ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GILLES CHRISTOL
BERNARD DWORK

Modules différentiels sur les couronnes

Annales de l'institut Fourier, tome 44, nº 3 (1994), p. 663-701
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_3_663_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 3 (1994), 663-701

MODULES DIFFÉRENTIELS SUR DES COURONNES

par G. CHRISTOL et B. DWORK

Introduction.

Les théories cohomologiques p-adiques (cohomologie de Monsky-Washnitzer et, plus récemment, cohomologie rigide) pour les variétés sur un corps de caractéristique p, malgré leur succès initial dans la démonstration de la rationalité des fonctions zéta, n'ont pas connu un développement comparable à celui des cohomologies ℓ-adiques. Une des raisons en est sûrement l'absence d'un théorème de finitude, y compris dans le cas d'une variété affine non singulière. Un premier pas dans cette direction serait, dans le cas de la dimension un, de démontrer la conjecture suivante (voir [18] ou [19] pour des précisions sur les rapports entre cette conjecture et les problèmes de finitude).

0.1. CONJECTURE. — *Tout polynôme différentiel L de $\overline{\mathbb{Q}}\left[x, \dfrac{d}{dx}\right]$, où $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne le corps des nombres algébriques, est un opérateur à indice sur l'espace des fonctions analytiques de $\mathbb{C}_p[[x]]$ qui convergent dans le disque $\{|x| < 1\}$.*

Dans [20], Robba propose une stratégie pour attaquer cette conjecture. Notons $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ l'anneau des éléments analytiques sur la couronne $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{C}_p; 0 < r_1 < |x| < r_2\}$. Un des points clé de cette approche est l'étude des $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$-modules différentiels *fuchsiens*, c'est-à-dire ayant un système de solutions de rayon de convergence maximal dans tout disque générique de cette couronne (voir définition précise en 2.3).

Mots-clés : Structure de Frobenius.
Classification A.M.S. : 12H25 – 14F30.

Cet article réalise la première partie de ce programme en montrant que les $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$-modules différentiels fuchsiens sont caractérisés par l'existence d'une "structure de Frobenius faible" (voir la fin de l'introduction). Ce résultat sera essentiel pour la deuxième étape ([11]) qui sera d'étudier la structure de ces modules différentiels. En particulier, à partir de la structure de Frobenius, nous pourrons définir les exposants d'un module différentiel et montrer que, dans le cas où les différences entre ces exposants ne sont pas des nombres de Liouville, le module différentiel est fuchsien au sens ordinaire, c'est à dire s'obtient par extensions successives de modules différentiels de rang un.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$-module différentiel (voir définition en 1.1). Dans cet article, nous démontrons en fait deux résultats.

En premier lieu, on sait, pour chaque nombre r de l'intervalle $[r_1, r_2]$, définir le rayon de convergence générique $R(\mathcal{M}, r)$ du module différentiel $\mathcal{M}$ "au bord du disque $\{|x| \leqslant r\}$" (voir 2.3). Nous démontrons que $R(\mathcal{M}, r)$ est une fonction continue de r. Sur l'intervalle ouvert $]r_1, r_2[$, un simple argument de convexité permet de conclure. Cependant, pour obtenir la continuité aux extrémités de l'intervalle, il faut un argument plus fort. On peut d'ailleurs remarquer que, dans le cas où la couronne $\mathcal{C}$ est un disque ($r_1 = 0$) et où le module différentiel a une solution analytique dans le disque $\{|x| < 1\}$, la continuité de la fonction $R(\mathcal{M}, r)$ en 1 est équivalente au théorème de transfert [13]. Grâce au théorème de majoration effective des solutions [15], on peut construire "à la Newton" un convexe dont les droites d'appui donnent les rayons de convergence génériques. Cette interprétation géométrique rend le théorème de continuité facile.

Notre but principal est, toutefois, de construire un antécédent de Frobenius pour le module différentiel $\mathcal{M}$, c'est à dire un module différentiel $\mathcal{N}$, défini sur la couronne $\{r_1^p \leqslant |x| \leqslant r_2^p\}$, dont l'image inverse par le Frobenius $x \mapsto x^p$ soit $\mathcal{M}$. Nous montrons qu'un tel antécédent existe si $R(\mathcal{M}, r) > r\,|p|^{1/p}$ pour tout nombre r de l'intervalle $[r_1, r_2]$. De plus, cet antécédent est unique si on impose la condition $R(\mathcal{N}, r^p) > r^p\,|p|^{p/(p-1)}$. Etant donné une base de $\mathcal{M}$, en utilisant l'existence de "bons vecteurs cycliques" ([8]), nous montrons qu'il existe, pour chaque nombre r de l'intervalle $[r_1, r_2]$, une base de $\mathcal{N}$ pour laquelle la matrice de l'isomorphisme de Frobenius est petite sur la circonférence $\{|x| = r\}$. Dans ([11]), nous construirons une base de $\mathcal{N}$ pour laquelle la matrice de Frobenius est "petite" sur toute la couronne $\mathcal{C}$, c'est à dire uniformément en r. Mais cela nécessitera une nouvelle idée. Les méthodes employées ici sont en effet insuffisantes pour obtenir directement un tel résultat essentiellement parce que le théorème du vecteur cyclique (proposition 3.1) n'est valable que sur un corps différentiel et introduit des "singularités apparentes". Lorsqu'on élimine celles-ci, on perd l'essentiel de l'information sur la "taille" des matrices de changement de bases.

Notre point de départ est la transposition au cas p-adique d'une technique déjà utilisée par Katz dans un cas x-adique [17] pour démontrer le théorème de Turritin. Ceci nous permet d'obtenir une majoration de la matrice représentant la dérivation dans une base cyclique du module différentiel $\mathcal{M}$. Le résultat obtenu est le meilleur possible. Nous avions déjà utilisé une telle majoration dans [7]. Nous construisons ensuite l'antécédent de Frobenius sur une petite couronne autour de chaque circonférence $\{|x| = r\}$ selon une méthode déjà largement utilisée (dans [5] par exemple). L'unicité d'un tel antécédent "local" permet alors de construire un antécédent "global", c'est-à-dire existant sur toute la couronne, par recollement.

Comme conséquence, on obtient que les modules différentiels fuchsiens, c'est-à-dire ceux qui vérifient $R(\mathcal{M}, r) = r$ pour $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, sont caractérisés par l'existence d'une structure de Frobenius "faible" c'est-à-dire d'une suite de modules différentiels $\mathcal{N}_n$ tels que $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M}$ et que $\mathcal{N}_{n+1}$ soit l'antécédent de $\mathcal{N}_n$.

1. Normes et normes spectrales des opérateurs différentiels.

1.1. Modules différentiels.

Les résultats de ce paragraphe sont classiques, nous les rappelons pour fixer les notations.

Soit K un anneau commutatif muni d'une dérivation D et soit k l'anneau des constantes de D. Un *K-module différentiel* $\mathcal{M}$ est un module libre de rang n sur K muni d'un *opérateur différentiel* δ, c'est-à-dire d'un k-endomorphisme de $\mathcal{M}$ qui vérifie pour tout élément a de K et tout vecteur m de $\mathcal{M}$:

$$(1) \qquad \delta(a\,m) = a\,\delta(m) + D(a)\,m.$$

Soit Δ un k-endomorphisme de $\mathcal{M}$. Pour respecter la tradition des équations différentielles, nous dirons qu'il est *représenté dans la base*

$\mathcal{E} = \{e_i\}$ par la matrice G définie par :

$$\Delta(e_i) = \sum_{j=1}^{n} G_{ij}\, e_j$$

(si $K = k$, c'est la transposée de la matrice de l'endomorphisme Δ dans la base $\mathcal{E}$). Nous noterons alors $G = \mathrm{Mat}(\Delta, \mathcal{E})$.

Ainsi, si $G = \mathrm{Mat}(\delta, \mathcal{E})$, les matrices $G_s = \mathrm{Mat}(\delta^s, \mathcal{E})$ sont définies par la formule de récurrence :

$$G_0 = I \quad , \quad G_{s+1} = D(G_s) + G_s\, G. \tag{2}$$

Soit maintenant $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases de $\mathcal{M}$ et soit H la matrice de changement de base définie par :

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} H_{ij}\, e_j.$$

Si $G = \mathrm{Mat}(\delta, \mathcal{E})$, nous poserons $H[G] = \mathrm{Mat}(\delta, \mathcal{F})$. On trouve facilement :

$$H[G] = D(H)\, H^{-1} + H\, G\, H^{-1} \tag{3}$$

et plus généralement, en utilisant (2), on obtient la formule de Leibniz :

$$\left(H[G]\right)_s = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i}\ D^{s-i}(H)\ G_i\ H^{-1}. \tag{4}$$

Terminons ces généralités en donnant un résultat qui compare les matrices représentant des dérivations différentes.

1.1. Proposition. — *Soit x un élément de K tel que $D(x) = 1$. Il existe des entiers $c_{s,i}$ et $d_{s,i}$ tels que :*

$$(x\, D)^s = \sum_{i=1}^{s} c_{s,i}\ x^i\, D^i, \qquad x^s\, D^s = \sum_{i=1}^{s} d_{s,i}\ (x\, D)^i,$$

$$c_{s,i} = \sum_{j=1}^{i} \frac{(-1)^{i+j} j^s}{(i-j)!j!}, \qquad d_{s,i} = (-1)^{s+i} \sum_{1\leqslant n_1<\cdots<n_{s-i}<s} n_1 \cdots n_{s-i}.$$

Démonstration. — Avec la convention $d_{s,s+1} = d_{s,0} = c_{s,s+1} = c_{s,0} = 0$, on établit facilement les formules de récurrence :

$$c_{s+1,i} = i\, c_{s,i} + c_{s,i-1} \quad , \quad d_{s+1,i} = -s\, d_{s,i} + d_{s,i-1}$$

et le résultat s'en déduit sans difficulté. □

1.2. Modules différentiels ultramétriques.

Soit K un corps ultramétrique, $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers, $\overline{K}$ son corps des restes, k un sous corps de K et D une k-dérivation de K continue (en tant qu'application k-linéaire) et soit $\mathcal{M}$ un K-module différentiel.

Nous noterons p la caractéristique résiduelle du corps k et nous définirons les nombres ω et ν par les formules suivantes :

$$(5) \qquad \begin{cases} \omega = |p|^{1/(p-1)} \quad , \quad |p| = p^{-\nu} & \text{si } p \neq 0 \\ \omega = 1 \quad , \quad \nu = 0 & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

A chaque base $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathcal{M}$ nous associons la norme :

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i \Big\|_{\mathcal{E}} = \max |a_i|.$$

Pour cette norme, $\mathcal{E}$ est une base orthonormale.

Nous définirons la *taille* d'un k-endomorphisme Δ de $\mathcal{M}$ par la formule :

$$T(\Delta, \mathcal{E}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|\Delta(e_i)\|_{\mathcal{E}}.$$

Autrement dit, si $G = \operatorname{Mat}(\Delta, \mathcal{E})$ alors :

$$T(\Delta, \mathcal{E}) = \|G\| = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |G_{ij}|.$$

Il faut cependant remarquer que la taille $T(\delta, \mathcal{E})$ *n'est pas* en général la norme $\|\delta\|_{\mathcal{E}}$ de l'opérateur δ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{M}$. On a en effet seulement :

$$(6) \qquad \|\delta\|_{\mathcal{E}} = \max(T(\delta, \mathcal{E}), \|D\|)$$

où $\|D\|$ désigne la norme de l'opérateur D agissant sur K.

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases de $\mathcal{M}$. Pour tout vecteur m de $\mathcal{M}$, on a :

$$\|H\|^{-1}\, \|m\|_{\mathcal{E}} \leqslant \|m\|_{\mathcal{F}} \leqslant \|H^{-1}\|\, \|m\|_{\mathcal{E}}$$

où H désigne la matrice de changement de base. Les normes associées aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont donc équivalentes. Elles sont identiques si et seulement si la quantité :

$$\Theta(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \|H^{-1}\|\, \|H\|$$

est égale à 1 c'est-à-dire si la matrice H appartient à $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{O}_K)$.

Donnons un exemple de cette situation.

