lambda) \int_B |\nabla u|^2. \tag{2.8}$$

D'après l'étape 1, $u_j \in \mathcal{C}^\infty(B)$ et on définit alors $v_j \in \mathcal{C}^\infty(B)$ par les équations

$$\begin{cases} \partial_x v_j = \alpha_j \partial_t u_j + \beta_j \partial_x u_j \\ \partial_t v_j = -(\gamma_j \partial_t u_j + \delta_j \partial_x u_j) \\ \displaystyle\int_B v_j = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

LEMME II.5.

(i) $\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u$ et $u_j \to u$ dans $L^2(B)$.

(ii) *Il existe une fonction $\tilde{L}$-harmonique $v \in H^1(B)$ telle que $\nabla v_j \rightharpoonup \nabla v$ et $v_j \to v$ dans $L^2(B)$.*

On a désigné par $\rightharpoonup$ la convergence faible et par $\to$ la convergence forte. L'indice j tend vers $+\infty$.

Commençons par la preuve de (i). Soit $\varphi \in H_0^1(B)$. Alors $\int A\nabla w_j \cdot \nabla\varphi \to 0$. En effet, il suffit de le voir pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B)$ car $\{w_j\}$ est une suite bornée dans $H_0^1(B)$ d'après (2.8). Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B)$, comme $Lu = 0$ et $L_j u_j = 0$ il vient

$$\int A\nabla w_j \cdot \nabla\varphi = \int (A - A_j)\nabla u_j \cdot \nabla\varphi.$$

D'après (2.8) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cette expression se majore par

$$C\left(\int_B |{}^t(A-A_j)\nabla\varphi|^2\right)^{1/2},$$

qui tend vers 0 par le théorème de convergence dominée.

Si $\psi \in H^{-1}(B)$ alors il existe un unique $\varphi \in H_0^1(B)$ tel que $\operatorname{div}({}^tA\nabla\varphi) = \psi$ (Lax-Milgram), ie $(\psi, w) = \int_B A\nabla w \cdot \nabla\varphi$ pour tout $w \in H_0^1(B)$. En particulier, on peut prendre $w = w_j$ et laisser tendre j vers $+\infty$. On a donc montré que w_j converge faiblement vers 0 dans $H_0^1(B)$. Par injection compacte, w_j converge fortement vers 0 dans $L^2(B)$. On en déduit (i).

Preuve de (ii). Commençons par rappeler un lemme classique.

LEMME II.6. — *Si $f_j \rightharpoonup f$ dans $L^2(B)$ et $a_j \to a$ p.p. avec $\sup_j \|a_j\|_\infty < +\infty$, alors $a_j f_j \rightharpoonup af$ dans $L^2(B)$.*

Pour démontrer ce lemme, on écrit pour $g \in L^2(B)$,

$$\langle a_j f_j - af, g\rangle = \langle a_j f_j - af_j, g\rangle + \langle f_j - f, \bar{a}g\rangle.$$

Le dernier terme tend vers 0 par hypothèse sur les f_j. De plus, $\{f_j\}$ est une suite bornée et $\sup_j \|f_j\|_2 = c < +\infty$. On tire alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $|\langle a_j f_j - af_j, g\rangle| \le c\|(\bar{a}_j - \bar{a})g\|_2$, terme qui tend vers 0 par convergence dominée. Le lemme est démontré.

Le lemme II.6 et (i) permettent de passer à la limite faible dans les deux premières équations de (2.9). Ainsi $\nabla v_j \rightharpoonup (f,g)$ dans $L^2(B)$ avec $f = \alpha\partial_t u + \beta\partial_x u$ et $g = -(\gamma\partial_t u + \delta\partial_x u)$. Comme $\lambda|\nabla u_j|^2 \le |\nabla v_j|^2 \le \lambda^{-1}|\nabla u_j|^2$, on tire de l'inégalité de Poincaré (2.4), de $\int_B v_j = 0$ et de (2.8) que la suite $\{v_j\}$ est bornée dans $L^2(B)$. Soit v la limite faible d'une sous-suite $v_{j'}$. On a alors $\nabla v = (f,g)$ au sens des distributions ainsi que $\int_B v = \int v\chi_B = \lim \int v_{j'}\chi_B = 0$. Donc $v \in H^1(B)$ et est uniquement déterminée. Ceci implique que v est l'unique limite faible de $\{v_j\}$ et que $\nabla v_j \rightharpoonup \nabla v$ dans $L^2(B)$. Par injection compacte, $v_j \to v$ dans $L^2(B)$.

Enfin, si $\varphi \in C_0^\infty(B)$, une nouvelle application du lemme II.6 donne

$$0 = \int_B \tilde{A}_j \nabla v_j \cdot \nabla\varphi \to \int_B \tilde{A}\nabla v \cdot \nabla\varphi.$$

Donc $\tilde{L}v = 0$ dans B et le lemme II.5 est démontré.

On peut montrer maintenant que $\partial_t u$ et $\partial_t v \in H^1(B_1)$. La situation étant symétrique en u et v, il suffit de s'intéresser à $\partial_t u$.

D'après la première étape, $L_j(\partial_t u_j) = 0$ dans B. L'inégalité de Cacciopoli (2.3) et (2.8) donnent

$$\begin{aligned}\int_{B_1} |\nabla(\partial_t u_j)|^2 &\leq \frac{C(\lambda)}{r^2}\int_B |\partial_t u_j|^2\\ &\leq \frac{C(\lambda)}{r^2}\int_B |\nabla u|^2,\end{aligned}$$

où r est le rayon de B et où $C(\lambda)$ ne dépend pas de j (mais est différent à chaque ligne). Donc il existe $\vec{f} \in L^2(B_1)$ et une sous-suite $u_{j'}$ telle que $\nabla(\partial_t u_{j'}) \rightharpoonup \vec{f}$ dans $L^2(B_1)$. Comme $\partial_t u_{j'} \rightharpoonup \partial_t u$ dans $L^2(B_1)$, le théorème du graphe fermé montre que $\partial_t u \in H^1(B_1)$.

II.2. Le problème de Dirichlet.

