ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

TAOUFIK BOUZOUBAA

Compactification via le spectre réel d'espaces des classes de représentation dans $\mathbf{SO}(n,1)$

Annales de l'institut Fourier, tome 44, nº 2 (1994), p. 347-385
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_2_347_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 2 (1994), 347–385

COMPACTIFICATION VIA LE SPECTRE RÉEL D'ESPACES DES CLASSES DE REPRÉSENTATION DANS SO(n,1)

par
Taoufik BOUZOUBAA

Introduction.

La démarche et les constructions exposées ici sont dans la continuité du travail de Brumfiel pour la compactification de l'espace de Teichmüller d'une surface [Br1], [Br2]. La première compactification de cet espace est due à Thurston, où les points du bord sont les classes de mesures dans l'espace projectif des feuilletages mesurés sur la surface [FLP]. Dans [MS], Morgan et Shalen trouvent une nouvelle description des points du bord du compactifié de Thurston. Brumfiel lui-même avait été motivé par les travaux de ces derniers. Le trait commun est le suivant : aux points idéaux ajoutés dans la compactification sont associées des représentations du π_1 de la surface dans les groupes d'isométries d'arbres. Morgan et Shalen utilisaient des valuations pour compactifier, Brumfiel utilise les techniques du spectre réel.

Soit Γ un groupe de type fini non élémentaire. On note $D^n(\Gamma)$ l'ensemble des structures hyperboliques de dimension n sur Γ. Les points de $D^n(\Gamma)$ s'identifient aux classes d'équivalence des représentations $\Gamma \to \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(n,1)$, discrètes et fidèles, où deux représentations sont équivalentes si et seulement si elles sont conjuguées dans $\mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(n,1)$. L'ensemble $D^n(\Gamma)$ peut se réaliser comme fermé dans un espace semi-algébrique, espace qui admet une compactification naturelle par le spectre réel. On note $\overline{D^n(\Gamma)}^{\mathrm{sp}}$ le compactifié via le spectre réel de $D^n(\Gamma)$. L'objet de cet article est de décrire les points

Mots-clés : Structures hyperboliques – Arbres – Spectres réels – Compactification.
Classification A.M.S. : 14P10 – 51M10 – 05C05 – 57Q15 – 20G99.

ajoutés dans $\overline{D^n(\Gamma)}^{\mathrm{sp}}$. La compactification obtenue de cette manière permet d'interpréter «les points frontières» comme des représentations de Γ dans $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ où F (contenant $\mathbb{R}$) est un corps réel clos non archimédien. De là on peut retrouver, en utilisant une certaine construction d'arbre comme quotient de l'espace n-hyperbolique sur F, une interprétation semblable à celle de Morgan [M1] pour les points de sa compactification, $\widehat{D}^n(\Gamma)$, i.e. comme représentations dans le groupe des isométries d'un arbre.

Dans la section 1, on étend la construction d'arbre associé à un plan hyperbolique [Br2] au cas des espaces de dimension n quelconque, et on montre que l'on retrouve, de cette manière nettement plus géométrique, les arbres construits par Morgan [M1] au moyen des treillis unimodulaires. La section 2 traite la compactification via le spectre réel d'un semi-algébrique fermé. Par ailleurs des résultats, comme ceux de Shiota [Sh], permettent de voir le compactifié via le spectre réel d'un semi-algébrique réel localement fermé W, comme limite projective de toutes les compactifications semi-algébriques de W. Dans la section 3, on utilise l'arbre construit dans la section 1 et les techniques du spectre réel pour compactifier $D^n(\Gamma)$. Un point frontière de $\overline{D^n(\Gamma)}^{\mathrm{sp}}$, s'interprète ainsi comme une représentation de Γ dans le groupe d'isométries d'un $\mathbb{R}$-arbre T. L'action qui en découle est sans point fixe dans T, et est telle que le stabilisateur de tout segment non dégénéré de T est un sous groupe élémentaire de Γ. Ceci est en parallèle de ce qu'a fait Morgan dans [M1], avec comme différence la méthode de compactification et la construction d'arbre.

Les résultats ci-dessous font partie de notre thèse [Bo], dirigée par Michel Coste. Nous le remercions chaleureusement pour son aide. Nous remercions aussi l'Institut de Recherche Mathématique et Applications de Rennes, où cet article a été rédigé.

1. Géométrie hyperbolique et arbre.

On se fixe F un corps réel clos non archimédien, v une valuation sur F compatible avec l'ordre de F (c'est-à-dire $0 < a \leq a'$ implique $v(a) \geq v(a')$), $\Lambda = v(F^\times)$ le groupe de valuation, Θ l'anneau de valuation et m son idéal maximal. On convient que $v(0) = +\infty$.

Ici, on travaille avec le modèle «nappe d'hyperboloïde» de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}F^n$. Ce dernier est la nappe $x_0 > x_1$ de

$$q(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0x_1 + \frac{1}{2}(x_2^2 + \cdots + x_n^2) = -1.$$

La forme bilinéaire symétrique associée à q est :

$$x \circ y = \tfrac{1}{2}(x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n).$$

Par ailleurs, on fera appel au modèle « demi-espace supérieur » de l'espace hyperbolique :

$$UF^n = \{(y_1, \ldots, y_n) \in F^n \mid y_1 > 0\}.$$

L'application de changement de modèle est de la forme $\Psi : UF^n \to \mathbb{H}F^n$,

$$y = (y_1, \ldots, y_n) \mapsto \Big(\frac{\|y+e\|^2}{2y_1}, -\frac{\|y-e\|^2}{2y_1}, \sqrt{2}\,\frac{y_3}{y_1}, \ldots, \sqrt{2}\,\frac{y_n}{y_1}, \frac{\|y\|^2-1}{\sqrt{2}y_1}\Big),$$

où $e = (0, 1, 0, ..., 0) \in F^n$. L'application inverse est $\Psi^{-1} : \mathbb{H}F^n \to UF^n$,

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \nu\Big(1, \frac{x_0+x_1}{2}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{\sqrt{2}}\Big),$$

où $\nu = ((x_0 - x_1)/2 - x_n/\sqrt{2})^{-1}$.

On a aussi le modèle « disque unité » de l'espace hyperbolique :

$$BF^n = \{(y_1, \ldots, y_n) \in F^n \mid y_1^2 + \cdots + y_n^2 < 1\}.$$

On note :

$$\overline{B}F^n = \{(y_1, \ldots, y_n) \in F^n \mid y_1^2 + \ldots + y_n^2 \leq 1\}.$$

On note $\mathrm{SO}_F(n,1)$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_{n+1}(F)$ des matrices $(n+1)\times(n+1)$ qui préservent q et $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ le sous-groupe de $\mathrm{SO}_F(n,1)$ des matrices qui préservent $\mathbb{H}F^n$. Comme $\mathbb{H}F^n$ est l'une des deux composantes semi-algébriquement connexes de $\{x \in F^{n+1} \mid q(x) = -1\}$, il en résulte que $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ peut être décrit comme $\{g \in \mathrm{SO}_F(n,1) \mid g\xi_0 \in \mathbb{H}F^n\}$, où $\xi_0 = (1, -1, 0, \ldots, 0)$ appartient à $\mathbb{H}F^n$.

