ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DANIEL GUIN

Cohomologie des algèbres de Lie croisées et K-théorie de Milnor additive

Annales de l'institut Fourier, tome 45, nº 1 (1995), p. 93-118

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_1_93_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 1 (1995), 93-118

COHOMOLOGIE DES ALGÈBRES DE LIE CROISÉES ET *K*-THÉORIE DE MILNOR ADDITIVE

par Daniel GUIN

0. Introduction.

Dans ce travail, nous construisons des groupes d'homologie et de cohomologie *non abéliennes* des algèbres de Lie. Nous utilisons ces groupes pour comparer, en basse dimension, l'homologie cyclique et la K-théorie de Milnor additive d'un anneau non commutatif.

Si $\mathfrak{G}$ est une k-algèbre de Lie et $\mathfrak{M}$ une k-algèbre de Lie munie d'une structure de $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée (Définition 1.2), nous définissons des k-modules de cohomologie $\mathfrak{H}^0(\mathfrak{G},\mathfrak{M})$ et $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G},\mathfrak{M})$ (Définition 2.6), qui sont canoniquement munis d'une structure d'algèbres de Lie. Nous montrons que le produit tensoriel d'algèbres de Lie ([E1], [E2]) est un foncteur adjoint du foncteur obtenu en considérant les 1-cocycles de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{M}$, et nous en déduisons l'existence de k-modules d'homologie $\mathfrak{H}_0(\mathfrak{G},\mathfrak{M})$ et $\mathfrak{H}_1(\mathfrak{G},\mathfrak{M})$ (Définition 3.1). Les foncteurs $\mathfrak{H}_0(\mathfrak{G},-)$, $\mathfrak{H}_1(\mathfrak{G},-)$, $\mathfrak{H}^0(\mathfrak{G},-)$, $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G},-)$ satisfont les propriétés usuelles des foncteurs cohomologiques, en particulier ils s'inscrivent dans de «longues» suites exactes associées à une suite exacte courte sur les coefficients (Théorèmes 2.8 et 4.3). Lorsque $\mathfrak{M}$ est une algèbre de Lie abélienne, ces modules s'identifient aux modules d'homologie et de cohomologie de $\mathfrak{G}$ à coefficients dans la représentation $\mathfrak{M}$.

Si A est une k-algèbre associative unitaire, le théorème de Loday-Quillen ([LQ]) permet de voir l'homologie cyclique $HC_*(A)$ de A comme l'analogue additif de la K-théorie de Quillen $K_*(A)$. D'autre part, Loday a défini ([L1], [L2]) des groupes, notés $K_*^{M\mathrm{add}}(A)$, qui jouent, vis-à-vis

Mots-clés : Algèbres de Lie – Produit tensoriel – Algèbres de Lie croisées – Cohomologie et homologie non abélienne – Homologie cyclique – K-théorie de Milnor.
Classification math. : 17B40 – 17B56 – 17B99 – 18G50.

des groupes $HC_*(A)$, un rôle analogue à celui joué par les groupes de K-théorie de Milnor $K_*^M(A)$ vis-à-vis des groupes $K_*(A)$ ([G2]). Si l'algèbre A est commutative les groupes $HC_1(A)$ et $K_2^{M\mathrm{add}}(A)$ coïncident. Si l'algèbre A est non commutative, en la considérant comme une k-algèbre de Lie ($[a,b] = ab - ba$) nous construisons une A-algèbre de Lie croisée $V(A)$telle que la suite

$$0 \to HC_1(A) \to V(A) \to [A,A] \to 0$$

soit une suite exacte de A-algèbres de Lie croisées. La longue suite exacte d'homologie associée à cette suite exacte courte permet de comparer les groupes $HC_1(A)$ et $K_2^{M\mathrm{add}}(A)$. Précisément (Théorème 5.7), nous montrons qu'on a la suite exacte de k-modules

$$\begin{aligned} A/[A,A] \otimes_k HC_1(A) &\to \mathfrak{H}_1(A, V(A)) \to \mathfrak{H}_1(A,[A,A]) \\ &\to HC_1(A) \to K_2^{M\mathrm{add}}(A) \to [A,A]/[A,[A,A]] \to 0. \end{aligned}$$

Dans toute la suite k sera un anneau commutatif et les algèbres de Lie seront des k-modules. L'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ sera fixée et opérera sur elle-même par le crochet de Lie. Le signe $\square$ indique la fin ou l'absence d'une démonstration.

1. Algèbres de Lie précroisées et croisées.

Nous allons rappeler dans ce chapitre les définitions et propriétés dont nous aurons besoin dans la suite. Pour des résultats plus complets, on pourra consulter [E1], [E2], [KL], [LR].

DÉFINITION 1.1. —*Soient $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{M}$ deux algèbres de Lie. Une action de Lie de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{M}$ est la donnée d'une application*

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} \times \mathfrak{M} &\longrightarrow \mathfrak{M} \\ (g,m) &\longmapsto {}^g m \end{aligned}$$

satisfaisant

(i) $\quad {}^{\lambda g}m = {}^g(\lambda m) = \lambda({}^g m)$

(ii) $\quad {}^g(m+m') = {}^g m + {}^g m'$

(iii) $\quad {}^{g+g'}m = {}^g m + {}^{g'}m$

(iv) $\quad {}^{[g,g']}m = {}^{g}({}^{g'}m) - {}^{g'}({}^{g}m)$

(v) $\quad {}^{g}[m,m'] = [{}^{g}m,m'] + [m,{}^{g}m']$

pour $\lambda \in k$, $g,g' \in \mathfrak{G}$, $m,m' \in \mathfrak{M}$.

DÉFINITION 1.2. — *Soient $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{M}$ deux algèbres de Lie.*

(i) *Une structure de $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie précroisée sur $\mathfrak{M}$ est la donnée d'une action de Lie de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{M}$ et d'un homomorphisme d'algèbres de Lie*

$$\mu : \mathfrak{M} \to \mathfrak{G}$$

vérifiant

$$\forall g \in \mathfrak{G},\ \forall m \in \mathfrak{M},\ \mu({}^{g}m) = [g,\mu(m)]. \tag{1.2.1}$$

(ii) *Si de plus la relation*

$$\forall m,m' \in \mathfrak{M},\quad {}^{\mu(m)}m' = [m,m'] \tag{1.2.2}$$

est satisfaite, $\mathfrak{M}$ est munie d'une structure de $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée.

Notation. — Une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie précroisée (resp. croisée) sera notée $(\mathfrak{M},\mu)$, où μ est l'homomorphisme structural de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{G}$.

DÉFINITION 1.3. — *Un homomorphisme de $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie précroisées (resp. croisées) $f : (\mathfrak{M},\mu) \to (\mathfrak{N},\nu)$ est un homomorphisme de k-algèbres de Lie $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}$-équivariant et tel que $\mu = \nu \circ f$.*

On notera $LPC(\mathfrak{G})$ (resp. $LC(\mathfrak{G})$) la catégorie des $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie précroisées (resp. croisées).

PROPOSITION 1.4. — *Si $(\mathfrak{M},\mu)$ est une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée, l'image* $\mathrm{Im}\mu$ *de μ est un idéal de $\mathfrak{G}$ et le noyau* $\mathrm{Ker}\mu$ *de μ est un idéal de $\mathfrak{M}$ contenu dans le centre de $\mathfrak{M}$.*

C'est une conséquence évidente des relations (1.2.1) et (1.2.2). □

PROPOSITION 1.5. — *Soient $(\mathfrak{M},\mu)$ et $(\mathfrak{N},\nu)$ deux $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie croisées. Si $f : (\mathfrak{M},\mu) \to (\mathfrak{N},\nu)$ est un homomorphisme de $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie croisées, $(\mathfrak{M},f)$ est une $\mathfrak{N}$-algèbre de Lie croisée.*

Démonstration. — Considérons l'action de $\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{M}$ définie par

$$\forall n \in \mathfrak{N},\ \forall m \in \mathfrak{M}, {}^{n}m = {}^{\nu(n)}m.$$

On vérifie aisément que c'est une action de Lie de $\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{M}$. De plus

$$f({}^{n}m) = f({}^{\nu(n)}m) = {}^{\nu(n)}f(m) = [n, f(m)]$$

$$^{f(m)}m' = {}^{\nu(f(m))}m' = {}^{\mu(m)}m' = [m, m']. \qquad \square$$

DÉFINITION 1.6. — *Une suite*

$$(\mathfrak{L}, \lambda) \xrightarrow{f} (\mathfrak{M}, \mu) \xrightarrow{g} (\mathfrak{N}, \nu)$$

de $LPC(\mathfrak{G})$ (resp. $LC(\mathfrak{G})$) est exacte si la suite d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{L} \xrightarrow{f} \mathfrak{M} \xrightarrow{g} \mathfrak{N}$$

est exacte.