Dans cette section, la matrice A a la forme suivante :

$$A(t,x) = \begin{pmatrix} b^{-1}(x) & 0 \\ 0 & a(x) \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Les fonctions $a(x)$ et $b(x)$ sont donc bornées et accrétives au sens de la partie I. Le point (t,x) décrit $\mathbb{R}^2_+ =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

Pour une fonction v définie sur $\mathbb{R}^2_+$, on pose

$$v^*(x) = \sup_{\{(t,y);|y-x|\leq t\}} |v(t,y)|$$

la fonction maximale non-tangentielle de v. Par abus, on utilisera la notation $v(t)$ pour désigner la fonction $y \mapsto v(t,y)$. La notation $v(t) \to f$ n.t.p.p., t $\to 0$, signifie que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $v(t,y)$ converge vers $f(x)$ lorsque $t \to 0$ et $|x-y| \leq t$.

Pour $1 < p \leq +\infty$, le problème de Dirichlet $(D)_p$ peut s'écrire comme suit : étant donné $f \in L^p(\mathbb{R})$, on cherche une fonction u telle que

$$\begin{gathered} Lu = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2_+,\\ \|u^*\|_p < +\infty,\\ u(t) \to f \text{ n.t.p.p., t} \to 0.\end{gathered}$$

L désigne toujours $\operatorname{div}(A\nabla)$.

THÉORÈME II.7. — *Soit* $1 < p \leq +\infty$. *Si* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *alors* $u(t) = S(t)f$, $t > 0$, *est une solution de* $(D)_p$, *où* $S(t)$ *dénote le semi-groupe dont le générateur infinitésimal est* $(bDaD)^{1/2}$. *De plus,*

$$\|u^*\|_p \leq C\|f\|_p, \tag{2.11}$$

où C *ne dépend que de* p *et de la constante d'ellipticité* λ. *Réciproquement étant donné une fonction* L*-harmonique* u *sur* $\mathbb{R}^2_+$ *telle que* $\|u^*\|_p < +\infty$, *il existe une unique fonction* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *telle que* $u(t) \to f$ n.t.p.p., t $\to 0$, *et on a* $u(t) = S(t)f$.

Remarque. — Le cas $p = +\infty$ peut-être interprété comme un principe du maximum faible et la constante ne prend pas nécessairement la valeur 1. De telles inégalités ont été introduites par Agmon et par Miranda, cf. [**Ke**]. Ce théorème n'est pas local : nous ne savons pas si le problème de Dirichlet admet une solution unique sur une domaine borné pour ce type d'équations elliptiques, les coefficients étant mesurables et complexes.

Preuve. — La première partie de l'argument est essentiellement contenue dans le corollaire I.12 et le théorème D. Nous laissons au lecteur le soin de le vérifier.

Passons à la réciproque. On suppose que u est une fonction L-harmonique sur $\mathbb{R}^2_+$ telle que $\|u^*\|_p < +\infty$. On cherche $f \in L^p(\mathbb{R})$ tel que $f = u(0)$. Tout repose sur l'inégalité de Cacciopoli au bord suivante.

LEMME II.8. — *Soit* $A(X)$, $X \in \mathbb{R}^n$, *une matrice accrétive et bornée quelconque et* λ *sa constante d'ellipticité. Soit* $r > 0$ *et* $\Omega_r = \mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r)$ *et* $\Delta(0,r) = \partial\, \mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r)$, *où* $B(0,r)$ *est la boule de rayon* r *centrée à l'origine. Si* u *est une solution de* $L = \operatorname{div}(A\nabla)$ *sur* Ω_{2r}, *telle que* $u \in H^1(\Omega_{2r})$ *et* $u\,|_{\Delta(0,2r)} = 0$, *alors*

$$\int_{\Omega_r} |\nabla u|^2 \leq \frac{C(\lambda)}{r^2} \int_{\Omega_{2r}} |u|^2. \tag{2.12}$$

La preuve est classique. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ avec $\varphi \geq 0$, $\varphi = 1$ sur $B(0,r)$, $\operatorname{Supp}\varphi \subset B(0,2r)$ et $|\nabla\varphi| \leq C/r$. Alors $\bar{u}\varphi^2 \in H^1_0(\Omega_{2r})$ (le sous-espace de $H^1(\Omega_{2r})$ constitué des fonctions de trace nulle au bord. Cet espace coïncide avec l'adhérence dans $H^1(\Omega_{2r})$ de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega_{2r})$). On a donc

$$\int A\nabla u \cdot \nabla(\bar{u}\varphi^2) = 0. \tag{2.13}$$

(L'intégrale converge et l'égalité se justifie par passage à la limite dans $\int A\nabla u \cdot \nabla \psi_n = 0$, où $\psi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_{2r})$ converge vers $\bar{u}\varphi^2$ en norme dans $H^1(\Omega_{2r})$.) Il vient alors

$$\begin{aligned}\lambda \int |\nabla u|^2 \varphi^2 &\leq \mathrm{Re} \int A\nabla u \cdot \nabla \bar{u}\ \varphi^2 \\ &= -2\mathrm{Re} \int A\nabla u \cdot \nabla \varphi\ \bar{u}\varphi \\ &\leq 2\lambda^{-1} \left(\int |\nabla u|^2 \varphi^2 \right)^{1/2} \left(\int |u|^2 |\nabla \varphi|^2 \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Comme $\int |\nabla u|^2 \varphi^2 < +\infty$, on peut simplifier membre à membre et on en déduit facilement (2.12).

Revenons à $(D)_p$. Fixons $\varepsilon > 0$ et posons $w(t) = u(t+\varepsilon) - S(t)u(\varepsilon)$, $t > 0$. Il est clair d'après la première partie de la preuve que w est une fonction L-harmonique sur $\mathbb{R}^2_+$ et $w = 0$ sur $\mathbb{R}$. Le lemme précédent s'applique pour toute valeur de $r > 0$ et il vient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r} |\nabla w|^2 &\leq \frac{C(\lambda)}{r^2} \int_{\Omega_{2r}} |w|^2 \\ &\leq C(p,\lambda) \left(\frac{1}{r^2} \int_{\Omega_{4r}} |w|^p \right)^{2/p}\end{aligned}$$

avec la convention usuelle si $p = +\infty$ (remarquer que l'exposant de $1/r$ dans (2.12) coïncide ici avec la dimension et $r^2 \sim |\Omega_{2r}|$). La dernière inégalité est une conséquence de (2.1'), qui s'applique au prolongement de w en une fonction L-harmonique à tout $\mathbb{R}^2$ (principe de réflexion).