L'action de $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ sur $\mathbb{H}F^n$ est transitive puisque

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x_1 + 1/x_0 & 1/x_0 & -x_2/x_0 & \cdots & -x_n/x_0 \\ x_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et la matrice est dans $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ si $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ appartient à $\mathbb{H}F^n$.

Dans $\mathbb{H}F^n$, les droites hyperboliques sont les intersections de $\mathbb{H}F^n$ avec les sous-espaces vectoriels de F^{n+1} de dimension 2.

Si $x \neq y$, sont deux éléments de $\mathbb{H}F^n$, on note $L(x,y)$ la droite hyperbolique, intersection de $\mathbb{H}F^n$ avec le sous-espace vectoriel de F^{n+1} engendré par x et y, et $L_{x,y} \subset L(x,y)$ l'arc hyperbolique qui joint x à y.

Soient $1 \leq m \leq n$ et P_m l'ensemble des couples (x,V), où V est un sous-espace vectoriel de F^{n+1} de dimension m et $x \in V \cap \mathbb{H}F^n$. On a l'action $(x,V) \mapsto (gx, gV)$ de $g \in \mathrm{SO}_F^+(n,1)$ sur P_m. Cette action est transitive. En effet, si $(x,V),(x',V')$ appartient à P_m, alors les formes quadratiques $q_{|V}$ et $q_{|V'}$ sont de signatures $(m-1,1)$, et par suite V et V' sont isométriques avec x qui s'envoie sur x'. D'après le théorème de Witt, cette isométrie se prolonge en une isométrie de F^{n+1}.

Ceci affirme en particulier que $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ opère transitivement sur les droites hyperboliques de $\mathbb{H}F^n$. Si x appartient à L (où L est une droite hyperbolique passant par x), de même si x' appartient à L', alors il existe $g \in \mathrm{SO}_F^+(n,1)$ telle que $gx = x'$ et $gL = L'$. Une conséquence immédiate de ce qui vient d'être dit est : pour tous $x, y \in \mathbb{H}F^n$, on a $x \circ y \leq -1$ avec égalité si et seulement si $x = y$. Ceci se vérifie facilement en se ramenant à :

$$\xi_0, \xi = \big(\alpha, -\alpha^{-1}, 0, \ldots, 0\big) \in L_0 = L(\xi_0, \xi) = \mathbb{H}F^n \cap (x_0, x_1).$$

Dans le cas réel ($F = \mathbb{R}$), la distance hyperbolique dans $\mathbb{H}^n$ est donnée par la formule

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(x,y) = -x \circ y$$

ou encore par

$$d_{\mathbb{H}}(x,y) = \log\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big), \quad \text{avec} \quad t = \frac{\sqrt{-1 - x \circ y}}{\sqrt{1 - x \circ y}}.$$

C'est cette dernière expression de la métrique qu'on utilisera pour construire une pseudo-métrique dans $\mathbb{H}F^n$.

Soit D l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}F^n \times \mathbb{H}F^n & \longrightarrow & F \\ (x,y) & \longmapsto & D(x,y) = \dfrac{1+t}{1-t}, \end{array}$$

où $t = \sqrt{-1 - x \circ y}/\sqrt{1 - x \circ y}$ $(0 \leq t \leq 1)$. L'application D vérifie les propriétés suivantes :

1) D est $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$-invariante.

2) $D(x,y) \geq 1$ avec égalité si et seulement si $x = y$, $D(\xi_0, \xi) = \sup\{\alpha, \alpha^{-1}\}$ pour tout $\xi = (\alpha, -\alpha^{-1}, 0, \ldots, 0) \in L_0$.

3) $D(x,y)D(y,z) \geq D(x,z)$ avec égalité si et seulement si y est dans l'arc hyperbolique joignant x à z.

La fonction D et la valuation v définissent une pseudo-métrique dans $\mathbb{H}F^n$ à valeurs dans $\Lambda_+ = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda \geq 0\}$. Soit $d_v : \mathbb{H}F^n \times \mathbb{H}F^n \to \Lambda_+$ telle que $(x,y) \mapsto d_v(x,y) = -v(D(x,y))$. La compatibilité de v avec l'ordre de F entraîne que $v_{|\mathbb{Q}} = 0$ et $v(1+t) = 0$ pour tout $0 \leq t \leq 1$. D'où l'expression simplifiée de d_v :

$$\begin{aligned} d_v(x,y) &= -v\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big) = -v\Big(\frac{(1+t)^2}{1-t^2}\Big) \\ &= -v\Big(\frac{1}{1-t^2}\Big) = -v(1 - x \circ y) = -v(x \circ y). \end{aligned}$$

Soit $\sim$ la relation d'équivalence :

$$x, y \in \mathbb{H}F^n, \quad x \sim y \Longleftrightarrow x \circ y \in \Theta^\times \qquad (\Longleftrightarrow x \circ y \in \Theta).$$

On note T_vF^n l'espace quotient $\mathbb{H}F^n/\sim$. Le couple (T_vF^n, d_v) est un espace Λ-métrique, au sens que $d_v([x],[y]) = -v(x \circ y)$ définit une métrique sur T_vF^n à valeurs dans Λ_+. Dans ce qui suit, on va montrer que T_vF^n est un Λ-arbre.

1.1. Définitions (cf. [AB]). — Soit T un espace Λ-métrique.

1) Un *segment fermé* de Λ est une partie de la forme :

$$[\lambda_1, \lambda_2] = \big\{\lambda \in \Lambda \mid \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2\big\}.$$

Un *segment* de Λ est une *partie convexe* de Λ(c'est-à-dire une partie S de Λ vérifiant $\lambda_1, \lambda_2 \in S \Rightarrow [\lambda_1, \lambda_2] \subset S$) dont l'intersection avec tout segment fermé de Λ est ou bien un segment fermé de Λ, ou bien l'ensemble vide.

2) Un *segment* (fermé) de T est une partie de T isométrique à un segment (fermé) de Λ.

3) T est un Λ-*arbre* s'il vérifie les trois conditions suivantes :

(i) Deux points de T déterminent un segment fermé unique de T. Les deux points sont appelés les *extrémités* de ce segment.

(ii) Si S_1 et S_2 sont deux segments fermés avec une même extrémité, alors $S_1 \cap S_2$ est un segment fermé.

