

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

EMMANUEL PAUL

Cycles évanescents d'une fonction de

Liouville de type $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$

Annales de l'institut Fourier, tome 45, n° 1 (1995), p. 31-63

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_1_31_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_1_31_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CYCLES ÉVANESCENTS D'UNE FONCTION DE LIOUVILLE DE TYPE $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$

par Emmanuel PAUL

Introduction.

On s'intéresse ici à la topologie d'un germe de 1-forme holomorphe α à l'origine de $\mathbb{C}^2$, admettant un facteur intégrant réduit $f = f_1 \dots f_p$: la forme $\omega = \alpha/f$ est fermée. Cette hypothèse assure l'existence d'une intégrale première multivaluée de type Liouville :

$$f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Les composantes du germe d'ensemble analytique $X : f_1 \dots f_p = 0$ sont des feuilles du feuilletage singulier défini par une telle forme : c'est la « fibre singulière » de $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$. Les autres feuilles sont les composantes connexes des « fibres régulières » de $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$ (dont la définition est précisée au § 1). Le but de ce travail est de prouver que nombre de notions attachées aux singularités d'applications ont une généralisation dans la situation présente. Plus précisément, on établit, sous des hypothèses génériques sur les λ_j , l'existence d'un transport transverse canonique (à isotopie près). On en déduit l'existence de voisinages « réguliers », dans lesquels toute les fibres régulières sont C^∞ (voire, dans un cas quasi-homogène analytiquement) difféomorphes, ainsi que l'existence d'une monodromie, qui se présente ici comme une action du groupe H des périodes de la forme fermée $\omega = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ sur la fibre-type. (Lorsque les λ_i sont entiers positifs n_i premiers entre eux, $H = \mathbb{Z}$, et cette action de $\mathbb{Z}$ coïncide avec la monodromie usuelle de l'application $f_1^{n_1} \dots f_p^{n_p}$.) On définit ensuite

Mots-clés : Singularités – Feuilletages holomorphes – Désingularisation – Fonction de Liouville – Cycles évanescents – Monodromie.

A.M.S. Classification : 14B05 – 14E15 – 32S40 – 34A20 – 58F18.

l'homologie évanescence de la fibre-type comme étant celle d'un modèle transverse associé au germe de la singularité. Dans un précédent article (cf. [12]), on établit que lorsque $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ « n'est pas une puissance » (voir au § 1 comment une telle hypothèse prend un sens pour une fonction de Liouville) les fibres régulières sont connexes. On s'intéresse ici au degré 1 de cette homologie évanescence : il existe (comme dans la situation uniforme) une filtration à trois degrés sur les cycles évanescents. L'étude du gradué associé donne les résultats suivants :

- absence de « petits cycles » dans une situation générique ;
- les « moyens cycles » sont engendrés par les relevés des commutateurs des groupes fondamentaux de chaque composante du diviseur exceptionnel ;
- présence de « grands cycles » (déjà observés dans la situation uniforme : leur présence est l'obstruction au fait que la monodromie soit d'ordre fini).

Ce travail est rédigé comme suit : au § 1, on définit la fibre régulière de $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$. On rappelle l'algorithme de désingularisation d'une forme logarithmique, en précisant la méthode de calcul des résidus attachés à chaque composante irréductible du diviseur (résidus qui généralisent ici les multiplicités de la situation uniforme). En oubliant l'holomorphie d'une des deux coordonnées locales à cette désingularisation, on a construit dans [11] des atlas de « coordonnées adaptées » : la structure de Clemens associée à $\sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$. On utilise celle-ci au § 2 pour établir l'existence du transport transverse, sa canonicité à isotopie près, et les conséquences qui en découlent : existence de voisinages réguliers et d'une monodromie. (L'étude de cette dernière reste entièrement à développer.) Enfin le § 3 est consacré à la définition et au calcul de l'homologie évanescence et du gradué associé. On l'illustre par deux exemples, dont le premier est la version multiforme d'un exemple d'A. Campo [1].

Il serait intéressant d'agrandir la classe des formes différentielles singulières dans laquelle les notions attachées aux singularités d'applications trouvent une généralisation : elle contient donc les formes logarithmiques (à holonomie projective abélienne). Elle devrait contenir les formes « résolubles » : l'étude des formes à holonomie résoluble a débuté dans la thèse de F. Loray [8] dans le cas d'une unique séparatrice de type cusp. Dans un travail de l'auteur en préparation, il apparaît que cette classe correspond à la présence d'un facteur intégrant logarithmique fermé $\omega_1 : \omega_1 \wedge \omega = d\omega$. Ce résultat est clair lorsque la forme se désingularise par un seul éclatement.

Dès que la singularité est plus dégénérée, apparaît la difficulté soulevée par R. Moussu dans [10] : l'holonomie des séparatrices (et l'holonomie projective) ne caractérisent plus le feuilletage, ce qui nécessite d'élargir la notion d'holonomie. En présence d'un facteur intégrant fermé ω_1 , la forme ω admet alors une intégrale première de Liouville : il suffit de prendre une primitive G de la forme fermée ω/F où F est l'exponentielle d'une primitive multivaluée de ω_1 . Il est donc intéressant d'envisager l'étude des fibres de G , en étendant les techniques développées ici.

1. Désingularisation de $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$.

1.1. Définition de la fibre de $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$.

Considérons un représentant sur U voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2$ du germe de 1-forme holomorphe intégrable :

$$\alpha = f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i},$$

où les f_i sont des germes de fonctions irréductibles de $(\mathbb{C}^2, 0)$, $f_i(0) = 0$, et les λ_i des complexes non nuls. La forme $\alpha \wedge df_i$ est divisible par f_i . Il en résulte que $X_i : f_i = 0$ est une feuille de α , analytique en 0 (séparatrice). En dehors de $X = \bigcup X_i$, le feuilletage défini par α coïncide avec celui de la forme méromorphe :

$$\omega = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i}.$$

Celle-ci étant fermée, elle admet localement des primitives. Par prolongement analytique, elle admet une primitive *multiforme*, i.e. définie sur le revêtement universel $\widetilde{U \setminus X}$ de $U \setminus X$, unique lorsqu'on impose une valeur fixée à un point de base de $U \setminus X$. La notation $\log f$ désigne la primitive multiforme de df/f telle que $\exp(\log f) = f$. On considère la primitive multiforme de ω :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \log f_i : \widetilde{U \setminus X} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

On note $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ l'exponentielle de cette primitive. Soit H le sous-groupe additif de $(\mathbb{C}, +)$ engendré par $\{2i\pi\lambda_i ; i = 1 \cdots p\}$, et G le sous-groupe multiplicatif de $(\mathbb{C}^*, \times)$ engendré par $\{e^{2i\pi\lambda_i} ; i = 1 \cdots p\}$. Remarquons

que $\sum_{i=1}^p \lambda_i \log f_i$ est univaluée dans le quotient $\mathbb{C}/H$ et donc que $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ induit une application de $U \setminus X$ dans $\mathbb{C}^*/G$.

DÉFINITION 1.1.1. — On appelle fibre singulière de $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ la feuille analytique en 0 $X : f_1 \cdots f_p = 0$. On appelle fibre régulière de $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ une surface de niveau dans $U \setminus X$ de l'application induite par $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^*/G$.

Rappelons que dans le cas d'un germe $f = f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p}$ de fonction uniforme, la fibre de Milnor de f est connexe dès que f n'est pas une puissance : $\text{pgcd}(n_1, \dots, n_p) = 1$ (cf. [9]). Lorsque les λ_i sont complexes, nous étendons cette hypothèse de la manière suivante :

DÉFINITION 1.1.2. — Nous dirons que $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ est une puissance entière lorsque le groupe additif H engendré par les $2i\pi\lambda_j$ pour $j = 1, \dots, p$ rencontre $2i\pi\mathbb{Z}$ ailleurs qu'en 0 : $H \cap 2i\pi\mathbb{Z} = 2i\pi d\mathbb{Z}$. Nous dirons (afin de recoller avec le vocabulaire usuel des fonctions) que $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ n'est pas une puissance lorsqu'elle est puissance entière avec $d = 1$.

PROPOSITION 1.1.3. — Lorsque $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ est puissance entière avec $H \cap 2i\pi\mathbb{Z} = 2i\pi d\mathbb{Z}$, la fibre $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p} = e^c$ est formée de d copies de la fibre $\sum_{i=1}^p \lambda_i \log f_i = c$. (Dans toute la suite, c'est donc celle-ci que nous étudierons.)

Preuve. — L'application exponentielle induit une application surjective de $\mathbb{C}/H$ sur $\mathbb{C}^*/G$. Il suffit de déterminer son noyau :

$$\begin{aligned} [e^c]_G = 1 &\iff \exists n_i, k \in \mathbb{Z}, c = 2i\pi \left(\sum_{i=1}^p n_i \lambda_i + k \right) \\ &\iff \exists n_i, k' \in \mathbb{Z}, r \in \{0 \cdots d-1\}, c = 2i\pi \left(\sum_{i=1}^p n_i \lambda_i + k'd + r \right) \\ &\iff c \in H + 2i\pi r, r \in \{0 \cdots d-1\}. \quad \square \end{aligned}$$

1.2. L'algorithme de désingularisation.

PROPOSITION 1.2.1. — Soit $\omega = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$, dont les résidus λ_i sont sans relations entières. Il existe une application analytique propre $E : \widetilde{M} \rightarrow U \setminus X$, obtenue par composition d'éclatements de points, et une collection d'éléments non nuls $2i\pi\alpha_k$ de H attachés à chaque composante irréductible D_k de $D = E^{-1}(X)$ tels que :

1) D soit un diviseur à croisements normaux;

2) il existe, autour de tout point lisse d'une composante D_k de D un système de coordonnées analytiques locales (x_k, z_k) sur un voisinage U tel que :

a) $(z_k = 0)$ est une équation locale de D ,

b) la primitive $\tilde{P} = P \circ E$ de $\tilde{\omega} = E^* \omega$ coïncide sur $E^{-1}U \setminus D$ avec la « primitive locale » $P_k = \alpha_k \log z_k$ par la commutation du diagramme

$$\begin{array}{ccc} U \setminus D & \xrightarrow{P_k} & \mathbb{C}/H_k \\ & \searrow \tilde{P} & \downarrow \sigma_k \\ & & \mathbb{C}/H \end{array}$$

(σ_k désigne la surjection canonique induite par l'inclusion de $H_k = (2i\pi\alpha_k)$ dans H);

3) il existe sur un voisinage U de tout « coin » $p_{k\ell}$ de D (intersection de deux composantes D_k et D_ℓ) un système de coordonnées analytiques locales (z_k, z_ℓ) tel que :

a) $(z_k \cdot z_\ell = 0)$ est une équation locale de D ,

b) la primitive $\tilde{P}$ de $\tilde{\omega}$ coïncide sur $U \setminus D$ avec la « primitive locale » $P_{k\ell} = \alpha_k \log z_k + \alpha_\ell \log z_\ell$ par la commutation du diagramme

$$\begin{array}{ccc} U \setminus D & \xrightarrow{P_{k\ell}} & \mathbb{C}/H_{k\ell} \\ & \searrow \tilde{P} & \downarrow \sigma_{k\ell} \\ & & \mathbb{C}/H \end{array}$$

($H_{k\ell}$ est le sous-groupe de H engendré par les deux périodes locales $2i\pi\alpha_k$ et $2i\pi\alpha_\ell$).