Comme $\|u(t)\|_p \leq \|u^*\|_p$ pour tout $t > 0$ et $\|(S(t)u(\varepsilon))^*\|_p \leq C_p \|u(\varepsilon)\|_p$ par la première partie du théorème II.7, on a que pour tout $t > 0$, $\|w(t)\|_p \leq C\|u^*\|_p$. Il vient donc

$$\int_{\Omega_r} |\nabla w|^2 \leq C \left(\frac{1}{r^2} \int_0^{4r} \|w(t)\|_p^p \, dt \right)^{2/p} \leq \frac{C}{r^{2/p}} \|u^*\|_p^2. \tag{2.14}$$

On fait alors tendre r vers $+\infty$. Si $p < +\infty$ alors $\nabla w = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^2_+$. Donc $w = 0$ car w s'annule au bord.

Si $p = +\infty$, on obtient que $\nabla w \in L^2(\mathbb{R}^2_+)$. Pour voir que $w = 0$, on reprend $\varphi = \varphi_r$ comme dans le lemme II.8. L'égalité (2.13) appliquée à w implique

$$\int A\nabla w \cdot \nabla \bar{w}\ \varphi_r^2 = -2 \int A\nabla w \cdot \nabla \varphi_r\ \bar{w}\varphi_r. \tag{2.15}$$

Par convergence dominée, le membre de gauche tend vers $\int A\nabla w \cdot \nabla \bar{w}$ si $r \to +\infty$. Il suffit de montrer que cette intégrale est nulle en calculant le membre de droite à la limite. Pour ce faire, on remarque que la famille $\{\varphi_r \nabla \varphi_r\}$ est uniformément bornée dans $L^2(\mathbb{R}^2_+)$ et il existe donc une sous-suite $r_j \to +\infty$ et une fonction $\vec{g} \in L^2(\mathbb{R}^2_+)$ telle que $\varphi_{r_j} \nabla \varphi_{r_j} \rightharpoonup \vec{g}$. Or pour tout compact K, $\varphi_{r_j} \nabla \varphi_{r_j} = 0$ sur K si r_j est assez grand. Donc $\vec{g} = 0$. Comme $|\bar{w} A \nabla w| \leq \lambda^{-1} \|w\|_\infty |\nabla w| \in L^2(\mathbb{R}^2_+)$, le membre de droite dans (2.15) tend vers $-2 \int \bar{w}\, A\nabla w \cdot \vec{g} = 0$ si $r = r_j \to +\infty$.

On a donc obtenu

$$u(t+\varepsilon) = S(t)u(\varepsilon), \tag{2.16}$$

pour tous $t,\ \varepsilon > 0$.

Comme $\|u(\varepsilon)\|_p \leq \|u^*\|_p$, il existe $f \in L^p(\mathbb{R})$ et une suite ε_j tendant vers 0 tels que

$$u(\varepsilon_j) \rightharpoonup f \tag{2.17}$$

au sens de la topologie faible $\sigma^\star(L^p, L^{p'})$. D'autre part,

$$\|u(t+\varepsilon_j) - u(t)\|_p \to 0. \tag{2.18}$$

En effet, les rôles de t et de ε étant symétriques, (2.16) donne $u(t+\varepsilon_j) = S(\varepsilon_j)u(t)$ et $S(\varepsilon_j)$ tend fortement vers I dans $L^p(\mathbb{R})$ si $p < +\infty$ et dans $C_b(\mathbb{R})$ si $p = +\infty$ d'après le théorème D (remarquer que le corollaire I.12 donne $u(t) = S(t/2)u(t/2) \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ dès que $u(t/2) \in L^\infty(\mathbb{R})$, ce qui est le cas). On obtient donc à la limite dans (2.16) que $u(t) = S(t)f$ si $t > 0$. Ceci termine la preuve du théorème II.7.

Remarques. — 1) L'unicité dans le problème de Dirichlet $(D)_p$ repose donc sur une inégalité de Cacciopoli au bord et sur la connaissance a priori du noyau de Poisson. La preuve montre que l'existence de solutions entraîne leur unicité dans la classe des solutions faibles qui possèdent une fonction non-tangentielle maximale dans L^p. Le même argument convient donc dans toute situation bi-dimensionelle pour des opérateurs plus généraux où l'on disposerait de solutions via le noyau de Poisson.

2) On peut formuler le théorème II.7 pour $p \leq 1$: cette question sera abordée à la fin de la section II.4.

3) Nous avons posé le problème de Dirichlet au sens de Dahlberg en imposant aux fonctions L-harmoniques une estimation non-tangentielle

maximale qui implique leur convergence non-tangentielle p.p. au bord. On peut également poser le problème de Dirichlet au sens de la théorie des semi-groupes où l'on remplace par $\sup_{t>0} \|u(t)\|_p < +\infty$ la condition $\|u^*\|_p < +\infty$ et par la convergence en norme L^p $(1 < p < +\infty)$ la convergence non-tangentielle p.p.. Appelons $(D')_p$ ce nouveau problème. Comme $\sup_{t>0} \|u(t)\|_p \leq \|u^*\|_p$, $(D')_p$ est a priori plus faible. L'existence est bien sûr fournie par le semi-groupe. L'unicité suit la même démonstration, la seule différence se situant dans l'inégalité (2.14) où le membre de droite devient $Cr^{-2/p} \sup_{t>0} \|u(t)\|_p^2$. On déduit de cette remarque que pour une fonction L-harmonique u sur $\mathbb{R}^2_+$ et $1 < p \leq +\infty$ les conditions $\|u^*\|_p < +\infty$ et $\sup_{t>0} \|u(t)\|_p < +\infty$ sont équivalentes (trivialement vrai pour $p = +\infty$). L'opérateur L est celui du théorème II.7. Il serait intéressant d'avoir une preuve directe sans passer par l'existence et l'unicité dans $(D)_p$ et $(D')_p$. La question se pose de savoir à quels opérateurs elliptiques complexes bi-dimensionnels on peut étendre ces résultats.