1.2. Proposition. — *Soit x un élément de K tel que $D(x) = 1$. Supposons qu'il existe un vecteur m de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{E} = \{m, x\,\delta(m), \ldots, x^{n-1}\,\delta^{n-1}(m)\}$ soit une base de $\mathcal{M}$. Alors $\mathcal{F} = \{m, x\,\delta(m), \ldots, (x\,\delta)^{n-1}(m)\}$ est une base de $\mathcal{M}$ et on a $\Theta(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 1$.*

Démonstration. — Il résulte immédiatement de la proposition 1.1 que $\mathcal{F}$ se déduit de $\mathcal{E}$ par la matrice $H = (c_{i,j})$ qui, ayant pour inverse la matrice $(d_{i,j})$, appartient à $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z})$ (on peut aussi remarquer que la matrice H est triangulaire et que ses coefficients diagonaux sont égaux à 1). □

1.3. Normes spectrales.

La norme spectrale d'un opérateur Δ sur un espace normé est donnée par :

$$\|\Delta\|_{\mathrm{Sp}} = \limsup_{s \to \infty} \|\Delta^s\|^{1/s}.$$

Par exemple, on peut ainsi définir la norme spectrale $\|D\|_{\mathrm{Sp}}$ de la dérivation D agissant sur le corps K.

Par analogie, et compte tenu de la formule (6), nous définissons la *norme spectrale* de l'opérateur δ par :

$$\|\delta\|_{\mathrm{Sp}} = \max\Big(\limsup_{s \to \infty} T(\delta^s, \mathcal{E})^{1/s}, \|D\|_{\mathrm{Sp}}\Big).$$

Cette définition est justifiée par la proposition suivante :

1.3. Proposition. — *La norme spectrale de δ est indépendante de la base qui a servi à la définir.*

Démonstration. — A l'aide de la formule (5), il est facile de vérifier que :

$$\omega^s \leqslant |s!| \leqslant s^\nu \omega^{s-p}.$$

Définissons la norme spectrale dans la base $\mathcal{E}$:

$$\|\delta\|_{\mathrm{Sp}} = \omega \max\Big(\limsup_{s \to \infty} T(\delta^s/s!, \mathcal{E})^{1/s}, \limsup_{s \to \infty} \|D^s/s!\|^{1/s}\Big).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\varepsilon)$ telle que, pour tout entier $s \geqslant 1$, on ait :

$$T(\delta^s/s!, \mathcal{E}) \leqslant c(\varepsilon) \left(\frac{1}{\omega} \|\delta\|_{\mathrm{Sp}} + \varepsilon \right)^s, \qquad \|D^s/s!\| \leqslant c(\varepsilon) \left(\frac{1}{\omega} \|\delta\|_{\mathrm{Sp}} + \varepsilon \right)^s.$$

En utilisant la formule (4), on obtient :

$$T(\delta^s/s!, \mathcal{F}) \leqslant \Theta(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \max_{0 \leqslant i \leqslant s} \left(T(\delta^i/i!, \mathcal{E}) \, \|D^{s-i}/(s-i)!\| \right)$$

c'est-à-dire :

$$T(\delta^s, \mathcal{F}) \leqslant s^\nu \omega^{s-p} T(\delta^s/s!, \mathcal{F}) \leqslant s^\nu \omega^{s-p} \, \Theta(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \, c^2(\varepsilon) \left(\frac{1}{\omega} \|\delta\|_{\mathrm{Sp}} + \varepsilon \right)^s$$

d'où on déduit :

$$\limsup_{s \to \infty} T(\delta^s, \mathcal{F})^{1/s} \leqslant \|\delta\|_{\mathrm{Sp}}$$

ce qui permet de conclure. □

1.4. Un lemme technique.

1.4. Lemme. — *Soit :*

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha & 0 \\ 0 & & & 0 & \alpha \\ a_n & \cdots & a_{n-i} & \cdots & a_1 \end{pmatrix} + R$$

une matrice, à coefficients dans le corps K , telle que :

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i| = |\alpha| > \|R\|.$$

Alors

1) *Pour tout entier s on a $\|G^s\| = \|G\|^s$,*

2) *L'ensemble V des vecteurs de K^n tels que $\|G^s.v\| < \|G\|^s \, \|v\|$ pour au moins un entier s est un espace vectoriel de dimension $n - i_0$ où i_0 désigne le plus grand entier tel que $|a_{i_0}| = |\alpha|$.*

Démonstration.

1) Soit :

$$P(X) = X^n - b_1 X^{n-1} - \cdots - b_n$$

le polynôme caractéristique de la matrice G. On constate facilement que l'on a $|b_i - a_i\,\alpha^{i-1}| < |\alpha^i|$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Autrement dit, comme $|a_i\,\alpha^{i-1}| \leqslant |\alpha^i|$ avec égalité pour au moins un indice, on a $|b_i| \leqslant |\alpha^i|$ avec égalité pour au moins un indice i.

Ceci implique que le polygone de Newton de P a un coté de pente $-v(\alpha)$. La matrice G a donc, dans une extension algébrique du complété de K , au moins une valeur propre λ telle que $|\lambda| = |\alpha|$. Pour tout entier s, il vient alors :

$$\|G\|^s = |\alpha^s| = |\lambda^s| \leqslant \|G^s\| \leqslant \|G\|^s.$$

2) Soit v un élément de V. Pour tout entier $m \geqslant s$ on a :

$$\|G^m.v\| \leqslant \|G^{m-s}\|\,\|G^s.v\| < \|G\|^m\,\|v\|.$$

On constate alors facilement que V est un sous espace vectoriel stable par G.

Soit $\{e_i\}$ la base canonique de K^n. Montrons par récurrence sur i que :

$$(*) \qquad \|G^i.e_i\| < |\alpha|^i \quad \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant n - i_0.$$

Si $i_0 < n$, on a $\|a_n\,e_n\| < |\alpha|$. Or, par hypothèse :

$$\|G.e_1 - a_n\,e_n\| < |\alpha|.$$

On a donc bien :

$$\|G^1.e_1\| < |\alpha| \quad \text{si} \quad 1 \leqslant n - i_0.$$

Supposons maintenant que $i_0 < n - i + 1$ et que $\|G^{i-1}.e_{i-1}\| < |\alpha|^{i-1}$. D'après la définition de i_0, on a $\|a_{n-i+1}\,e_n\| < |\alpha|$. Mais, par construction de G :

$$\|G.e_i - \alpha\,e_{i-1} + a_{n-i+1}\,e_n\| < |\alpha|,$$

donc

$$\|G.e_i - \alpha\,e_{i-1}\| < |\alpha|,$$

et finalement :

$$\|G^i.e_i\| \leqslant \max(\|G^{i-1}\|\,\|G.e_i - \alpha\, e_{i-1}\|, \|\alpha\, G^{i-1}e_{i-1}\|) < |\alpha^i|$$

ce qui établit la propriété (*).

Autrement dit, les vecteurs $e_1, \dots, e_{n-i_0}$ appartiennent à V. La dimension de V est donc au moins $n - i_0$.

D'après le lemme de Hensel, on sait que $P = QR$ où Q et R sont deux polynômes à coefficients dans le complété de K tels que : $\deg R = i_0$, $\deg Q = n - i_0$, les racines de R sont toutes de valeur absolue égale à $|\alpha|$ et celles de Q sont toutes de valeur absolue strictement inférieure à $|\alpha|$. La restriction de G à V a un polynôme caractéristique S qui divise celui de G et des valeurs propres de valeur absolue strictement inférieure à $|\alpha|$. Il en résulte donc que S divise Q c'est à dire que $\dim V = \deg S \leqslant \deg Q = n - i_0$.

□

1.5. Majoration de la dérivation dans le cas cyclique.

1.5. THÉORÈME [Dwork-Katz-Turritin]. — *Soit $\mathcal{M}$ un K-module différentiel de dimension n, soit m un vecteur tel que les vecteurs $\{m, \delta(m), \dots, \delta^{n-1}(m)\}$ forment une base de $\mathcal{M}$ et soit $\lambda \geqslant \|D\|$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *On a : $\|\delta\|_{\mathrm{Sp}} \leqslant \lambda$.*

2) *Si $\delta^n(m) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\,\delta^i(m)$, on a $|a_i| \leqslant \lambda^i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.*

3) *Soit b un élément de K et soit $\mathcal{E}$ la base $\{m, b\,\delta(m), \dots, b^{n-1}\delta^{n-1}(m)\}$ de $\mathcal{M}$. Pour tout entier s, on a : $T(\delta^s, \mathcal{E}) \leqslant \lambda^s \max\left((\lambda|b|)^{n-1}, (\lambda|b|)^{1-n}\right)$.*

Démonstration.

3⇒1 est évident d'après la définition de la norme spectrale et en remarquant que $\|D\|_{\mathrm{Sp}} \leqslant \|D\| \leqslant \lambda$.

2⇒3 : posons :

$$\delta^s(m) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i,s}\,\delta^i(m).$$

Un calcul simple montre que :

$$a_{i,s+1} = D(a_{i,s}) + a_{i+1,s} + a_{1,s}\, a_i.$$

A partir de l'inégalité $|D(a)| \leqslant \|D\|\,|a| \leqslant \lambda|a|$, on démontre par récurrence que :

$$|a_{n-i,s}| \leqslant \lambda^{s-i}.$$

Il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}
\delta^s(b^i\,\delta^i(m)) &= \sum_{\ell=0}^{s} \binom{s}{\ell}\, D^{s-\ell}(b^i)\,\delta^{\ell+i}(m) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{\ell=0}^{s} \binom{s}{\ell}\, D^{s-\ell}(b^i)\, a_{n-j,\ell+i}\, b^{-j} \right) b^j\,\delta^j(m)
\end{aligned}$$

pour obtenir :

$$\|G_s\| \leqslant \max_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n-1\\ 0\leqslant \ell\leqslant s}} \|D\|^{s-\ell}\,|b|^i\,\lambda^{\ell+i-j}\,|b|^{-j} \leqslant \max_{0\leqslant i,j\leqslant n-1} \lambda^{s+i-j}\,|b|^{i-j}$$

et le résultat annoncé.

$1{\Rightarrow}2$: supposons la condition 2 non satisfaite. Nous pouvons donc trouver, dans une extension algébrique $\widetilde{K}$ de K, un élément z tel que :

$$|z| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(|a_i|^{1/i}) > \lambda \geqslant \|D\|.$$

L'opérateur δ se prolonge à l'espace vectoriel $\widetilde{K} \otimes_K \mathcal{M}$, et est représenté dans la base

$$\mathcal{F} = \left\{ m,\ \frac{1}{z} \otimes \delta(m), \ldots,\ \frac{1}{z^{n-1}} \otimes \delta^{n-1}(m) \right\}$$

de celui-ci par la matrice :

$$G = \begin{pmatrix}
0 & z & 0 & \cdots & 0 \\
 & -\frac{D(z)}{z} & \ddots & & \\
 & & \ddots & z & 0 \\
0 & & & -(n-2)\,\frac{D(z)}{z} & z \\
\frac{a_n}{z^{n-1}} & \cdots & \frac{a_i}{z^{i-1}} & \cdots & a_1 - (n-1)\,\frac{D(z)}{z}
\end{pmatrix}.$$

La norme spectrale de δ étant indépendante de la base nous la calculons dans la base $\mathcal{F}$. Comme

$$|z| = \max\left|\frac{a_i}{z^{i-1}}\right| > \|D\| \geqslant \left|\frac{D(z)}{z}\right|,$$

le lemme 1.4 s'applique et donne :

$$\|G^s\| = \|G\|^s = |z|^s.$$

La matrice $G_s = \mathrm{Mat}(\delta^s, \mathcal{E})$ satisfait la relation de récurrence (2). Nous affirmons alors que :

$$\|G_s - G^s\| < |z|^s \quad \text{et} \quad \|G_s\| = \|G^s\| = |z|^s.$$

En effet d'une part c'est évident pour $s = 0$ et d'autre part, si la première inégalité est vérifiée pour s, alors la seconde aussi et :

$$\begin{aligned}\|G_{s+1} - G^{s+1}\| &= \|D(G_s) + (G_s - G^s)\, G\| \\ &\leqslant \sup(\|D\|\, |z|^s, \|G_s - G^s\|\, |z|) < |z|^{s+1}.\end{aligned}$$

Autrement dit, nous avons :

$$\|\delta^s\|_{\mathcal{F}} = |z|^s$$

et par suite :

$$\|\delta\|_{\mathrm{Sp}} = |z|$$

ce qui contredit la condition 1. □

2. Opérateurs différentiels p-adiques.

2.1. Éléments analytiques.

A partir de maintenant k est un corps ultramétrique de caractéristique nulle, complet, algébriquement clos, de caractéristique résiduelle $p > 0$ et Ω est une extension de k, complète, algébriquement close, dont l'ensemble $|\Omega|$ des valeurs absolues est $\mathbb{R}_+$ et dont le corps des restes $\overline{\Omega}$ est transcendant sur $\overline{k}$.

Pour chaque $r \in \mathbb{R}_+^*$ nous choisissons un nombre t_r de Ω tel que :

$$|t_r| = r, \quad (\forall\, a_1, \dots, a_m \in k) \quad \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i\, t_r^i \right\| = \max(|a_i|\, r^i)$$

(il est facile de constater qu'un tel nombre existe).