(iii) Si S_1 et S_2 sont deux segments fermés avec $S_1 \cap S_2 = \{p\}$ et si p est une extrémité de S_1 et de S_2, alors $S_1 \cup S_2$ est un segment fermé. □

On propose ici une preuve purement algébrique de la structure d'arbre de T_vF^n. Pour cela on passe par le modèle «demi-espace supérieur» UF^n. La métrique dans UF^n est donnée par

$$d(x,y) = -v\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big)$$

avec $t = \sqrt{\dfrac{-1+k(x,y)}{1+k(x,y)}}$ et $k(x,y) = 1 + \dfrac{\|x-y\|^2}{2x_1y_1}$, ou encore par

$$d(x,y) = -v\big(k(x,y)\big).$$

Remarquons que l'on a $k(x,y) = -\Psi(x) \circ \Psi(y)$ pour tous $x, y \in UF^n$ et par suite $d(x,y) = d_v(\Psi(x), \Psi(y))$. Ainsi Ψ réalise une isométrie de (T_vF^n, d_v) sur $(UF^n/\sim, d)$, où $x \sim y$ équivaut à $k(x,y) \in \Theta^\times$.

L'espace $UF^n/\sim$ s'identifie à son tour à un espace Λ-métrique dont la structure d'arbre découle facilement.

Pour $\lambda \in \Lambda$, soit :

$$\Theta^{n-1}(\lambda) = \big\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in F^{n-1} \mid v(x_1) \geq \lambda, \dots, v(x_{n-1}) \geq \lambda\big\}.$$

Alors $\Theta^{n-1}(\lambda)$ est un sous-groupe additif de F^{n-1}.

1.2. Définitions

• Pour tout corps valué F, on définit l'ensemble :

$$\mathcal{P}F^n = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{\lambda\} \times F^{n-1}/\Theta^{n-1}(-\lambda).$$

Si $\lambda \leq \lambda'$ appartiennent à Λ, on note $\pi_{|\lambda'}$ l'image de $\pi \in F^{n-1}/\Theta^{n-1}(-\lambda)$ par la projection $F^{n-1}/\Theta^{n-1}(-\lambda) \to F^{n-1}/\Theta^{n-1}(-\lambda')$.

• Dans $\mathcal{P}F^n$, on définit la relation d'ordre :

$$(\lambda, \pi) \prec (\lambda', \pi') \Longleftrightarrow \lambda \leq \lambda' \text{ et } \pi_{|\lambda'} = \pi'. \qquad \square$$

Pour cet ordre, le sup de deux éléments quelconques existe.

1.3. Proposition.

1) *Soient $(\lambda_1, \pi_1), (\lambda_2, \pi_2)$ deux éléments de $\mathcal{P}F^n$. Alors il existe un plus petit élément $\lambda \in \Lambda$ tel que $\lambda_1 \leq \lambda$, $\lambda_2 \leq \lambda$ et $\pi_{1|\lambda} = \pi_{2|\lambda}$.*

2) *L'application*

$$\begin{array}{rcl} d : \mathcal{P}F^n \times \mathcal{P}F^n & \longrightarrow & \Lambda_+ \\ \big((\lambda_1, \pi_1), (\lambda_2, \pi_2)\big) & \longmapsto & 2\lambda - \lambda_1 - \lambda_2, \end{array}$$

définit une Λ-métrique sur $\mathcal{P}F^n$.

Démonstration. — Le nombre

$$\lambda = \sup_{1\leq j\leq n-1} \{-v(\pi_{1j} - \pi_{2j}), \lambda_1, \lambda_2\}$$

ne dépend que de $\pi_1 = \overline{(\pi_{11}, \ldots, \pi_{1n-1})} \in F^{n-1}/\Theta^{n-1}(-\lambda_1)$ et de $\pi_2 = \overline{(\pi_{21}, \ldots, \pi_{2n-1})} \in F^{n-1}/\Theta^{n-1}(-\lambda_2)$, et vérifie 1). Ainsi $(\lambda, \pi_{1|\lambda})$ est le sup de (λ_1, π_1) et (λ_2, π_2), ce qui montre 1).

Le point non trivial dans 2) est l'inégalité triangulaire. Soient (λ_i, π_i), $i = 1, 2, 3$ avec $\pi_i = \overline{(\pi_{ij})}$, $j = 1, \ldots, n-1$, et

$$\begin{aligned}(\lambda, \pi_{1|\lambda}) &= \sup\{(\lambda_1, \pi_1), (\lambda_2, \pi_2)\},\\ (\lambda', \pi_{2|\lambda'}) &= \sup\{(\lambda_2, \pi_2), (\lambda_3, \pi_3)\},\\ (\lambda", \pi_{1|\lambda"}) &= \sup\{(\lambda_1, \pi_1), (\lambda_3, \pi_3)\}.\end{aligned}$$

On veut montrer que $2\lambda'' - \lambda_1 - \lambda_3 \leq 2\lambda - \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda' - \lambda_2 - \lambda_3$, soit encore $\lambda'' \leq \lambda + \lambda' - \lambda_2$. On a :

$$-\lambda_1 \geq -\lambda - \lambda' + \lambda_2, \quad -\lambda_3 \geq -\lambda - \lambda' + \lambda_2.$$

D'autre part, pour tout $j = 1, \ldots, n-1$, on a :

$$\begin{aligned}v(\pi_{1j} - \pi_{3j}) &\geq \inf\{v(\pi_{1j} - \pi_{2j}), v(\pi_{2j} - \pi_{3j})\}\\ &\geq \inf\{-\lambda, -\lambda'\} \geq -\lambda - \lambda' + \lambda_2.\end{aligned}$$

D'où $\inf_{1\leq j\leq n-1}\{v(\pi_{1j} - \pi_{3j}), -\lambda_1, -\lambda_3\} \geq -\lambda - \lambda' + \lambda_2$, ou encore

$$\lambda + \lambda' - \lambda_2 \geq \sup_{1\leq j\leq n-1} \{-v(\pi_{1j} - \pi_{2j}), \lambda_1, \lambda_3\} = \lambda''. \qquad \square$$

Soient $x_i = (\lambda_i, \pi_i)$, $i = 1, 2$, et $x = (\lambda, \pi) = \sup\{x_1, x_2\}$. De la définition de d, on tire :

$$d(x_1, x_2) = d(x_1, x) + d(x_2, x).$$

Pour $i = 1, 2$, l'ensemble $[x_i, x] = \{y \in \mathcal{P}F^n \mid x_i \prec y \prec x\}$ est un segment fermé de $\mathcal{P}F^n$ puisque $[x_i, x] = \{(\lambda_0, \pi_{1|\lambda_0}) \mid \lambda_i \leq \lambda_0 \leq \lambda\}$. Comme x est aussi le sup de deux éléments quelconques $y_1 \in [x_1, x]$ et $y_2 \in [x_2, x]$, l'ensemble $[x_1, x] \cup [x_2, x]$ est un segment fermé de $\mathcal{P}F^n$, d'extrémités $\{x_1, x_2\}$. On le note $[x_1, x_2]$.