II.3. Les problèmes de Neumann et de régularité.

Les problèmes de Neumann et de régularité pour des opérateurs elliptiques à coefficients mesurables ont été posés et définis de façon générale par Kenig et Pipher [KP]. Les solutions n'étant pas mieux que localement höldériennes, ils ont du modifier la définition de $(\nabla u)^*$ en remplaçant valeurs ponctuelles par valeurs moyennes. Leur définition dans le cas de $\mathbb{R}^2_+$ est

$$N(\nabla u)(x) = \sup_{X \in \Gamma_x} \left(\frac{1}{|B(X, \delta(X)/2)|} \int_{B(X,\delta(X)/2)} |\nabla u|^2 \right)^{1/2},$$

où $x \in \mathbb{R}$ et $\delta(X)$ est la distance de X au bord de $\mathbb{R}^2_+$.

Si A est une matrice à coefficients mesurables accrétive et bornée sur $\mathbb{R}^2$ et indépendante de l'une des variables, on sait d'après le théorème II.2 que les fonctions L-harmoniques sont localement lipschitziennes. La fonction non-tangentielle maximale de ∇u a donc un sens et on montre à l'aide de (2.7) et de calculs standard que $\|(\nabla u)^*\|_p \sim \|N(\nabla u)\|_p$ pour tout $p > 0$.

On peut alors énoncer le problème de Dirichlet avec une donnée régulière, qu'on appelle $(R)_p$. Pour $g \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, on cherche une fonction

u telle que

$$\begin{gathered} Lu = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2_+, \\ \|(\nabla u)^*\|_p < +\infty, \\ \exists t_0 > 0,\ \|u(t_0)\|_p < +\infty, \\ u(t) \to g \ \text{ n.t.p.p.}, t \to 0. \end{gathered}$$

La troisième condition est de nature technique. Le problème de Neumann $(N)_p$ s'écrit : pour $h \in L^p(\mathbb{R})$, on cherche une fonction u (modulo les constantes) telle que

$$\begin{gathered} Lu = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2_+, \\ \|(\nabla u)^*\|_p < +\infty, \\ A\nabla u \cdot \vec{n} \ \to h \ , t \to 0. \end{gathered}$$

On a désigné par $\vec{n} = (-1, 0)$ la normale extérieure. On notera que $(R)_p$ et $(N)_p$ ne sont pas exactement formulés comme dans [KP]. La convergence sera précisée dans l'énoncé qui suit.

On suppose que A est donnée par (2.10). $S(t) \equiv S^{(a,b)}(t)$ est le semi-groupe engendré par $(bDaD)^{1/2}$ et $R = (bDaD)^{1/2}D^{-1}$ est borné et inversible sur $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < +\infty$. Noter que $A\nabla u \cdot \vec{n} = -b^{-1}\partial_t u(t)$ et comme b^{-1} n'est pas continue, on ne peut espérer de convergence non-tangentielle (nous remercions un referee pour nous avoir signalé cette erreur dans le texte original). En revanche, il n'y a pas d'obstruction à la convergence non-tangentielle de $\partial_t u(t)$.

THÉORÈME II.9. — *Sous les hypothèses ci-dessus, $(N)_p$ et $(R)_p$ admettent une solution unique pour $1 < p < +\infty$. Plus précisément :*

(i) *si $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ alors $u(t) = S(t)f$ est une solution de $(R)_p$ et*

$$\|(\nabla u)^*\|_p \leq C\|Df\|_p. \tag{2.19}$$

Si $g \in L^p(\mathbb{R})$ alors $v(t) = \int_0^t S(\tau)g\,d\tau$ est une solution de $(N)_p$ pour la donnée $-bg$. De plus,

$$\|(\nabla v)^*\|_p \leq C\|g\|_p. \tag{2.20}$$

Les constantes ne dépendent que de p et de la constante d'ellipticité λ.

(ii) *Réciproquement, si u vérifie $Lu = 0$ sur $\mathbb{R}^2_+$ et $\|(\nabla u)^*\|_p < +\infty$ alors*

(1) *$u(t)$ converge n.t.p.p. vers une fonction $f \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \cap \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R})$;*

(2) *$\partial_t u(t)$ converge n.t.p.p. et dans $L^p(\mathbb{R})$ vers une fonction $g \in L^p(\mathbb{R})$;*

(3) *$a\partial_x u(t)$ converge n.t.p.p. et dans $L^p(\mathbb{R})$ vers $h \in L^p(\mathbb{R})$;*

(4) *on a $f' = a^{-1}h$ (dérivée prise au sens des distributions), $a^{-1}h = -iR^{-1}g$ et*

$$u(t) - f = \int_0^t S(\tau)g\,d\tau, \quad \text{p.p..} \tag{2.21}$$

(5) *Si, de plus, il existe $t_0 > 0$ tel que $u(t_0) \in L^p(\mathbb{R})$ alors $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ et $u(t) = S(t)f$ pour tout $t > 0$.*

Preuve. — La partie (i) est une conséquence du corollaire I.12. Tout d'abord, on verifie facilement que les fonctions u et v de l'énoncé sont L-harmoniques.

Ensuite, la preuve de (2.19) repose sur les deux identités suivantes, valides pour tout $f \in W^{1,p} = \mathcal{D}_p(T^{1/2})$:

$$\partial_t S(t)f = -S(t)T^{1/2}f \tag{2.22a}$$

$$DS^{(a,b)}(t)f = a^{-1}S^{(b,a)}(t)aDf. \tag{2.22b}$$

Une fois les inégalités (2.22) établies, on obtient (2.19) grâce à (2.11) et au théorème A. La formule (2.22a) est une propriété commune à tous les semi-groupes. Quant à (2.22b), elle se déduit de (1.25) en utilisant les relations de commutation de la section I.5.

Passons à la démonstration de (ii).