Dans tout cet article r_1 et r_2 sont deux nombres fixés tels que $0 < r_1 < r_2$. On note $\mathcal{H}$ l'anneau des éléments analytiques dans la couronne :

$$\mathcal{C} = \{x \in \Omega \; ; \; r_1 < |x| < r_2\}$$

à coefficients dans k, c'est-à-dire le complété, pour la norme :

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{C}} |f(x)|,$$

de l'anneau des fractions rationnelles à coefficients dans k sans pôle dans $\mathcal{C}$.

Pour chaque nombre r de $[r_1, r_2]$, on définit une *valeur absolue* sur l'anneau $\mathcal{H}$ en posant :

$$|f|_r = |f(t_r)| \left\{ = \sup_{|x|=r} |f(x)| \quad \text{si } r \in]r_1, r_2[\right\}.$$

Le résultat suivant est classique ([1] corollaire 4.2.8 ou [21] corollaire 5.4.9) :

2.1. Proposition. — *La fonction $\rho \mapsto \log |f|_{e^\rho}$ est continue et convexe sur l'intervalle $[r_1, r_2]$.* □

En particulier on aura :

$$\|f\| = \max\left(|f|_{r_1}\,,\, |f|_{r_2}\right).$$

Nous noterons D la dérivation $\dfrac{d}{dx}$ de $\mathcal{H}$. On vérifie facilement que :

$$\|D\|_r = \frac{1}{r}\,, \quad \|D\|_{r,\mathrm{Sp}} = \omega\,\frac{1}{r}.$$

2.2. Corps des restes.

Nous noterons $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$ le corps des quotients de $\mathcal{H}$. Les éléments de $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$ sont des fonctions méromorphes bornées dans la couronne $\mathcal{C}$. En particulier elles n'ont qu'un nombre fini de pôles dans cette couronne. Autrement dit pour chaque élément a de $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$ il existe un polynôme P de $k[x]$ tel que Pa appartienne à $\mathcal{H}$.

Pour chaque nombre r de $[r_1, r_2]$, la valeur absolue $|\cdot|_r$ se prolonge au corps $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$. Posons :

$$\mathcal{O}_r = \{a \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}\,,\ |a|_r \leqslant 1\}, \quad \mathcal{P}_r = \{a \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}\,,\ |a|_r < 1\}, \quad \overline{\mathcal{H}}_r = \mathcal{O}_r / \mathcal{P}_r$$

et, étant donné un élément a de $\mathcal{O}_r$, notons $\overline{a}$ son image dans $\overline{\mathcal{H}}_r$. Par construction, le corps $k(x)$ est dense dans $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$ pour la valeur absolue $|\cdot|_r$. Pour étudier le corps des restes $\overline{\mathcal{H}}_r$ il suffit donc de considérer des éléments de $k(x)$. Deux cas sont à envisager :

- Si r n'appartient pas à l'ensemble $|k|$ des valeurs absolues de k, le corps $\overline{\mathcal{H}}_r$ est isomorphe au corps $\overline{k}$. En effet, le corps k étant algébriquement clos, le groupe $|k|$ est divisible et aucune puissance entière de r ne lui appartient. L'image $\overline{P}$ d'un polynôme P de $\mathcal{O}_r$ dans $\overline{\mathcal{H}}_r$ n'est autre que $\overline{P(0)}$.
- S'il existe un nombre α_r de k tel que $|\alpha_r| = r$, le corps $\overline{\mathcal{H}}_r$ est isomorphe au corps $\overline{k}(\overline{x})$, l'isomorphisme étant donné par $x/\alpha_r \mapsto \overline{x}$.

Seul le deuxième cas nous intéresse réellement. Nous choisissons, une fois pour toutes, et pour chaque r de $|k|$, un nombre α_r de k tel que $|\alpha_r| = r$. Nous posons :

$$\overline{x} = \overline{x/\alpha_r}, \qquad \overline{D} = \frac{d}{d\overline{x}}$$

de telle sorte que, pour tout élément a de $\mathcal{O}_r$, on ait :

$$\overline{D}(\overline{a}) = \overline{\alpha_r\, D(a)}.$$

Pour chaque place de $\overline{k}$, c'est-à-dire pour chaque élément ν de $\overline{k}\cup\{\infty\}$, nous posons $\overline{x}_\nu = (\overline{x} - \nu)$ (resp. $\overline{x}_\infty = \overline{x}$) et nous munissons le corps $\overline{k}(\overline{x})$ de sa valeur absolue "ν-adique" définie par $|\overline{x}_\nu|_\nu = \frac{1}{2}$ (resp. $|\overline{x}_\infty|_\infty = 2$).

Nous posons aussi $\overline{D}_\nu = \overline{x}_\nu\,\overline{D}$. On trouve alors :

$$\|\overline{D}_\nu\|_\nu = \|\overline{D}_\nu\|_{\nu,\mathrm{Sp}} = 1.$$

2.3. Rayons de convergence dans les disques génériques.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{H}$-module différentiel de dimension n. Nous noterons avec un indice r les quantités associées à la norme $|\cdot|_r$ par exemple nous noterons T_r la taille associée à la norme $|\cdot|_r$.

L'action de δ se prolonge de manière évidente en un opérateur (encore noté δ) sur le $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$-espace vectoriel

$$\overset{\circ}{\mathcal{M}} = \overset{\circ}{\mathcal{H}} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{M}.$$

Soit $\mathcal{E}$ une base de $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ et soit r un nombre de l'intervalle $[r_1, r_2]$. Posons :

$$G_s = \mathrm{Mat}(\delta^s, \mathcal{E}).$$

Ces matrices sont entièrement déterminées par la récurrence (2) à partir de la matrice $G = G_1 = \mathrm{Mat}(\delta, \mathcal{E})$ et, si t est un point de la couronne $\mathcal{C}$, on vérifie aisément que la matrice :

$$\mathcal{U}_{G,t}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} G_s(t)\, \frac{(x-t)^s}{s!}$$

est (l'unique) solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dx}\mathcal{U}_{G,t} = G\,\mathcal{U}_{G,t} \quad , \qquad \mathcal{U}_{G,t}(t) = I. \tag{7}$$

En particulier, si z est dans le disque de convergence de $\mathcal{U}_{G,t}$, on aura :

$$\mathcal{U}_{G,z}(x) = \mathcal{U}_{G,t}(x) \cdot \mathcal{U}_{G,t}^{-1}(z).$$

Par construction, la matrice $\mathcal{U}_{G,t_r}$ est analytique dans le disque "ouvert" de centre t_r et de rayon $\liminf_{s\to\infty} \|G_s/s!\|_r^{-1/s}$. Nous sommes amenés à définir le *rayon de convergence de $\mathcal{M}$ au bord du disque $D(0, r^-)$* en posant :

$$R(\mathcal{M}, r) = \omega\, \|\delta\|_{r,\mathrm{Sp}}^{-1} = \min\big(\liminf_{s\to\infty} \|G_s/s!\|_r^{-1/s}\,,\, r\big).$$

2.3. Proposition. — *La fonction $\rho \mapsto \log R(\mathcal{M}, e^\rho)$ est concave sur l'intervalle $[\log r_1, \log r_2]$.*

Démonstration. — L'enveloppe supérieure de fonctions convexes étant convexe, il résulte de la proposition 2.1 que la fonction :

$$\rho \mapsto \log \|G\|_{e^\rho} = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \log \|G_{ij}\|_{e^\rho}$$

est une fonction convexe sur $[r_1, r_2]$. La limite supérieure de fonctions convexes est encore convexe donc la fonction

$$g(\rho) = \limsup_{s\to\infty} \left(\frac{1}{s} \log \|G_s/s!\|_{e^\rho}\right)$$

est convexe et il en sera ainsi de $-\log R(\mathcal{M}, e^\rho) = \max(g(\rho), \rho)$. $\square$

Cette proposition montre que la fonction $r \mapsto R(\mathcal{M}, r)$ est continue sur l'intervalle $]r_1, r_2[$. Pour démontrer qu'elle est également continue aux points r_1 et r_2 nous avons besoin d'une étude plus approfondie qui sera l'objet du prochain paragraphe.

2.4. Polygone de convergence.

Dans ce paragraphe nous donnons une construction géométrique des rayons de convergence dans le cas des équations différentielles.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{H}$-module différentiel de dimension n. Supposons qu'il existe un vecteur m de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{E} = \{m, \delta(m), \ldots, \delta^{n-1}(m)\}$. Nous définissons les fonctions $G_{s,i}$ de $\mathcal{H}$ par la relation :

$$\frac{1}{s!}\,\delta^s(m) = \sum_{i=0}^{n-1} G_{s,i}\,\delta^i(m). \tag{8}$$

Soit r un nombre de $[r_1, r_2]$. On a, pour $s \geqslant 0$:

$$T_r(\delta^s/s!, \mathcal{E}) = \max_{0\leqslant i,j<n} |G_{s+j,i}|_r.$$

On note :

$$\rho(r) = \liminf_{s\to\infty} T_r(\delta^s/s!, \mathcal{E})^{-1/s} = \liminf_{s\to\infty} \big(\max_{0\leqslant i<n} |G_{s,i}|_r\big)^{-1/s}$$

le rayon de convergence des solutions de $\mathcal{M}$ au voisinage du point générique t_r de telle sorte que l'on ait :

$$R(\mathcal{M}, r) = \min(\rho(r), r).$$

Il résulte du théorème de majoration effectif de Dwork et Robba [15] (voir aussi [5] proposition 4.4.3) que l'on a, pour $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$:

$$\rho(r)^s\,|G_{s,i}|_r \leqslant \gamma_s\,\rho(r)^i$$

où on a posé :

$$\gamma_s = \max_{0<s_1<\cdots<s_{n-1}\leqslant s} |s_1\ldots s_{n-1}|^{-1} \leqslant s^{\nu(n-1)}.$$

Comme les fonctions $G_{s,i}$ appartiennent à $\mathcal{H}$, pour $r_1 < |x| < r_2$, elle s'écrivent :

$$G_{s,i}(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} G_{s,i,\ell}\,x^\ell.$$

Par définition de la norme $|.|_r$ (y compris pour $r = r_1$ ou r_2), on trouve, pour $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$:

$$\rho(r)^s\, r^\ell\, |G_{s,i,\ell}| \leqslant \gamma_s\, \rho(r)^i. \tag{9}$$

Soit alors λ un nombre rationnel. Nous posons :

$$f(\lambda) = \sup_{\substack{s\in\mathbb{N},\ \ell\in\mathbb{Z} \\ \ell=s\lambda,\ 0\leqslant i<n}} \frac{1}{s} \log\left(\frac{r_2^\ell}{\gamma_s\, \rho(r)^i}\, |G_{s,i,\ell}| \right)$$

et nous considérons l'enveloppe convexe $\mathcal{P}$ de l'ensemble des points du plan de coordonnées $(\lambda, f(\lambda))$, c'est-à-dire l'intersection des demi-plans d'équation $y \leqslant ax + b$ contenant au moins l'un de ces points.

2.4. Proposition. — *Pour $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, la droite d'appui de $\mathcal{P}$ de pente $\log\left(\frac{r_2}{r}\right)$ rencontre l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $-\log(\rho(r))$.*

Démonstration. — Il résulte de la majoration (9) et de la définition de f que l'on a pour tout nombre rationnel λ :

$$f(\lambda) \leqslant \sup_{\ell=s\lambda} \left(\frac{\ell}{s} \log(\frac{r_2}{r}) - \log(\rho(r)) \right). \tag{10}$$

L'ensemble $\mathcal{P}$ est donc contenu dans le demi-plan d'équation :

$$y \leqslant x \log\left(\frac{r_2}{r}\right) - \log(\rho(r)).$$

Inversement, si, pour tout rationnel λ, on a :

$$f(\lambda) \leqslant \lambda \log\left(\frac{r_2}{r}\right) - \log(\rho)$$

alors, pour tout s dans $\mathbb{N}$ et ℓ dans $\mathbb{Z}$:

$$\rho^s\, r^\ell\, |G_{s,i,\ell}| \leqslant \gamma_s\, \rho(r)^i$$

c'est-à-dire :

$$\|G_{s,i}\|_r \leqslant \gamma_s\, \rho(r)^i\, \rho^{-s}$$

et, comme $\lim \gamma_s^{1/s} = 1$, on obtient :

$$\rho(r) = \liminf_{s\to\infty} \big(\max_{0\leqslant i<n} |G_{s,i}|_r \big)^{-1/s} \geqslant \rho$$

et la droite d'équation $x \log\left(\frac{r_2}{r}\right) - \log(\rho)$ est au-dessus de la droite d'équation $x \log\left(\frac{r_2}{r}\right) - \log(\rho(r))$. □

Remarques. — La proposition permet de retrouver facilement la proposition 2.3. Nous allons voir qu'elle permet aussi de montrer la continuité aux extrémités de l'intervalle.