1.4. PROPOSITION.

1) *Tout segment fermé de $\mathcal{P}F^n$ est de la forme $[x_1, x_2]$, où $\{x_1, x_2\}$ sont ses extrémités.*

2) *$(\mathcal{P}F^n, d)$ est un Λ-arbre.*

Démonstration. — Le 1) est immédiat à partir de l'équivalence suivante : quels que soient $x_i = (\lambda_i, \pi_i) \in \mathcal{P}F^n$, $i = 1, 2, 3$, on a

$$(*) \qquad d(x_1, x_3) = d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \Longleftrightarrow x_2 \in [x_1, x_3].$$

Démonstration de (*).

Soient $x' = (\lambda', \pi_{1|\lambda'}) = \sup\{x_1, x_2\}$, $x'' = (\lambda'', \pi_{2|\lambda''}) = \sup\{x_2, x_3\}$ et $x = (\lambda, \pi_{1|\lambda}) = \sup\{x_1, x_3\}$. Remarquons que les majorants d'un point de $\mathcal{P}F^n$ forment un segment isométrique à Λ_+.

Supposons par exemple $x' \prec x''$: alors $x \prec x''$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} d(x_1, x_3) = d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \\ &\Longleftrightarrow 2\lambda - \lambda_1 - \lambda_3 = 2\lambda'' - \lambda_1 - \lambda_3 + 2(\lambda' - \lambda_2) \\ &\Longleftrightarrow \lambda = \lambda'' + (\lambda' - \lambda_2) \\ &\Longleftrightarrow \lambda = \lambda'' \text{ et } \lambda' = \lambda_2 \\ &\Longleftrightarrow x = x'' \text{ et } x' = x_2 \\ &\Longleftrightarrow x_2 \in [x_1, x_3]. \end{aligned}$$

Le 1) de la proposition entraîne le (i) de la définition d'un arbre.

Soient $S_1 = [x_1, x] \cup [x_2, x]$, $S_2 = [x_1, x'] \cup [x'_2, x']$:

• $x \neq x' \Rightarrow x \prec x'$ ou $x' \prec x$, et dans ce cas $S_1 \cap S_2 = [x_1, \inf\{x, x'\}]$.

• $x = x' \Rightarrow [x_2, x] \cap [x'_2, x'] = [\sup\{x_2, x'_2\}, x]$ et par suite $S_1 \cap S_2 = [x_1, x] \cup [\sup\{x_2, x'_2\}, x] = [x_1, \sup\{x_2, x'_2\}]$.

Ce qui démontre (ii).

Si $S_1 \cap S_2 = \{x_1\}$, alors $\inf\{x, x'\} = x_1$ et donc x'_2 ou x_2 est inférieur à x_1 ; de même $x_1 \prec \sup\{x_2, x'_2\}$. D'où $S_1 \cup S_2 = [x_2, x'_2]$. D'où (iii). □

L'identification de $UF^n/\sim$ à $\mathcal{P}F^n$ se fait au moyen de l'application

$$\Psi' : \big[(y_1, \ldots, y_n)\big] \longmapsto \big(-v(y_1), \overline{(y_2, \ldots, y_n)}\big).$$

L'application Ψ' est bien définie et c'est une isométrie puisque

$$\begin{aligned} 2 \sup_{2\le j\le n} \Big\{-v(x_j-y_j), -v(x_1), -v(y_1)\Big\} + v(x_1) + v(y_1) \\ = -v\Big(1 + \frac{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}{2x_1y_1}\Big) = -v(k(x,y)). \end{aligned}$$

Maintenant, si $\nu = ((x_0-x_1)/2 - x_n/\sqrt{2})^{-1}$,

$$\Psi' \circ \Psi^{-1} : \big[(x_0, x_1, \ldots, x_n)\big] \longmapsto \Big(-v(\nu), \nu \cdot \overline{\Big(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{\sqrt{2}}\Big)}\Big),$$

identifie T_vF^n à $\mathcal{P}F^n$.

Notons que $\Psi' \circ \Psi^{-1}$ envoie le projeté dans T_vF^n de chaque arc hyperbolique $L_{x,y} \subset \mathbb{H}F^n$ sur le segment

$$\Big[\Psi' \circ \Psi^{-1}\big([x]\big), \Psi' \circ \Psi^{-1}\big([y]\big)\Big] \subset \mathcal{P}F^n.$$

En effet, en se ramenant à $x = (1, -1, 0, \ldots, 0)$ et $y = (\alpha_0, -\alpha_0^{-1}, 0, \ldots, 0)$, on obtient

$$L_{x,y} = \Big\{(\alpha, -\alpha_0^{-1}, 0, \ldots, 0) \mid \inf\{1, \alpha_0\} \le \alpha \le \sup\{1, \alpha_0\}\Big\}$$

et par suite :

$$\Psi' \circ \Psi^{-1}\big([(\alpha, -\alpha^{-1}, 0, \ldots, 0)]\big) = \Big(-|v(\alpha)|, \overline{\Big(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}, 0, \ldots, 0\Big)}\Big).$$

On a $v\Big(\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} - \dfrac{\alpha_0^2-1}{\alpha_0^2+1}\Big) \ge |v(\alpha)|$ et $v\Big(\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}\Big) \ge 0$, et par suite :

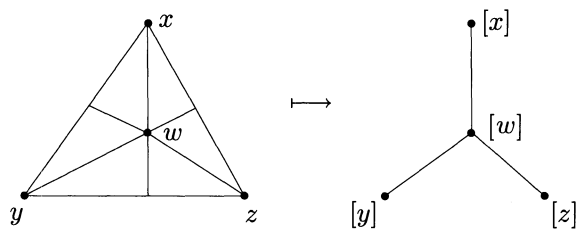
$$\Big(-|v(\alpha_0)|, \overline{\Big(\frac{\alpha_0^2-1}{\alpha_0^2+1}, 0, \ldots, 0\Big)}\Big) \prec \Big(-|v(\alpha)|, \overline{\Big(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}, 0, \ldots, 0\Big)}\Big) \prec (0,0).$$

Par conséquent :

$$\Psi' \circ \Psi^{-1}\big(\{[\xi] \mid \xi \in L_{x,y}\}\big) = \Big[\Big(-|v(\alpha_0)|, \overline{\Big(\frac{\alpha_0^2-1}{\alpha_0^2+1}, 0, \ldots, 0\Big)}\Big), (0,0)\Big]. \quad \square$$

Remarquons que si x et y sont deux points de $\mathbb{H}F^n$ tels que $[x] = [y] \in T_vF^n$, alors pour tout autre point z de $\mathbb{H}F^n$, les projetés dans T_vF^n des deux arcs hyperboliques $L_{z,x}$ et $L_{z,y}$ coïncident. Par conséquent,

le triangle hyperbolique reliant x, y et z se projette sur le segment $[[z],[x]]$. De façon plus générale on a le calopse des triangles hyperboliques sur les tripodes de T_vF^n (voir figure ci-dessous), puisque le centre d'un triangle hyperbolique est à une D-distance inférieure à $\sqrt{3}$ et $v(\sqrt{3}) = 0$.