Fixons $x \in \mathbb{R}$ tel que $(\nabla u)^*(x) < +\infty$ et soit Γ_x le cône issu de x. Pour $X, Y \in \Gamma_x$, les accroissements finis donnent $|u(X) - u(Y)| \leq |X - Y|(\nabla u)^*(x)$. On en déduit l'existence d'un nombre $f(x)$ tel que $u(X) \to f(x)$ si $X \to x$, $X \in \Gamma_x$. La fonction f existe donc p.p. et on verra plus loin ses propriétés.

D'après le lemme II.3, $\partial_t u$ est une fonction L-harmonique satisfaisant à $(D)_p$. On en déduit (ii.2) en appliquant le théorème II.7. De même, $a\partial_x u$ est une fonction $\tilde{L}$-harmonique solution de $(D)_p$ pour $\tilde{L}$. Comme $\tilde{L}$ a la même forme que L (les rôles de a et b sont échangés) on en déduit (ii.3).

D'après $(D)_p$, on a $\partial_t u(t) = S(t)g$. Donc,

$$u(t) - u(\varepsilon) = \int_\varepsilon^t S(\tau)g\, d\tau,$$

avec égalité dans $L^p(\mathbb{R})$. Grâce à (ii.1), le membre de gauche passe à la limite p.p. si $\varepsilon \to 0$. De plus, les propriétés du noyau de $S(\tau)$ impliquent $\|S(\tau)g\|_\infty \leq C\tau^{-1+1/p}\|g\|_p$ par l'inégalité de Hölder. On peut donc également passer à la limite p.p. (convergence uniforme) dans le membre de droite, ce qui donne (2.21). Cette égalité avec le fait que u est localement bornée montre immédiatement que $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$.

D'après les propriétés de $S(\tau)$, on a

$$\partial_x S(\tau) = iR^{-1}(bDaD)^{1/2}S(\tau) = -iR^{-1}\partial_\tau S(\tau).$$

Donc, au sens des distributions sur $\mathbb{R}$,

$$\partial_x(u(t) - f) = iR^{-1}(g - S(t)g). \tag{2.23}$$

Comme $\partial_x u(t)$ et $iR^{-1}(g - S(t)g) \in L^p(\mathbb{R})$, il en est de même de $\partial_x f = f'$. Donc $f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R})$. En outre, si $t \to 0$ dans (2.23) on obtient $a^{-1}h = f'$.

Ensuite, on laisse t tendre vers $+\infty$ dans (2.23). On obtient

$$f' = -iR^{-1}g.$$

En effet, R^{-1} étant borné sur $L^p(\mathbb{R})$, il suffit de voir, d'une part, que $S(t)g \to 0$ faiblement. Or on tire du lemme I.11 que $\|S(t)g\|_\infty \leq Ct^{-1+1/p}\|g\|_p$ et $\|S(t)g\|_p \leq C$ uniformément en $t > 0$. Ceci implique la convergence désirée. D'autre part, $a\partial_x u(t)$ vérifie $(D)_p$ pour $\tilde{L}$, donc par le théorème II.7,

$$a\partial_x u(t) = S^{(b,a)}(t)(h).$$

Les mêmes estimations s'appliquent et entraînent que $\partial_x u(t) \to 0$ faiblement dans $L^p(\mathbb{R})$ si $t \to +\infty$.

Il reste à voir (ii.5). Le membre de droite de l'équation (2.21) est toujours dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $t > 0$. Pour $t = t_0$, $u(t_0) \in L^p(\mathbb{R})$ par hypothèse, donc $f \in L^p(\mathbb{R})$. En tenant compte de (ii.1), $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. D'après (ii.4),

$$S(\tau)g = iS(\tau)Rf' = -S(\tau)(bDaD)^{1/2}f = -(bDaD)^{1/2}S(\tau)f = \partial_\tau S(\tau)f.$$

En intégrant dans (2.21), on a donc $u(t) = S(t)f$ pour tout $t > 0$.

Remarque. — L'assertion (ii.4) implique clairement l'unicité modulo les constantes pour $(N)_p$. En effet, si la donnée de Neumann est 0 alors $u(t) - f = 0$ p.p. pour tout $t > 0$ d'après (2.21) et la dérivée-distribution de f est nulle. Donc u est constante sur $\mathbb{R}^2_+$.

II.4. Une fonction d'aire et espaces de Hardy.

Nous démontrons ici l'assertion iii) de la section I.8. Les notations sont les suivantes. La fonction $b(x)$ est identiquement égale à 1, si bien que $S(t)$ est le semi-groupe engendré par $(DaD)^{1/2}$. On posera $u(t,x) = S(t)f(x)$ pour une distribution $f \in \mathcal{L}'_1$ et si $\Gamma_r(x) = \{(t,y)\,;\, |y-x| \leq rt\}$ alors $u^*(x) = \sup_{\Gamma_1(x)} |u(t,y)|$. On pose ensuite

$$\mathcal{G}u(x) = \left(\int_{\Gamma_r(x)} |\nabla u(t,y)|^2 \, dydt \right)^{1/2}$$

où $r < 1$. L'opérateur ∇ porte sur les deux variables. Pour le lemme suivant, l'ouverture des cônes est sans importance à condition d'avoir l'inclusion stricte de $\Gamma_r(x)$ dans $\Gamma_1(x)$. On prendra $r = 1/2$ pour simplifier. Avec ces notations, on a :

LEMME II.10. — $\|\mathcal{G}u\|_p \leq c_p \|u^*\|_p$ pour $0 < p < 2$.

La preuve suit l'argument de [FS], p. 162, avec quelques modifications dues à l'équation considérée ici.

Commençons par supposer que $u^* \in L^2$, *i.e.*, $u(t,x) = S(t)f(x), f \in L^2$, d'après le théorème II.7. Cette hypothèse sera relevée plus tard. Il suffit de considérer les fonctions de distributions de $\mathcal{G}u$ et u^* et de montrer l'inégalité

$$|\{\mathcal{G}u > \alpha\}| \leq c \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \int_{u^* \leq \alpha} (u^*)^2 + |\{u^* > \alpha\}| \right\}, \quad \alpha > 0, \tag{2.24}$$

où c est une constante indépendante de α. En effet, intégrer cette inégalité contre $\alpha^{p-1} d\alpha$ sur $]0, +\infty[$ démontre l'inégalité du lemme.