Il résulte de la théorie de l'indice de Robba que, lorsque $n = 1$, les sommets de $\mathcal{P}$ se trouvent en des points d'abscisse entière. Ceci n'est pas vrai en général. Nous ne savons même pas si $\mathcal{P}$ a une frontière affine par morceaux.

2.5. Continuité du rayon de convergence.

2.5. THÉORÈME. — *La fonction* $r \mapsto R(\mathcal{M}, r)$ *est continue sur l'intervalle* $[r_1, r_2]$.

Démonstration. — D'après la proposition 2.3, il nous suffit de démontrer la continuité en r_1 et r_2. Nous le ferons pour r_2. Pour r_1 il suffirait de changer x en $1/x$.

Il résulte du théorème du vecteur cyclique (voir 3.1) que le $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$-module différentiel $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ possède une base de la forme $\{m, \ldots, \delta^{n-1}(m)\}$.

A priori, les fonctions $G_{s,i}$ définies par la formule (8) appartiennent à $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$. Cependant, quitte à augmenter r_1 (ce qui n'est pas important puisque nous nous intéressons à ce qui se passe lorsque r tend vers r_2), nous pouvons supposer que les n fonctions $G_{n,i}$ $(0 \leqslant i < n)$ n'ont pas de pôle dans la couronne $\{r_1 < |x| < r_2\}$, c'est-à-dire appartiennent à $\mathcal{H}$ (il en est alors de même des fonctions $G_{s,i}$ pour $s > n$). Dans ces conditions, nous sommes dans la situation étudiée dans le paragraphe précédent. Nous reprenons les notations utilisée dans celui-ci.

Comme $R(\mathcal{M}, r) = \min(r, \rho(r))$, il suffit évidemment de démontrer la continuité de la fonction $\rho(r)$. La démonstration de la proposition 2.3, montre en fait que la fonction $\log(r) \mapsto \log(\rho(r))$ est concave sur l'intervalle $[r_1, r_2]$. La fonction $\rho(r)$ est donc continue inférieurement en r_2. En particulier, elle a une limite en r_2 et :

$$\rho(r_2) \leqslant \lim_{r \to r_2} \rho(r).$$

Il résulte de la proposition 2.4 appliquée pour $r = r_2$, que l'on a :

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{Q}} f(\lambda) = -\log(\rho(r_2)).$$

Mais, en faisant tendre r vers r_2 dans la majoration (10), on trouve, pour tout nombre λ :

$$f(\lambda) \leqslant -\lim_{r\to r_2} \log(\rho(r))$$

d'où on déduit :

$$-\log(\rho(r_2)) \leqslant -\lim_{r\to r_2} \log(\rho(r))$$

c'est-à-dire :

$$\rho(r_2) \geqslant \lim_{r\to r_2} \rho(r).$$

On a donc $\rho(r_2) = \lim_{r\to r_2} \rho(r)$ et la fonction $\rho(r)$ est continue en r_2. □

3. Bases cycliques.

3.1. Définition.

Soit $\mathcal{M}$ un K-module différentiel de rang n. On appelle *vecteur cyclique* tout élément m de $\mathcal{M}$ tel que les vecteurs $m, \delta(m), \ldots, \delta^{n-1}(m)$ forment une base de $\mathcal{M}$.

Le résultat suivant, qui est classique (voir [12] par exemple), va nous permettre de construire des bases de $\mathring{\mathcal{M}}$ jouissant de propriétés remarquables.

3.1. Proposition. — *Si K est un corps, tout K-module différentiel possède au moins un vecteur cyclique.* □

3.2. Taille et rayon de convergence.

La taille de l'opérateur δ et le rayon de convergence de $\mathcal{M}$ sont reliés de manière indirecte. Le théorème 1.5, appliqué à la valeur absolue $|\cdot|_r$, nous permet d'expliciter le cas des bases cycliques. La proposition suivante, et en particulier la partie 3, est essentiellement due à Katz.

3.2. Proposition. — *Soit r un nombre de $[r_1, r_2]$, soit m un vecteur cyclique de $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$, soit b un élément de $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$ et soit $\mathcal{E}_{m,b}$ la base $\{m, b\,\delta(m), \ldots, b^{n-1}\,\delta^{n-1}(m)\}$ de $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$.*

1) *On a, pour tout entier s, $T_r(\delta^s, \mathcal{E}_{m,b}) \leqslant \lambda^s \max(c^{n-1}, c^{1-n})$, où l'on a posé $\lambda = \max(r^{-1}, \omega\, R(\mathcal{M}, r)^{-1})$ et $c = \lambda\,|b|_r$.*

En particulier, si $R(\mathcal{M}, r) \geqslant \omega r$, alors, pour tout entier s et pour tout élément b tel que $|b|_r = r$, on a $T_r(\delta^s, \mathcal{E}_{m,b}) \leqslant r^{-s}$.

2) *Si, pour une base $\mathcal{E}$ de $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$, on a $T_r(\delta, \mathcal{E}) \leqslant r^{-1}$, alors $R(\mathcal{M}, r) \geqslant \omega r$.*

3) *Soit $\mathcal{E}$ une base de $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ telle que $T_r(\delta, \mathcal{E}) \leqslant r^{-1}$, alors $R(\mathcal{M}, r) > \omega r$ si et seulement s'il existe un entier s_0 tels que $T_r(\delta^{s_0}, \mathcal{E}) < r^{-s_0}$.*

Démonstration.

1) Etant donné un vecteur cyclique m, il existe des éléments a_i de $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$ tels que :

$$\delta^n(m) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\,\delta^i(m).$$

Autrement dit, on a un isomorphisme

$$\overset{\circ}{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \overset{\circ}{\mathcal{H}}[D]/\overset{\circ}{\mathcal{H}}[D] \cdot \left(D^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\,D^i\right).$$

D'une part, on a $\lambda \geqslant r^{-1} = \|D\|_r$ et d'autre part $\lambda \geqslant \omega\, R(\mathcal{M}, r)^{-1} = \|\delta\|_{r,\mathrm{Sp}}$, si bien que la condition 1) du théorème 1.5 est satisfaite. La condition 3) de ce même théorème donne alors :

$$T_r(\delta^s, \mathcal{E}_{m,b}) \leqslant \lambda^s \max\left((\lambda\,|b|_r)^{n-1}, (\lambda\,|b|_r)^{1-n}\right).$$

Si $R(\mathcal{M}, r) \geqslant \omega r$ et si $|b|_r = r$, on a $\lambda = r^{-1}$ et $c = 1$, ce qui donne immédiatement :

$$T_r(\delta^s, \mathcal{E}_{m,b}) \leqslant r^{-s}.$$

2) Par hypothèse on a :

$$\max(\|D\|_r\,,\, T_r(\delta, \mathcal{E})) \leqslant \frac{1}{r}\,.$$

En utilisant la formule (2) on obtient par récurrence $T_r(\delta^s, \mathcal{E}) \leqslant r^{-s}$ c'est-à-dire :

$$\|\delta\|_{r,\mathrm{Sp}} \leqslant \max(r^{-1}, \omega\, r^{-1}) = r^{-1}.$$

3) Par définition, pour que $R(\mathcal{M}, r) > \omega r$, il faut que $T_r(\delta^s, \mathcal{E})\, r^s$ tende vers 0 lorsque s tend vers l'infini. Il existe donc un entier s_0 tel que ce nombre soit inférieur à 1.

Réciproquement, posons $G_s = \mathrm{Mat}(\delta^s, \mathcal{E})$. Comme

$$r\,\|G\|_r = r\,T_r(\delta, \mathcal{E}) \leqslant 1,$$

la relation (2) montre que la suite

$$r^s\,\|G_s\|_r = r^s\,T_r(\delta^s, \mathcal{E})$$

est décroissante. En particulier elle est majorée par 1 et, en choisissant un nombre q tel que $q = p^h > s_0$, on aura $r^q\,\|G_q\|_r < 1$. Posons :

$$\mu = \max(|p|\,,\, r^q\,\|G_q\|_r) < 1 = r\,\|D\|_r.$$

La formule de Leibniz :

$$G_{(h+1)q} = \sum_{i=0}^{q} \binom{q}{i}\, D^i(G_{hq})\, G_{q-i}$$

permet d'obtenir :

$$r^{(h+1)q}\,\|G_{(h+1)q}\|_r \leqslant \mu\, r^{hq}\,\|G_{hq}\|_r \leqslant \mu^{h+1}$$

et par suite, avec $hq \leqslant s < (h+1)q$:

$$r^s\,\|G_s\|_r \leqslant r^{hq}\,\|G_{hq}\|_r \leqslant \mu^h < \mu^{(s-q)/q}$$

c'est-à-dire $R(\mathcal{M}, r) \geqslant r\,\omega\,\mu^{1/q} > r\omega$. □

3.3. Polynômes différentiels ayant un grand rayon de convergence.

Toujours grâce au théorème 1.5, mais maintenant appliqué à la valeur absolue $|\cdot|_\nu$, nous précisons la forme de la matrice qui représente δ dans une "base cyclique".

3.3. Proposition. — *Soit* $L = D^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} D^i$ *un polynôme différentiel de* $\overset{\circ}{\mathcal{H}}[D]$, *soit* r *un nombre de l'intervalle* $[r_1, r_2]$ *et soit* $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ *le* $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$*-module différentiel* $\overset{\circ}{\mathcal{H}}[D]/\overset{\circ}{\mathcal{H}}[D]\cdot L$. *Si* $R(\overset{\circ}{\mathcal{M}}, r) > \omega r$, *il existe un polynôme différentiel unitaire* $P = D^n - \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-i} D^i$ *de* $k(x)[D]$ *tel que :*

1) *Les seules singularités de* P *sont régulières et se trouvent en* 0, *à l'infini et en des points* β_i *tels que* $|\beta_i| = r$ *pour tout* i *et* $|\beta_i - \beta_j| = r$ *pour* $i \neq j$.

2) *Les exposants de* P *sont dans* $\mathbb{Z}$.

3) *On a* $|a_i|_r \leqslant r^{-i}$ *et* $|a_i - b_i|_r < r^{-i}$.

Démonstration. — Notons δ l'action, à gauche, de la dérivation D sur $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$. Par définition du rayon de convergence (§2.3) on a $\|\delta\|_{r,\mathrm{Sp}} < r^{-1} = \|D\|_r$. Le théorème 1.5 2) affirme alors que $|a_i|_r \leqslant r^{-i}$.

Nous commençons par étudier l'image du polynôme L dans le corps des restes.

Si r n'appartient pas au groupe des valeurs absolues de k, comme $|x^i a_i|_r \leqslant 1$, nous pouvons considérer l'image $\overline{b}_i$ de $x^i a_i$ dans le corps $\overline{\mathcal{H}}_r = \overline{k}$ et nous posons :

$$\overline{P} = D^n - \sum_{i=0}^{n-1} \overline{b}_{n-i}\, x^{-i} D^i.$$

Clairement les seules singularités du polynôme différentiel $\overline{P}$ sont régulières et se trouvent en 0 et à l'infini .

Si r appartient au groupe des valeurs absolues de k, comme $|\alpha_r^i a_i|_r \leqslant 1$, nous pouvons noter $\overline{b}_i$ l'image de $\alpha_r^i a_i$ dans le corps $\overline{\mathcal{H}}_r$ et nous posons :

$$\overline{P} = \overline{D}^n - \sum_{i=0}^{n-1} \overline{b}_{n-i}\, \overline{D}^i.$$

Considérons le $\overline{\mathcal{H}}_r$-module différentiel $\overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{H}}_r[\overline{D}]/\overline{\mathcal{H}}_r[\overline{D}]\cdot\overline{P}$. Nous notons $\overline{\delta}$ (resp. $\overline{\delta}_\nu$) l'action à gauche de la dérivation $\overline{D}$ (resp. $\overline{D}_\nu$) sur $\overline{\mathcal{M}}$ et $T_\nu(\cdot, \overline{\mathcal{E}})$ la taille associée à la valeur absolue $|\cdot|_\nu$ de $\overline{\mathcal{H}}_r = \overline{k}(\overline{x})$ et à la base $\overline{\mathcal{E}}$ de $\overline{\mathcal{M}}$.

Dans la base $\overline{\mathcal{E}} = \{1, \overline{D}, \dots, \overline{D}^{n-1}\}$ de $\overline{\mathcal{M}}$, l'opérateur $\overline{\delta}^{s}$ est représenté par la matrice $\overline{G}_s = \overline{\alpha_r^s\, G_{\alpha_r,s}}$. Comme $|\alpha_r| = r$, d'après la proposition 3.2 3), on sait qu'il existe un entier s_0 tel que $\|\alpha_r^{s_0}\, G_{\alpha_r,s_0}\|_r < 1$. On a donc $\overline{\delta}^{s_0} = 0$.