Preuve. — On utilise l'existence d'un processus de désingularisation E de l'application $f_1 \cdots f_p$ (cf. [7]). L'écriture locale de $f \circ E$ est d'un des deux types suivants :

- en un point lisse d'une composante D_k du diviseur exceptionnel D , $f \circ E = z_k^m$ dans un système local de coordonnées (x_k, z_k) où $(z_k = 0)$ est une équation réduite du diviseur.

- à un « coin » intersection de deux composantes irréductibles D_k et D_ℓ de D : $f \circ E = z_k^m z_\ell^n$, $(z_k \cdot z_\ell = 0)$ étant une équation réduite du diviseur.

Appliquons ce même algorithme (en éclatant les mêmes points) à la forme $\omega = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$. On obtient dans les deux cas ci-dessus les écritures locales suivantes de la forme logarithmique $\tilde{\omega} = E^*\omega$:

$$\begin{cases} \alpha_k \frac{dz_k}{z_k}, & \alpha_k \in \mathbb{C} \\ \alpha_k \frac{dz_k}{z_k} + \alpha_\ell \frac{dz_\ell}{z_\ell}, & \alpha_k, \alpha_\ell \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Les coefficients complexes sont les résidus de la forme fermée $\tilde{\omega}$ le long de chaque composante irréductible de D , projectif ou éclatée stricte d'une branche. Ils sont de la forme : $\alpha_k = \sum_{i=1}^p m_k^i \lambda_i$, où les coefficients m_k^i , pour $i = 1, \dots, p$ sont les multiplicités de $f_i \circ E$ le long de E_k . Ils sont donc, en l'absence de relations entières entre les λ_i , non nuls. Pour passer d'une écriture locale adaptée à la forme $\tilde{\omega}$ à une écriture adaptée à la primitive $\tilde{P}$ (au sens de l'énoncé de la proposition), il suffit de multiplier les coordonnées locales obtenues ci-dessus par des constantes multiplicatives convenables. $\square$

Remarque 1.2.2. — La non nullité des résidus α_k prouve que chaque composante du diviseur D est une feuille du feuilletage éclaté : la forme est « non dicritique ». En fait, les formes logarithmiques à résidus sans relations entières fournissent un exemple de « courbes généralisées non dicritiques » (cf. [2]) : leur algorithme de désingularisation (au sens des formes : [15]) est identique à celui de leurs séparatrices.

DÉFINITION 1.2.3. — *Les coordonnées z_k dans le cas d'un point lisse, (z_k, z_ℓ) dans le cas d'un coin, sont appelées coordonnées transverses adaptées à $(D, \tilde{P})$.*

Elles permettent de décrire la topologie locale d'une fibre régulière F du feuilletage éclaté :

COROLLAIRE 1.2.4. — *Soit p un point régulier de D_k . La coordonnée transverse adaptée induit une application injective de la trace T_k de F sur un facteur transverse dans le quotient H/H_k . Soit p un point singulier de D , intersection de deux projectifs $\mathbb{P}_k$ et $\mathbb{P}_\ell$, de résidus α_k et α_ℓ . Les coordonnées transverses adaptées induisent une application injective de la trace de F dans un voisinage de p dans le « modèle transverse local » formé des $H/H_{k\ell}$ fibres locales dans $\mathbb{C}^2$:*

$$\alpha_k \log z_k + \alpha_\ell \log z_\ell = c + h \mod H_{k\ell}.$$

Preuve. — Le feuilletage étant non dicritique, il est, au voisinage d'un point régulier d'une composante D_k de D , produit de sa trace T sur un facteur transverse par ce voisinage. D'après la définition 1.2.3, T est localement donnée dans une coordonnée transverse adaptée z par

$$\alpha_k \log z = c + h \bmod H_k, \quad h \in H,$$

d'où :

$$z = \exp \frac{c + h}{\alpha_k}, \quad h \in H.$$

Le morphisme de groupe $\varphi_p : H \rightarrow \mathbb{C}^*$:

$$h \mapsto \exp \frac{c + h}{\alpha_k}$$

a pour noyau H_k et la bijection induite $H/H_k \rightarrow \mathbb{C}^*$ identifie T_k avec son image dans H/H_k . Soit maintenant un point p intersection de deux projectifs $\mathbb{P}_k$ et $\mathbb{P}_\ell$, de résidus α_k et α_ℓ . D'après (1.2.3), la trace de F dans un voisinage de p est donnée par l'égalité dans $\mathbb{C}/H_{k\ell}$:

$$\alpha_k \log z_k + \alpha_\ell \log z_\ell = c + h, \quad \text{avec} \quad \sigma_{k\ell}(c + h) = c,$$

soit :

$$\alpha_k \log z_k + \alpha_\ell \log z_\ell = c + h \bmod H_{k\ell}. \quad \square$$

1.3. Calcul pratique des résidus.

L'algorithme appliqué ici étant celui de la désingularisation de la fonction f , le calcul des résidus α_k est identique à celui utilisé pour calculer les multiplicités de $f \circ E$ sur les D_k . On peut donc utiliser la méthode suivante (cf. [6]) :

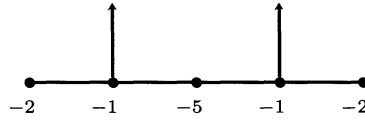
On remarque d'abord que les résidus le long des branches correspondant aux éclatées strictes sont les λ_i correspondants. Les autres résidus le long des projectifs se calculent en considérant la matrice d'incidence $A = (A_{k\ell})$ de l'arbre de désingularisation, formée comme suit : on numérote chaque projectif du diviseur exceptionnel. Sur la diagonale, A_{kk} est la classe d'Euler du fibré normal au-dessus de D_k (elles se calculent à l'aide du « film » de la désingularisation). Le coefficient $A_{k\ell}$, pour $k \neq \ell$, vaut 1 lorsque D_k et D_ℓ ont une intersection non vide, 0 dans le cas contraire. Notons s_k la somme des résidus des branches qui passent par D_k . Les vecteurs colonnes s_k et α_k sont notés s et α . On calcule les α_k en résolvant :

$$A \cdot \alpha + s = 0.$$

Exemple 1.3.1. — Soit la forme logarithmique :

$$\omega = \lambda \frac{d(x^2 - y^3)}{x^2 - y^3} + \mu \frac{d(x^3 - y^2)}{x^3 - y^2}.$$

Utilisons la notation duale des arbres de désingularisation qui consiste à représenter chaque projectif de D par un point et à les relier par une arête lorsqu'ils s'intersectent. Les composantes des éclatées strictes de X sont représentées par une flèche. Le double-cusp $(x^2 - y^3)(x^3 - y^2) = 0$ se désingularise par l'arbre (avec classes d'Euler) suivant :



Sa matrice d'incidence est :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

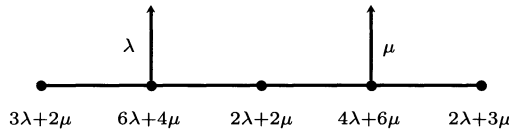
On obtient donc

$$\alpha = -A^{-1} \cdot s = - \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda + 2\mu \\ 6\lambda + 4\mu \\ 2\lambda + 2\mu \\ 4\lambda + 6\mu \\ 2\lambda + 3\mu \end{pmatrix}.$$

L'arbre de désingularisation de l'application multivaluée

$$(x^2 - y^3)^\lambda (x^3 - y^2)^\mu$$

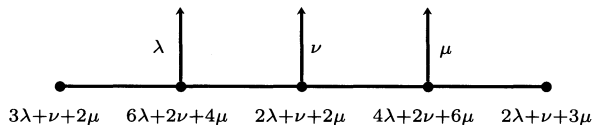
est donc :



Exemple 1.3.2. — On établit de même que la fonction de Liouville à trois branches :

$$(x^2 - y^3)^\lambda (x - y)^\nu (x^3 - y^2)^\mu$$

a pour arbre de désingularisation :



1.4. Structure de Clemens associée à $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$.

Dans ce qui suit, on note Σ_k chaque composante D_k du diviseur privée d'un petit disque autour de chaque point singulier de D . Lorsqu'on oublie le caractère holomorphe de la coordonnée non transverse, il est possible d'après [11] de s'imposer des changements de coordonnées d'un type particulier, que nous rappelons dans la définition suivante :

DÉFINITION 1.4.1. — Une structure de Clemens associée à ω est la donnée :

1) d'une collection au voisinage de chaque composante Σ_k d'atlas de cartes :

$$(x_U, z_U) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}$$

avec z_U coordonnée transverse adaptée à (D, F) et changements de cartes diagonaux :

$$\varphi_{UV}(x, z) = (\varphi_{UV}^1(x), \varphi_{UV}^2(z)),$$

où φ_{UV}^1 est C^∞ et φ_{UV}^2 holomorphe ;

2) d'une collection, sur un voisinage U_p de chaque coin $p = D_k \cap D_\ell$ du diviseur, de coordonnées transverses adaptées à (D, F) :

$$(z_k, z_\ell) : U_p \rightarrow \mathbb{C}^2$$

dont les changements de cartes avec les atlas de type (1) sont de la forme :

$$(z_k, z_\ell) \longmapsto (x, z) = (z_\ell, z_k \cdot z_\ell^{\alpha_\ell / \alpha_k})$$

sur une intersection de U_p avec un ouvert de Σ_k dans laquelle z_ℓ est une unité.

Remarque 1.4.2. — Cette construction existe pour toute forme logarithmique en dimension n . Du fait de la restriction présente à

la dimension deux, les changements de coordonnées transverses φ_{UV}^2 sont nécessairement linéaires (afin de pouvoir respecter l'écriture locale adaptée $\alpha_k dz/z$ de $\tilde{\omega}$).

A chaque atlas défini en (1.4.1), associons le fibré tangent de base Σ_k , de fibre $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}$, avec changements de trivialisations à valeurs dans $GL(2, \mathbb{R}) \times GL(1, \mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} d\varphi_{UV}^1 & 0 \\ 0 & d\varphi_{UV}^2 \end{pmatrix}.$$

Ces changements de coordonnées étant diagonaux, on parle de manière intrinsèque de sections verticales (exprimables localement en la variable z) ou horizontales (en x).