On obtient ainsi le résultat suivant :

1.5. Théorème. — *L'espace métrique (T_vF^n, d_v) est un Λ-arbre. Un segment fermé de T_vF^n d'extrémités $\{[x],[y]\}$ est le projeté dans T_vF^n de l'unique arc hyperbolique dans $\mathbb{H}F^n$ joignant x à y.* □

Le groupe $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ agit sur T_vF^n par des isométries, et l'action est transitive. On étudie dans ce qui suit la structure de ces isométries $g : [x] \mapsto g[x] = [gx]$.

Il est bien connu dans le cas réel ($F = \mathbb{R}$) que chaque transformation de Mœbius Φ de la boule unité B^n, applique $\overline{B}^n$ sur $\overline{B}^n$ et possède au moins un point fixe dans $\overline{B}^n$ en vertu du théorème de point fixe de Brouwer. Cependant, comme Φ est semi-algébrique, ceci reste vrai pour n'importe quel corps réel clos, d'après le principe de Tarski-Seidenberg. Ainsi, dans le modèle hyperbolique BF^n, chaque isométrie admet au moins un point fixe $\overline{B}F^n$. D'autre part, ceci correspond dans le modèle $\mathbb{H}F^n$ à : si g est dans $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$, alors g fixe un point dans $\mathbb{H}F^n$ ou bien une droite sur l'hypercône $q = 0$. Plus précisément, on a la description suivante :

1.6. Proposition et définition. — *Soit $g \in \mathrm{SO}_F^+(n,1)$, $g \neq \mathrm{Id}$. Alors on est dans l'un des trois cas :*

1) *g fixe au moins un point dans $\mathbb{H}F^n$. On dit alors que g est* elliptique.

2) *g fixe une seule droite sur $q = 0$, et aucun point dans $\mathbb{H}F^n$. On dit alors que g est* parabolique.

3) *g fixe exactement deux droites sur $q = 0$, et aucun point dans $\mathbb{H}F^n$. On dit alors que g est* hyperbolique.

Démonstration. — Soit $g \in \mathrm{SO}_F^+(n,1)$ telle que l'on ait $g(x) \neq x$ pour tout $x \in \mathbb{H}F^n$. Alors g fixe au moins une droite sur $q = 0$. Maintenant, soient $u, v \in F^{n+1}$ non colinéaires tels que $q(u) = q(v) = 0$, $g(u) = \alpha u$ et $g(v) = \beta v$, avec $\alpha, \beta \in F^\times$. Alors on a $u \circ v = g(u) \circ g(v) = \alpha\beta u \circ v$. On a certainement $u \circ v \neq 0$, car puisque q est de signature $(n,1)$ (F est réel clos), son indice de Witt (c'est-à-dire la dimension maximale d'un sous-espace totalement isotrope) est égal à 1. D'où $\alpha\beta = 1$. Comme g préserve $\mathbb{H}F^n$, le cas $\alpha = \beta = -1$ est exclus. Le cas $\alpha = \beta = 1$ entraîne que g est l'identité sur le sous-espace propre associé à la valeur propre $\alpha = 1$, lequel intersecte $\mathbb{H}F^n$. Donc $\alpha, \beta \neq \pm 1$ et par conséquent g fixe au plus deux droites propres associées aux valeurs propres α et α^{-1}, avec $\alpha \neq \pm 1$ et $\alpha > 0$. □

1.7. Proposition. — *Tout élément parabolique de* $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ *admet un point fixe dans* $T_v F^n$.

Démonstration. — Soient $g \in \mathrm{SO}_F^+(n,1)$ parabolique, $u_0 \in F^{n+1}$, $\alpha \in F^\times$ avec $q(u_0) = 0$ et $g(u_0) = \alpha u_0$. Choisissons $\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$ une base de F^{n+1} avec $q(u_1) = 0$, $u_0 \circ u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_i \circ u_j = \delta_{ij}$ pour $0 \leq i \leq n$ et $2 \leq j \leq n$. Soit :

$$g(u_1) = \gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_n u_n.$$

Alors de la relation $u_0 \circ u_1 = g(u_0) \circ g(u_1)$ on tire $\gamma_1 = \alpha^{-1}$. On a $\gamma_0 \neq 0$, car si γ_0 était nul, on aurait $\gamma_2 = \cdots = \gamma_n = 0$ puisque $q(g(u_1)) = 0$, ce qui correspond au cas hyperbolique. La matrice de g dans la base $\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$ est donc de la forme

$$\begin{bmatrix} \alpha & \gamma_0 & X \\ 0 & \alpha^{-1} & Y \\ 0 & Z & A \end{bmatrix}$$

avec $\gamma_0 \neq 0$, $A \in \mathrm{SO}(n-1)$ et ${}^tZ = (\gamma_2, \ldots, \gamma_n)$.

On a $Y = 0$, car $u_0 \circ u_1 = 0$ pour $i \geq 2$. On a ensuite, $\alpha = 1$ car si $\alpha \neq 1$, alors g possède un vecteur propre de valeur propre α^{-1}, puisque

$$\det(g - \alpha^{-1}\,\mathrm{Id}) = \det \begin{bmatrix} \alpha - \alpha^{-1} & \gamma_0 & X \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z & A \end{bmatrix} = 0$$

et ce vecteur propre est forcément sur $q = 0$ puisque g préserve q, ce qui correspond au cas hyperbolique.

Maintenant, soit $w_a = a u_0 - a^{-1} u_1$, avec $a > 0$. Alors w_a est un élément de $\mathbb{H}F^n$ et $g(w_a) \circ w_a = \frac{1}{2}(a^{-2}\gamma_0 - 2)$. Ainsi g fixe tout élément $[w_a] \in T_v F^n$ où a est tel que $a^{-2}\gamma_0 \in \Theta$. □

1.8. PROPOSITION. — *Soit g un élément de $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ tel que g fixe un point dans T_vF^n. Alors* trace g *appartient à Θ.*

La démonstration se fait en appliquant plusieurs fois le lemme suivant :

1.9. LEMME. — *Soit $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ un élément de F^{n+1} tel que $q(y) \in \Theta$ et $y_1 - y_0 \in \Theta$. Alors y appartient à Θ^{n+1}.*

Démonstration. — Supposons que l'on ait :

1) $$y_0y_1 + \tfrac{1}{2}(y_2^2 + \cdots + y_n^2) \in \Theta,$$

2) $$y_1 - y_0 \in \Theta.$$

Deux cas sont à distinguer :

• $v(y_0) + v(y_1) \geq 0$. D'après 1), on a $v(y_2) \geq 0, \ldots, v(y_n) \geq 0$. D'après 2), ni $v(y_0)$, ni $v(y_1)$ n'est négatif.