La proposition 1.1 permet d'écrire, pour toute place ν et tout entier s :

$$T_\nu(\overline{\delta}_\nu^{s}, \overline{\mathcal{E}}) = \Big\| \sum_{i=1}^{s} c_{s,i}\, \overline{x}_\nu^{i}\, \overline{G}_i \Big\|_\nu \leqslant \max_{1 \leqslant i < s_0} \|\overline{x}_\nu^{i}\, \overline{G}_i\|_\nu$$

d'où il résulte que :

$$\|\overline{\delta}_\nu\|_{\nu,\mathrm{Sp}} \leqslant 1 = \|\overline{D}_\nu\|_\nu .$$

Le théorème 1.5 s'applique donc à notre situation avec $\lambda = 1$ et donne :

$$T_\nu(\overline{\delta}_\nu, \overline{\mathcal{F}}_\nu) \leqslant 1$$

où $\overline{\mathcal{F}}_\nu$ désigne la base $\{1, \overline{D}_\nu, \dots, \overline{D}_\nu^{n-1}\}$ de $\overline{\mathcal{M}}$.

Il résulte de la proposition 1.2 que cette majoration est encore valable dans la base $\overline{\mathcal{E}}_{\overline{x}_\nu} = \{1, \overline{x}_\nu\, \overline{D}, \dots, \overline{x}_\nu^{n-1}\, \overline{D}^{n-1}\}$. Autrement dit la matrice :

$$\overline{G}_\nu = \mathrm{Mat}(\overline{\delta}_\nu, \overline{\mathcal{E}}_{\overline{x}_\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & n-2 & 1 \\ \overline{x}_\nu^{n}\, \overline{b}_n & \cdots & \overline{x}_\nu^{i}\, \overline{b}_i & \cdots & n-1+\overline{x}_\nu\, \overline{b}_1 \end{pmatrix}$$

a une valeur absolue ν-adique au plus égale à 1. Donc ses coefficients sont dans $\overline{k}[[\overline{x}_\nu]]$ (resp. dans $\overline{k}[[1/\overline{x}]]$ pour $\nu = \infty$). Donc $\overline{b}_i$ a au plus un pôle d'ordre i en ν. Dans ce cas aussi l'opérateur $\overline{P}$ n'a que des singularités régulières.

Soit ν un point singulier de $\overline{P}$. Rappelons que les exposants du polynôme différentiel $\overline{P}$ à la place ν sont les valeurs propres de la matrice $\overline{C}_\nu = \overline{G}_\nu(\nu)$. Posons $\overline{G}_{\nu,s} = \mathrm{Mat}(\overline{x}_\nu^{s}\, \overline{\delta}^{s}, \overline{\mathcal{E}}_{\overline{x}_\nu})$. En s'inspirant de la relation (2), on vérifie facilement que l'on a :

$$\overline{G}_{\nu,1} = \overline{G}_\nu, \qquad \overline{G}_{\nu,s+1} = \overline{x}_\nu\, \overline{D}(\overline{G}_{\nu,s}) + (\overline{G}_{\nu,s} - s)\, \overline{G}_\nu$$

et on obtient par récurrence :

$$\overline{G}_{\nu,s}(\nu) = \overline{C}_\nu(\overline{C}_\nu - 1) \cdots (\overline{C}_\nu - s + 1).$$

Comme $\overline{G}_{\nu,s_0} = 0$, on trouve que les valeurs propres de $\overline{C}_\nu$ sont entières. Autrement dit, les exposants de $\overline{P}$ sont des entiers.

Pour obtenir la proposition il suffit de "relever" le polynôme $\overline{P}$ en un polynôme P de $k(x)[D]$ vérifiant les conditions 1) et 2). Ceci est possible car un tel polynôme est entièrement déterminé par ses points singuliers, ses exposants et un certain nombre de paramètres complémentaires la seule condition à respecter étant que la somme des exposants doit être égale à $\frac{1}{2}n(n-1)(\mu-1)$ où μ désigne le nombre de points singuliers de $\overline{P}$ ([16] 15.4). Il nous suffit de préciser comment relever les points singuliers. Si $\overline{\beta}$ est un tel point, on le relève en $\beta = \overline{\beta}$ si $\beta = 0$ ou ∞ et en un élément β de k tel que $|\beta| = r$ et $\overline{\beta/\alpha_r} = \overline{\beta}$ sinon. □

3.4. Petites bases cycliques.

Nous rappelons maintenant un résultat qui montre l'existence de bases cycliques "proches" de toute base donnée.

3.4. Proposition. — *Soit r un nombre de l'intervalle $[r_1, r_2]$ et soit $\mathcal{E}$ une base de $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$. Si $R(\mathcal{M}, r) \geqslant \omega r$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un vecteur cyclique m de $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ tel que l'on ait, pour tout b de $\mathcal{H}$ tel que $|b|_r = r$:*

$$\Theta_r(\mathcal{E}_{m,b}, \mathcal{E}) \leqslant \frac{1+\varepsilon}{g(n)} \max(1, T_r(x\,\delta, \mathcal{E}))^{n-1}, \quad g(n) = \left|(n-1)! \prod_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j}\right|.$$

Cette proposition est démontrée dans [8] dans le cas où $r = 1$ et où $R(\mathcal{M}, 1) = 1$. Comme remarqué dans [9], la proposition 3.2 1) permet d'étendre la démonstration au cas $R(\mathcal{M}, 1) \geqslant \omega$. Le passage du cas $r = 1$ au cas général est immédiat par "homothétie". On conjecture que le résultat reste vrai avec $g(n) = |(n-1)!|$ (voir [9] pour une étude détaillée de cette conjecture). □

4. Frobenius : existence locale.

4.1. Suppression des singularités apparentes.

Notre premier résultat compare les bases de $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ et celles de $\mathcal{M}$.

4.1. PROPOSITION. — *Soit r un nombre de l'intervalle $[r_1, r_2]$, et soit $\mathcal{E}$ une base de $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}$ telle que $\Theta_r(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = 1$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}$ une base de $\mathcal{M}$, posons $G = \mathrm{Mat}(\delta, \mathcal{E})$ et $F = \mathrm{Mat}(\delta, \mathcal{F})$ et soit H la matrice de changement de base telle que $F = H[G]$.

Le théorème sur la décomposition des matrices en facteurs singuliers ([4] théorème 3.2 ou [5] proposition 5.4.3) affirme que l'on peut trouver deux matrices K et L telles que :

$$H = L\,K, \quad \|K\|_r\ \|K^{-1}\|_r = 1, \quad K \in \mathrm{Gl}(n, k(x)), \quad L \in \mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}).$$

Comme la matrice L^{-1} appartient à $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{H})$, $\mathcal{B} = L^{-1}(\mathcal{F})$ est une base de $\mathcal{M}$ et on a, d'une part, $\mathrm{Mat}(\delta, \mathcal{B}) = L^{-1}[F] = K[G]$ et d'autre part $\Theta_r(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \|K\|_r\ \|K^{-1}\|_r = 1$. □

Il n'y a aucune raison pour que la base $\mathcal{B}$ que nous venons de construire soit indépendante du nombre r. Nous interprétons ce fait en disant qu'il n'y a pas (ou que nous ne savons pas construire) de base qui soit bonne globalement.

4.1. COROLLAIRE [Dwork-Frobenius]. — *Soit r un nombre de l'intervalle $[r_1, r_2]$. Si $R(\mathcal{M}, r) \geqslant \omega r$, il existe une base $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}$ telle que $T_r(\delta, \mathcal{E}) \leqslant r^{-1}$. Si $R(\mathcal{M}, r) < \omega r$, pour tout nombre α de $|k|$ tel que $\alpha \geqslant \omega\, R(\mathcal{M}, r)^{-1}$, il existe une base $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}$ telle que $T_r(\delta, \mathcal{E}) \leqslant \alpha$.*

Démonstration. — Si $R(\mathcal{M}, r) \geqslant \omega r$, on pose $b = x$. La proposition 3.2 1) donne $T_r(\delta, \mathcal{E}_{m,b}) \leqslant r^{-1}$. Si $R(\mathcal{M}, r) < \omega r$, on reprend les notations de la proposition 3.2, et on choisit pour b un élément de k tel que :

$$\lambda^{-1} \leqslant |b| \leqslant \lambda^{-1} \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

(ceci est possible car $|k|$ est un sous-groupe dense). On trouve $1 \leqslant c^{n-1} \leqslant \alpha/\lambda$. c'est-à-dire $T_r(\delta, \mathcal{E}_{m,b}) \leqslant \alpha$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 4-1 à la base $\mathcal{E}_{m,b}$. □

4.2. Bases localement bonnes.

4.2. PROPOSITION. — *Soit r un nombre de l'intervalle $]r_1, r_2[$ tel que $R(\mathcal{M}, r) > \omega r$. A tout vecteur cyclique m de $\mathring{\mathcal{M}}$ on peut associer une base $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}$ et une matrice M à coefficients dans $k[x]$ telles que l'on ait :*

1) $\Theta_r(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{m,x}) = 1$,

2) $\|x\,G - M\|_r < 1$, *pour* $G = \mathrm{Mat}(\delta, \mathcal{E})$,

3) $\|M\|_r \leqslant 1$ *et la matrice* $M(0)$ *est nilpotente.*

Démonstration. — Notons $G_{m,x}$ la matrice qui représente l'opérateur δ dans la base $\mathcal{E}_{m,x} = \{m, x\,\delta(m), \ldots, x^{n-1}\,\delta^{n-1}(m)\}$ de $\mathring{\mathcal{M}}$. D'après la proposition 3.2 1), on a $\|x\,G_{m,x}\|_r \leqslant 1$. Par ailleurs il résulte de la proposition 3.3 qu'il existe une matrice N (associée au polynôme différentiel P) à coefficients dans $k(x)$ telle que :

- N n'a pas de pôle dans le disque $|x| < r$,
- les valeurs propres de $N(0)$ sont entières,
- $\|x\,G_{m,x} - N\|_r < 1$.

D'après la proposition 4.1, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}$ telle que :

$$\Theta_r(\mathcal{B}, \mathcal{E}_{m,x}) = 1.$$

En posant $B = \mathrm{Mat}(\delta, \mathcal{B})$, on constate (voir §1.2) que les coefficients de la matrice $x\,B$ sont dans $\mathcal{O}_r$. Rappelons que, par construction, ils sont aussi dans $\mathcal{H}$. Comme $r_1 < r < r_2$, les coefficients de la matrice $\overline{x\,B}$ sont donc dans $\overline{k}[\overline{x}, 1/\overline{x}]$ (nous supposerons que r appartient à $|k|$. Sinon les raisonnements que nous allons faire deviennent triviaux).

Quitte à faire une homothétie sur la base $\mathcal{B}$, on peut supposer que la matrice H de changement de base (entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$) vérifie $\|H\|_r = \|H^{-1}\|_r = 1$. On a alors $|\det H|_r = 1$ et la réduction $\overline{H}$ de la matrice H est une matrice de $\mathrm{Gl}(n, \overline{\mathcal{H}_r}) = \mathrm{Gl}(n, \overline{k}(\overline{x}))$. Décomposons la matrice $\overline{H}$en facteurs singuliers (voir [4] lemme 2.1 avec $\overline{k}$ muni de sa valeur absolue triviale et $A = \{0\}$). On obtient deux matrices $\overline{K}$ et $\overline{L}$ telles que :

- $\overline{K} \in \mathrm{Gl}(n, \overline{k}[\overline{x}, 1/\overline{x}])$,
- $\overline{K}$ est une matrice triangulaire (disons supérieure pour fixer les idées),
- $\overline{L}$ et $\overline{L}^{-1}$ n'ont pas de pôle en 0,

- $\overline{H} = \overline{K}\,\overline{L}$.

Considérons alors la matrice :

$$\overline{R} = \overline{x}\,\overline{D}(\overline{L})\,\overline{L}^{-1} + \overline{L}\,\overline{N}\,\overline{L}^{-1} = \overline{x}\,\overline{L}[\overline{\alpha_r\,G_{m,x}}]$$
$$= \overline{x}\,\overline{K}^{-1}[\overline{\alpha_r\,B}] = -\overline{K}^{-1}\,\overline{x}\,\overline{D}(\overline{K}) + \overline{K}^{-1}\,\overline{x\,B\,K}.$$

On constate, à partir de la deuxième expression, que les coefficients de la matrice $\overline{R}$ appartiennent à $k[\overline{x}, 1/\overline{x}]$ et, à partir de la première expression, que la matrice $\overline{R}$ n'a pas de pôle en zéro. En particulier, ces coefficients n'ont de pôles qu'a l'infini. Ce sont donc des polynômes. De plus on constate que les valeurs propres de la matrice $R(0) = \overline{L}(0)\,\overline{N}(0)\,\overline{L}^{-1}(0)$ sont entières.