DÉFINITION 1.4.3. — *On appelle champ de Clemens une section verticale de ce fibré tangent. Une fibre de Clemens est l'adhérence d'une trajectoire d'un champ de Clemens.*

Remarques 1.4.4.

1) Tout champ de Clemens admet pour flot un groupe à un paramètre complexe de difféomorphismes $\varphi(x, z, t)$ dépendant holomorphiquement de z et t , et C^∞ de x . Ils définissent un feuilletage en feuilles holomorphes, transversalement C^∞ . (Il en est de même pour les champs tangents à ω , multipliés par une intégrale première C^∞ de ω .)

2) Soit ξ un champ de Clemens local. On sait évaluer $\omega(\xi)$ puisque les deux objets s'expriment dans la même coordonnée transverse holomorphe z . L'évaluation est une fonction holomorphe ne dépendant que de z , c'est-à-dire une intégrale première holomorphe locale de ω .

2. Transport transverse canonique.

2.1. Rappels sur les symétries holomorphes.

Les détails des résultats ci-dessous sont dans [3]. Soit α un germe de 1-forme holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2$.

DÉFINITION 2.1.1. — *Un germe d'application holomorphe f de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dans $(\mathbb{C}, 0)$ est un facteur intégrant de α lorsque la forme méromorphe α/f est fermée.*

Remarque 2.1.2. — Le quotient de deux facteurs intégrants est une intégrale première méromorphe de α . Donc, en l'absence d'une telle intégrale première, tous les facteurs intégrants sont proportionnels.

DÉFINITION 2.1.3. — Une symétrie holomorphe de α est un germe de champ de vecteur holomorphe ξ laissant invariant le feuilletage défini par α :

$$\mathcal{L}_\xi \alpha \wedge \alpha = 0.$$

En utilisant l'identité : $\mathcal{L}_\xi = d i_\xi + i_\xi d$ et la relation $\alpha \wedge d\alpha = 0$ (intégrabilité de α), on établit aisément l'équivalence :

PROPOSITION 2.1.4. — Un champ ξ est symétrie holomorphe de la forme α si et seulement si $\alpha(\xi)$ est facteur intégrant de α .

Soit α admettant un facteur intégrant non constant f . Notons ω la forme méromorphe fermée α/f . (On remarquera que deux telles formes définissent le même feuilletage si et seulement si elles diffèrent d'une constante multiplicative.) Si un champ ξ vérifie $\omega(\xi) = c$, où c est une constante, alors d'après l'équivalence ci-dessus, ξ est symétrie de α . La réciproque est vraie en l'absence d'une intégrale première méromorphe, d'après (2.1.2). Hormis ce cas, la définition ci-dessous équivaut donc à (2.1.3) :

DÉFINITION 2.1.5. — Le champ ξ est une symétrie holomorphe pour la forme logarithmique ω lorsque $\omega(\xi) = c$ constante. Lorsque c est non nulle, la symétrie est dite transverse ; elle est tangente dans l'autre cas. (Ces notions sont géométriques : elles ne dépendent que du feuilletage associé à ω .) La symétrie transverse ξ est normalisée pour ω lorsque $\omega(\xi) = 1$.

On remarquera enfin que l'ensemble des symétries holomorphes d'une forme logarithmique fermée ω forme une algèbre de Lie : le crochet de deux symétries holomorphes est toujours un champ tangent d'après

$$0 = d\omega(\xi, \zeta) = \xi \omega(\zeta) - \zeta \omega(\xi) - \omega([\xi, \zeta]).$$

2.2. Critère d'existence d'une symétrie transverse holomorphe

Notons $\Omega^1(\log X)$ le $\mathcal{O}_2$ -module des formes logarithmiques à pôles sur X , c'est-à-dire des formes méromorphes η telles que $f \cdot \eta$ et $f \cdot d\eta$ soient holomorphes. La forme $\omega = \alpha/f$ en est un exemple. De [13], il résulte

que ce $\mathcal{O}_2$ -module est libre de rang 2. De plus le $\mathcal{O}_2$ -module des champs logarithmiques :

$$\chi(\log X) = \{\xi; \xi(f) \in (f)\}$$

en est le dual pour l'accouplement des champs et 1-formes holomorphes. Notons (ω_1, ω_2) une base de $\Omega^1(\log X)$, (ξ_1, ξ_2) sa base duale dans $\chi(\log X)$. Soit (a, b) l'idéal des « composantes logarithmiques » de ω :

$$\omega = a \cdot \omega_1 + b \cdot \omega_2.$$

Posons :

$$\mu_{\log}(\omega) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(a, b)}.$$

PROPOSITION 2.2.1. — *La forme logarithmique ω admet une symétrie transverse holomorphe si et seulement si $\mu_{\log}(\omega) = 0$.*

Preuve. — Une symétrie transverse holomorphe est nécessairement tangente à X , d'après $\alpha(X) = c \cdot f$. Les symétries transverses holomorphes sont donc à chercher dans $\chi(\log X)$. L'existence d'un champ $\xi = f_1 \xi_1 + f_2 \xi_2$ vérifiant :

$$\omega(\xi) = (a\omega_1 + b\omega_2)(f_1\xi_1 + f_2\xi_2) = af_1 + bf_2 = C^{\text{te}},$$

équivalent à $(a, b) = \mathcal{O}_2$. □

Remarque. — Cet argument montre de plus qu'étant donné un élément quelconque g de l'idéal (a, b) , il existe toujours une symétrie transverse *méromorphe* à pôles sur $(g = 0)$.

Rappelons qu'un polynôme est dit *quasi-homogène* lorsque les points correspondants à ses monômes sur le diagramme de Newton sont alignés. Un germe de fonction analytique est *quasi-homogène* lorsqu'il existe un changement de variable analytique le conjuguant à un polynôme quasi-homogène. Dans [14], lorsque f est réduite, à singularité isolée, est établie l'équivalence de cette définition avec

$$f \in \mathcal{M} \cdot J(f),$$

où $J(f)$ désigne l'idéal jacobien $(\partial f / \partial x, \partial f / \partial y)$ et $\mathcal{M}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_2$. Cette dernière propriété se traduit par l'existence d'un champ $\xi = a\partial/\partial x + b\partial/\partial y$ où a et b sont les éléments de $\mathcal{M}$ tels que

$$f = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = df \cdot \xi$$

c'est-à-dire par l'existence d'une symétrie transverse holomorphe pour la forme df/f (au sens de la définition 2.1.5). Ceci motive la définition de [3] : une forme logarithmique ω est dite *quasi-homogène* lorsqu'elle admet une symétrie transverse holomorphe. Ceci permet de réénoncer la proposition 2.2.1 sous la forme : ω logarithmique est quasi-homogène si et seulement si $\mu_{\log}(\omega) = 0$. En particulier nous avons le critère de quasi-homogénéité des singularités réduites :

COROLLAIRE 2.2.3. — *Un germe (réduit) de fonction holomorphe f est quasi-homogène si et seulement si $\mu_{\log}(df/f) = 0$.*

QUESTION. — Le nombre $\mu_{\log}(\omega)$ apparaît ici comme obstruction à la quasi-homogénéité. Peut-on préciser sa signification géométrique ?

2.3. Existence d'un transport transverse canonique.

DÉFINITION 2.3.1. — *Soit ω un représentant d'une forme logarithmique sur un ouvert U . Un transport transverse C^∞ (resp. analytique) de ω est une famille d'applications $\Phi_t : U \rightarrow U$, $t \in \mathbb{C}$ qui vérifie :*

- 1) Φ_t envoie fibres régulières dans fibres régulières;
- 2) Φ_t est un difféomorphisme C^∞ (resp. analytique) sur son image;
- 3) la famille d'isomorphismes Φ_t^* induite par Φ_t sur l'homotopie des fibres est un groupe à un paramètre complexe.

Considérons d'abord la situation quasi-homogène. Soit ω admettant une symétrie transverse holomorphe ξ . Il est clair que son flot est un transport transverse analytique pour ω . Nous dirons que ce transport est *normalisé* (pour ω) lorsque ξ l'est : $\omega(\xi) = 1$.

PROPOSITION 2.3.2. — *Les transports transverses normalisés de ω quasi-homogène induisent tous la même action de $(\mathbb{C}, +) : t \mapsto \Phi_t^*$ sur l'homotopie des fibres. (Nous appellerons cette action à isotopie près : transport transverse canonique de ω .)*

LEMME 2.3.3. — *Soit ω admettant une symétrie transverse holomorphe ξ sur un ouvert $U : \omega(\xi) = c$. L'application induite par le flot au temps t de ξ sur l'espace des fibres régulières $\mathbb{C}/H$ est la translation par $c \cdot t$.*

Preuve. — Soient p un point de $U \setminus X$ et u une détermination de $\sum_{i=1}^p \lambda_i \log f_i$ sur une petite boule autour de p . Complétons u en un système

de coordonnées locales (u, v) . Dans ces coordonnées :

$$p = (u_0, v_0), \quad \omega = du, \quad \xi = c \frac{\partial}{\partial u} + b(u, v) \frac{\partial}{\partial v}.$$

La première composante du flot de ξ est :

$$u(p, t) = u_0 + c \cdot t,$$

d'où le résultat. □

Preuve de la proposition 2.3.2. — Soit ξ_1 et ξ_2 deux symétries transverses holomorphes de ω , de flots φ_1 et φ_2 . Soit γ un lacet dans une fibre régulière F_0 de ω . Ses deux images par les deux flots pris au même temps t sont sur la même fibre, d'après le lemme ci-dessus. L'application

$$h_s = (\varphi_1^{st})^{-1} \circ \varphi_2^{st}, \quad s \in [0, 1],$$

réalise une isotopie à l'intérieur de cette fibre entre les deux images de γ . (En particulier, elles sont sur une même composante connexe de cette fibre). □

Considérons maintenant le cas général.

THÉORÈME 2.3.4. — *Soit ω une forme logarithmique non dicritique.*

1) ω admet des transports transverses C^∞ normalisés (i.e. induisant sur $\mathbb{C}/H$ la translation par t) ;

2) ces transports induisent tous la même action de $(\mathbb{C}, +)$ sur l'homotopie des feuilles (appelée là encore transport transverse canonique de ω .)

Pour démontrer ce résultat, utilisons une désingularisation $E : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de ω . Soient $D = E^{-1}X$ et $\tilde{\omega}$ la forme logarithmique fermée $E^*\omega$.

DÉFINITION 2.3.5. — *On appelle symétrie de Clemens normalisée au-dessus d'une composante Σ_k de D tout champ de Clemens ξ_k tel que $\tilde{\omega}(\xi_k) = 1$.*

LEMME 2.3.6.

1) *Il existe des symétries de Clemens normalisées ξ_k au-dessus de chaque composante Σ_k .*

2) *Il existe des symétries holomorphes normalisées locales $\xi_{k\ell}$ au voisinage de chaque coin $p = D_k \cap D_\ell$ qui commutent avec les symétries de Clemens ξ_k .*

Preuve.