• $v(y_0) + v(y_1) < 0$. D'après 1), on a $v(y_0y_1) = v(\frac{1}{2}(y_2^2 + \ldots + y_n^2))$. D'après 2), on a $v(y_0) = v(y_1)$. Ainsi $2v(y_0) = 2\inf\{v(y_2), \ldots, v(y_n)\}$.

Pour $i = 1, \ldots, n$, soit τ_i l'image de y_i/y_0 dans le corps résiduel $k = \Theta/m$. Alors $\tau_1 + \frac{1}{2}(\tau_2^2 + \cdots + \tau_n^2) = 0$ d'après 1) et $\tau_1 - 1 = 0$ d'après 2). Ceci ne peut être vrai dans un corps réel clos, ce qui est le cas de k. Il en résulte que l'on a $v(y_0) + v(y_1) \geq 0$ et donc y est un élément de Θ^{n+1}. □

Démonstration de la proposition 1.8. — Soit $g = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq 1}$ comme dans la proposition. L'action transitive de $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ sur T_vF^n et l'invariance de la trace par conjugaison, permettent de supposer que $g([\xi_0]) = [\xi_0]$, où $\xi_0 = (1, -1, 0, ..., 0)$, c'est-à-dire $g(\xi_0) \circ \xi_0 \in \Theta$. On a :

$$g(\xi_0) \circ \xi_0 = \frac{1}{2}\big((a_{10} - a_{11}) - (a_{00} - a_{01})\big) \in \Theta, \quad q(g(\xi_0)) = -1 \in \Theta.$$

D'où, avec le lemme 1.9,

$$g(\xi_0) = (a_{00} - a_{01}, a_{10} - a_{11}, \ldots, a_{n0} - a_{n1}) \in \Theta^{n+1}.$$

Si J est la transformation $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_0, x_2, \ldots, x_n)$, ${}^tgJg = J$ entraîne que ${}^tg$ appartient à $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ et par conséquent les lignes de g vérifient :

$$a_{i0}a_{i1} + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}^2 = 0, \qquad i = 1, 2\,;$$

$$a_{i0}a_{i1} + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}^2 = \frac{1}{2}, \qquad 2 \leq i \leq n.$$

En appliquant à nouveau le lemme pour chaque i, on obtient que a_{ij} est un élément de Θ pour tout j. Ce qui montre que g est dans $\mathrm{SO}_\Theta^+(n,1)$. □

1.10. PROPOSITION. — *Soit $g \neq \mathrm{Id}$ un élément hyperbolique de $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ tel que g laisse invariante la droite hyperbolique $L_0 = \mathbb{H}F^n \cap (x_0, x_1)$. Alors g est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

où $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ et la seconde matrice est dans $\mathrm{SO}_\Theta^+(n,1)$.

Démonstration. — Soit $g = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$ comme dans la proposition. Alors ses deux droites fixes sur $q = 0$ sont de directions e_0 et e_1 où $\{e_i\}_{i=0,\dots,n}$ est la base canonique de F^{n+1}. Il en résulte qu'il existe $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ tel que $g(e_0) = \alpha e_0$ et $g(e_1) = \alpha^{-1} e_1$ (voir la démonstration de la proposition 1.6). Pour $j = 2, \dots, n$, des relations

$$0 = e_j \circ e_0 = g(e_j) \circ g(e_0) = \tfrac{1}{2}\alpha a_{1j},$$
$$0 = e_j \circ e_1 = g(e_j) \circ g(e_1) = \tfrac{1}{2}\alpha^{-1} a_{0j},$$

on tire $a_{1j} = a_{0j} = 0$. Alors, de $q(e_j) = q(g(e_j))$, on tire $\sum_{i=2}^{n} a_{ij}^2 = 1$ et par suite $2 \inf_{2 \leq i \leq n} (v(a_{ij})) = 0$. D'où le résultat. □

Maintenant, soit $g \in \mathrm{SO}_F^+(n,1)$, hyperbolique sans point fixe dans $T_v F^n$. Alors g laisse invariante une droite hyperbolique unique, $L_g \subset \mathbb{H}F^n$. Cette droite est obtenue comme intersection de $\mathbb{H}F^n$ avec le sous-espace vectoriel engendré par les deux droites sur $q = 0$, fixes par g. Dans $T_v F^n$, g laisse invariant alors le projeté $\pi(L_g)$ de L_g. L'action de $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ sur les droites hyperboliques est transitive, donc $\pi(L_g)$ est isométrique à $\pi(L_0)$, lequel est isométrique à Λ, puisque $L_0 = \{(\alpha, -\alpha^{-1}, 0, \dots, 0) \mid \alpha > 0\}$.

Si $L_g = L_0$ alors, pour tout $\xi \in L_g$, on a $d_v([\xi], g[\xi]) = |v(\alpha_g)|$, où α_g est celui de la proposition 1.10. Si $L_g \neq L_0$, soit $h \in \mathrm{SO}_F^+(n,1)$ tel que $h(L_g) = L_0$. Alors, pour tout $x \in L_g$, on a $d_v([x], g[x]) = |v(\alpha_{hgh^{-1}})|$. Il en résulte que g est une translation sur $\pi(L_g)$ et la distance de translation est $|v(\alpha_{hgh^{-1}})|$, où $h \in \mathrm{SO}_F^+(n,1)$ avec $h(L_g) = L_0$. Il est facile de voir, en remontant à $\mathbb{H}F^n$, que $|v(\alpha_{hgh^{-1}})| = \inf_{q \in T_v F^n} d_v(q, gq)$, et par suite :

$$\pi(L_g) = \Big\{ p \in T_v F^n \mid d_v(p, gp) = \inf_{q \in T_v F^n} d_v(q, gq) \Big\}.$$

Remarquons que le segment $\pi(L_g)$ est l'axe de g, sur lequel g est une translation de distance de translation notée $\tau_g = \inf_{q \in T_v F^n} d_v(q, gq)$ (voir [AB], chap. II). Le résultat suivant donne le lien de τ_g avec la trace de g.

1.11. Proposition. — *Soit g un élément de $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$. Alors on a*

$$\tau_g = \max(0, -v(\operatorname{trace} g)).$$

Démonstration. — Soit $g \in \mathrm{SO}_F^+(n,1)$. Avec les propositions 1.7 et 1.8, le cas qui reste est celui de g hyperbolique sans point fixe dans $T_v F^n$. Dans ce cas, g est conjuguée dans $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

avec $|v(\alpha)| = \tau_g$, (Proposition 1.10).