Soit $F = \{u^* \leq \alpha\}$ et $\mathcal{R} = \cup_{x \in F} \Gamma_{1/2}(x)$. Puisque $\{\mathcal{G}u > \alpha\} \cap {}^c\!F \subset {}^c\!F$ il suffit d'estimer la mesure de $\{\mathcal{G}u > \alpha\} \cap F$. Partant de l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on a

$$|\{\mathcal{G}u > \alpha\} \cap F| \leq \frac{1}{\alpha^2} \int_{u^* \leq \alpha} (\mathcal{G}u)^2,$$

puis on remplace $\mathcal{G}u$ par sa définition. En inversant l'ordre d'intégration et en utilisant l'accrétivité de $a(x)$ on majore cette intégrale par $c\alpha^{-2}\mathrm{Re}\, I$ où

$$I = \iint_{\mathcal{R}} t(\partial_t u \partial_t \bar{u} + ta\partial_x u \partial_x \bar{u})\, dxdt.$$

A ce point, on intègre par parties ce qui est justifié si l'on approxime le domaine $\mathcal{R}$ par une suite de domaines bornés plus réguliers et uniformément lipschitziens. Nous omettons cette étape technique et renvoyons à [FS]. Soulignons cependant que la convergence à l'infini des intégrales qui suivent sont garanties par l'hypothèse qualitative $u = S(t)f, f \in L^2$, et les propriétés du noyau de Poisson exprimées dans le lemme I.11. Avec ces précautions, il vient

$$\begin{aligned} I = \int_{\partial\mathcal{R}} N_t t\partial_t u\, \bar{u}\, d\sigma &+ \int_{\partial\mathcal{R}} N_x ta\partial_x u\, \bar{u}\, d\sigma \\ &- \iint_{\mathcal{R}} \partial_t u\, \bar{u}\, dtdx \\ - \iint_{\mathcal{R}} & t(\partial_t^2 u + \partial_x(a\partial_x u))\, \bar{u}\, dtdx, \end{aligned}$$

où $d\sigma$ désigne la mesure de surface sur $\partial\mathcal{R}$ et $N = (N_t, N_x)$ est la normale extérieure à $\partial\mathcal{R}$.

Tout d'abord, la dernière intégrale est nulle puisque u est solution de l'équation $\partial_t^2 u + \partial_x(a\partial_x u) = 0$.

La partie réelle de l'avant-dernière vaut $J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\partial\mathcal{R}} N_t |u|^2\, d\sigma$. On voit que $\partial\mathcal{R} = F \cup E$ où l'ensemble E se situe "au-dessus" du complémentaire de F. D'une part,

$$\int_F |N_t||u|^2\, d\sigma = \int_F |u|^2\, dx \le \int_F (u^*)^2\, dx.$$

D'autre part, si $(t,x) \in E$ alors $(t,x) \in \Gamma_1(z)$ où $z \in F$, donc $|u| \le \alpha$ sur E. On en déduit

$$\int_E |N_t||u|^2\, d\sigma \le \alpha^2 \int_E d\sigma \le 2\alpha^2 \int_{{}^cF} dx = 2\alpha^2 |\{u^* > \alpha\}|.$$

Il reste à considérer les deux premières intégrales que l'on majore par

$$K = c\int_E t|\nabla u||u|\, d\sigma$$

en remarquant qu'il n'y a pas de contribution sur F. Il suffit de montrer que $t|\nabla u| \leq c\alpha$ sur E et l'on peut conclure comme précédemment.

Si $(t,x) \in E$, on sait qu'il existe $z \in F$ tel que $|z-x| \leq t/2 < t$. On choisit alors une boule B de rayon ct centrée en (t,x) de telle sorte que la boule $\tilde{B}$ de rayon double soit contenue dans $\Gamma_1(z)$. On a donc $|u| \leq \alpha$ sur $\tilde{B}$. On applique alors le théorème II.2 et l'inégalité de Cacciopoli (2.3) et il vient

$$t^2|\nabla u(t,x)|^2 \leq ct^2\frac{1}{|B|}\int_B |\nabla u|^2 \leq ct^2\frac{1}{|\tilde{B}|^2}\int_{\tilde{B}} |u|^2 \leq ct^2\frac{|\tilde{B}|}{|\tilde{B}|^2}\alpha^2 \leq c\alpha^2.$$

On obtient finalement (2.24) en collectant les majorations portant sur J et K.

L'hypothèse qualititative $u^* \in L^2$ peut se relever de la façon suivante. Si $u^* \in L^p$ pour $p < 2$ alors par un argument géométrique on voit que $u_\varepsilon^* \in L^2$ où $u_\varepsilon(t,x) = u(t+\varepsilon, x)$ et on a donc $\|\mathcal{G}u_\varepsilon\|_p \leq c_p\|u_\varepsilon^*\|_p$. On conclut en utilisant le lemme de convergence monotone en observant que $\|u_\varepsilon^*\|_p \leq \|u^*\|_p$ et que $\mathcal{G}u_\varepsilon(x) \uparrow \mathcal{G}u(x)$.

Remarque. — Cette démonstration ne donne rien pour les solutions de l'équation $\partial_t^2 u - bDaDu = 0$ sauf si $b(x)$ est à valeurs réelles.

On peut maintenant passer à la démonstration du point iii) de la section I.8 et l'on reprend les mêmes notations. On choisit $\psi \in \mathcal{F}_\eta$, η grand et $\psi(0) = 0$ telle que

$$1 = \int_0^{+\infty} \psi(t^2 z)\left(-tz^{1/2}e^{-tz^{1/2}}\right)\frac{dt}{t}$$

pour tout $z \neq 0$ dans un secteur assez grand. On a donc

$$Id = \int_0^{+\infty} \psi_t(DaD)\frac{tdS(t)}{dt}\frac{dt}{t}. \tag{2.25}$$

L'intégrale converge a priori fortement dans L^2 en utilisant le fait que DaD est maximal-accrétif (voir [Mc2]).