1) Soit $\xi_U = \alpha^{-1} z_U \partial / \partial z_U$ un champ local de Clemens dans les coordonnées de Clemens (x_U, z_U) . On a $\tilde{\omega}(\xi_U) = 1$. De plus, d'après la forme diagonale des changements de variables et la remarque 1.4.2, ξ_U et ξ_V coïncident sur $U \cap V$.

2) Soit $\xi_{k\ell} = \frac{1}{2}(\alpha_k^{-1} z_k \partial / \partial z_k + \alpha_\ell^{-1} z_\ell \partial / \partial z_\ell)$. On a encore $\tilde{\omega}(\xi_{k\ell}) = 1$ d'après l'écriture locale de $\tilde{\omega}$. De plus, d'après la forme des changements de variables φ imposée par la structure de Clemens, on a :

$$\begin{aligned} \xi_{k\ell} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z_\ell^{\alpha_\ell/\alpha_k} & \frac{\alpha_\ell}{\alpha_k} z_k \cdot z_\ell^{\alpha_\ell/\alpha_k - 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_k/2\alpha_k \\ z_\ell/2\alpha_\ell \end{pmatrix} \\ = \frac{x}{2\alpha_\ell} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{z}{\alpha_k} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{x}{2\alpha_\ell} \frac{\partial}{\partial x} + \xi_k, \end{aligned}$$

d'où $[\xi_{k\ell}, \xi_k] = 0$. □

Remarque 2.3.7. — En fait, on a même des symétries transverses *holomorphes* globales au-dessus de chaque Σ_k (nous dirons : « semi-globales ») : l'obstruction au recollement des symétries holomorphes normalisées locales est dans le premier groupe de cohomologie de Σ_k , à valeur dans le faisceau des champs tangents, groupe qui est nul par cohérence de ce faisceau de $\mathcal{O}_2$ -modules sur l'ouvert de Stein Σ_k . Cependant, la condition de commutation que l'on demande dans le second point ne s'obtient que grâce aux changements de coordonnées de type Clemens, *i.e.* en oubliant l'holomorphie dans la direction des feuilles.

Preuve du théorème 2.3.4. — Les symétries de Clemens ξ_k et les symétries de coin $\xi_{k\ell}$ ne se recollent pas. Cependant la relation de commutation nous permet de recoller leur flots $\Phi_t^{\xi_k}$ et $\Phi_t^{\xi_{k\ell}}$ par un « twist » C^∞ construit comme suit. Soient $U_k, U_{k\ell}$ les ouverts sur lesquels sont définis les symétries ξ_k et $\xi_{k\ell}$. Supposons que la trace sur Σ_k de $U_{k\ell} \cap U_k$ soit la couronne $\eta < |z_\ell| < \varepsilon$. Choisissons une fonction C^∞ $\rho = \rho(|z_\ell|)$ prenant la valeur 1 sur le disque intérieur $|z_\ell| < \eta$ et la valeur 0 à l'extérieur $|z_\ell| > \varepsilon$. Relevons-la sur $U_{k\ell} \cap U_k$ par $\rho(z_k, z_\ell) = \rho(z_\ell)$. L'application

$$\Phi_t : p \longmapsto \Phi_t(p) = \Phi_{\rho(p)t}^{\xi_{k\ell} - \xi_k} \circ \Phi_t^{\xi_k}(p)$$

coïncide avec $\Phi_t^{\xi_k}$ lorsque ρ est nul, et avec le flot de $\xi_{k\ell}$ lorsque ρ vaut 1, puisque $[\xi_{k\ell}, \xi_k] = 0$. Elle envoie donc fibres sur fibres, puisque le « twist » $\Phi_{\rho(p)t}^{\xi_{k\ell} - \xi_k}$ est tangent au feuilletage. Assurons-nous maintenant que Φ_t forme bien une famille de difféomorphismes sur leurs images :

LEMME 2.3.8. — *Étant donnée une couronne $\eta < |z_\ell| < \varepsilon$, il existe une fonction C^∞ $\rho = \rho(|z_\ell|)$ prenant la valeur 1 sur le disque intérieur $|z_\ell| < \eta$ et 0 à l'extérieur $|z_\ell| > \varepsilon$, et un $\alpha > 0$ de sorte que, pour tout t vérifiant $|t| < \alpha$ les Φ_t obtenus par recollement au-dessus de cette couronne soient injectives.*

Preuve. — En utilisant les changements de coordonnées de Clemens, on vérifie que le champ $(\xi_{k\ell} - \xi_k)$ s'exprime dans les coordonnées adaptées au coin :

$$-\frac{1}{2\alpha_k} z_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \frac{1}{2\alpha_\ell} z_\ell \frac{\partial}{\partial z_\ell}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\Phi_t^{\xi_{k\ell} - \xi_k}(z_k, z_\ell) &= (z_k \cdot e^{-t/2\alpha_k}, z_\ell \cdot e^{t/2\alpha_\ell}), \\ \Phi_t^{\xi_k}(z_k, z_\ell) &= (z_k \cdot e^{t/\alpha_k}, z_\ell),\end{aligned}$$

d'où l'expression de Φ_t :

$$\Phi_t(z_k, z_\ell) = \left(z_k \cdot e^{-\frac{t}{2\alpha_k} \rho(|z_\ell|) + \frac{t}{\alpha_k}}, z_\ell \cdot e^{\frac{t}{2\alpha_\ell} \rho(|z_\ell|)} \right) = (Z_k, Z_\ell).$$

Vérifions d'abord que l'application f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à $|z_\ell|$ associe $|Z_\ell|$ est injective, pour t suffisamment proche de 0. D'après l'expression ci-dessus, cette application est de la forme :

$$f(x) = x e^{k\rho(x)},$$

où $k = \text{Re}(t/2\alpha_\ell)$ et ρ une fonction C^∞ décroissante valant 1 pour $x < \eta$ et 0 pour $x > \varepsilon$. Lorsque k est négatif, f est strictement croissante. Par contre, lorsque k est positif, il est nécessaire de choisir ρ de sorte que :

$$\rho'(x) > -\frac{1}{kx}.$$

Pour ε et η donnés, il est possible de choisir ρ « pas trop verticale », disons :

$$\rho'(x) > -\frac{2}{\varepsilon - \eta}.$$

La condition

$$-\frac{2}{\varepsilon - \eta} > -\frac{1}{k\varepsilon}$$

est alors suffisante pour obtenir la stricte croissance de f . On choisira donc α de sorte que pour $|t| < \alpha$, $k = \operatorname{Re}(t/2\alpha_\ell)$ soit inférieur à $(\varepsilon - \eta)/2\varepsilon$. Puisque $|z_\ell|$ est uniquement déterminé par l'injectivité de f , (Z_k, Z_ℓ) admet au plus une pré-image par Φ_t :

$$(z_k, z_\ell) = \left(Z_k \cdot e^{\frac{t}{2\alpha_k} \rho(f^{-1}(|Z_\ell|) - \frac{t}{\alpha_k})}, Z_\ell \cdot e^{-\frac{t}{2\alpha_\ell} \rho(f^{-1}(|Z_\ell|))} \right). \quad \square$$

Vérifions maintenant le troisième point de la définition d'un transport transverse (2.31). La famille Φ_t construite ci-dessus n'est pas *a priori* un groupe à un paramètre (il faudrait pour cela que ρ soit aussi une intégrale première du feuilletage). Vérifions cependant que l'image par $\Phi_{t+t'} \circ \Phi_{t'}^{-1} \circ \Phi_t^{-1}$ d'un lacet γ dans une fibre F est un lacet homotope à γ dans F . L'affirmation du lemme 2.3.3 reste valable pour les symétries de Clemens, car sa preuve ne nécessite qu'une variable holomorphe, la variable transverse. On en déduit que pour toute valeur du paramètre s dans l'intervalle $[0, 1]$, $\Phi_{s(t+t')} \circ \Phi_{st'}^{-1} \circ \Phi_{st}^{-1}(\gamma)$ est encore un lacet γ_s de F , et réalise l'homotopie cherchée. La famille Φ_t^* induite par Φ_t sur les groupes fondamentaux des fibres est donc un groupe à un paramètre complexe.

Pour vérifier que cette action de $(\mathbb{C}, +)$ est indépendante du choix de la famille Φ_t , il suffit de reprendre l'argument de (2.3.2) : si Φ_t^1 et Φ_t^2 sont deux familles de difféomorphismes ayant même action sur l'espace des fibres régulières, l'application :

$$h_s = (\Phi_1^{st})^{-1} \circ \Phi_2^{st}, \quad s \in [0, 1],$$

réalise une homotopie dans une feuille entre les images d'un lacet γ par Φ_t^1 et Φ_t^2 . $\square$

2.4. Voisinages réguliers de la singularité.

DÉFINITION 2.4.1. — Un voisinage U d'une singularité définie par une forme ω est dit C^∞ -régulier (resp. analytiquement régulier) lorsque toutes les feuilles définies par ω dans U sont C^∞ (resp. analytiquement) difféomorphes.

THÉORÈME 2.4.2. — Soit ω une forme logarithmique définie sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$ dont le groupe des périodes admet deux éléments $\mathbb{R}$ -indépendants. Il existe un système fondamental de voisinages de l'origine, C^∞ -réguliers pour ω . Si de plus ω est quasi-homogène, il en existe un analytiquement régulier.

Preuve. — Fixons une boule $B(0, \varepsilon_0)$ autour de l'origine de $\mathbb{C}^2$, et une fibre régulière F de $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$. Notons F_ε la trace de cette fibre dans $B(0, \varepsilon)$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, et X_ε celle de la fibre singulière. Épaississons F_ε à l'aide d'un transport transverse normalisé Φ_t donné par le théorème 2.3.4, en posant :

$$U_{\eta, \Phi, \varepsilon} = \bigcup_{t \in D(0, \eta)} \Phi_t(F_\varepsilon).$$

Rajoutons à $U_{\eta, \Phi, \varepsilon}$ la fibre singulière en posant :

$$V_{\eta, \Phi, \varepsilon} = U_{\eta, \Phi, \varepsilon} \cup (X_\varepsilon \cap \overline{U_{\eta, \Phi, \varepsilon}}).$$

Par construction, toutes les fibres dans $V_{\eta, \Phi, \varepsilon}$ sont C^∞ -difféomorphes, et même analytiquement difféomorphes dans le cas quasi-homogène. La preuve du théorème se réduit donc à celle du

LEMME 2.4.3. — *Il existe deux réels positifs η_0 et η_1 tels que pour tout η vérifiant $\eta_0 < \eta < \eta_1$, $V_{\eta, \Phi, \varepsilon}$ soit un voisinage de la fibre singulière X_ε dans $B(0, \varepsilon_0)$.*

Preuve. — Choisissons d'abord η_1 de sorte que $V_{\eta, \Phi, \varepsilon}$ soit inclus dans $B(0, \varepsilon_0)$. Désingularisons ω et plaçons-nous d'abord au voisinage d'un point lisse p d'une composante Σ_k du diviseur, de résidu α_k . D'après (1.2.4), l'intersection de la fibre F_ε avec la fibre de Clemens en p est incluse dans l'ensemble des points de coordonnées :

$$z = z_0 \exp\left(\frac{h}{\alpha_k}\right), \quad h \in H.$$

Le transport transverse normalisé est localement défini par le flot de la symétrie $\alpha_k^{-1} z \partial / \partial z$ dont le relevé par l'exponentielle est la translation par $\alpha_k^{-1} \cdot t$. Le voisinage U_η est donc l'image par l'exponentielle d'une union de disques de rayon η centrés sur les points de H . Ce groupe contenant deux éléments $\mathbb{R}$ -indépendants, est soit un réseau de $\mathbb{C}$, soit un sous-groupe dense. Il existe donc un $\eta(\Sigma_k)$ de sorte que, pour η supérieur à cette valeur, cette union de disques soit un ouvert connexe, simplement connexe. (Lorsque H est dense, $\eta(\Sigma_k) = 0$ convient.)