PROPOSITION 1.7. — *Si la suite*

$$(\mathfrak{L}, \lambda) \xrightarrow{f} (\mathfrak{M}, \mu) \xrightarrow{g} (\mathfrak{N}, \nu)$$

est exacte dans $LC(\mathfrak{G})$, l'homomorphisme λ est nul et $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Lie abélienne.

Démonstration. — En effet, on a $\lambda = \nu \circ g \circ f$ et $g \circ f = 0$. Par conséquent, $\mathfrak{L} = \mathrm{Ker}\lambda$ et d'après la proposition (1.4) l'algèbre le Lie $\mathfrak{L}$ est abélienne (*i.e* $[l, l'] = 0$, $\forall l, l' \in \mathfrak{L}$). $\square$

Exemples.

(1.8.1) Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ opérant sur elle-même par le crochet de Lie, $(\mathfrak{G}, \mathrm{id}_{\mathfrak{G}})$ est une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée. En particulier toute k-algèbre associative est une algèbre de Lie croisée sur elle-même.

(1.8.2) Si M est une représentation de $\mathfrak{G}$, $(M, 0)$, où 0 est l'homomorphisme nul, est une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée, et réciproquement. Dans la suite toute représentation de $\mathfrak{G}$ sera supposée munie de cette structure de $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée triviale.

(1.8.3) Pour tout idéal $\mathfrak{H}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ (opérant sur elle-même par le crochet de Lie) $(\mathfrak{H}, i)$, où i est l'inclusion de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$, est une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée.

2. Cohomologie des algèbres de Lie croisées.

Rappelons que si $\mathfrak{A}$ est une k-algèbre de Lie et M une représentation de $\mathfrak{A}$, les 1-cocycles de $\mathfrak{A}$ dans M sont les homomorphismes croisés, ou dérivations, c'est-à-dire les k-homomorphismes $\alpha : \mathfrak{A} \to M$ vérifiant

$$a\alpha(a') - a'\alpha(a) = \alpha([a, a']).$$

Le module de cohomologie $H^1(\mathfrak{A}, M)$ est le quotient du module des dérivations par le sous-module des dérivations principales, c'est-à-dire les dérivations α vérifiant

$$\exists\, m \in M \text{ tel que } \forall a \in \mathfrak{A}, \alpha(a) = am.$$

Nous allons montrer que dans le cadre des algèbres de Lie croisées, nous pouvons généraliser ces notions pour définir un module de cohomologie d'une algèbre de Lie à coefficients dans une algèbre de Lie non abélienne. Ce module est lui-même muni d'une structure d'algèbre de Lie, en général non triviale.

Dans toute la suite $\mathfrak{G}$ sera une k-algèbre de Lie fixée opérant sur elle-même par le crochet de Lie.

L'algèbre de Lie $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

Soient $(\mathfrak{M}, \mu)$ une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie précroisée et $(\mathfrak{N}, \nu)$ une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée.

DÉFINITION 2.1. — *Un homomorphisme croisé ou dérivation de* $(\mathfrak{M}, \mu)$ *dans* $(\mathfrak{N}, \nu)$ *est un* k*-homomorphisme* $\alpha : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ *vérifiant*

$$\forall\, m, m' \in \mathfrak{M},\ {}^{\mu(m)}\alpha(m') - {}^{\mu(m')}\alpha(m) = \alpha([m, m']).$$

DÉFINITION 2.2. — *Avec les notations ci-dessus, on note* $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ *l'ensemble des couples* (α, g) *où* α *est une dérivation de* $\mathfrak{M}$ *dans* $\mathfrak{N}$ *et* g *un élément de* $\mathfrak{G}$*, tels que*

$$\forall m \in \mathfrak{M},\ \nu(\alpha(m)) = [g, \mu(m)]$$

c'est-à-dire $\nu \circ \alpha = \mathrm{ad}_g \circ \mu$.

Remarque. — Pour tout élément fixé g de $\mathfrak{G}$, le k-homomorphisme de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}$ défini par $h \to [g,h]$ est évidemment une dérivation de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}$. Nous dirons qu'une telle dérivation est intérieure. L'ensemble $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ est donc l'ensemble des dérivations de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ au-dessus des dérivations intérieures de $\mathfrak{G}$.

THÉORÈME 2.3. — *Soient* $(\mathfrak{M},\mu)$ *une* $\mathfrak{G}$*-algèbre de Lie précroisée et* $(\mathfrak{N},\nu)$ *une* $\mathfrak{G}$*-algèbre de Lie croisée. L'ensemble* $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ *est muni d'une structure de* $\mathfrak{G}$*-algèbre de Lie précroisée.*

LEMME 2.3.1. — *L'ensemble* $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ *est muni d'une structure de* k*-algèbre de Lie.*

Démonstration. — Définissons les opérations suivantes : pour tout (α,g) et (β,h) de $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ et pour tout λ de k, on pose

$$\begin{aligned}(\alpha,g)+(\beta,h) &= (\alpha+\beta, g+h)\\ \lambda(\alpha,g) &= (\lambda\alpha,\lambda g)\\ [(\alpha,g),(\beta,h)] &= (\alpha*\beta,[g,h])\end{aligned}$$

où $\alpha*\beta$ est définie par

$$\forall\, m\in\mathfrak{M},\ \alpha*\beta(m)=\alpha({}^{h}m)-\beta({}^{g}m).$$

La démonstration de ce lemme est une suite de vérifications simples utilisant de façon essentielle les relations (1.2.1) et (1.2.2). A titre d'exemple, montrons que $\alpha*\beta$ est une dérivation. Calculons $\alpha*\beta([m,m'])$:

$$\begin{aligned}\alpha*\beta([m,m']) &= \alpha({}^{h}[m,m'])-\beta({}^{g}[m,m'])\\ &= \alpha([{}^{h}m,m'])+\alpha([m,{}^{h}m'])\\ &\quad -\beta([{}^{g}m,m'])-\beta([m,{}^{g}m']).\end{aligned}$$

D'après la relations (1.2.1), cette expression s'écrit :

$$\begin{aligned}&{}^{\mu({}^{h}m)}\alpha(m')-{}^{\mu(m')}\alpha({}^{h}m)+{}^{\mu(m)}\alpha({}^{h}m')\\ &\quad -{}^{\mu({}^{h}m)}\alpha(m)-{}^{\mu({}^{g}m)}\beta(m')+{}^{\mu(m')}\beta({}^{g}m)\\ &\quad -{}^{\mu(m)}\beta({}^{g}m')+{}^{\mu({}^{g}m')}\beta(m)\end{aligned}$$

ce qui est égal à

$${}^{\mu(m)}\alpha*\beta(m')-{}^{\mu(m')}\alpha*\beta(m)+{}^{\mu({}^{h}m)}\alpha(m')$$

$$-^{\mu({}^h m')}\alpha(m) + {}^{\mu({}^g m')}\beta(m) - {}^{\mu({}^g m)}\beta(m').$$

Pour montrer que $\alpha * \beta$ est une dérivation, il suffit de montrer que l'expression

$${}^{\mu({}^h m)}\alpha(m') - {}^{\mu({}^h m')}\alpha(m) + {}^{\mu({}^g m')}\beta(m) - {}^{\mu({}^g m)}\beta(m')$$

est nulle. D'après la relation (1.2.1), cette dernière expression s'écrit :

$${}^{[h,\mu(m)]}\alpha(m') - {}^{[h,\mu(m')]}\alpha(m) + {}^{[g,\mu(m')]}\beta(m) - {}^{[g,\mu(m)]}\beta(m').$$

Mais, puisque $(\mathfrak{N}, \nu)$ est une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée, d'après la relation (1.2.2), cette dernière expression s'écrit

$$[\beta(m), \alpha(m')] - [\beta(m'), \alpha(m)] + [\alpha(m'), \beta(m)] - [\alpha(m), \beta(m')]$$

qui est nulle. □

On définit maintenant une action de $\mathfrak{G}$ sur $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ par

$$\forall g \in \mathfrak{G},\ \forall(\alpha, h) \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}), {}^g(\alpha, h) = (\beta, [g, h])$$

où β est définie par

$$\forall m \in \mathfrak{M},\ \beta(m) = {}^g\alpha(m) - \alpha({}^g m).$$

L'élément $(\beta, [g, h])$ défini ci-dessus appartient à $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. On vérifie que l'action ainsi définie de $\mathfrak{G}$ sur $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ est une action de Lie et que l'application

$$\begin{aligned} \eta : \mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) &\longrightarrow \mathfrak{G} \\ (\alpha, g) &\longmapsto g \end{aligned}$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie vérifiant $\eta({}^g(\alpha, h)) = [g, \eta(\alpha, h)]$.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.3. □

On vérifie aisément que si $(\mathfrak{M}, \mu)$ est une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie précroisée, $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M}, -)$ est un foncteur de la catégorie des $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie croisées dans la catégorie des $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie précroisées.