Soit $f \in \mathcal{H}_{a,1}^p \cap L^2$, $1/2 < p \leq 1$ et montrons que $f \in \mathcal{H}^p$. Tout d'abord, on a avec convergence dans L^2,

$$f = \int_0^{+\infty} \psi_t(DaD)t\frac{dS(t)}{dt}f\frac{dt}{t}. \tag{2.26}$$

Ensuite, on réinterprète (2.26) de la façon suivante (quitte à tronquer l'intégrale en 0 et $+\infty$ dans un premier temps). Posons $v(t,x) = t\partial_t S(t)f(x)$. Si $\psi_t(x,y)$ désigne le noyau de $\psi_t(DaD)$, on a donc

$$f = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_t(\cdot,y)v(t,y)\,dy\,\frac{dt}{t}. \tag{2.27}$$

Nous affirmons que cette dernière intégrale appartient à $\mathcal{H}^p$. En effet, le lemme II.10 implique que

$$F(x) = \left(\int_{\Gamma_{1/2}(x)} |v(t,y)|^2 \,\frac{dydt}{t^2}\right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R})$$

avec

$$\|F\|_p \leq c_p \|u^*\|_p,$$

c'est-à-dire v appartient à l'espace des tentes T_2^p, dans la notation de [CMS]. La fonction v admet donc une décomposition atomique au sens de T_2^p et il suffit de montrer que (2.27) est une molécule de $\mathcal{H}^p$ (par exemple au sens de [CW]) lorsque v est remplacée par un atome de T_2^p, voir [CMS], pp. 328-329. Cela découle facilement des estimations fournies par le lemme I.11

$$|\psi_t(x,y)| + |t\partial_x \psi_t(x,y)| \leq c w_{\nu,t}(x-y)$$

pour un ν grand et de $\int \psi_t(x,y)\,dx = 0$ (qui donne le moment nul nécessaire pour l'appartenance à $\mathcal{H}^p$). On a donc $f \in \mathcal{H}^p$ et sa norme est majorée par $c_p\|F\|_p \leq c_p\|u^*\|_p = c_p\|f\|_{\mathcal{H}^p_{a,1}}$.

Il reste à s'affranchir de l'hypothèse que $f \in L^2$, avec le résultat de densité suivant.

LEMME II.11. — *Pour $f \in \mathcal{H}^p_{a,1}$ il existe une suite $f_n \in \mathcal{H}^p_{a,1} \cap L^2$, uniformément bornée dans $\mathcal{H}^p_{a,1}$, telle que pour tout $\varphi \in C_0^\infty$, (f_n,φ) converge vers (f,φ) si $n \to +\infty$.*

Si $f \in \mathcal{H}^p_{a,1}$, on applique ce qui précède à chaque f_n. On a donc

$$\sup \|f_n\|_{\mathcal{H}^p} \leq c_p \sup \|f_n\|_{\mathcal{H}^p_{a,1}} < +\infty.$$

On sait alors que (f_n) possède une sous-suite (f_{n_k}) convergeant au sens des distributions vers un élément g de $\mathcal{H}^p$. Soit donc $\varphi \in C_0^\infty$, le lemme et ce qui précède donnent

$$(f,\varphi) = (g,\varphi),$$

c'est-à-dire $f = g$ au sens des distributions, et $f \in \mathcal{H}^p$ au même titre que g.

Il reste à démontrer le lemme. Le noyau de Poisson étant trop peu décroissant, on le remplace par la résolvante. Prenons donc $T_n = (1 + t^2 DaD)^{-1}$ avec $t = 1/n$ et posons $f_n = T_n(f)$ pour $f \in \mathcal{H}^p_{a,1}$. On observe grâce à la caractérisation de $\mathcal{H}^p_{a,1}$ par les fonctions maximales et à l'aide d'un argument déjà vu que pour chaque n, $f_n \in L^2$ (en fait, f_n est même continue et bornée). De plus, $\|f_n\|_{\mathcal{H}^p_{a,1}} \leq c_p \|f\|_{\mathcal{H}^p_{a,1}}$. Il reste à montrer la convergence au sens des distributions.

Si $\varphi \in C_0^\infty$, la décroissance exponentielle du noyau de T_n implique que $T_n(\varphi) \in \mathcal{L}_1$ avec $N_2(T_n(\varphi))$ uniformément bornée et que $\varphi - T_n(\varphi)$ converge vers 0 dans $\mathcal{L}_1$ si $n \to +\infty$ (pour calculer la dérivée de $T_n(\varphi)$, utiliser à nouveau les formules de commutation sur la résolvante obtenues en section I.5 pour faire porter la dérivation sur φ). On a

$$\begin{aligned}(f_n, \varphi) = \int T_n f(x) \varphi(x)\, dx &= \int (T_n(x, \cdot), f) \varphi(x)\, dx \\ &= \left(\int \varphi(x) T_n(x, \cdot)\, dx, f \right) = (f, T_n(\varphi))\end{aligned}$$

ce qui se justifie en approximant l'intégrale par des sommes de Riemann (remarquer aussi que T_n est symétrique). On peut alors passer à la limite et on obtient (f, φ). Ceci achève l'argument.

Remarque. — À l'aide des résultats ci-dessus on peut maintenant formuler le problème de Dirichlet pour l'opérateur du théorème II.7 avec $1/2 < p \leq 1$, la conclusion étant que l'unique solution est donnée par $u(t) = S(t)f$ où $f \in b^{-1}\mathcal{H}^p$. Noter cependant que nous n'avons pas montré qu'un tel u admet presque partout une limite non-tangentielle. Ceci est d'ailleurs relié au fait que nous ne savons pas si les solutions de l'équation $\partial_t^2 u + b\partial_x a \partial_x u = 0$ sur un ouvert arbitraire et qui sont continues jusqu'au bord vérifient le principe du maximum faible. (Ajout après acceptation pour publication : G. Verchota a récemment construit des contre-exemples au principe du maximum faible sur des domaines lipschitziens en deux dimensions en considérant des opérateurs elliptiques à coefficients complexes constants.)