Lorsque p est un coin intersection de deux composantes de résidus α_k et α_ℓ , F_ε est d'après (1.2.4), l'union des fibres locales : $\alpha_k \log z_k + \alpha_\ell \log z_\ell = c + h$, mod $H_{k\ell}$. Son revêtement par l'exponentielle

de chaque coordonnée est l'union des droites complexes parallèles de $\mathbb{C}^2$: $\alpha_k y_k + \alpha_\ell y_\ell = c + h$, $h \in H$. Le transport transverse est ici localement défini par la symétrie holomorphe $\frac{1}{2}(\alpha_k^{-1} z_k \partial / \partial z_k + \alpha_\ell^{-1} z_\ell \partial / \partial z_\ell)$ dont le flot, relevé par l'exponentielle est la translation de vecteur $((2\alpha_k)^{-1} \cdot t, (2\alpha_\ell)^{-1} \cdot t)$. Il translate l'hyperplan $\alpha_k y_k + \alpha_\ell y_\ell = c$ en $\alpha_k y_k + \alpha_\ell y_\ell = c + t$. Le voisinage U_η est donc ici l'image par l'exponentielle d'une union indexée par H de produits de droites par des disques de rayon η . On choisit alors un $\eta(p)$ de sorte que pour $\eta > \eta(p)$ cette union soit connexe simplement connexe. Sur la zone de recollement de ces actions transverses, le twist étant effectué tangentiellement au feuilletage n'affecte pas les résultats ci-dessus. On prend pour η_0 le plus grand des $\eta(\Sigma_k)$, $\eta(p)$ lorsque Σ_k décrit l'ensemble des composantes irréductibles du diviseur, et p l'ensemble des coins. $\square$

Remarque 2.4.4. — Dans un voisinage régulier, toutes les fibres sont difféomorphes, et ont en particulier même homologie. Cependant cette notion ne différencie pas dans l'homologie de la « fibre type » les cycles de bord, créés par l'intersection des feuilles avec le bord du voisinage, des cycles « évanescents » intrinsèques à la singularité. La notion de *bons voisinages* (3.1.6) effectuera cette distinction.

2.5. Monodromie d'une singularité logarithmique.

On a vu au lemme 2.3.3 que $(\mathbb{C}, +)$ agit par translation sur l'espace $\mathbb{C}/H$ des fibres régulières. En particulier, la restriction de cette action au sous-groupe H des périodes laisse fixe chaque fibre régulière.

DÉFINITION 2.5.1. — On appelle monodromie de ω l'action du groupe H des périodes de ω sur la fibre-type d'un voisinage régulier, définie par restriction du transport transverse canonique à H . (Rappelons que d'après (2.3.4), cette action n'est définie qu'à isotopie près.)

En fait pour être précis, seule la trace de H sur un voisinage de l'origine de $(\mathbb{C}, +)$ agit. Cependant cette action locale s'étend à une action de tout le groupe sur le modèle transverse que nous définirons au paragraphe suivant.

Lorsque les résidus λ_i sont entiers positifs ($\lambda_i = n_i$), et lorsque l'application uniforme $f = f_1^{n_1} \cdots f_p^{n_p}$ n'est pas une puissance, le groupe des périodes s'identifie à $2i\pi\mathbb{Z}$.

PROPOSITION 2.5.2. — L'action de $2i\pi\mathbb{Z}$ sur la fibre de Milnor de f définie en (2.5.1) comme groupe des périodes de df/f , s'identifie à la monodromie usuelle de la singularité de l'application f .

Preuve. — Dans le cas uniforme, on sait qu'il existe une boule B_ε à l'origine de $\mathbb{C}^2$, un disque D_η et un représentant de f de sorte que $f : B_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta) \rightarrow D_\eta$ soit une fibration localement triviale en dehors de la fibre singulière $f^{-1}(0)$. La monodromie usuelle de f est l'action de $\mathbb{Z} = \pi_1(D_\eta \setminus \{0\})$ sur la fibre définie par un système de trivialisations locales.

Soit δ le champ holomorphe sur $D_\eta : z\,d/dz$, de flot $\Psi_t(z) = e^t \cdot z$. Une trivialisations locale Φ_t de la fibration est un relevé par f de ce flot :

$$(1) \quad f \circ \Phi_t = \Psi_t \circ f.$$

Le transport transverse défini en (2.3.4) vérifie la relation de commutation ci-dessus. En effet, il coïncide localement (éventuellement à un twist tangentiel près) avec le flot d'une symétrie transverse normalisée ξ de $df/f : df(\xi) = f$, et une telle égalité est la version infinitésimale de (1). Cette famille réalise donc une trivialisations de la fibration, et la monodromie associée au lacet e^t , $t \in [0, 2i\pi]$ est $\Phi_{2i\pi}$. $\square$

3. Homologie évanescence.

3.1. Définition de l'homologie évanescence.

Nous allons la définir comme homologie d'un modèle transverse le long du diviseur exceptionnel, dont nous décrivons ici la construction. Les modèles locaux en un point régulier ou singulier ont été décrits en (1.2.4). Au voisinage d'un point singulier intersection des composantes D_k et D_ℓ , il est formé de $H/H_{k\ell}$ copies de la fibre locale F_c dans $\mathbb{C}^{*2} : \alpha_k \log z_k + \alpha_\ell \log z_\ell = c \bmod H_{k\ell}$. Précisons la topologie de F_c :

LEMME 3.1.1.

1) a) Si $\alpha_k/\alpha_\ell \notin \mathbb{Q}$, alors F_c est homotopiquement triviale.

b) Si $\alpha_k/\alpha_\ell \in \mathbb{Q}$, alors F_c a le type d'homotopie d'un cylindre.

2) Soit $U_{k\ell}$ le polydisque : $\{|z_k| < 2\varepsilon, |z_\ell| < 2\varepsilon\}$. Il existe une rétraction de F_c sur sa trace dans $U_{k\ell}$.

3) Soit U_k (resp. U_ℓ) l'ensemble des points du polydisque $U_{k\ell}$ vérifiant : $|z_\ell| > \varepsilon$ (resp. $|z_k| > \varepsilon$). Si le quotient des résidus α_k/α_ℓ n'est pas réel négatif, il existe une rétraction de la fibre locale F_c dans $U_{k\ell}$ sur sa trace dans U_k (resp. U_ℓ).

Preuve.

1) Considérons le revêtement universel de $\mathbb{C}^{*2}$ par l'exponentielle de chaque coordonnée. La restriction de ce revêtement au-dessus de

$$\{(z_k, z_\ell) \in \mathbb{C}^{*2}; \alpha_k \log z_k + \alpha_\ell \log z_\ell = c \bmod H_{k\ell}\}$$

a pour espace total

$$\bigcup_{h \in H_{k\ell}} \{(y_k, y_\ell) \in \mathbb{C}^2; \alpha_k y_k + \alpha_\ell y_\ell = c + h\}.$$

Tout point de la base admet une pré-image sur chacun des hyperplans, de sorte que un seul de ces hyperplans constitue encore un revêtement (connexe) de la base. Il a pour fibre

$$\{(n_k, n_\ell) \in \mathbb{Z}^2; n_k \alpha_k + n_\ell \alpha_\ell = 0\}.$$

Donc en l'absence de relations entières ce revêtement est trivial. Lorsque $\alpha_k/\alpha_\ell = -p_\ell/p_k$, avec p_k et p_ℓ entiers premiers entre eux, la base est quotient de la droite complexe $\alpha_k y_k + \alpha_\ell y_\ell = c$ par la translation de vecteur $u = (2i\pi p_k, 2i\pi p_\ell)$.

2) Posons $2\varepsilon = \exp -A$. Soit $\widetilde{U_{k\ell}}$ le relevé de $U_{k\ell} \setminus \{0\}$ par l'exponentielle $\{\operatorname{Re} y_k < -A, \operatorname{Re} y_\ell < -A\}$. Cet espace étant intersection de demi-espaces affines, la trace des droites complexes $\alpha_k y_k + \alpha_\ell y_\ell = c$ sur $\widetilde{U_{k\ell}}$ reste connexe, et ces droites se rétractent sur leurs traces dans $\widetilde{U_{k\ell}}$. Dans le cas où le revêtement est trivial, la rétraction redescend. Lorsque α_k/α_ℓ est rationnel, la droite complexe $\Delta : \alpha_k y_k + \alpha_\ell y_\ell = c$ est engendrée sur $\mathbb{R}$ par les deux droites réelles :

$$\begin{cases} \Delta_r : \alpha_k \operatorname{Re} y_k + \alpha_\ell \operatorname{Re} y_\ell = d_r & \left(d_r = \alpha_k \operatorname{Re} \frac{c}{\alpha_k} \right), \\ \Delta_i : \alpha_k \operatorname{Im} y_k + \alpha_\ell \operatorname{Im} y_\ell = d_i & \left(d_i = \alpha_k \operatorname{Im} \frac{c}{\alpha_k} \right). \end{cases}$$

Le quotient de Δ par u est $\Delta_r \times (\Delta_i/u)$. Il suffit donc de choisir une rétraction de $\mathbb{C}^2$ sur $U_{k\ell}$ relevée d'une rétraction dans le plan $(\operatorname{Re} y_k, \operatorname{Re} y_\ell)$ pour qu'elle passe au quotient.