Le foncteur $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, -)$.

On considère la $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée $(\mathfrak{G}, \mathrm{id}_{\mathfrak{G}})$, et soit $(\mathfrak{M}, \mu)$ une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée. On pose

$$\mathfrak{I} = \{(\eta_m, \mu(m) + c); m \in \mathfrak{M}, c \in Z(\mathfrak{G})\}$$

où η_m est la dérivation définie par $\eta_m(x) = {}^x m$, $x \in \mathfrak{G}$, et où $Z(\mathfrak{G})$ désigne le centre de $\mathfrak{G}$.

LEMME 2.4. — *L'ensemble $\mathfrak{I}$ est un idéal bilatère de l'algèbre de Lie* $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$.

Démonstration. — Notons $\overline{m}$ la classe de $-\mu(m)$ modulo $Z(\mathfrak{G})$. On a

$$\begin{aligned}&[(\alpha, g) + (\eta_m, \overline{m}), (\beta, h) + (\eta_{m'}, \overline{m}')]\\ &= [(\alpha, g), (\beta, h)] + [(\eta_m, \overline{m}), (\beta, h)] + [(\alpha, g), (\eta_{m'}, \overline{m}')] + [(\eta_m, \overline{m}), (\eta_{m'}, \overline{m}')].\end{aligned}$$

Pour prouver le résultat, il suffit de montrer que

$$\forall (\alpha, g) \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{M}) \text{ et } \forall m \in \mathfrak{M},\ \exists m_1 \in \mathfrak{M}$$

tel que

$$[(\alpha, g), (\eta_m, \overline{m})] = (\eta_{m_1}, \overline{m}_1).$$

Calculons, avec $c \in Z(\mathfrak{G})$,

$$\begin{aligned}[(\alpha, g), (\eta_m, \overline{m})] &= (\alpha * \eta_m, [g, -\mu(m) + c])\\ &= (\alpha * \eta_m, -\mu({}^g m)).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\alpha * \eta_m(x) &= \alpha({}^{-\mu(m)+c} x) - \eta_m({}^g x)\\ &= \alpha([x, \mu(m)]) - {}^{[g,x]} m\\ &= {}^x\alpha(\mu(m)) - {}^{\mu(m)}\alpha(x) - {}^{\mu(\alpha(x))} m\\ &= {}^x\alpha(\mu(m)) - [m, \alpha(x)] - [\alpha(x), m]\\ &= {}^x\alpha(\mu(m)) = \eta_{m_1}(x)\end{aligned}$$

avec $m_1 = \alpha(\mu(m))$. □

PROPOSITION 2.5. — *Soit M une représentation de $\mathfrak{G}$, munie de la structure de $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée triviale $(M, 0)$ (cf. (1.8.2)). Alors*

$\mathrm{Der}(\mathfrak{G}, M)/\mathfrak{I}$ *est une algèbre de Lie abélienne isomorphe au k-module de cohomologie classique* $H^1(\mathfrak{G}, M)$.

Démonstration. — L'homomorphisme structural de M étant l'homomorphisme nul, pour tout élément (α, g) de $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}, M)$, on a

$$\forall x \in \mathfrak{G}\ ,\ [g, x] = 0$$

d'où g appartient au centre $Z(\mathfrak{G})$ de $\mathfrak{G}$. Par conséquent (α, g) est équivalent à $(\alpha, 0)$. Ceci entraîne en particulier que le crochet de Lie induit sur $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}, M)$ est trivial. En notant $Z^1(\mathfrak{G}, M)$ l'ensemble des 1-cocycles de $\mathfrak{G}$ dans M, l'isomorphisme annoncé est induit par

$$\begin{aligned} Z^1(\mathfrak{G}, M) &\longrightarrow \mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}, M) \\ \alpha &\longmapsto (\alpha, g). \end{aligned}$$

□

Ceci nous amène à poser la définition suivante :

DÉFINITION 2.6. — *Pour toute $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée $(\mathfrak{M}, \mu)$, l'algèbre de Lie* $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})/\mathfrak{I}$ *sera notée* $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$.

Nous allons comparer $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$ et le k-module de cohomologie $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$. En effet, toute $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée $(\mathfrak{M}, \mu)$ peut, par oubli, être considérée comme une représentation de $\mathfrak{G}$. On considère alors le k-module de cohomologie classique $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$.

PROPOSITION 2.7. — *L'application qui, à (α, g) appartenant à* $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$ *associe α, induit un k-homomorphisme injectif de* $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$ *dans* $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$.

Démonstration. — Soit (α, g) élément de $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$ tel que la classe de α dans $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$ soit nulle. Il existe $m \in \mathfrak{M}$ tel que $\alpha(x) = \eta_m(x) = {}^x m$. Alors on a nécessairement $g \equiv -\mu(m) \bmod Z(\mathfrak{G})$ et la classe de (α, g) est nulle dans $\mathfrak{H}_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$. □

Remarque. — Par construction, $\mathfrak{H}_1(\mathfrak{G}, -)$ est un foncteur de la catégorie de $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie croisées dans celle des algèbres de Lie.

Une suite exacte de cohomologie.

Rappelons (*cf.* 1.7) que si

$$0 \to (\mathfrak{A}, \lambda) \to (\mathfrak{B}, \delta) \to (\mathfrak{C}, \mu) \to 0$$

est une suite exacte de $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie croisées, l'homomorphisme λ est nul et l'algèbre $\mathfrak{A}$ est abélienne; par conséquent, $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ s'identifie au k-module $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$, et l'on peut considérer le k-module $H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$.

Pour toute $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée $(\mathfrak{M}, \mu)$, notons $\mathfrak{H}^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$ l'idéal des éléments de $\mathfrak{M}$ invariants sous l'action de $\mathfrak{G}$,

$$\mathfrak{H}^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{M}) = \{m \in \mathfrak{M} \mid \forall\, g \in \mathfrak{G}, {}^g m = 0\}.$$

La relation ${}^{\mu(m)}m' = [m, m']$ implique que $\mathfrak{H}^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{M}$, et par suite $\mathfrak{H}^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{M})$ est un k-module.

THÉORÈME 2.8. — *Soit*

$$0 \to (\mathfrak{A}, 0) \xrightarrow{i} (\mathfrak{B}, \delta) \xrightarrow{p} (\mathfrak{C}, \mu) \to 0$$

une suite exacte de $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie croisées.

2.8.1 *L'action de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{A}$ induit une action de $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$ sur $H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$.*

2.8.2 *Il existe un k-homomorphisme $\partial : \mathfrak{H}^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{C}) \to \mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ et un homomorphisme croisé pour l'action ci-dessus, $\Delta : \mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{C}) \to H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ tels que la suite*

$$0 \to \mathfrak{H}^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) \xrightarrow{i^o} \mathfrak{H}^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}) \xrightarrow{p^o} \mathfrak{H}^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{C}) \xrightarrow{\partial} \mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$$

$$\xrightarrow{i^1} \mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}) \xrightarrow{p^1} \mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{C}) \xrightarrow{\Delta} H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$$

soit exacte, où i^o, p^o, i^1 sont des k-homomorphismes et p^1 un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Démonstration. — Démontrons d'abord l'assertion (2.8.1). Rappelons qu'un 2-cocycle de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{A}$ est une application k-linéaire alternée

$$a : \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{A}$$

vérifiant

$$\begin{aligned}{}^{x_1}a(x_2,x_3) - {}^{x_2}a(x_1,x_3) + {}^{x_3}a(x_1,x_2) - a([x_1,x_2],x_3)\\ + a([x_1,x_3],x_2) - a([x_2,x_3],x_2) = 0.\end{aligned}$$

Soit (α, g) un élément de $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$ représentant sa classe de cohomologie dans $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$, et soit a un 2-cocycle de $\mathfrak{G}$ à valeurs dans $\mathfrak{A}$. On pose

$${}^{(\alpha,g)}a = \tilde{a}$$

avec $\forall\, x, y \in \mathfrak{G}$, $\tilde{a}(x,y) = a({}^g x, y) + a(x, {}^g y)$. Montrons que ceci définit une action de $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$ sur $H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$.