Maintenant nous choisissons une matrice R à coefficients dans $k[x]$ qui relève la matrice $\overline{R}$ de telle sorte que $R(0)$ ait des valeurs propres entières. Par ailleurs, remarquant que les termes diagonaux de la matrice K sont des monômes en $\overline{x}$ (car inversibles dans $\overline{k}[\overline{x}, 1/\overline{x}]$), nous choisissons une matrice triangulaire K à coefficients dans $k[x, 1/x]$ qui relève la matrice $\overline{K}$ et dont les termes diagonaux sont des monômes en x. Le déterminant de K est alors un monôme en x, donc K appartient à $\mathrm{Gl}(n, k[x, 1/x])$ c'est-à-dire aussi à $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{H})$. De plus on a $\|K\|_r = \|K^{-1}\|_r = 1$.

On peut maintenant effectuer des "opérations de cisaillement"sur la matrice R qui permettent de diminuer de 1 les valeurs propres de $R(0)$ (voir [8] Proposition 2.3 dans le cas $r = 1$). Comme les valeurs propres de la matrice $R(0)$ sont dans $\mathbb{Z}$, on se ramène ainsi au cas nilpotent. Plus précisément, on construit une matrice C de $\mathrm{Gl}(n, k[x, 1/x])$ telle que :

- $\|C\|_r\,\|C^{-1}\|_r = 1$
- $M = x\,C[\,\frac{1}{x}\,R] \in \mathrm{Gl}(n, k[x])$ et $M(0)$ est nilpotente.

Soit $\mathcal{E}$ la base construite à partir de $\mathcal{B}$ par le changement de base associé à la matrice $C\,K^{-1}$. Comme ces matrices sont "unimodulaires", on trouve :

$$1 \leqslant \Theta_r(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{m,x}) \leqslant \Theta_r(\mathcal{E}, \mathcal{B})\Theta_r(\mathcal{B}, \mathcal{E}_{m,x}) = 1,$$

et la condition 1) est vérifiée.

La condition 2) se déduit de la relation :

$$\overline{x\,G} = \overline{x\,CK^{-1}[B]} = \overline{x}\,\overline{C}\,\overline{K}^{-1}[\overline{\alpha_r\,B}] = \overline{x}\,\overline{C}[\overline{x}^{-1}\,\overline{R}] = \overline{M}.$$

$\square$

Remarque. — En changeant x en $1/x$, on peut obtenir une proposition analogue dans laquelle les coefficients de la matrice M sont dans $k[1/x]$.

4.3. Existence locale du Frobenius.

Dans ce paragraphe nous construisons un antécédent de $\mathcal{M}$, pour le foncteur de Frobenius, sur une petite couronne entourant la circonférence de rayon r.

Soit $I \subset [r_1, r_2]$ un intervalle. Nous notons $\mathcal{H}_I$ l'anneau des éléments analytiques sur la couronne $\mathcal{C}_I = \{x \in \Omega; |x| \in I\}$. Plus généralement, soit r un nombre de l'intervalle I et soit $A = \{\alpha_i\}$ un ensemble fini de points de $\mathbb{C}_p$ tels que $|\alpha_i| = r$. Nous notons $\mathcal{H}_I^A$ l'anneau des fonctions méromorphes sur la couronne $\mathcal{C}_I$ n'ayant comme singularité que des pôles aux points α_i. En particulier $\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_I^\varnothing$. Lorsque $r = r_1$ ou $r = r_2$, cette distinction est sans objet et on a $\mathcal{H}_I^A = \mathcal{H}_I$ quelque soit l'ensemble A.

Nous notons $\mathcal{H}_I^{A\psi}$ (resp. $\mathcal{H}_I^\psi$, $\mathcal{H}^\psi$) l'anneau des éléments analytiques sur l'ensemble $(\mathcal{C}_I - A)^p$ (resp. $(\mathcal{C}_I)^p$, $\mathcal{C}^p$) image de $\mathcal{C}_I - A$ par l'application $x \mapsto x^p$ et nous posons :

$$\mathcal{M}_I^A = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{H}_I^A \qquad\qquad \mathcal{M}_I = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{H}_I.$$

Afin de simplifier nos énoncés, nous dirons qu'une base $\mathcal{F}$ d'un $\mathcal{H}_I^A$-module différentiel $\mathcal{M}_I^A$ est Φ-représentée, en un point ρ de I, par la matrice F si :

a) les coefficients de la matrice F sont dans $\mathcal{H}_I^{A\psi}$,

b) $\mathrm{Mat}(\delta, \mathcal{F}) = p\, x^{p-1}\, F(x^p)$,

c) il existe une matrice $\mathcal{V}_\rho$, analytique dans le disque $|x - t_\rho^p| < R(\mathcal{M}, \rho)^p$, telle que $F = D(\mathcal{V}_\rho)\, \mathcal{V}_\rho^{-1}$ et que la matrice $\mathcal{V}_\rho(t_\rho^p)$ soit inversible.

4.3. PROPOSITION. — *Soit r un nombre de l'intervalle $[r_1, r_2]$ et soit m un vecteur cyclique de $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$. Si $R(\mathcal{M}, r) > \omega r$, il existe un intervalle ouvert I contenant r, un ensemble fini A et une base $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_I^A$, Φ-représentée, en tout point ρ de l'intervalle $I \cap [r_1, r_2]$, par une matrice F (indépendante de ρ) telle que $\Theta_r(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{m,x}) = 1$ et $\|F\|_{r^p} \leqslant |p|^{-1}\, r^{-p}$.*

Démonstration. — Soit G la matrice qui représente l'opérateur δ dans la base $\mathcal{E}$ construite à la proposition 4.2 et M la matrice associée.

Définissons une suite de matrices M_s par les relations :

$$M_0 = I, \qquad M_{s+1} = x\,D(M_s) + M_s\,(M - s).$$

Les coefficients de la matrice M_s sont des polynômes et on vérifie sans peine que :

$$(11) \qquad \|M_s\|_r \leqslant 1 \qquad\qquad \|x^s\,G_s - M_s\|_r < \|M\|_r^s \leqslant 1, \qquad (s \geqslant 0)$$

où G_s est la matrice définie par la relation (2). Comme $R(\mathcal{M}, r) > \omega r$, il existe un entier s_0 tel que :

$$\|x^{s_0}\,G_{s_0}\|_r < 1.$$

C'est-à-dire aussi :

$$\|M_{s_0}\|_r < 1,$$

et la proposition 3.2 3), appliquée au $k(x)$-module différentiel

$$\mathcal{N} = \overset{\circ}{\mathcal{H}}\,[D] / \overset{\circ}{\mathcal{H}}\,[D] \cdot \frac{1}{x}\,M$$

donne $R(\mathcal{N}, r) > \omega r$.

Les fonctions $R(\mathcal{M}, \cdot)$ et $R(\mathcal{N}, \cdot)$ étant continues, on peut trouver un intervalle ouvert I, contenant r, tel que l'on ait pour tout nombre ρ de $I \cap [r_1, r_2]$:

$$\min(R(\mathcal{M}, \rho), R(\mathcal{N}, \rho)) > \omega\rho.$$

Nous considérons maintenant les matrices :

$$H = \sum_{s=0}^{\infty} x^s\,G_s\,\frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1}\frac{(\zeta-1)^s}{s!} \qquad \text{et} \qquad R = \sum_{s=0}^{\infty} M_s\,\frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1}\frac{(\zeta-1)^s}{s!}.$$

Il est bien connu que les nombres :

$$\frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1}\frac{(\zeta-1)^s}{s!}$$

sont des entiers ([8] proposition 2.6). Par ailleurs, d'après la définition du rayon de convergence, pour tout nombre ρ de $I \cap [r_1, r_2]$ on a :

$$\lim_{s\to\infty} \|x^s\,G_s\|_\rho = 0 \qquad\qquad \lim_{s\to\infty} \|M_s\|_\rho = 0.$$

Les séries qui définissent les matrices H et R sont donc convergentes pour la norme $\|\cdot\|_\rho$ et les coefficients de ces matrices appartiennent à $\mathcal{H}_I$. En fait les coefficients de la matrice R sont analytiques dans un disque centré en 0 et de rayon strictement supérieur à r.

Maintenant, les coefficients de M_s sont des polynômes et :

$$M_s(0) = M(0)\,(M(0)-1)\,\cdots\,(M(0)-s+1),$$

où $M(0)$ est une matrice nilpotente. Il vient alors ([8] Proposition 2.8) :

$$R(0) = \sum_{s=0}^{\infty} M_s(0)\,\frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1}\frac{(\zeta-1)^s}{s!} = I.$$

Les majorations (11) montrent que :

$$1 = |\det R(0)| \leqslant |\det R|_r \leqslant \|R\|_r^n \leqslant 1$$

$$|\det H - \det R|_r \leqslant \|H-R\|_r\ \max(\|H\|_r, \|R\|_r)^n < 1$$

d'où on déduit :

$$|\det(H)|_r = |\det R|_r = 1.$$

Autrement dit, la fonction $\det R$ appartient à $\mathcal{H}_I$ et est non nulle. Elle n'a donc qu'un nombre fini de zéros sur la couronne $\mathcal{C}_I$. Quitte à restreindre encore l'intervalle I, nous pouvons supposer que ces zéros sont tous sur la circonférence $|x| = r$. Dans ces conditions, la matrice H appartient à $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}_I^A)$ pour un ensemble fini A.

Nous considérons maintenant la base $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_I^A$ obtenue à partir de la base $\mathcal{E}$ par la matrice H. Comme :

$$\|H\|_r = \|H^{-1}\|_r = 1$$

on a :

$$\Theta_r(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{m,x}) = \Theta_r(\mathcal{F}, \mathcal{E})\,\Theta_r(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{m,x}) = 1.$$

Soit alors un nombre ρ de l'intervalle $I \cap [r_1, r_2]$. Comme $R(\mathcal{M}, \rho) > \omega\rho$, l'application $x \mapsto x^p = z$ est une surjection du disque $|x - t_\rho| < R(\mathcal{M}, \rho)$ dans le disque $|z - t_\rho^p| < R(\mathcal{M}, \rho)^p$, dont chaque fibre a exactement p éléments (voir [2] lemme 3.1). La matrice $\mathcal{U}_{G,t}(x)$, définie par la formule (7), étant analytique dans le disque $|x - t_\rho| < R(\mathcal{M}, \rho)$, la formule :

$$\mathcal{V}_\rho(z) = \frac{1}{p}\sum_{x^p=z}\mathcal{U}_{G,t_\rho}(x)$$

définit une matrice $\mathcal{V}_\rho$ analytique dans le disque $|z - t_\rho^p| < R(\mathcal{M}, \rho)^p$.

On remarque alors que, pour $|x - t_\rho| < R(\mathcal{M}, \rho)$, on a :

$$H(x) = \frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} \mathcal{U}_{G,x}(\zeta x) = \frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} \mathcal{U}_{G,t_\rho}(\zeta x) \mathcal{U}_{G,t_\rho}^{-1}(x) = \mathcal{V}_\rho(x^p) \mathcal{U}_{G,t_\rho}^{-1}(x).$$

En particulier, on trouve :

$$\mathcal{V}_\rho(t_\rho^p) = H(t_\rho)$$

qui est donc une matrice inversible.

Posons alors :

$$F = D(\mathcal{V}_\rho)\, \mathcal{V}_\rho^{-1}.$$

Dans la base $\mathcal{F}$, l'opérateur δ est représenté par la matrice $H[G]$ et on a :

$$\mathcal{U}_{H[G],t_\rho}(x) = H(x) \mathcal{U}_{G,t_\rho}(x)\, H^{-1}(t_\rho) = \mathcal{V}_\rho(x^p)\, H^{-1}(t_\rho)$$

c'est-à-dire, pour $|x - t_\rho| < R(\mathcal{M}, \rho)$:

$$p\, x^{p-1}\, F(x^p) = D(\mathcal{V}_\rho(x^p))\, \mathcal{V}_\rho(x^p)^{-1} = H[G].$$

Les coefficients de la matrice $H[G]$ appartenant à $\mathcal{H}_I^A$, on en déduit, par un argument classique ([6] proposition 5.1 ou [2] lemme 3.2), que les coefficients de la matrice F sont des éléments de $\mathcal{H}_I^{A\psi}$. On constate aussi que la matrice F est indépendante de ρ et la base $\mathcal{F}$ est bien ϕ-représentée par la matrice F en ρ.