3) Lorsque α_k/α_ℓ n'est pas réel, les droites complexes qui revêtent la fibre locale intersectent le plan $(\operatorname{Re} y_k, \operatorname{Re} y_\ell)$ en une union de droites réelles parallèles distinctes. Il en existe toujours une qui se rétracte sur sa trace dans $\widetilde{U_k}$, ainsi qu'une se rétractant sur sa trace dans $\widetilde{U_\ell}$ (figure 1). Ces rétractions redescendent trivialement. Lorsque α_k/α_ℓ est réel, les droites

complexes qui revêtent la fibre locale intersectent le plan $(\operatorname{Re} y_k, \operatorname{Re} y_\ell)$ en une seule droite réelle : Δ_r . Quand la pente de cette droite est négative ($\alpha_k/\alpha_\ell > 0$), elle rencontre $\tilde{U}_k$ ainsi que $\tilde{U}_\ell$ (figure 2), et se rétracte sur l'un comme sur l'autre. Les rétractions redescendent, soit trivialement lorsque α_k/α_ℓ n'est pas rationnel, soit par le même argument qu'en (2) dans le cas rationnel. Par contre, lorsqu'elle est positive ($\alpha_k/\alpha_\ell < 0$), il se peut qu'elle ne rencontre pas l'un d'eux (figure 3). Ce cas de figure est ici exclu par hypothèse. $\square$

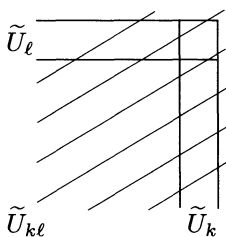


Figure 1

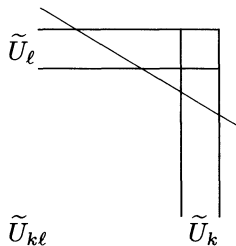


Figure 2

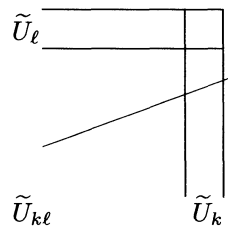


Figure 3

Construisons maintenant les modèles «semi-locaux» par recollement des modèles locaux réguliers au-dessus de chaque composante Σ_k de D . Le feuilletage étant localement trivial le long de Σ_k , la restriction F_k d'une fibre régulière F fixée est l'espace total d'un revêtement de Σ_k (plus précisément la trace de l'espace total d'un revêtement dans un voisinage de Σ_k dans M). La fibre de ce revêtement s'identifie par (1.2.4) à H/H_k . Calculons sa monodromie à l'aide de l'holonomie de la feuille Σ_k (holonomie projective).

PROPOSITION 3.2.1. — *L'holonomie projective d'une forme logarithmique est abélienne, linéarisable.*

Ce fait est bien connu, voir [3]. Nous en donnons ici une preuve résultant de l'existence de symétrie transverse semi-globale (holomorphe ou seulement de Clemens : lemme 2.3.6 et remarque 2.3.7) :

Preuve. — Soit ξ une symétrie semi-globale normalisée au-dessus de Σ_k . On note $\xi_U = \alpha_k^{-1} z \partial / \partial z$ son expression locale. Par construction, elle est invariante par le prolongement analytique de la coordonnée (intégrale première locale) z , c'est-à-dire par holonomie. Soit h_γ l'holonomie du lacet γ . Posons : $Z = h_\gamma(z)$. On a donc :

$$\alpha_k^{-1} Z \frac{\partial}{\partial Z} = \alpha_k^{-1} z \frac{\partial}{\partial z}$$

ou encore

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{dz}{z}$$

qui prouve que la coordonnée z linéarise h_γ , et ce pour tout γ . $\square$

Lorsqu'on restreint cette représentation de $\pi_1(\Sigma_k)$ à une fibre régulière fixée F , on obtient une action de $\pi_1(\Sigma_k)$ sur la trace transverse T de cette fibre, qui est la monodromie du revêtement de Σ_k par F_k .

COROLLAIRE 3.1.3. — *En identifiant la fibre T à une partie de H/H_k , l'holonomie projective induit un groupe de translations sur H/H_k . L'action du générateur γ_ℓ de $\pi_1(\Sigma_k)$ engendré par un lacet effectuant un tour autour de $D_k \cap D_\ell$ est la translation :*

$$\begin{aligned} H/H_k &\longrightarrow H/H_k, \\ [h] &\longmapsto [h + \alpha_\ell]. \end{aligned}$$

DÉFINITION 3.1.4. — *On appelle modèle transverse semi-local de F au-dessus de Σ_k le revêtement de fibre H/H_k dont la monodromie est donnée par (3.1.3).*

Précisons maintenant comment nous recollons ces modèles semi-locaux avec les modèles locaux des coins. On suppose dorénavant qu'aucun des quotients de résidus voisins n'est réel négatif. Soit $C_{k\ell}$ la couronne autour du coin $p = D_k \cap D_\ell$ dans D_k , intersection de Σ_k avec un disque autour de p dans D_k . Soit $C_{\ell k}$ la couronne similaire dans D_ℓ . La trace au-dessus de $C_{k\ell}$ de l'espace total du revêtement modèle $\widetilde{\Sigma}_k$ est formée de $H/H_{k\ell}$ composantes connexes, orbites de l'action du lacet γ_ℓ de $\pi_1(\Sigma_k)$ tournant autour de p sur la fibre locale H/H_k . Il y a de même $H/H_{k\ell}$ composantes connexes de $\widetilde{\Sigma}_\ell$ au-dessus de $C_{\ell k}$. Il y a d'autre part $H/H_{k\ell}$ composantes connexes du modèle local dans le polydisque (1.2.4) et toutes ont même type d'homotopie, celui d'un point ou de S^1 . Identifions les composantes connexes de $\widetilde{\Sigma}_k$ sur $C_{k\ell}$ avec celles de $\widetilde{\Sigma}_\ell$ sur $C_{\ell k}$ correspondant à la même valeur dans $H/H_{k\ell}$ (ceci est imposé par les changements de coordonnées adaptées aux primitives locales de la structure de Clemens) :

- lorsque α_k/α_ℓ n'est pas dans $\mathbb{Q}$, cette identification peut se faire de manière arbitraire, sans affecter le type d'homotopie du recollement.
- lorsque α_k/α_ℓ est dans $\mathbb{Q}$, chaque composante connexe a le type d'homotopie de S^1 . Il y a unicité à isotopie près de leur identification, si l'on prends garde à respecter l'orientation de F .

DÉFINITION 3.1.5. — On appelle modèle transverse global de $\tilde{\omega}$ l'espace topologique Σ obtenu par recollement des modèles semi-locaux par la construction ci-dessus.

On remarquera que les données qui ont permis sa construction (abélianité de l'holonomie, conditions sur les résidus) ne dépendent que du germe de la forme logarithmique et non du choix de l'ouvert sur lequel on la représente.

Soit F_U une fibre régulière dans un voisinage U de la singularité. Il existe une application φ de F_U dans le modèle transverse global Σ . Notons φ_i , $i \in \{0, 1\}$, les applications induites de $H_i(F_U, \mathbb{Z})$ dans $H_i(\Sigma, \mathbb{Z})$.

DÉFINITION 3.1.6.

- 1) Un voisinage U de la singularité est dit bon voisinage lorsque φ_0 est injective.
- 2) Un élément de $H_1(F_U, \mathbb{Z})$ est évanescent lorsque son image par φ_1 dans le modèle transverse est non nulle.

Soit $H_1^{\text{ev}}(F_U, \mathbb{Z})$ le sous-espace des cycles évanescents de $H_1(F_U, \mathbb{Z})$. Par construction, φ_1 est injective de $H_1^{\text{ev}}(F_U, \mathbb{Z})$ dans $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Nous posons :

DÉFINITION 3.1.7. — On appelle homologie évanescente de ω l'homologie de son modèle transverse Σ .

3.2. Calcul de l'homologie évanescente.

Le calcul de $H_0^{\text{ev}}(F_U, \mathbb{Z})$ se déduit de résultats établis en toute dimension dans [12] :

PROPOSITION 3.2.1.

- 1) Le modèle transverse Σ est connexe.
- 2) Il existe un système fondamental de voisinages U dans lesquels F_U reste connexe.

De la définition 1.1.2 et la proposition 1.1.3, on déduit :

COROLLAIRE 3.2.2. — Dans un bon voisinage, si $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ n'est pas une puissance, les fibres régulières de $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ sont connexes.

Intéressons-nous ici à $H_1^{\text{ev}}(F_U, \mathbb{Z})$. Calculons d'abord l'homologie de l'espace total $\tilde{\Sigma}_k$ de chaque revêtement modèle.

PROPOSITION 3.2.3 ⁽¹⁾. — Soit Σ une surface dont le groupe fondamental L est libre, de base $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Soit $\tilde{\Sigma}$ un revêtement de Σ de fibre (éventuellement infinie) G . Notons $\mathbb{Z}(G)$ le $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par G (i.e. les sommes formelles finies d'éléments de G à coefficients dans $\mathbb{Z}$). Le groupe L agit sur G (et donc sur $\mathbb{Z}(G)$) par monodromie. On a :

- 1) $H_0(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(G)/L$;
- 2) $H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}) = \left\{ (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}(G)^n, \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot c_i = \sum_{i=1}^n c_i, \text{ dans } \mathbb{Z}(G) \right\}$.

Preuve. — On fixe une fibre $G = \pi^{-1}\{\star\}$ du revêtement et on considère la suite exacte d'homologie relative pour la paire $(\tilde{\Sigma}, G)$:

$$(2) \quad 0 \rightarrow H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\tilde{\Sigma}, G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H_0(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_0(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Le groupe $H_0(G, \mathbb{Z})$ est le $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}(G)$ engendré par G . Le groupe $H_1(\tilde{\Sigma}, G, \mathbb{Z})$ s'identifie à $\mathbb{Z}(G)^n$ de la manière suivante : à tout couple (γ, g) de $\pi_1(\Sigma, \star) \times G$, $G \simeq \pi^{-1}(\star)$, on associe l'élément de $H_1(\tilde{\Sigma}, G, \mathbb{Z})$ obtenu par relèvement de γ à partir du point de base g . Cet élément peut être codé par un élément de G^n de la manière qui suit. On considère l'écriture unique $\gamma_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots \gamma_{i_p}^{\varepsilon_p}$ de γ . Au relevé de γ_i à partir de g on associe le n -uplet :

$$(0, \dots, 0, g, 0, \dots, 0)$$

où g est à la i -ème place. Dans le cas où on doit relever γ_i^{-1} à partir de g , on obtient la même cellule en relevant γ_i à partir de $\gamma_i^{-1} \cdot g$, puis en renversant son orientation. Nous codons donc ce relèvement par :

$$(0, \dots, 0, -\gamma_i^{-1}g, 0, \dots, 0).$$

Le groupe $H_1(\tilde{\Sigma}, G, \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par les 1-chaînes «élémentaires» décrites ci-dessus. On l'identifie donc à $\mathbb{Z}(G)^n$, en étendant par linéarité le codage ci-dessus. L'opérateur bord δ est le suivant : à la cellule élémentaire obtenue en relevant γ_i à partir de g , on associe le bord dans $\mathbb{Z}(G)$: $\gamma_i \cdot g - g$. Par linéarité, le bord d'une 1-chaîne relativement fermée c codée par $(c_1, \dots, c_n)$ dans $\mathbb{Z}(G)^n$ est :

$$\delta(c) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot c_i - \sum_{i=1}^n c_i.$$

(1) Je remercie A. Legrand d'avoir bien voulu me communiquer ce résultat.