– $\tilde{a}$ est un 2-cocycle.

Calculons l'expression

$$\tilde{a}([x_1,x_2],x_3) - \tilde{a}([x_1,x_3],x_2) + \tilde{a}([x_2,x_3],x_1).$$

En utilisant le fait que a est un 2-cocycle, un calcul simple montre que cette expression est égale à

$$\begin{aligned}{}^{x_1}\tilde{a}(x_2,x_3) -{}^{x_2} \tilde{a}(x_1,x_3) +{}^{x_3} \tilde{a}(x_1,x_2)\\ + {}^{g x_1}a(x_2,x_3) - {}^{g x_2}a(x_1,x_3) + {}^{g x_3}a(x_1,x_2).\end{aligned}$$

Or

$${}^{g x_i}a(x_j,x_k) = {}^{[g,x_i]}a(x_j,x_k) = {}^{\mu(\alpha(x_i))}a(x_j,x_k).$$

Soit $\beta(x_i)$ un relèvement dans $\mathfrak{B}$ de $a(x_i)$: alors $\mu(\alpha(x_i)) = \delta(\beta(x_i))$. Considérons $a(x_j,x_k)$ comme élément de $\mathfrak{B}$ par l'injection i. Alors dans $\mathfrak{B}$ on a

$${}^{g x_i}a(x_j,x_k) = {}^{\delta(\beta(x_i))}a(x_j,x_k) = [\beta(x_i), a(x_j,x_k)]$$

et comme $\mathfrak{A}$ est centrale dans $\mathfrak{B}$, ce dernier élément est nul. On en déduit que $\tilde{a}$ est un 2-cocycle.

– On vérifie aisément que la classe de $\tilde{a}$ dans $H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ n'est pas changée si l'on modifie a par un cobord.

– Montrons que la classe de $\tilde{a}$ dans $H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ n'est pas modifiée si l'on remplace l'élément (α, g) de $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$ par un élément cohomologue. Posons $h = g - \mu(c) + \lambda$ avec $c \in \mathfrak{C}$ et $\lambda \in Z(\mathfrak{G})$. Alors

$$\begin{aligned}a({}^h x, y) + a(x, {}^h y) = a({}^g x, y) + a(x, {}^g y) + a({}^{-\mu(c)}x, y)\\ + a(x, {}^{-\mu(c)}y) + a({}^{\lambda}x, y) + a(x, {}^{\lambda}y).\end{aligned}$$

Puisque $\lambda \in Z(\mathfrak{G})$, on ${}^{\lambda}x = {}^{\lambda}y = 0$ et par conséquent $a({}^{\lambda}x, y) = a(x, {}^{\lambda}y) = 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned} a({}^{-\mu(c)}x, y) + a(x, {}^{-\mu(c)}y) &= a([x, \mu(c)], y) - a([y, \mu(c)], x) \\ &= -{}^{x}a(y, \mu(c)) - {}^{y}a(x, \mu(c)) \\ &\quad - a([x, y], \mu(c)) -{}^{\mu(c)}\, a(x, y). \end{aligned}$$

Notons b un relèvement dans $\mathfrak{B}$ de c. Alors

$${}^{\mu(c)}a(x, y) = {}^{\delta(b)}a(x, y) = [b, a(x, y)]$$

et comme $\mathfrak{A}$ est centrale dans $\mathfrak{B}$, ce dernier élément est nul. De plus l'élément

$${}^{x}a(y, \mu(c)) - {}^{y}a(x, \mu(c)) - a([x, y], \mu(c))$$

est un cobord, par conséquent la classe dans $H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ de l'élément $a({}^{h}x, y) + a(x, {}^{h}y)$ est la même que celle de $a({}^{g}x, y) + a(x, {}^{g}y)$.

L'opération de $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$ sur $H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ est donc définie par

$$\forall (\alpha, g) \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{C}),\ \forall a \in Z^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$$

$${}^{\text{classe}(\alpha, g)}\text{classe } a = \text{classe } \tilde{a}.$$

Remarque. — On peut vérifier facilement que $H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ est une représentation de $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$.

Démontrons maintenant l'assertion (2.8.2). Rappelons la définition de ∂. Soit $c \in \mathfrak{H}^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$; choisissons $b \in \mathfrak{B}$ tel que $p(b) = c$. Alors pour tout $x \in \mathfrak{G}$, on a $p({}^{x}b) = {}^{x}c = 0$ et ${}^{x}b \equiv 0 \bmod \mathfrak{A}$. Considérons l'application α de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{A}$ définie par $\alpha(x) = {}^{x}b$. Alors

$$\alpha([x, y]) = {}^{[x,y]}b = {}^{x}({}^{y}b) - {}^{y}({}^{x}b) = {}^{x}\alpha(y) - {}^{y}\alpha(x)$$

et α est une dérivation de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{A}$. On vérifie aisément que la classe de $(\alpha, 0)$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ est indépendante du choix du relèvement b. On pose $\partial(c) = \text{classe } (\alpha, 0)$.

L'exactitude de la suite jusqu'en $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{B})$ est une vérification facile.

Construisons l'application Δ. Soit $(\alpha, g) \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$ un élément représentant sa classe de cohomologie dans $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{C})$. Pour tout $x \in \mathfrak{G}$, soit $\beta(x)$ un relèvement dans $\mathfrak{B}$ de $\alpha(x)$. Posons

$$a(x, y) = {}^{x}\beta(y) - {}^{y}\beta(x) - \beta([x, y]).$$

Il est facile de vérifier que a est un 2-cocycle de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{A}$, dont la classe dans $H^2(\mathfrak{G},\mathfrak{A})$ est indépendante du choix du représentant (α,g) et du relèvement β. On pose

$$\Delta(\text{classe}(\alpha,g)) = \text{classe}(a).$$

Il est clair que Δ est un k-homomorphisme. Montrons que Δ est un homomorphisme croisé pour l'action de $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G},\mathfrak{C})$ sur $H^2(\mathfrak{G},\mathfrak{A})$ définie précédemment. Considérons (α,g) et (β,h) deux éléments de $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G},\mathfrak{C})$ représentant leurs classes de cohomologie et calculons $\Delta([(\alpha,g),(\beta,h)])$. On sait que $[(\alpha,g),(\beta,h)] = (\alpha*\beta,[g,h])$ avec $\alpha*\beta(x) = a({}^h x) - \beta({}^g x)$. Pour tout x de $\mathfrak{G}$, notons $\gamma(x)$ (resp. $\rho(x)$) un relèvement dans $\mathfrak{B}$ de $\alpha(x)$ (resp. $\beta(x)$). Alors $\gamma({}^h x) - \rho({}^g x)$ est un relèvement de $\alpha*\beta(x)$. Considérons le 2-cocycle défini par

$$A(x,y) = {}^x(\gamma({}^h y) - \rho({}^g x)) - {}^y(\gamma({}^h x) - \rho({}^g x)) - (\gamma({}^h[x,y]) - \rho({}^g[x,y])).$$

Posons

$$a(x,y) = {}^x\gamma(y) - {}^y\gamma(x) - \gamma([x,y])$$

$$b(x,y) = {}^x\rho(y) - {}^y\rho(x) - \rho([x,y])$$

et calculons

$$a({}^h x,y) + a(x,{}^h y) - b({}^g x,y) - b(x,{}^g y).$$

Cette expression est égale à

$$A(x,y) + {}^{h_x}\gamma(y) - {}^{h_y}\gamma(x) - {}^{g_x}\rho(y) + {}^{g_y}\rho(x).$$

Or, pour tout $x \in \mathfrak{G}$, $[g,x]$ (resp. $[h,x]$) est égal à $\mu(\alpha(x))$ (resp. $\mu(\beta(x))$) et on a $\mu(\alpha(x)) = \delta(\gamma(x))$ et $\mu(\beta(x)) = \delta(\rho(x))$. Par conséquent, dans $\mathfrak{B}$ on a

$${}^{h_x}\gamma(y) = [\rho(x),\gamma(y)], \quad {}^{h_y}(x) = [\rho(y),\gamma(x)]$$

$${}^{g_x}\rho(y) = [\gamma(x),\rho(y)], \quad {}^{g_y}\rho(x) = [\gamma(y),\rho(x)].$$

On en déduit que

$$a({}^h x,y) + a(x,{}^h y) - (b({}^g x,y) + b(x,{}^g y)) = A(x,y).$$

Ce qui s'écrit, en notant $\overline{(\alpha,g)}$ (resp $\overline{(\beta,h)}$) la classe de (α,g) (resp. (β,h)) dans $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G},\mathfrak{C})$,

$$\Delta(\overline{[\overline{(\alpha,g)},\overline{(\beta,h)}]}) = {}^{\overline{(\beta,h)}}\Delta(\overline{(\alpha,g)}) - {}^{\overline{(\alpha,g)}}\Delta(\overline{(\beta,h)})$$

et Δ est un homomorphisme croisé.