Finalement on a :

$$\begin{aligned} \|F\|_{r^p} &= \|F(x^p)\|_r = |p|^{-1}\, r^{1-p}\, \|H[G]\|_r \\ &\leqslant |p|^{-1}\, r^{1-p}\, \Theta_r(\mathcal{E}, \mathcal{F})\, \|G\|_r \leqslant |p|^{-1} r^{-p}. \end{aligned}$$

□

4.4. Antécédent.

La majoration de la matrice F donnée dans la proposition précédente est en fait une conséquence de la Φ-représentation, comme le montre le résultat suivant :

4.4. Proposition. — *Soit r un nombre de l'intervalle $I \subset [r_1, r_2]$ et A un ensemble de points de valeur absolue r. On suppose que $R(\mathcal{M}, r) > \omega r$.*

Si $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_I^A$, ϕ-représentée en r par une matrice F alors, la matrice F représente l'opérateur δ dans un $\mathcal{H}_I^{A\psi}$-module différentiel $\mathcal{N}$ tel que $R(\mathcal{N}, r^p) = R(\mathcal{M}, r)^p$. En particulier, il existe une matrice K de $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}_{\mathrm{I}}^{A\psi})$ *telle que* $\|K[F]\|_{r^p} < |p|^{-1} r^{-p}$.

Démonstration. — Reprenons les notations de la proposition 4.3 et considérons le $\mathcal{H}_I^{\psi}$-module différentiel $\mathcal{N} = \left(\mathcal{H}_I^{A\psi}\right)^n$ pour lequel l'action de δ est définie par la matrice F.

D'après l'unicité de la solution d'un système avec condition initiale, on a :

$$\mathcal{U}_{F,t_r^p}(x) = \mathcal{V}_r(x)\,\mathcal{V}_r^{-1}(t_r^p).$$

Autrement dit, le rayon de convergence de la matrice $\mathcal{V}_r$ n'est autre que $R(\mathcal{N}, r^p)$. On a donc, par hypothèse :

$$R(\mathcal{N}, r^p) \geqslant R(\mathcal{M}, r)^p > (\omega r)^p = |p|\,\omega\, r^p.$$

Par ailleurs, on trouve :

$$\mathcal{U}_{p\,x^{p-1}\,F(x^p),t_r}(x) = \mathcal{V}_r(x^p)\,\mathcal{V}_r^{-1}(t_r^p)$$

c'est-à-dire $R(\mathcal{M}, r) \geqslant R(\mathcal{N}, r^p)^{1/p}$. Donc $R(\mathcal{N}, r^p) = R(\mathcal{M}, r)^p$.

Finalement, d'après le corollaire 4.1, légèrement modifié de façon à tenir compte des pôles de F, appliqué au module différentiel $\mathcal{N}$, il existe une matrice H de $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}_{\mathrm{I}}^{A\psi})$ telle que :

$$\|H[F]\|_{r^p} \leqslant \max(\omega\, R(\mathcal{N}, r^p)^{-1}, r^{-p}) \leqslant |p|^{-1} r^{-p}.$$

□

5. Frobenius : existence globale.

5.1. Unicité de l'antécédent.

5.1. Proposition. — *Soit r un nombre de l'intervalle $I \subset [r_1, r_2]$ et soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux bases de $\overset{\circ}{\mathcal{M}}_I$, Φ-représentées au point r par les matrices F et G. Si $R(\mathcal{M}, r) > \omega r$, il existe une matrice H de* $\mathrm{Gl}(n, \overset{\circ}{\mathcal{H}}{}_I^{\psi})$ *telle que* $F = H[G]$.

Démonstration. — Quitte à faire sur $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ le changement de base indiqué par la proposition 4.4, on peut supposer que :

$$\|F\|_{r^p} < |p|^{-1}\, r^{-p}, \qquad \|G\|_{r^p} < |p|^{-1}\, r^{-p}.$$

Comme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux bases du même module différentiel $\mathcal{M}_I^A$, il existe une matrice K de $\mathrm{Gl}(\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}_I^A)$ telle que :

$$p\, x^{p-1}\, F(x^p) = K[p\, x^{p-1}\, G(x^p)].$$

La matrice K s'écrit, de manière unique, sous la forme :

$$K = \sum_{i=0}^{p-1} x^i\, K_i(x^p)$$

où les coefficients des matrices K_i appartiennent à $\mathcal{H}_I^{A\psi}$. La formule (3) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} p\, x^p\, F(x^p) \sum_{i=0}^{p-1} x^i\, K_i(x^p) = \sum_{i=0}^{p-1} & i\, x^i\, K_i(x^p) \\ & + p\, x^{i+p}\, D(K_i)(x^p) + p\, x^p\, G(x^p)\, x^i\, K_i(x^p) \end{aligned}$$

ce qui donne, pour $0 \leqslant i < p$:

$$p\, x\, F\, K_i = i\, K_i + p\, x\, D(K_i) + p\, x\, G\, K_i$$

d'où, pour $0 < i < p$:

$$\|K_i\|_{r^p} = \|i\, K_i\|_{r^p} = |p|\, \|x\, F\, K_i - x\, D(K_i) - x\, G\, K_i\|_{r^p} < \|K_i\|_{r^p}$$

c'est-à-dire $K_i = 0$. Et la proposition est démontrée avec $H = K_0$. □

Remarque. — Dans la notion de ϕ-représentation, une condition du type “existence de la matrice $\mathcal{V}_r$”, c'est-à-dire précisant le rayon de convergence de l'antécédent de Frobenius, est essentielle comme le montre l'exemple suivant (en dimension 1) :

$$F = \frac{1}{p}\, x^{-1}, \qquad G = 0$$

pour lequel on a la relation :

$$p\, x^{p-1}\, F(x^p) = x^{-1} = x[p\, x^{p-1}\, G(x^p)]$$

montrant que $p\,x^{p-1}\,F(x^p)$ et $p\,x^{p-1}\,G(x^p)$ représentent l'opérateur δ dans deux bases d'un même module différentiel.

La solution "$x^{1/p}$ " ayant un rayon de convergence $\omega|p|r^p$ dans le disque générique de rayon r^p, la condition $R(\mathcal{M},r) > \omega r = (\omega|p|r^p)^{1/p}$ apparaît comme la meilleure possible pour éviter ce phénomène.

5.2. Elimination des singularités apparentes.

La proposition suivante permet, grâce à une hypothèse légèrement restrictive, de supprimer les singularités introduites dans la proposition 4.3.

5.2. Proposition. — *Soit r un nombre de l'intervalle $[r_1, r_2]$ et soit m un vecteur cyclique de $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$. Si $R(\mathcal{M},r) > |p|^{1/p}\,r$, il existe un intervalle ouvert I contenant r et une base $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_I$, Φ-représentée, en tout point ρ de l'intervalle $I \cap [r_1, r_2]$, par une matrice F (indépendante de ρ) telle que $\Theta_r(\mathcal{F}, \mathcal{E}_{m,x}) = 1$ et $\|F\|_{r^p} \leqslant |p|^{-1}\,r^{-p}$.*

Démonstration. — D'après la proposition 4.3, il existe un ensemble fini A et une base $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_I^A$ qui a les propriétés demandées. Pour montrer que l'on peut prendre $A = \varnothing$, nous choisissons une base $\mathcal{F}$ correspondant à un ensemble A ayant un nombre minimum de points et nous montrons que ce nombre est nul.

Supposons donc que A contienne un point α et montrons que A n'est pas minimum.

Soit α un point de A et soit $\mathcal{H}_\alpha$ l'ensemble des éléments analytiques dans le disque $D(\alpha, r) = \{x \in \Omega; |x-\alpha| < r\}$. Comme $R(\mathcal{M},r) > \omega\,r$ et comme le module différentiel $\mathcal{M}$ n'a pas de singularité dans le disque $D(\alpha,r)$, le théorème classique d'existence d'un antécédent de Frobenius (proposition 4.7.6 de [5] qui est un cas particulier de la proposition 4.3), après changement de variable $x \mapsto x-\alpha$, montre qu'il existe une base $\mathcal{F}_\alpha$ du module différentiel $\mathcal{M} \otimes \mathcal{H}_\alpha$ et une matrice F_α, à coefficients dans l'anneau $\mathcal{H}_\alpha^\psi$ des éléments analytiques dans $D(\alpha^p, r^p)$ telle que :

a) $\mathrm{Mat}(\delta, \mathcal{F}_\alpha) = p\,(x-\alpha)^{p-1}\,F_\alpha((x-\alpha)^p + \alpha^p)$,

b) il existe une matrice $\mathcal{V}$, analytique dans le disque $|x - t_r^p| < R(\mathcal{M},r)^p$, telle que $F_\alpha = D(\mathcal{V})\,\mathcal{V}^{-1}$ et que la matrice $\mathcal{V}(t_r^p)$ soit inversible.

Définissons, comme d'habitude, les matrices $F_{\alpha,s}$ de $\mathcal{H}_\alpha$ par la formule :

$$F_{\alpha,0} = I \quad , \quad F_{\alpha,s+1} = D(F_{\alpha,s}) + F_{\alpha,s}\, F_\alpha$$

de telle sorte que $\mathcal{V}(x) = \sum\limits_{s=1}^{\infty} F_{\alpha,s}(t_r^p)\,(x - t_r^p)^s$. La condition b) dit alors que, pour tout nombre $\rho \langle R(\mathcal{M}, r)^p$, on a :

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} (\rho^s \, \|F_{\alpha,s}\|_{r^p}) = 0.$$

Avec nos hypothèses, ceci sera vrai, en particulier, pour $\rho = |p|\, r^p$. Or, pour $|x| \leqslant r$, on a :

$$|(x-\alpha)^p - x^p - \alpha^p| = \left| \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} x^i \, \alpha^{p-i} \right| \leqslant |p|\, r^p.$$

Il en résulte que la série :

$$M(x) = \sum_{s=0}^{\infty} F_{\alpha,s}(x^p) \; \frac{((x-\alpha)^p - x^p + \alpha^p)^s}{s!}$$

est convergente pour la norme $\|.\|_r$. En particulier, les coefficients de la matrice M appartiennent à $\mathcal{H}_\alpha$. Comme, de plus, on a $M(\alpha) = I$, la matrice M appartient à $\mathrm{Gl}(n, \overset{\circ}{\mathcal{H}}_\alpha)$ où $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_\alpha$ désigne le corps des fractions de $\mathcal{H}_\alpha$.

Maintenant, si x et y sont des points proches de t_r^p, l'unicité de la solution d'une équation différentielle avec condition initiale montre que :

$$\sum_{s=0}^{\infty} F_{\alpha,s}(y) \; \frac{(x-y)^s}{s!} = \mathcal{V}(x)\, \mathcal{V}^{-1}(y)$$

on a donc, pour x^p et donc $(x-\alpha)^p + \alpha^p$, suffisamment proche de t_r^p :

$$M(x) = \mathcal{V}((x-\alpha)^p + \alpha^p)\; \mathcal{V}^{-1}(x^p).$$

On en déduit que :

$$D\, M(x) = p\,(x-\alpha)^{p-1}\, F_\alpha((x-\alpha)^p + \alpha^p)\, M(x) - M(x)\, p\, x^{p-1}\, F_\alpha(x^p).$$

D'après la relation (2), cette formule exprime que, dans la base $\mathcal{G}$ obtenue à partir de la base $\mathcal{F}_\alpha$ par le changement de variable associé à la matrice $M^{-1}(x^p)$, le module différentiel $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ est ϕ-représenté par la matrice F_α. La proposition 5.2 dit alors qu'il existe une matrice H de $\mathrm{Gl}(n, \overset{\circ}{\mathcal{H}}{}_I^{\psi})$ telle que $F = H[F_\alpha]$.

Le théorème sur la décomposition des matrices en facteurs singuliers ([4] théorème 3.2 proposition 5.4.3) appliqué au disque $D(\alpha^p, r^p)$ et à son complémentaire nous donne deux matrices K et L telles que :

$$H = L\,K, \quad \|L\|_{r^p}\,\|L^{-1}\|_{r^p} = 1, \quad K \in \mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}_\alpha^\psi), \quad L \in \mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}'^{\psi}_{\alpha})$$

où $\mathcal{H}'_\alpha$ désigne l'ensemble des éléments analytiques ayant toutes leurs singularités dans $D(\alpha, r)$ et à l'infini. Maintenant, on constate que la matrice :

$$D(K)\,K^{-1} + K\,F_\alpha\,K^{-1} = K[F_\alpha] = L^{-1}[F] = -L^{-1}\,D(L) + L^{-1}\,F\,L$$

a des coefficients dans $\mathcal{H}_\alpha^\psi \cap (\mathcal{H}'^{\psi}_{\alpha} + \mathcal{H}_I^{A\psi}) = \mathcal{H}_I^{\{A-\alpha\}\psi}$ et vérifie :

$$\|K[F_\alpha]\|_{r^p} \leqslant \max(r^{-p}, \|L\|_{r^p}\;\|L^{-1}\|_{r^p}\;\|F\|_{r^p}) \leqslant |p|^{-1}\,r^{-p}$$

et, dans la base obtenue à partir de $\mathcal{F}_\alpha$ par la matrice $K(x^p)$, le module différentiel est ϕ-représenté par la matrice $K[F_\alpha]$.