Le groupe $H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z})$ étant, d'après la suite exacte (2) isomorphe au noyau de δ , la formule du point 2) s'en déduit.

En considérant à nouveau la suite (2), le groupe $H_0(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z})$ s'identifie au quotient de $H_0(G, \mathbb{Z})$ par $\delta(H_1(\tilde{\Sigma}, G, \mathbb{Z}))$. Deux éléments g et g' de la fibre G dans une même orbite de l'holonomie ($g' = \gamma \cdot g$) sont dans l'image de δ , puisque reliés par la 1-chaîne relative relevée de γ . Inversement, si $g - g' = \delta(c)$, alors le support de c est connexe puisque son bord dans G est réduit à deux points. Il en résulte que c est une 1-chaîne élémentaire que l'on peut coder par le relevé d'un lacet de la base. $\square$

COROLLAIRE 3.2.4.

1) Soit $\tilde{\Sigma}_k$ la trace de la fibre modèle au-dessus d'une composante du diviseur exceptionnel. Notons $H_{(k)}$ le groupe engendré par $2i\pi\alpha_k$ et l'union de tous les $2i\pi\alpha_\ell$, pour $\mathbb{P}_\ell$, composante du diviseur intersectant $\mathbb{P}_k$. Le groupe $H_0(\tilde{\Sigma}_k, \mathbb{Z})$ est le $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par $H/H_{(k)}$.

2) Les relevés des commutateurs de $\pi_1(\Sigma_k)$, et ceux des lacets à holonomie périodique sont des éléments de $H_1(\tilde{\Sigma}_k, \mathbb{Z})$ et l'engendrent comme $\mathbb{Z}$ -module libre.

Preuve.

1) Dans la situation présente, la fibre G est le quotient H/H_k , et l'action de la monodromie la translation par $2i\pi\alpha_\ell$, pour $\mathbb{P}_\ell$, projectif voisin de p_k .

2) Toute relation $\gamma_{i_n}^{\varepsilon_n} \cdots \gamma_{i_1}^{\varepsilon_1}$ du groupe d'holonomie détermine à partir d'un point de base g de G un élément non nul de $H_1(\tilde{\Sigma}_k, \mathbb{Z})$. En effet, le bord d'un tel relevé est nul :

$$(\gamma_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot g - g) + (\gamma_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdot \gamma_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot g - \gamma_{i_1}^{\varepsilon_1} g) + \cdots + (\gamma_{i_n}^{\varepsilon_n} \cdots \gamma_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot g - \gamma_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}} \cdots \gamma_{i_1}^{\varepsilon_1} g) = 0.$$

Réciproquement, tout cycle à support connexe, pointé par un point de G détermine par projection un lacet de la base que l'on repère par un unique mot $\gamma_{i_n}^{\varepsilon_n} \cdots \gamma_{i_1}^{\varepsilon_1}$. Par construction l'holonomie de ce mot fixe le point g . L'holonomie étant linéarisable, elle n'admet pas d'autres points fixes que l'origine. L'holonomie de ce mot est donc l'identité et ce cycle pointé détermine une relation du groupe d'holonomie. Dans le cas présent, l'holonomie étant abélienne, les relations sont engendrées par les éléments périodiques et les relations de commutations. $\square$

Calculons maintenant l'homologie du modèle global. On considère le recouvrement de $\widetilde{\Sigma}$ par les modèles semi-locaux $\widetilde{\Sigma}_k$ des projectifs, et locaux (des coins) $\widetilde{\Sigma}_{k\ell}$. A ce recouvrement, est associé la suite de Mayer-Vietoris :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \oplus H_1(\widetilde{\Sigma}_{k\ell}, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{u_1} \oplus H_1(\widetilde{\Sigma}_k, \mathbb{Z}) \xrightarrow{v_1} H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{\delta} \oplus H_0(\widetilde{\Sigma}_{k\ell}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{u_0} \oplus H_0(\widetilde{\Sigma}_k, \mathbb{Z}) \xrightarrow{v_0} H_0(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Les homomorphismes v_i sont induits par les inclusions et les u_i par différence entre les deux inclusions concernées. De manière analogue à [4], on lui associe la filtration sur $H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} M_0(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z})) &= H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z}), \\ M_1(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z})) &= v_1(\oplus H_1(\widetilde{\Sigma}_k, \mathbb{Z})), \\ M_2(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z})) &= w_1(\oplus H_1(\widetilde{\Sigma}_{k\ell}, \mathbb{Z})), \end{aligned}$$

où w_1 est induit par l'inclusion. Considérons le gradué correspondant :

$$\begin{aligned} \text{Gr}_0(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z})) &= M_0/M_1, \\ \text{Gr}_1(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z})) &= M_1/M_2, \\ \text{Gr}_2(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z})) &= M_2. \end{aligned}$$

DÉFINITION 3.2.5. — On appelle grand cycle tout élément de $M_0(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ dont la classe dans $\text{Gr}_0(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ est non nulle. De même, un moyen cycle est un élément de $M_1(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ dont la classe dans $\text{Gr}_1(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ est non nulle et un petit cycle, un élément non nul de $\text{Gr}_2(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$.

Conformément à la terminologie usuelle pour les singularités d'applications, appelons *branche morte* toute suite de composantes de l'arbre de désingularisation de valence 2, avec une extrémité de valence 1.

PROPOSITION 3.2.6. — Supposons que, pour tout p coin qui n'est pas sur une branche morte, le quotient des résidus en p n'est pas rationnel. Alors, le groupe $\text{Gr}_2(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ est nul.

Preuve. — Le lemme 3.1.1 assure la nullité de $H_1(\widetilde{\Sigma}_{k\ell}, \mathbb{Z})$ — et *a fortiori* de son image dans $H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z})$ — lorsque le quotient des résidus n'est pas rationnel. Considérons donc un coin où le quotient des résidus est rationnel. Supposons que ce coin appartienne à un projectif extrémité

d'une branche morte. La trace de la fibre au-dessus de cette composante de valence 1 revêt un disque de $\mathbb{C}$. Ce revêtement est donc trivial, et les cycles du coin bordent les feuillettes de ce revêtement, qui sont des disques : leurs images dans $H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z})$ sont nulles. Reboucher ces cycles revient à effacer cette dernière composante de l'arbre, opération qui n'affecte donc pas le calcul de l'homologie de $\tilde{\Sigma}$. La composante suivante est alors de valence 1. En itérant l'argument précédent le long de la branche morte, tous les cycles locaux qui apparaissent aux coins de cette branche ont une image nulle dans $H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z})$. $\square$

Le calcul de $M_1(H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ (et donc de $\text{Gr}_1(H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$) sous les hypothèses de la proposition ci-dessus) résulte de (3.2.4) :

PROPOSITION 3.2.7. — *$M_1(H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ est engendré par les relevés des commutateurs de toutes les composantes du diviseur de valence supérieure ou égale à 3. (Il est de rang infini dès que la fibre H/H_k d'une de ces composantes est infinie.)*

Preuve. — On a :

$$M_1(H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z})) \simeq \bigoplus H_1(\tilde{\Sigma}_i, \mathbb{Z}) / \text{Im}(u_1).$$

Les groupes d'holonomies projectives étant abéliens, leurs relations sont engendrées par les commutateurs (dès qu'il y a au moins deux générateurs, donc pour une valence ≥ 3) et les éléments d'ordre fini. L'image de u_1 est formée de l'ensemble des cycles générés par ces éléments périodiques, d'où le résultat.

Il nous reste à calculer :

$$\text{Gr}_0(H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z})) = M_0/M_1 = H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}) / \text{Im}(v_1) = H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}) / \text{Ker}(\delta).$$

De la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Gr}_0(H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z})) &\xrightarrow{\delta} \bigoplus H_0(\tilde{\Sigma}_{ij}, \mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{u_0} \bigoplus H_0(\tilde{\Sigma}_i, \mathbb{Z}) \xrightarrow{v_0} H_0(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

il résulte que $\text{Gr}_0(H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ ne dépend que de la connaissance des

composantes connexes locales, semi-locales, et de leur combinatoire définie par u_0 et v_0 . Nous traduisons ce fait par la construction qui suit. Soit $\mathcal{A}$ l'arbre dual de désingularisation dans lequel on a coupé les branches mortes. Construisons au-dessus de $\mathcal{A}$ le revêtement ramifié suivant : au-dessus de chaque sommet représentant une composante $\mathbb{P}_k$, on place autant de points que de composantes connexes de $\widetilde{\Sigma}_k$, c'est-à-dire que du groupe $H/H_{(k)}$. Au-dessus de chaque arête représentant un coin $\mathbb{P}_k \cap \mathbb{P}_\ell$, on place autant d'arêtes que de composantes connexes de $\widetilde{\Sigma}_{k\ell}$ identifiées à $H/H_{k\ell}$. Les flèches naturelles de $H/H_{k\ell}$ dans $H/H_{(k)}$ et $H/H_{(\ell)}$ désignent les extrémités de ces arêtes. On note $\mathcal{G}$ le graphe ainsi obtenu.

LEMME 3.2.8. — *Le premier groupe d'homologie du graphe $\mathcal{G}$ s'identifie à $\mathrm{Gr}_0(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ et son homologie de degré zéro est celle de $\widetilde{\Sigma}$.*

Preuve. — Les 1-chaînes de ce graphe s'identifient aux éléments de $H_0(\widetilde{\Sigma}_{ij}, \mathbb{Z})$ et la flèche u_0 à l'opérateur bord de ce graphe $\mathcal{G}$. Les groupes $H_1(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ et $H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ sont respectivement les noyau et conoyau de cet opérateur bord, d'où leur identification avec $\mathrm{Gr}_0(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ et $H_0(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z})$.