Le fait que p^1 soit un homomorphisme d'algèbres de Lie provient de la fonctorialité de $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{G}, -)$. Le fait que $\ker\Delta = \operatorname{im} p^1$ se vérifie facilement.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.8. □

3. Le produit tensoriel.

Nous avons montré au chapitre 2 que si $(\mathfrak{M}, \mu)$ est une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie précroisée, $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{M}, -)$ est un foncteur de la catégorie des $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie croisées dans celle des $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie précroisées. Nous allons montrer que ce foncteur admet un adjoint à gauche qui est le produit tensoriel.

Rappelons la définition du produit tensoriel d'algèbres de Lie donnée dans [E1].

DÉFINITION 3.1. — *Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux algèbres de Lie munies d'une action de Lie de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{N}$ et d'une action de Lie de $\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{M}$. Le produit tensoriel $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ est le quotient de l'algèbre de Lie libre engendrée par les éléments $m \otimes n$, $m \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathfrak{N}$, par l'idéal engendré par les relations*

$$\text{(i)} \qquad \lambda(m \otimes n) = \lambda m \otimes n = m \otimes \lambda n$$

$$\text{(ii)} \qquad \begin{cases} (m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n \\ m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n' \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \qquad \begin{cases} [m, m'] \otimes n = m \otimes^{m'} n - m' \otimes^{m} n \\ m \otimes [n, n'] = {}^{n'}m \otimes n - {}^{n}m \otimes n' \end{cases}$$

$$\text{(iv)} \qquad [(m \otimes n), (m' \otimes n')] = -{}^{n}m \otimes^{m'} n'r$$

pour $\lambda \in k$, $m, m' \in \mathfrak{M}$, $n, n' \in \mathfrak{N}$.

Remarque. — Si les actions de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{N}$ et de $\mathfrak{N}$ sur $\mathfrak{M}$ sont triviales, alors le produit tensoriel $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ s'identifie au produit tensoriel $\mathfrak{M}/[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}] \otimes_k \mathfrak{N}/[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$.

Dans toute la suite, si $(\mathfrak{M}, \mu)$ et $(\mathfrak{N}, \nu)$ sont des $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie précroisées, on supposera que $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{N}$) opère sur $\mathfrak{N}$ (resp. $\mathfrak{M}$) par l'action de $\mathfrak{G}$ via μ (resp. ν).

Dans ce cas $\mathfrak{G}$ opère sur $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ par une action de Lie donnée par

$${}^{g}(m \otimes n) = {}^{g}m \otimes n + m \otimes {}^{g}n.$$

PROPOSITION 3.2. — *Soit* $(\mathfrak{M}, \mu)$ *une* $\mathfrak{G}$*-algèbre de Lie précroisée et* $(\mathfrak{N}, \nu)$ *une* $\mathfrak{G}$*- algèbre de Lie croisée. Alors* $(\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}, \eta)$ *avec* $\eta(m \otimes n) = [\mu(m), \nu(n)]$, $m \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathfrak{N}$, *est une* $\mathfrak{G}$*-algèbre de Lie croisée.*

Démonstration. — On vérifie facilement que l'application η est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Montrons que cet homomorphisme satisfait les propriétés (1.2.1) et (1.2.2).

Soient $g \in \mathfrak{G}$, $m, m' \in \mathfrak{M}$, $n, n' \in \mathfrak{N}$

$$\begin{aligned}
\eta({}^g(m \otimes n)) &= \eta({}^g m \otimes n) + \eta(m \otimes {}^g n) \\
&= [\mu({}^g m), \nu(n)] + [\mu(m), \nu({}^g n)] \\
&= [[g, \mu(m)], \nu(n)] + [\mu(m), [g, \nu(n)]] \\
&= [g, [\mu(m), \nu(n)]].
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
{}^{\eta(m\otimes n)}(m' \otimes n') &= {}^{[\mu(m),\nu(n)]}(m' \otimes n') \\
&= {}^{[\mu(m),\nu(n)]}m' \otimes n' + m' \otimes {}^{[\mu(m),\nu(n)]}n'.
\end{aligned}$$

Or

$$m' \otimes {}^{[\mu(m),\nu(n)]}n' = m' \otimes {}^{\mu(m)}({}^{\nu(n)}n') - m' \otimes {}^{\nu(n)}({}^{\mu(m)}n')$$

et comme $(\mathfrak{N}, \nu)$ est une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée, cette dernière expression est égale à

$$\begin{aligned}
m' \otimes {}^{\mu(m)}[n, n'] - m' \otimes [n, {}^{\mu(m)}n'] &= m' \otimes [{}^{\mu(m)}n, n'] \\
&= {}^{\nu(n')}m' \otimes {}^{\mu(m)}n - {}^{[\mu(m),\nu(n)]}m' \otimes n'
\end{aligned}$$

d'où

$${}^{[\mu(m),\nu(n)]}(m' \otimes n') = {}^{\nu(n')}m' \otimes {}^{\mu(m)}n' = [m \otimes n, m' \otimes n']. \qquad \square$$

PROPOSITION 3.3. — *Soit* $(\mathfrak{N}, \nu)$ *une* $\mathfrak{G}$*-algèbre de Lie croisée. Alors* $- \otimes \mathfrak{N}$ *est un foncteur exact à droite de la catégorie des* $\mathfrak{G}$*-algèbres de lie précroisées dans celle des* $\mathfrak{G}$*-algèbres de lie croisées.*

Démonstration. — On vérifie aisément que $F(-) = - \otimes \mathfrak{N}$ est un foncteur de LPC($\mathfrak{G}$) dans LC($\mathfrak{G}$). Soit

$$0 \to (\mathfrak{M}, 0) \xrightarrow{f} (\mathfrak{P}, \lambda) \xrightarrow{g} (\mathfrak{Q}, \gamma) \to 0$$

une suite exacte de $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie précroisées.

Montrons que la suite

$$F(\mathfrak{M}) \overset{F(f)}{\to} F(\mathfrak{P}) \overset{F(g)}{\to} \to F(\mathfrak{Q}) \to 0$$

est exacte. Il est clair que l'homomorphisme $F(g)$ est surjectif. L'application $F(f)$ est un homomorphisme de $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie croisées, donc d'après 1.5 et 1.4 l'image $\mathrm{Im}(F(f))$ est un idéal de $F(\mathfrak{P})$. Puisque $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = 0$, l'homomorphisme $F(g)$ induit un homomorphisme $\overline{F}(g)$ d'algèbres de Lie

$$\overline{F}(g) : \mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}/\mathrm{Im}\, F(f) \to \mathfrak{Q} \otimes \mathfrak{N}.$$

Nous allons montrer que cet homomorphisme est un isomorphisme, en construisant un homomorphisme inverse Γ. Soit $q \in \mathfrak{Q}$ et p un relèvement dans $\mathfrak{P}$ de q. Notons $p \overline{\otimes} n$ la classe de $p \otimes n$ dans $\mathfrak{P} \otimes \mathfrak{N}/\mathrm{Im}\,(f)$. Soit $p' = p + f(m)$ un autre relèvement de q. Alors $p' \otimes n = (p + f(m)) \otimes n = p \otimes n + f(m) \otimes n$ d'où $p' \overline{\otimes} n = p \overline{\otimes} n$. On pose $\Gamma(q \otimes n) = p \overline{\otimes} n$. L'application Γ est bien définie : on montre facilement que c'est un homomorphisme d'algèbres de Lie, en vérifiant que Γ satisfait les relations de définition du produit tensoriel. On a évidemment

$$\overline{F}(g) \circ \Gamma = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad \Gamma \circ \overline{F}(g) = \mathrm{id}. \qquad \square$$

Nous allons maintenant montrer que, si $(\mathfrak{N}, \nu)$ est une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée, le foncteur $- \otimes \mathfrak{N}$ est l'adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}, -)$.

THÉORÈME 3.4. — *Soient $(\mathfrak{M}, \mu)$ une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie précroisée, $(\mathfrak{N}, \nu)$ et $(\mathfrak{P}, \lambda)$ des $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie croisées. Il existe un isomorphisme de k-modules entre* $\mathrm{Hom}_{LPC(\mathfrak{G})}(\mathfrak{M}, \mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{P}))$ *et* $\mathrm{Hom}_{LP(\mathfrak{G})}(\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}, \mathfrak{P})$.