On a donc $\operatorname{trace} g = \alpha + \alpha^{-1} + \operatorname{trace} A$, avec $\operatorname{trace} A \in \Theta$. Il en résulte $v(\alpha + \alpha^{-1}) < 0$ et $v(\operatorname{trace} A) \geq 0$ et donc $v(\operatorname{trace} g) = v(\alpha + \alpha^{-1}) = \inf\{v(\alpha), v(\alpha^{-1})\}$, d'où $-v(\operatorname{trace} g) = |v(\alpha)| = \tau_g$. □

Terminons cette section en donnant une comparaison avec l'arbre T_v^n construit par J.W. Morgan. Aux valuations $v : F^\times \to \Lambda$ et $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$, est associé un Λ-arbre T_v^n. Les points de T_v^n sont les treillis unimodulaires de F^{n+1}, c'est-à-dire les Θ-modules libres $L \subset F^{n+1}$ de rang $n+1$, tels que

$$L = L^* = \{x \in F^{n+1} \mid x \circ L \subset \Theta\}.$$

La distance $d(L, L') \in \Lambda_+$ est définie comme suit. Si $L, L' \in T_v^n$, alors $L/L \cap L'$ est un Θ-module cyclique et par suite $L/L \cap L' \simeq \Theta/\alpha\Theta$. On pose :

$$d(L, L') = v(\alpha).$$

Le groupe $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ agit transitivement sur T_v^n et, pour tout $g \in \mathrm{SO}_F^+(n,1)$, l'application $T_v^n \to T_v^n$ définie par $L \mapsto g \cdot L$ est une isométrie. Pour les différents détails on peut se référer à [M1].

1.12. Définition. — *Dans F^{n+1}, on considère les sous-ensembles :*

$$L(x) = \{y \in F^{n+1} \mid q(y) \in \Theta \text{ et } x \circ y \in \Theta\}. \qquad \square$$

Il est clair que pour tout $g \in \mathrm{SO}_F^+(n,1)$, on a $g \cdot L(x) = L(g(x))$.

1.13. Proposition. — *On a $L \in T_v^n$ si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{H}F^n$ tel que $L = L(x)$.*

Démonstration. — Le groupe $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ agit transitivement sur $\mathbb{H}F^n$ et T_v^n. Il suffit donc de montrer que $L(\xi_0)$ appartient à T_v^n, où $\xi_0 = (1,-1,0,\dots,0)$. Le lemme 1.9 entraîne que $L(\xi_0) \subset \Theta^{n+1}$; l'autre inclusion est claire. D'où $L(\xi_0) = \Theta^{n+1} = \Theta^{n+1*} = L(\xi_0)^*$. □

Pour tout $x, y \in \mathbb{H}F^n$, l'équivalence suivante est immédiate à partir de la définition 1.12 :

$$x \circ y \in \Theta \Longleftrightarrow L(x) = L(y).$$

On a une correspondance bijective entre T_vF^n et T_v^n.

1.14. Proposition. — *L'injection $T_vF^n \to T_v^n$ définie par $[x] \mapsto L(x)$ est une isométrie $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ invariante.*

Démonstration. — Soient $x, y \in \mathbb{H}F^n$. Alors il existe $g \in \mathrm{SO}_F^+(n,1)$ telle que $g(x) = (1,-1,0,\dots,0)$ et $g(y) = (\alpha, -\alpha^{-1}, 0, \dots, 0)$ avec $\alpha > 0$. On a donc :

$$d_v\big([x],[y]\big) = -v(x \circ y) = -v\big(g(x) \circ g(y)\big) = -\inf\big\{v(\alpha), -v(\alpha)\big\} = \big|v(\alpha)\big|,$$

$$d\big(L(x), L(y)\big) = d\big(g \cdot L(x), g \cdot L(y)\big) = d\big(L(g(x)), L(g(y))\big),$$

$$L\big(g(y)\big) = \alpha e_0 \Theta \oplus \alpha^{-1} e_1 \Theta \oplus \bigoplus_{i=2}^{n} e_i \Theta,$$

la démonstration étant la même que celle de l'égalité $L(\xi_0) = \Theta^{n+1}$ dans la proposition 1.13. Ainsi :

$$L\big(g(x)\big)/L\big(g(x)\big) \cap L\big(g(y)\big) \simeq \begin{cases} \Theta/\alpha\Theta & \text{si } \alpha \leq 1, \\ \Theta/\alpha^{-1}\Theta & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où $d(L(x), L(y)) = |v(\alpha)| = d_v([x],[y])$. □

2. Compactifié via le spectre réel d'un semi-algébrique réel.

Soit A un anneau commutatif unitaire. On se réfère à [BCR] pour la définition et les propriétés de base du spectre réel de A, noté $\mathrm{Spec}_r A$. Un point α de $\mathrm{Spec}_r A$ est un cône premier de A, c'est-à-dire un élément $\alpha \in 2^A$ vérifiant les conditions :

(i) $\alpha + \alpha \subset \alpha, \ \alpha \cdot \alpha \subset \alpha$;

(ii) $f^2 \in \alpha$, pour tout $f \in A$;

(iii) $-1 \notin \alpha$;

(iv) pour tout $f, g \in A$, $fg \in \alpha$ implique ($f \in \alpha$ ou $-g \in \alpha$).

La topologie de $\operatorname{Spec}_r A$ est donnée par la base d'ouverts formée des

$$\widetilde{\mathcal{U}}(f_1, \ldots, f_\ell) = \{\alpha \in \operatorname{Spec}_r A \mid -f_1 \notin \alpha, \ldots, -f_\ell \notin \alpha\},$$

avec $f_1, \ldots, f_\ell \in A$.

Une combinaison booléenne des $\widetilde{\mathcal{U}}(f)$, avec $f \in A$, est appelée un *constructible* de $\operatorname{Spec}_r A$. La topologie dont la base d'ouverts formée des constructibles de $\operatorname{Spec}_r A$ s'appelle la *topologie constructible* de $\operatorname{Spec}_r A$. Elle est plus fine que la topologie ordinaire. L'application qui à α associe l'ultrafiltre

$$\mathfrak{F}_\alpha = \{C \text{ constructible de } \operatorname{Spec}_r A \mid \alpha \in C\}$$

est un homéomorphisme de $\operatorname{Spec}_r A$ avec la topologie constructible sur l'espace de Stone de l'algèbre de Boole des constructibles de $\operatorname{Spec}_r A$. De ce fait, $\operatorname{Spec}_r A$ avec la topologie constructible est un espace compact, totalement discontinu, dont les ouverts fermés sont précisément les constructibles de $\operatorname{Spec}_r A$. En particulier, $\operatorname{Spec}_r A$ est quasi-compact pour la topologie ordinaire.