PROPOSITION 3.2.9. — *Le rang de $\mathrm{Gr}_0(H_1(\widetilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ est un invariant topologique du feuilletage défini par $\omega = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$.*

Preuve. — Les formes logarithmiques dont les résidus sont sans relations entières à coefficients positifs sont des exemples de « courbes généralisées », donc d'après [2], l'arbre de désingularisation est un invariant topologique. Par contre, les résidus λ_j ne le sont pas. On sait cependant, d'après [11], que si ω' de résidus λ'_j est topologiquement conjuguée à ω alors il existe une application linéaire g dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ telle que $g(\lambda_j) = \lambda'_j$. Cette application induit donc des bijections entre les groupes $H/H_{(k)}$ et $H'/H'_{(k)}$, $H/H_{k\ell}$ et $H'/H'_{k\ell}$: les graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont isomorphes. $\square$

Remarque 3.2.10. — Il est probable que, de manière analogue à la situation uniforme, tout le gradué est un invariant topologique. La preuve de ce fait pour les singularités d'applications repose sur la comparaison avec la filtration par le poids de la structure de Hodge mixte associé à la singularité (cf. [4] et [5]). Il serait donc utile d'établir l'existence d'une telle structure pour les fonctions de Liouville $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$.

3.3. Exemples.

Exemple 3.3.1. — Reprenons d'abord l'exemple du double-cusp introduit en (1.3.1). Le groupe H (noté $\langle \lambda, \mu \rangle$) est engendré par λ et μ . Supposons le rapport λ/μ non rationnel. Alors les quotients des résidus de l'arbre sont non rationnels, exceptés aux coins avec les extrémités, qui sont ici des branches mortes. On en déduit :

$$\mathrm{Gr}_2(H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z})) = 0.$$

Notons $\mathbb{P}_0$ le projectif central, $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}'_1$ les projectifs de gauche et de droite sur l'arbre décrit en (1.3.1), de valence 3. Fixons deux générateurs a_1 et b_1 du groupe fondamental de Σ_1 . Les relevés du commutateur $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ et de son symétrique sur Σ'_1 engendrent $\mathrm{Gr}_1(H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$. Son rang est infini, puisque les fibres $(\lambda, \mu)/(6\lambda + 4\mu)$ et $(\lambda, \mu)/(4\lambda + 6\mu)$ sont infinies.

Déterminons maintenant $\mathrm{Gr}_0(H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ en construisant le graphe $\mathcal{G}$. Les composantes connexes de la fibre modèle au-dessus de $\mathbb{P}_0$ s'identifient à :

$$\begin{aligned} H/H_{(0)} &= \langle \lambda, \mu \rangle / \langle 6\lambda + 4\mu, 2\lambda + 2\mu, 4\lambda + 6\mu \rangle \\ &= \langle \lambda, \mu \rangle / \langle 6\lambda + 4\mu, 2\lambda + 2\mu \rangle \\ &= \langle \lambda, \mu \rangle / \langle 2\lambda, 2\mu \rangle = \{0, \lambda_0, \mu_0, \lambda_0 + \mu_0\} \end{aligned}$$

où λ_0 et μ_0 désignent les images de λ et μ dans le quotient $H/H_{(0)}$. Au-dessus de $\mathbb{P}_1$,

$$\begin{aligned} H/H_{(1)} &= \langle \lambda, \mu \rangle / \langle 3\lambda + 2\mu, 6\lambda + 4\mu, \lambda, 2\lambda + 2\mu \rangle \\ &= \langle \lambda, \mu \rangle / \langle \lambda, 2\mu \rangle = \{0, \mu_1\} \end{aligned}$$

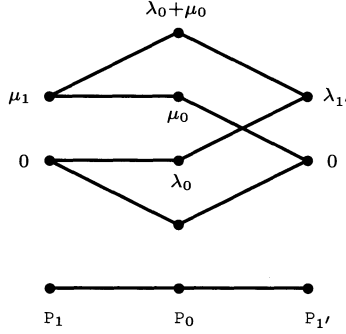
où μ_1 est l'image de μ dans $H/H_{(1)}$. De même

$$H/H_{(1')} = \langle \lambda, \mu \rangle / \langle 2\lambda, \mu \rangle = \{0, \lambda_{1'}\}.$$

Le calcul des composantes connexes locales donne les quatres arêtes de $\mathcal{G}$ suivantes :

$$\begin{aligned} H/H_{0,1} &= \langle \lambda, \mu \rangle / \langle 6\lambda + 4\mu, 2\lambda + 2\mu \rangle \\ &= \langle \lambda, \mu \rangle / \langle 2\lambda, 2\mu \rangle = \{0, \lambda_{0,1}, \mu_{0,1}, \lambda_{0,1} + \mu_{0,1}\}. \end{aligned}$$

On a un résultat analogue pour $H/H_{0,1'}$. On obtient donc le graphe $\mathcal{G}$ suivant :



Ceci prouve que $\text{Gr}_0(H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ est de rang 1 : le grand cycle déjà observé sur l'exemple d'A'Campo subsiste dans la situation multiforme. On vérifie de plus sur $\mathcal{G}$ la connexité de $\tilde{\Sigma}$.

Remarque 3.3.2. — Dans le cas d'une singularité à deux branches, du type $f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2}$, le rang de $\text{Gr}_0(H_1(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ est toujours fini, car les groupes $H/H_{(i)}$ sont eux-mêmes finis, comme quotient d'un réseau de $\mathbb{C}$ par un sous-réseau. Dans le cas général, ce n'est plus le cas, comme le prouve l'exemple ci-dessous.

Exemple 3.3.3. — Considérons la singularité multivaluée à trois branches, dont l'arbre de désingularisation a été décrit en (1.3.2). Le calcul des composantes connexes semi-locales donne (avec les notations de l'exemple précédent) :

$$\begin{aligned}
 H/H_{(0)} &= \langle \lambda, \nu, \mu \rangle / \langle 6\lambda + 2\nu + 4\mu, 2\lambda + \nu + 2\mu, 4\lambda + 2\nu + 6\mu \rangle \\
 &= \langle \lambda, \nu, \mu \rangle / \langle 2\lambda, \nu, 2\mu \rangle \\
 &= \{0, \lambda_0, \mu_0, \lambda_0 + \mu_0\}, \\
 H/H_{(1)} &= \langle \lambda, \nu, \mu \rangle / \langle \lambda, \nu + 2\mu \rangle \\
 &= \{q\mu_1 + r\nu_1, \nu_1 = -2\mu_1\} = \mathbb{Z}\mu_1, \\
 H/H_{(1')} &= \langle \lambda, \nu, \mu \rangle / \langle \mu, \nu + 2\lambda \rangle \\
 &= \{p\lambda_1 + r\nu_1, \nu_1 = -2\lambda_1\} = \mathbb{Z}\lambda_1.
 \end{aligned}$$

Celui des composantes connexes locales aux deux coins hors des

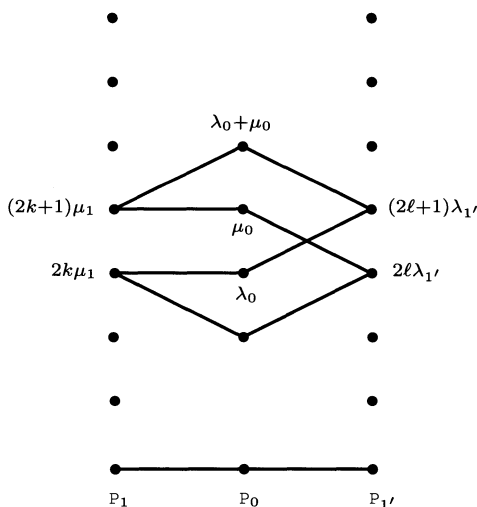
branches mortes donne :

$$\begin{aligned}
 H/H_{0,1} &= \langle \lambda, \nu, \mu \rangle / \langle 6\lambda + 2\nu + 4\mu, 2\lambda + \nu + 2\mu \rangle \\
 &= \langle \lambda, \nu, \mu \rangle / \langle 2\lambda, 2\mu + \nu \rangle \\
 &= \{0, \lambda_{0,1}\} \times \mathbb{Z}\mu_{0,1}.
 \end{aligned}$$

De même

$$H/H_{0,1'} = \{0, \mu_{0,1}\} \times \mathbb{Z}\lambda_{0,1}.$$

L'arête $0\lambda_{0,1} + k\mu_{0,1}$ a pour extrémité $k\mu_1$ dans $H/H_{(1)}$. Son autre extrémité dans $H/H_{(0)}$ est μ_0 si k est impair, 0 si k est pair. L'arête $1\lambda_{0,1} + k\mu_{0,1}$ a aussi pour extrémité $k\mu_1$ dans $H/H_{(1)}$ et son autre extrémité dans $H/H_{(0)}$ est $\lambda_0 + \mu_0$ si k est impair, λ_0 si k est pair. Les arêtes entre $H/H_{(0)}$ et $H/H_{(1')}$ sont obtenues en inversant les rôles de λ et μ . Le graphe associé :



présente une infinité de cycles, lorsque k et ℓ varient dans $\mathbb{Z}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. A'CAMPO, Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes, *Inventiones Math.*, 20 (1973), 147–169.
- [2] C. CAMACHO, A. LINS NETO, P. SAD, Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields, *J. Differential Geometry*, 20 (1984), 143–174.

- [3] D. CERVEAU, J.F. MATTEI, Formes intégrables holomorphes singulières, *Astérisque* (S.M.F.), 97 (1982).
- [4] P. DU BOIS, F. MICHEL, Filtration par le poids et monodromie entière, *Bull. Soc. Math. France*, 120 (1992), 129–167.
- [5] P. DU BOIS, F. MICHEL, Cobordism of algebraic knots via Seifert forms, *Inventiones Math.*, 111 (1993), 151–169.
- [6] D. EISENBUD, W.D. NEUMANN, Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities, *Ann. Math. Stud.*, 101, Princeton University Press (1985).
- [7] H. HIRONAKA, Introduction to the theory of infinitely near singular points *Memorias de Matematica del Instituto Jorge Juan Madrid*, 28 (1974).
- [8] F. LORAY, Feuilletages holomorphes à holonomie résoluble, Thèse Université de Rennes I (1994).
- [9] J.F. MATTEI, R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, *Ann. Scient. École Norm. Sup.*, 13 (1980), 571–621.
- [10] R. MOUSSU, Holonomie évanescence des équations différentielles dégénérées transverses, *Singularities and Dynamical Systems*, S.N. Pnevmatikos (ed.) North Holland (1985), p. 161–173.
- [11] E. PAUL, Étude topologique des formes logarithmiques fermées, *Inventiones Math.*, 95 (1989), 395–420.
- [12] E. PAUL, Connexité des fibres d'une fonction de Liouville, prépublication (1994).
- [13] K. SAITO, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Faculty Sciences Tokyo*, vol. 27, 2 (1980).
- [14] K. SAITO, Quasi homogeneous isolated singularities of Hyperflächen, *Inventiones Math.*, 14 (1971), 123–142.
- [15] A. SEIDENBERG, Reduction of singularities of the differentiable equation $A dy = B dx$, *Amer. J. of Math.*, (1968) p. 248–269.

Manuscrit reçu le 19 juillet 1994,
révisé le 25 octobre 1994.

Emmanuel PAUL,
Laboratoire de Topologie et Géométrie
U.R.A. C.N.R.S. 1408
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex (France).