Démonstration. — Rappelons que la structure de $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie précroisée de $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{P})$ est donnée par

$$\begin{aligned} \rho : \mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{P}) &\longrightarrow \mathfrak{G} \\ (\alpha, g) &\longmapsto g \end{aligned}$$

l'action de Lie de $\mathfrak{G}$ sur $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{P})$ étant donnée par ${}^{g}(\alpha, h) = (\beta, [g, h])$ où β est définie par $\beta(n) = {}^{g}\alpha(n) - \alpha({}^{g}n)$, $g \in \mathfrak{G}$, $n \in \mathfrak{N}$.

La structure de $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée de $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \eta : \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} &\longrightarrow \mathfrak{G} \\ m \otimes n &\longmapsto [\mu(m), \nu(n)] \end{aligned}$$

l'action de Lie de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}$ étant donnée par ${}^{g}(m\otimes n) = {}^{g}m\otimes n+m\otimes {}^{g}n$, $g \in \mathfrak{G}$, $m \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathfrak{N}$.

Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{LPC(\mathfrak{G})}(\mathfrak{M}, \mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{P}))$. Pour tout $m \in \mathfrak{M}$, on a $\varphi(m) = (\alpha_m, g_m) \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{P})$. Comme $\rho \circ \varphi = \mu$, on a $g_m = \mu(m)$.

LEMME 3.4.1. — *L'application Φ définie par $\Phi(m \otimes n) = \alpha_m(n)$ est un morphisme de $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie croisées de $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{P}$.*

Démonstration. — Des calculs simples montrent que Φ satisfait les relations de définition du produit tensoriel, qu'elle est $\mathfrak{G}$-équivariante et vérifie $\lambda \circ \Phi = \eta$.

A titre d'exemple, montons que Φ satisfait la relation

$$m \otimes [n, n'] = {}^{\nu(n')}m \otimes n - {}^{\nu(n)}m \otimes n'$$

et qu'elle commute au crochet de Lie.

Tout d'abord, on a

$$\Phi({}^{\nu(n')}m \otimes n - {}^{\nu(n)} m \otimes n') = \alpha_{{}^{\nu(n')}m}(n) - \alpha_{{}^{\nu(n)}m}(n').$$

Or pour $g \in \mathfrak{G}$, $\alpha_{{}^{g}m} = \varphi({}^{g}m) = {}^{g}\varphi(m)$ et d'après la définition de l'action de $\mathfrak{G}$ sur $\mathrm{Der}_g(\mathfrak{N}, \mathfrak{P})$, on a

$$\begin{aligned}\alpha_{{}^{\nu(n')}m}(n) &= {}^{\nu(n')}\alpha_m(n) - \alpha_m({}^{\nu(n')}n)\\ \alpha_{{}^{\nu(n)}m}(n') &= {}^{\nu(n)}\alpha_m(n') - \alpha_m({}^{\nu(n)}n').\end{aligned}$$

Comme $(\mathfrak{N}, \nu)$ est une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée, on en déduit que

$$\begin{aligned}\Phi({}^{\nu(n')}m \otimes n - {}^{\nu(n)}m \otimes n') &= {}^{\nu(n')}\alpha_m(n) - \alpha_m([n', n])\\ &\quad - {}^{\nu(n)}\alpha_m(n') + \alpha_m([n, n'])\\ &= \alpha_m([n, n'])\\ &= \Phi(m \otimes [n, n']).\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\Phi([m\otimes n, m'\otimes n']) &= \Phi(-{}^{\nu(n)}m\otimes {}^{\mu(m')}n')\\
&= \alpha_{(-\nu(n)_m)}({}^{\mu(m')}n')\\
&= -{}^{\nu(n)}\alpha_m({}^{\mu(m')}n') + \alpha_m({}^{\nu(n)}({}^{\mu(m')}n'))\\
&= -{}^{\nu(n)}\alpha_m({}^{\mu(m')}n') + \alpha_m([n, {}^{\mu(m')}n'])\\
&= -{}^{[\mu(m'),\nu(n')]}\alpha_m(n)\\
&= -{}^{\eta(\alpha_{m'}(n'))}\alpha_m(n)\\
&= -[\alpha_{m'}(n'), \alpha_m(n)]\\
&= [\Phi(m\otimes n), \Phi(m'\otimes n')]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Soit $\sigma \in \mathrm{Hom}_{LC(\mathfrak{G})}(\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}, \mathfrak{P})$. Pour tout $m\in\mathfrak{M}$, on pose

$$\Sigma(m) = (\alpha_m, \mu(m))$$

où α_m est définie par $\alpha_m(n) = \sigma(m\otimes n)$.

LEMME 3.4.2. — *L'application Σ ainsi définie est un homomorphisme de $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie précroisées de $\mathfrak{M}$ dans* $\mathrm{Der}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{P})$.

Démonstration. — Les vérifications à faire sont faciles. Montrons seulement que α_m est une dérivation. Calculons ${}^{\nu(n)}\alpha_m(n') -{}^{\nu(n')}\alpha_m(n)$. Cette expression s'écrit

$$\begin{aligned}
{}^{\nu(n)}\sigma(m\otimes n') - {}^{\nu(n')}\sigma(m\otimes n) &= \sigma({}^{\nu(n)}(m\otimes n')) - \sigma({}^{\nu(n')}(m\otimes n))\\
&= \sigma({}^{\nu(n)}m\otimes n') + \sigma(m\otimes {}^{\nu(n)}n')\\
&\quad - \sigma({}^{\nu(n')}m\otimes n) - \sigma(m\otimes {}^{\nu(n')}n)\\
&= \alpha_{\nu(n)_m}(n') + \alpha_m([n,n'])\\
&\quad - \alpha_{\nu(n')_m}(n) - \alpha_m([n',n])\\
&= \alpha_m([n,n'])
\end{aligned}$$

car on voit facilement que

$$\alpha_{\nu(n)_m}(n') - \alpha_{\nu(n')_m}(n) - \alpha_m([n',n]) = 0. \qquad \square$$

Il est clair que les applications $\varphi\mapsto\Phi$ et $\sigma\mapsto\Sigma$ sont réciproques l'une de l'autre, ce qui achève la démonstration du théorème 3.4. $\square$

4. Homologie des algèbres de Lie croisées.

On sait que si A est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$, les k-modules $H_0(\mathfrak{G}, A)$ et $H_1(\mathfrak{G}, A)$ sont respectivement le conoyau et le noyau du morphisme canonique

$$I(\mathfrak{G}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{G})} A \longrightarrow A$$

induit par l'action de $\mathfrak{G}$ sur A, où $\mathcal{U}(\mathfrak{G})$ est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{G}$ et $I(\mathfrak{G})$ l'idéal d'augmentation. Or, comme dans le cas des groupes ([G1]), on a :

Proposition 4.1 ([CL]). — *Soient $\mathfrak{G}$ une k-algèbre de Lie, libre en tant que k-module, $\mathcal{U}(\mathfrak{G})$ son algèbre enveloppante, $I(\mathfrak{G})$ l'idéal d'augmentation, et soit A une représentation de $\mathfrak{G}$ considérée comme $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée par le morphisme trivial. On a alors un isomorphisme canonique*

$$\mathfrak{G} \otimes A \simeq I(\mathfrak{G}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{G})} A.$$

Démonstration. — Voir [CL] pour les détails de la démonstration, on indiquera seulement ici la définition des deux morphismes inverses l'un de l'autre. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une k-base de $\mathfrak{G}$ indexée par un ensemble ordonné I, et soit $e_\alpha = e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ un élément générique de $I(\mathfrak{G})$. On pose

$$\begin{aligned} \theta : \mathfrak{G} \otimes \mathfrak{A} &\longrightarrow I(\mathfrak{G}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{G})} \mathfrak{A} \\ g \otimes a &\longmapsto (0, g, 0, \ldots) \otimes a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega : I(\mathfrak{G}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{G})} \mathfrak{A} &\rightarrow \mathfrak{G} \otimes \mathfrak{A} \\ (\Sigma\lambda_\alpha e_\alpha) \otimes a &\longmapsto \Sigma\lambda_\alpha e_{i_1} \otimes e_{i_2}.\Big(e_{i_3}.(\ldots(e_{i_n}.a)\ldots)\Big) \end{aligned}$$

où la notation de droite désigne l'opération de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{A}$. □

Ceci nous conduit à poser la définition suivante :

Définition 4.2. — *Soient $\mathfrak{G}$ une k-algèbre de Lie et $(\mathfrak{A}, \mu)$ une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée. On note $\varphi_{\mathfrak{A}}$ l'homomorphisme de $\mathfrak{G}$-algèbres Lie croisées $\mathfrak{G} \otimes \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ défini par $\varphi_{\mathfrak{A}}(g \otimes a) = {}^g a$. On pose*

$$\mathfrak{H}_0(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) = \mathrm{coker}\varphi_{\mathfrak{A}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{H}_1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}) = \ker \varphi_{\mathfrak{A}}$$

et on appelle ces k-modules, k-modules d'homologie de $\mathfrak{G}$ à coefficients dans la $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée $(\mathfrak{A}, \mu)$.