BIBLIOGRAPHIE

[A] P. AUSCHER, Étude de l'opérateur $\sqrt{bDaD}$, séminaire E.D.P. de Rennes, octobre 1991.

[AMcT] P. AUSCHER, A. MCINTOSH, et Ph. TCHAMITCHIAN, Noyau de la chaleur d'opérateurs elliptiques complexes, Math. Research Letters, 1 (1994), 37–45.

[AT1] P. AUSCHER, et Ph. TCHAMITCHIAN, Ondelettes et conjecture de Kato, C. R. Acad. Sci. Paris, 313 (1991), 63–66.

[AT2] P. AUSCHER, et Ph. TCHAMITCHIAN, Estimates on Green's kernel using wavelets and applications, in Topics in the theory and applications of wavelets, L. Schumaker and G. Webb eds., Academic Press, Boston, 1993.

[AT3] P. AUSCHER, et Ph. TCHAMITCHIAN, Sur le problème de la racine carrée pour les opérateurs différentiels accrétifs, en cours de rédaction.

[CJ] M. CHRIST, et J.-L. JOURNÉ, Polynomial growth estimates for multilinear singular integral operators, Acta Math., 159 (1987), 51–80.

[CDM] R. COIFMAN, D.G. DENG, et Y. MEYER, Domaine de la racine carrée de certains opérateurs différentiels accrétifs, Ann. Inst. Fourier, 33-2 (1983), 123–134.

[CMcM] R. COIFMAN, A. MCINTOSH, et Y. MEYER, L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur $L^2(R)$ pour les courbes lipschitziennes, Ann. Math., 116 (1982), 361–387.

[CMS] R. COIFMAN, Y. MEYER, et E.M. STEIN, Some new functions spaces and their applications to harmonic analysis, J. Funct. Anal., 62 (1985), 304–335.

[CS] R. COIFMAN, et S. SEMMES, Real-analytic operator-valued functions defined in BMO, Volume in honor of M. Cotlar, C. Sadosky ed., Marcel Dekker, 1991.

[CW] R. COIFMAN, et G. WEISS, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc., 83 (1977), 569–645.

[CFK] M. CWIKEL, E. FABES, et C. KENIG, On the lack of L^∞ estimates for solutions of elliptic systems or equations with complex coefficients, conf. in honor of Antoni Zygmund, W. Beckner *et al* eds., Wadsworth Math Series, (1981), 557–576.

[D] G. DAVID, Wavelets and singular Integrals on curves and surfaces, Lecture Notes in Math. 1465, Springer Verlag, 1991.

[Da] E.B. DAVIES, Heat kernels and spectral theory, Cambridge Univ. Press, 1992.

[DJS] G. DAVID, J.-L. JOURNÉ, et S. SEMMES, Opérateurs de Calderón-Zygmund, fonctions para-accrétives et interpolation, Rev. Mat. Iberoamericana, 1 (1985), 1–56.

[FJK] E.B. FABES, D.S. JERISON, et C.E. KENIG, Multilinear Littlewood-Paley estimates with applications to partial differential equations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 79 (1982), 5746–5750.

[FS] C. FEFFERMAN, et E.M. STEIN, H^p spaces of several variables, Acta Math., 129 (1972) 137–193.

[FJW] M. FRAZIER, B. JAWERTH, B., et G. WEISS, Littlewood-Paley theory and the study of function spaces, CBMS - conference lecture notes 79, AMS, Providence RI, 1991.

[GC-RF] J. GARCIA-CUERVA, et J.-L. RUBIO de FRANCIA, Weighted norm inequalities and related topics, North Holland Math. studies, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1985.

[G] M. GIAQUINTA, Multiple integrals in the calculus of variations and non-linear elliptic systems, Annals of Math. Studies, 105, Princeton Univ. Press, 1983.

[GT] D. GILBARG, et N.S. TRUDINGER, elliptic PDE of second order, Springer Verlag, 1983.

[H] L. HÖRMANDER, The analysis of linear partial differential operators, tome III, Springer Verlag, 1983.

[K] T. KATO, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, New York, 1966.

[Ke] C. KENIG, Harmonic Analysis techniques for second order elliptic boundary value problems, CBMS lectures notes n^o 84, American Mathematical Society, Providence.

[KM] C. KENIG, et Y. MEYER, the Cauchy integral on lipschitz curves the square root of second order accretive operators are the same, Recent progress in Fourier analysis, Peral *eds.*, Math. Studies, 111 (1985), 123–145.

[KP] P. KENIG, et J. PIPHER, The Neumann problem for elliptic equations with non-smooth coefficients, Inventiones Matematicae, 113 (1993), 447–509.

[MNP] V.G. MAZ'YA, S.A. NAZAROV, et B.A. PLAMENEVSKII, Absence of the De Giorgi-type theorems for strongly elliptic equations with complex coefficients, J. Math. Sov., 28 (1985), 726–739.

[Mc1] A. MCINTOSH, The square root problem for elliptic operators, in Functional analytic methods for partial differential equations, Lect. notes in Math., Springer Verlag, Berlin, 1450 (1990), 122–140.

[Mc2] A. MCINTOSH, Operators which have an H^∞ functional calculus, *Miniconference on operator theory and partial differential equations*, Proc. of the Centre for Math. Analysis., Australian National Univ., 14 (1986) 210-231.

[McM] A. MCINTOSH, et Y. MEYER, Algèbres d'opérateurs définis par des intégrales singulières, C. R. Acad. Sci. Paris, 301 (1985), 395–397.

[M] Y. MEYER, Ondelettes et opérateurs, Hermann, volume 2, 1990.

[Mo] C. MORREY, Multiple integrals in the calculus of variations, Springer Verlag, 1966.

[S] S. SEMMES, Square function estimates and the $T(b)$ theorem, Proc. Amer. Math. Soc., 110, no. 3 (1990) 721–726.

[T] H. TANABE, Equations of evolution, Pitman, London, 1979.

Manuscrit reçu le 22 juin 1994,
accepté le 23 janvier 1995.

P. AUSCHER,
IRMAR
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex (France).

P. TCHAMITCHIAN,
Faculté des Sciences et Techniques
de Saint Jérôme
13397 Marseille Cedex 13 (France).