Nous avons donc construit une base de $\mathcal{M}_I^{A-\alpha}$ qui a toutes les propriétés voulues. L'ensemble A n'était donc pas minimum. □

5.3. Recollement des Frobenius.

Nous commençons par un résultat de décomposition des matrices en facteurs singuliers qui généralise un peu le résultat classique.

LEMME. — *Soit $J = [\alpha, \beta]$ un intervalle, soit r un réel tel que $0 < r \leqslant \beta$ et soit H une matrice de $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}_J)$. Il existe deux matrices L et K telles que :*

1) $H = L\,K$,
2) *L appartient à* $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}_{[\alpha,\infty[})$,
3) *K appartient à* $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}_{]0,\beta]})$,
4) $\|K\|_r = \|K^{-1}\|_r = 1$.

Démonstration. — Après homothétie de rapport ρ, le théorème 3.2 de [4], affirme que, pour tout $\rho \in [\alpha, \beta]$, il existe une décomposition $H = L_1\,K_1$ avec $L_1 \in \mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}_{[\alpha,\infty[})$, $K_1 \in \mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}_{]0,\beta]})$ et $\|K_1\|_\rho = \|K_1^{-1}\|_\rho = 1$. Lorsque r appartient à l'intervalle J on obtient la proposition en prenant $\rho = r$.

Si $r < \alpha$, nous appliquons à nouveau ce même théorème à la matrice K_1. Il existe une matrice $L_2 \in \mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}_{]0,\infty[})$ et une matrice $K_2 \in \mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}_{]0,\beta]})$ vérifiant $\|K_2\|_r = \|K_2^{-1}\|_r = 1$ telles que $K_1 = L_2 K_2$. Le lemme est démontré avec $L = L_1 L_2$ et $K = K_2$. □

5.3. Proposition. — *On suppose que $R(\mathcal{M}, \rho) > |p|^{1/p} \rho$ pour tout nombre ρ de l'intervalle $[r_1, r_2]$. Soient I et J deux intervalles contenus dans $[r_1, r_2]$, d'intersection non vide, et soit r un nombre de l'intervalle I. Soit $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) une base de $\mathcal{M}_I$ (resp. $\mathcal{M}_J$) dans laquelle l'opérateur δ est ϕ-représenté, en tout point de I (resp. J), par la matrice F (resp. G). Il existe une base $\mathcal{E}$ de $\mathcal{M}_{I \cup J}$, telle que $\Theta_r(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 1$ et dans laquelle l'opérateur δ est Φ-représenté, en tout point de $I \cup J$, par une matrice E.*

Démonstration. — Nous faisons la démonstration dans le cas où $J = [\alpha, \beta]$, avec $r \leqslant \beta$, le cas $r \geqslant \alpha$ se traitant de manière analogue (ou en changeant x en $1/x$).

D'après la proposition 5.1, comme $I \cap J \neq \varnothing$, il existe une matrice H de $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}^{\psi}_{J \cap I})$ telle que $G = H[F]$. Nous appliquons le lemme à la matrice H et au nombre r^p . Nous obtenons ainsi une matrice L de $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}_{[\alpha^p, \infty[})$ et une matrice K de $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}_{]0,\beta^p]})$ telles que $H = L\,K$ et $\|K\|_{r^p}\, \|K^{-1}\|_{r^p} = 1$. Nous posons :

$$E = K[F] = L^{-1}[G]$$

et nous notons $\mathcal{E}$ la base obtenue à partir de la base $\mathcal{F}$ par le changement de bases associé à la matrice $K(x^p)$. Il vient :

$$\Theta_r(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \|K(x^p)\|_r\, \|K^{-1}(x^p)\|_r = \|K\|_{r^p}\, \|K^{-1}\|_{r^p} = 1$$

et $\mathrm{Mat}(\delta, \mathcal{E}) = p\, x^{p-1} E(x^p)$. Les coefficients de la matrices E appartiennent, comme ceux des matrices K,K^{-1} et F, à $\mathcal{H}^{\psi}_I$ et, comme ceux des matrices L,L^{-1} et G, à $\mathcal{H}^{\psi}_J$. Ils appartiennent donc à $\mathcal{H}^{\psi}_{I \cup J}$. Finalement, soit ρ un nombre de I (resp. J). Notons $\mathcal{V}_\rho$ la matrice associée à la matrice F (resp. G) et vérifiant la condition c) dans la définition de la ϕ-représentation. Comme la matrice K appartient à $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}^{\psi}_I)$ (resp. $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{H}^{\psi}_J)$), on constate que la matrice $K\,\mathcal{V}_\rho$ (resp. $L^{-1}\ \mathcal{V}_\rho$) peut être associée à la matrice E pour satisfaire cette condition. □

5.4. Antécédent global.

5.4. THÉORÈME. — *Supposons que* $R(\mathcal{M},\rho) > |p|^{1/p}\rho$ *pour tout nombre* ρ *de l'intervalle* $[r_1, r_2]$. *Il existe un unique* $\mathcal{H}^\psi$*-module différentiel* $\mathcal{N}$ *tel que :*

1) *il existe une base* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{M}$ *et une base* $\mathcal{F}^\psi$ *de* $\mathcal{N}$ *telles que :*

$$\mathrm{Mat}(\mathcal{M},\mathcal{F})(x) = p\,x^{p-1}\,\mathrm{Mat}(\mathcal{N},\mathcal{F}^\psi)(x^p).$$

2) *On a* $R(\mathcal{N},\rho) = R(\mathcal{M},\rho)^p$ *pour tout nombre* ρ *de l'intervalle* $[r_1, r_2]$.

De plus, si r *est un nombre de l'intervalle* $[r_1, r_2]$ *et* $\mathcal{E}$ *une base de* $\mathcal{M}$, *on peut choisir la base* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{M}$ *de telle sorte que :*

3) $\Theta_r(\mathcal{F},\mathcal{E}) \leqslant \dfrac{1+\varepsilon}{g(n)}\max(1, T_r(x\,\delta,\mathcal{E}))^{n-1}$.

4) $T_{r^p}(x\,\delta,\mathcal{F}^\psi) \leqslant |p|^{-1}$.

Démonstration. — Nous choisissons un vecteur cyclique m de $\mathring{\mathcal{M}}$ qui satisfait la condition de la proposition 3.4 pour le nombre r et la base $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des intervalles ouverts I de $[r_1, r_2]$ tels que le $\mathcal{H}_I$-module différentiel $\mathcal{M}_I$ possède une base $\mathcal{F}$ dans laquelle l'opérateur δ est ϕ-représenté, pour tout nombre de I, par une matrice F.

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles de $\mathcal{J}$ qui contiennent r et tels que l'on puisse choisir la matrice F de telle sorte que :

a) $\Theta_r(\mathcal{F},\mathcal{E}_{m,x}) = 1$,

b) $\|F\|_{r^p} \leqslant |p|^{-1}\,r^{-p}$.

Au vu de la proposition 4.4, le théorème sera démontré si nous prouvons que $\mathcal{I}$ contient l'intervalle $[r_1, r_2]$. On aura en effet, pour la base $\mathcal{F}$ correspondante :

$$\Theta_r(\mathcal{F},\mathcal{E}) = \Theta_r(\mathcal{F},\mathcal{E}_{m,x})\,\Theta_r(\mathcal{E}_{m,x},\mathcal{E}) \leqslant \frac{1+\varepsilon}{g(n)}\max(1, T_r(x\,\delta,\mathcal{E}))^{n-1}.$$

L'unicité du module différentiel $\mathcal{N}$ étant assuré par la proposition 5.1.

La proposition 4.3 affirme d'une part que $\mathcal{I}$ n'est pas vide et d'autre part, que tout point de l'intervalle $[r_1, r_2]$ est contenu dans un intervalle de $\mathcal{J}$.

D'après la proposition 5.3, si I est un intervalle de $\mathcal{I}$ et J un intervalle de $\mathcal{J}$ alors $I \cup J$ appartient à $\mathcal{I}$. En effet, avec les notations de cette proposition et en supposant que la matrice F satisfait les conditions a) et b) ci-dessus, on trouve immédiatement :

$$\|x\,p\;x^{p-1}\,E(x^p)\|_r \leqslant \Theta_r(\mathcal{E},\mathcal{F})\,\|x\,p\;x^{p-1}\,F(x^p)\|_r = |p|\,r^p\,\|F\|_{r^p} = 1$$

c'est-à-dire :

$$\|E\|_{r^p} = \|E(x^p)\|_r = r^{-p}\,|p|^{-1}\,\|x\,p\;x^{p-1}\,E(x^p)\|_r \leqslant r^{-p}\,|p|^{-1}$$

et aussi :

$$1 \leqslant \Theta_r(\mathcal{E},\mathcal{E}_{m,x}) \leqslant \Theta_r(\mathcal{E},\mathcal{F})\,\Theta_r(\mathcal{F},\mathcal{E}_{m,x}) = 1.$$

L'intervalle $[r_1, r_2]$ étant compact, il est recouvert par un nombre fini d'intervalles de $\mathcal{J}$ et il suffit d'un nombre fini d'unions du type précédent pour pouvoir conclure. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. AMICE, Les nombres p-adiques, P.U.F., collection SUP, 14 (1975).

[2] F. BALDASSARRI, B. CHIARELLOTTO, On Christol's theorem. A generalisation to systems of PDE's with logarithmic singularities depending upon parameters, Contemporary Mathematics, 133 (1992), 1-24.

[3] F. BALDASSARRI, B. CHIARELLOTTO, On André's transfer theorem, Contemporary Mathematics, 133 (1992), 25-38.

[4] G. CHRISTOL, Décomposition des matrices en facteurs singuliers. Application aux équations différentielles, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique 7-8 (1979/81) n^{o} 5, 17p.

[5] G. CHRISTOL, Modules différentiels et équations différentielles p-adiques, Queen's Papers in Pure and Applied Math. 66, Queen's University, Kingston (1983).

[6] G. CHRISTOL, Fonctions et éléments algébriques, Pacific J. of Math., 125 (1986), 1-37.

[7] G. CHRISTOL, Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers, Astérisque, 119-120 (1984), 151-168.

[8] G. CHRISTOL, B. DWORK, Effective p-adic bounds at regular singular points, Duke Math. J., 62 (1991), 689-720.

[9] G. CHRISTOL, B. DWORK, Differential modules of bounded spectral norm, Contemporary Mathematics, 133 (1992), 39-58.

[10] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques I, Annales de l'Institut Fourier, 43-5 (1993), 1545-1574.

[11] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II (en préparation).

[12] P. DELIGNE, Équations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture notes in Math., 163 (1970).

[13] B. DWORK, On p-adic differential equations II, Annals of Math., 98 (1973), 366-376.

[14] B. DWORK, P. ROBBA, On ordinary linear p-adic differential equations, Trans. of A.M.S., 231 (1977), 1-46.

[15] B. DWORK, P. ROBBA, Effective p-adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations, Trans. A.M.S., 259 (1980), 559-577.

[16] E.L. INCE, Ordinary differential equations, Dover Publ. Inc., New York, 1956.

[17] N. KATZ, Nilpotent connections and the monodromy theorem, I.H.E.S. Publ. Math., 39 (1970), 176-332.

[18] Z. MEBKHOUT, L. NARVAEZ, Sur les coefficients de de Rham-Grothendieck des variétés algébriques, "p-adic analysis" (Baldassarri, Bosch, Dwork) L.N. 1454 (1990) 267-309.

[19] P. MONSKY, Finitness of de Rham cohomology, Amer. J. of Math., 94 (1972), 237-245.

[20] P. ROBBA, Conjectures sur les équations différentielles p-adiques linéaires, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 12e année (1984/85) n° 2, 8p.

[21] P. ROBBA, Équations différentielles p-adiques, applications aux sommes exponentielles, Collection Actualités, Hermann, 1994.

Manuscrit reçu le 19 février 1993,
révisé le 29 novembre 1993.

G. CHRISTOL,
Université de Paris VI
Mathématiques
Tour 45-46, 5^e étage
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
et
B. DWORK,
Università di Padova
Dipartimento di Matematica
Via Belzoni 7
35131 Padova (Italy).