Remarque. — La proposition 4.1 montre que si $\mathfrak{G}$ est libre en tant que k-module et si $\mathfrak{A}$ est une représentation de $\mathfrak{G}$, les deux k-modules définis ci-dessus coïncident avec les k-modules d'homologie usuelle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ à coefficients dans la représentation $\mathfrak{A}$, $H_0(\mathfrak{G},\mathfrak{A})$ et $H_1(\mathfrak{G},\mathfrak{A})$.

Exemple. — Toute algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ étant une $\mathfrak{G}$-algèbre de Lie croisée par l'identité, on a $\mathfrak{H}_0(\mathfrak{G},\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}/[\mathfrak{G},\mathfrak{G}] \simeq H_1(\mathfrak{G},k)$.

Si de plus $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie parfaite, l'extension

$$\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{G} \to [\mathfrak{G},\mathfrak{G}] \to 0$$

est centrale universelle ([CL]). Son noyau est donc isomorphe à $H_2(\mathfrak{G},k)$ ([Ga]), d'où $\mathfrak{H}_1(\mathfrak{G},\mathfrak{G}) \simeq H_2(\mathfrak{G},k)$.

THÉORÈME 4.3. — *Soit*

$$0 \to (\mathfrak{A},0) \xrightarrow{f} (\mathfrak{B},\mu) \xrightarrow{g} (\mathfrak{C},\nu) \to 0$$

une suite exacte de $\mathfrak{G}$-algèbres de Lie croisées. Il existe un homomorphisme bord

$$\partial : \mathfrak{H}_1(\mathfrak{G},\mathfrak{C}) \to \mathfrak{H}_0(\mathfrak{G},\mathfrak{A})$$

tel que la suite de k-modules

$$\mathfrak{H}_1(\mathfrak{G},\mathfrak{A}) \xrightarrow{f_*} \mathfrak{H}_1(\mathfrak{G},\mathfrak{B}) \xrightarrow{g_*} \mathfrak{H}_1(\mathfrak{G},\mathfrak{C}) \xrightarrow{\partial} \mathfrak{H}_0(\mathfrak{G},\mathfrak{A}) \xrightarrow{f_*} \mathfrak{H}_0(\mathfrak{G},\mathfrak{B}) \xrightarrow{g_*} \mathfrak{H}_0(\mathfrak{G},\mathfrak{C}) \to 0$$

soit exacte.

Démonstration. — Le foncteur produit tensoriel étant exact à droite (proposition 3.3), l'exactitude de cette suite provient du «lemme du serpent» appliqué au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathfrak{G}\otimes\mathfrak{A} & \longrightarrow & \mathfrak{G}\otimes\mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathfrak{G}\otimes\mathfrak{C} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathfrak{A}}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathfrak{B}}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathfrak{C}}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{A} & \longrightarrow & \mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathfrak{C} & \longrightarrow & 0.
\end{array} \quad \square$$

5. Homologie cyclique et K-théorie de Milnor additive.

Si A est une k-algèbre associative unitaire, k contenant $\mathbb{Q}$, le théorème de Loday-Quillen ([LQ]) exprime que l'homologie cyclique de A, $HC_*(A)$, est la partie primitive de l'algèbre de Hopf $H_*(gl(A), k)$ où $gl(A)$ est l'algèbre de Lie des matrices à coefficients dans A. Par analogie avec le fait que, rationnellement, la K-théorie algébrique de A est la partie primitive de $H_*(GL(A), \mathbb{Q})$, où $GL(A)$ est le groupe linéaire, on peut voir l'homologie cyclique comme une version additive de la K-théorie algébrique. Les résultats de stabilité de l'homologie de l'algèbre de Lie $gl_n(A)$ ([LQ],[L2])

$$H_{p-1}(gl_n(A), k) \simeq H_p(gl_n(A), k) \text{ si } p \leq n$$

et

$$\operatorname{coker}(H_n(gl_{n-1}(A), k) \to H_n(gl_n(A), k)) \simeq \Omega_k^{n-1} A / d\Omega_k^{n-2} A$$

(si A est commutative) où $\Omega_k^* A$ désigne les formes différentielles de Kähler de A, comparés aux résultats de stabilité de l'homologie du groupe linéaire $GL_n(A)$ ([G2])

$$H_{p-1}(GL_n(A), \mathbb{Z}) \simeq H_p(GL_n(A), \mathbb{Z}) \text{ si } p \leq n$$

et

$$\operatorname{coker}(H_n(GL_{n-1}(A), \mathbb{Z}) \to H_n(GL_n(A), \mathbb{Z})) \simeq K_n^M(A)$$

où $K_*^M(A)$ désigne la K-théorie de Milnor de l'anneau A, permettent de voir les groupes $\Omega_k^* A / d\Omega_k^{*-1} A$ comme une version additive de la K-théorie de Milnor. Une description de ces groupes par des générateurs analogues aux générateurs de Dennis et Stein ([DS]) conduit à une définition générale de la K-théorie de Milnor additive de l'anneau, non nécessairement commutatif, A ([L1], [L2]). Rappelons cette définition pour $n = 2$.

Définition 5.1 ([L1]). — *Soit A une k-algèbre associative unitaire. Alors $K_2^{M\,\mathrm{add}}(A)$ est le k-module engendré par les éléments $\langle a_1, a_2 \rangle$ où les a_i sont des éléments de A, soumis aux relations*

(D1) $$\langle a_2, a_1 \rangle = -\langle a_1, a_2 \rangle$$

(D2) $$\lambda \langle a_1, a_2 \rangle + \mu \langle a_1', a_2 \rangle = \langle \lambda a_1 + \mu a_1', a_2 \rangle$$

où $\lambda, \mu \in k$,

(D3) $$\langle a_1 a_2, a_3\rangle - \langle a_1, a_2 a_3\rangle + \langle a_3 a_1, a_2\rangle = 0.$$

Rappelons que par définition ([KL],[LQ]), le k-module $HC_1(A)$ est le noyau du morphisme

$$(A \otimes_k A)/I(A) \to [A, A]$$

induit par $a \otimes b \mapsto ab - ba$, où $I(A)$ est le sous-k-module de $A \otimes_k A$ engendré par les éléments

$$a \otimes b + b \otimes a,$$
$$ab \otimes c - a \otimes bc + ca \otimes b,$$

$a, b, c \in A$.

Dans le cas où A est commutative $[A, A] = 0$, et il est clair que les modules $HC_1(A)$ et $K_2^{M\,\mathrm{add}}(A)$ coïncident. Nous allons donner une comparaison de ces deux groupes lorsque A est non commutative, au moyen de l'homologie des algèbres de Lie croisées.

Soit A une k-algèbre (non commutative) qu'on suppose munie de la structure usuelle d'algèbre de Lie ($[a, b] = ab - ba$, $a, b, \in A$). On note $W(A) = A \otimes A$ l'algèbre de Lie définie au chapitre 3, et on note $V(A)$ le quotient de $W(A)$ par l'idéal bilatère $I(A)$ engendré par les éléments

$$x \otimes y + y \otimes x,$$

$$xy \otimes z - x \otimes yz + zx \otimes y,$$

$x, y, z \in A$.

Proposition 5.2. — *L'opération de Lie de A sur $W(A)$ définie par ${}^a(x \otimes y) = [a, x] \otimes y + x \otimes [a, y]$ induit une opération de Lie de A sur $V(A)$, et l'homomorphisme $\mu : V(A) \to A$ induit par $x \otimes y \mapsto [x, y]$ munit $V(A)$ d'une structure de A-algèbre de Lie croisée.*

Démonstration. — L'opération de Lie de A sur $W(A)$ définie ci-dessus passe au quotient. En effet, on a

$$\begin{aligned} {}^a(x \otimes y + y \otimes x) &= [a, x] \otimes y + x \otimes [a, y] + [a, y] \otimes x + y \otimes [a, x] \\ &= (x \otimes [a, y] + [a, y] \otimes x) + ([a, x] \otimes y + y \otimes [a, x]) \end{aligned}$$

et

$$[a,xy]\otimes z + xy\otimes [a,z] - [a,x]\otimes yz - x\otimes [a,yz] + [a,zx]\otimes y + zx\otimes [a,y]$$

peut s'écrire en appliquant la relation (iii) de la définition 3.1,

$$\begin{aligned}&[a,xy]\otimes z + [z,xy]\otimes a - [a,xy]\otimes z + [a,yz]\otimes x\\ &\quad + [x,yz]\otimes a - [a,yz]\otimes x + [a,zx]\otimes y\\ &\quad + [y,zx]\otimes a - [a,zx]\otimes y\\ &\quad = ([z,xy]+[x,yz]+[y,zx])\otimes a = 0.\end{aligned}$$

L'homomorphisme d'algèbres de Lie $W(A)\to A$ défini par $x\otimes y\mapsto [x,y]$ passe au quotient par l'idéal $I(A)$ et induit $\mu : V(A)\to A$. On déduit de 3.2 que $(V(A),\mu)$ est une A-algèbre de Lie croisée.

Proposition 5.3. — *Le k-module $V(A)$ est isomorphe au quotient du k-module $A\otimes_k A$ par le sous-module engendré par les éléments $a\otimes b + b\otimes a$ et $ab\otimes c - a\otimes bc + ca\otimes b$, $a,b,c\in A$.* □

On en déduit la suite exacte de k-modules

$$0\to HC_1(A)\to V(A)\xrightarrow{\mu}[A,A]\to 0$$

et il est facile de vérifier que $\mu : V(A)\to [A,A]$ est un morphisme de A-algèbres de Lie croisées.

Lemme 5.4. — *L'algèbre A opère trivialement sur $HC_1(A)$.*

Démonstration. — Montrons que dans $V(A)$ on a

$${}^a(x\otimes y) = a\otimes [x,y].$$

En effet,

$$\begin{aligned}{}^a(x\otimes y) &= [a,x]\otimes y + x\otimes [a,y]\\ &= ax\otimes y - xa\otimes y + x\otimes ay - x\otimes a\end{aligned}$$

et

$$a\otimes [x,y] = ya\otimes x - ay\otimes x - xa\otimes y + ax\otimes y,$$

d'où l'égalité puisque dans $V(A)$, $u\otimes v + v\otimes u = 0$.

Soit $\omega = \sum_i \lambda_i (x_i \otimes y_i)$ avec $\sum_i \lambda_i [x_i, y_i] = 0$. Alors

$$\begin{aligned} a_\omega &= \sum_i \lambda_i{}^a (x_i \otimes y_i) = \sum_i \lambda_i (a \otimes [x_i, y_i]) \\ &= a \otimes \sum_i \lambda_i [x_i, y_i] = 0. \end{aligned}$$ □

On en déduit immédiatement la

PROPOSITION 5.5. — *La suite*

$$0 \to HC_1(A) \to V(A) \xrightarrow{\mu} [A, A] \to 0$$

est une suite exacte de A-algèbres de Lie croisées. □

D'après 4.3, on a la suite exacte de k-modules

$$\mathfrak{H}_1(A, HC_1(A)) \to \mathfrak{H}_1(A, V(A)) \to \mathfrak{H}_1(A, [A, A])$$

$$\to \mathfrak{H}_0(A, HC_1(A)) \to \mathfrak{H}_0(A, V(A)) \to \mathfrak{H}_0(A, [A, A]) \to 0.$$

LEMME 5.6. — *On a*

(i) $\mathfrak{H}_0(A, HC_1(A)) = HC_1(A)$

(ii) $\mathfrak{H}_1(A, HC_1(A)) \simeq A/[A, A] \otimes_k HC_1(A)$

(iii) $\mathfrak{H}_0(A, [A, A]) = [A, A]/[A, [A, A]]$

(iv) $\mathfrak{H}_0(A, V(A)) \simeq K_2^{M\,\mathrm{add}}(A)$.

Démonstration. — Les points (i), (ii) et (iii) sont évidents. Par définition,

$$\mathfrak{H}_0(A, V(A)) = \mathrm{coker}\varphi$$

où $\varphi : A \otimes V(A) \to V(A)$ est définie par $\varphi(a \otimes \overline{(x \otimes y)}) = {}^a\overline{(x \otimes y)}$, $\overline{x \otimes y}$ désignant la classe de $x \otimes y$ dans $V(A)$.

Remarquons que $\mathfrak{H}_0(A, V(A))$ est une algèbre de Lie abélienne car, d'après la démonstration du lemme 5.4, on a

$$[x \otimes y, x' \otimes y'] = [x, y] \otimes [x', y'] =^{[x,y]} (x' \otimes y')$$

dont l'image est nulle dans $\mathfrak{H}_0(A, V(A))$. Il est clair que l'application $\langle x, y\rangle \mapsto \overline{x \otimes y}$ induit un morphisme de k-modules

$$K_2^{M\,\mathrm{add}}(A) \to \mathfrak{H}_0\ (A, V(A)).$$

Dans l'autre sens, les mêmes raisons que ci-dessus montrent que l'application $x \otimes y \mapsto \langle x, y\rangle$ induit un morphisme de k-modules $\mathfrak{H}_0(A, V(A)) \to K_2^{M\,\mathrm{add}}(A)$. On vérifie aisément que ces morphismes sont inverses l'un de l'autre. □

D'où le

THÉORÈME 5.7. — *Soit A une k-algèbre associative unitaire. La suite de k-modules*

$$A/[A,A] \otimes_k HC_1(A) \to \mathfrak{H}_1(A, V(A)) \to \mathfrak{H}_1(A, [A,A])$$

$$\to HC_1(A) \to K_2^{M\,\mathrm{add}}(A) \to [A,A]/[A,[A,A]] \to 0$$

est exacte. □

Remarque. — On retrouve immédiatement que si A est une algèbre commutative les groupes $HC_1(A)$ et $K_2^{M\,\mathrm{add}}(A)$ coïncident. C'est également le cas si A vérifie $A = [A,A]$ (algèbre de Lie parfaite) et est telle que $H_2(A,k) = 0$ (homologie d'algèbre de Lie). En effet, l'hypothèse $A = [A,A]$ entraîne que la suite exacte précédente s'écrit

$$\mathfrak{H}_1(A,A) \to HC_1(A) \to K_2^{M\,\mathrm{add}}(A) \to 0,$$

et on a vu que $\mathfrak{H}_1(A,A) \simeq H_2(A,k)$.

BIBLIOGRAPHIE

[CL] J.M. CASAS, M. LADRA, Perfect crossed modules in Lie algebras, preprint.

[DS] K. DENNIS, M. STEIN, K_2 of discrete valuation rings, Advances in Math., 19 (1975), 182-238.

[E1] G. ELLIS, Crossed modules and their higher dimensional analogues, Ph.D. Thesis (1984), University College of North Wales, Bangor.

[E2] G. ELLIS, Non abelian exterior products of Lie algebras and an exact sequence in homology of Lie algebra, Glasgow Math. J., 29 (1987), 13-19.

[Ga] H. GARLAND, The arithmetic theory of loop groups, Publ. I.H.E.S., 52 (1980), 5-136.

[G1] D. GUIN, Cohomologie et homologie non abéliennes des groupes. J. of Pure and Applied Algebra, 50 (1988), 109-137.

[G2] D. GUIN, Homologie du groupe linéaire et K-théorie de Milnor des anneaux, J. of Algebra, 123 (1989), 27-59.

[KL] C. KASSEL, J.-L. LODAY, Extensions centrales d'algèbres de Lie, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 32-4 (1982), 119-142.

[L1] J.-L. LODAY, Comparaison des homologies du groupe linéaire et de son algèbre de Lie. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 37-4 (1987), 167-190.

[L2] J.-L. LODAY, Cyclic Homology, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 301, Springer-Verlag (1992).

[LQ] J.-L. LODAY, D. QUILLEN, Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices, Comment. Math. Helv., 59 (1984), 565-591.

[LR] R. LAVENDHOMME, R. ROISIN, Cohomologie non abélienne de structures algébriques, J. of Algebra, 67 (1980), 385-414.

Manuscrit reçu le 18 octobre 1993,
révisé le 12 septembre 1994.

Daniel GUIN,
Université Montpellier II
Laboratoire AGATA
Département des Sciences Mathématiques
Place Eugène Bataillon
F- 34095 Montpellier Cedex 5.