Si α, β sont dans $\operatorname{Spec}_r A$, on dit que α *tend vers* β ou bien que β est une *spécialisation* de α si $\beta \in \overline{\{\alpha\}}$ (équivalent dans 2^A à $\alpha \subset \beta$).

On note $\operatorname{Spec}_r^m A$ l'ensemble des points fermés de $\operatorname{Spec}_r A$. Un cône premier de A définit un ordre total sur le corps de fraction de $A/\operatorname{Supp}(\alpha)$, où $\operatorname{Supp}(\alpha) = \alpha \cap -\alpha$. Cet ordre est caractérisé par

$$\bar{f} \geq 0 \Longleftrightarrow f \in \alpha \text{ pour tout } f \in A,$$

où $\bar{f}$ désigne la classe de f dans le corps de fraction de $A/\operatorname{Supp}(\alpha)$. Chaque corps ordonné K a une clôture réelle. Si F et F' sont deux clôtures réelles de K, il existe un K-isomorphisme unique : $F \to F'$. Ceci conduit à interpréter un point de $\operatorname{Spec}_r A$ comme une classe d'équivalence d'homomorphismes $\alpha : A \to F(\alpha)$, où $F(\alpha)$ est un corps réel clos algébrique sur $\alpha(A)$, par la relation d'équivalence engendrée par $\alpha \sim \alpha'$ quand il existe un diagramme commutatif d'homomorphismes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & F(\alpha) \arrow[d] \\ & F(\alpha') \end{tikzcd}$$

Si f appartient à A, on note $f(\alpha)$ l'image de f par $\alpha : A \to F(\alpha)$. Avec la dernière description des points de $\operatorname{Spec}_r A$, la topologie ordinaire est donnée par la base d'ouverts formée des

$$\widetilde{\mathcal{U}}(f_1, \ldots, f_\ell) = \{\alpha \in \operatorname{Spec}_r A \mid f_1(\alpha) > 0, \ldots, f_\ell(\alpha) > 0\},$$

où $f_1, \ldots, f_\ell$ sont dans A.

2.1. Proposition

(a) *Si α tend vers β et si α tend vers γ, alors β tend vers γ ou bien γ tend vers β.*

(b) *Pour tout $\alpha \in \operatorname{Spec}_r A$, il existe un unique β fermé dans $\operatorname{Spec}_r A$ tel que α tend vers β. En particulier, tout recouvrement d'ouverts de $\operatorname{Spec}_r^m A$ recouvre $\operatorname{Spec}_r A$ et donc $\operatorname{Spec}_r^m A$ est quasi-compact.*

(c) *Si α ne tend pas vers α' et si α' ne tend pas vers α, alors il existe $f \in A$ avec $f(\alpha) > 0$ et $f(\alpha') < 0$. Donc $\operatorname{Spec}_r^m A$ est Hausdorff.*

(d) *L'application $r : \operatorname{Spec}_r A \to \operatorname{Spec}_r^m A, r(\alpha) = \beta$, l'unique point fermé spécialisation de α, est une rétraction, continue, fermée.*

(e) *α appartient à $\operatorname{Spec}_r^m A$ si et seulement si $F(\alpha)$ est archimédien sur $\alpha(A)$ (c'est-à-dire si tout élément de $F(\alpha)$ peut être borné par un élément de $\alpha(A)$).*

Démonstration.

Pour (a), (b), (c) et (d), voir les propositions 7.1.22, 7.1.23, 7.1.24 dans [BCR].

Montrons que (e) est nécessaire. Si $F(\alpha)$ est non archimédien sur $\alpha(A)$, il existe alors $h \in F(\alpha)$ tel que $h > f(\alpha)$ pour tout $f \in A$. L'élément h étant algébrique dans $\alpha(A)$, il existe donc f_0, f_1 dans $\alpha \setminus -\alpha$ tels que $hf_0(\alpha) \leq f_1(\alpha)$ (f_0, f_1 sont par exemple déterminés à partir d'un polynôme de $\alpha(A)[X]$ s'annulant en h). Il en résulte qu'il existe $f_0 \in \alpha \setminus -\alpha$ tel que $f_0(\alpha)f(\alpha) < 1$ (ou encore $1 - f_0 \in \alpha \setminus -\alpha$), pour tout $f \in A$. Il s'ensuit que $\alpha[-f_0] = \{a - f_0 b \mid a, b \in \alpha\}$ est un cône propre de A contenant strictement α. D'après le lemme de Zorn, $\alpha[-f_0]$ est contenu dans un cône premier β de A. Ainsi, il existe $\beta \in \operatorname{Spec}_r A$ tel que $\alpha \subsetneq \beta$. On en déduit donc que α n'est pas fermé.

Montrons que (e) est suffisante. Soient $\alpha, \beta \in \operatorname{Spec}_r A$ tels que $\alpha \subsetneq \beta$. Choisissons $f_0 \in (\alpha \setminus -\alpha) \cap -\beta \subset \beta \cap -\beta$. Alors $1 - ff_0$ appartient à $\alpha \setminus -\alpha$ (ou encore $f(\alpha)f_0(\alpha) < 1$) pour tout $f \in A$. Ainsi, $f_0(\alpha)^{-1} \in F(\alpha)$ est plus grand que tout élément de $\alpha(A)$. $\square$

Les assertions (b) et (c) dans la proposition montrent que $\operatorname{Spec}_r^m A$ est compact pour la topologie ordinaire. Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ une variété algébrique et $A(X) = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]/I(X)$ l'anneau des polynômes sur X. Alors le (e) de la proposition montre que $X \subset \operatorname{Spec}_m^r A(X)$, puisque $x \in X$ définit l'homorphisme surjectif, $x : A(X) \to \mathbb{R}$, $x(f) = f(x)$. La topologie induite sur X est la topologie ordinaire de X, puisque, pour tout $f_1, \ldots, f_\ell \in A(X)$,

$$\widetilde{\mathfrak{U}}(f_1, \ldots, f_\ell) \cap X = \{x \in X \mid f_1(x) > 0, \ldots, f_\ell(x) > 0\}.$$

Si W est une partie de X, on note $\overline{W}^{\mathrm{sp}}$ l'adhérence de W dans $\operatorname{Spec}_r^m A(X)$ avec la topologie ordinaire. Le cas où W une partie semi-algébrique fermée de X conduit à une description intéressante des points frontières de $\overline{W}^{\mathrm{sp}}$. Si W est une partie semi-algébrique de X, on note $\widetilde{W}^{\mathrm{sp}}$ le constructible de $\operatorname{Spec}_r A(X)$ tel que $\widetilde{W} \cap X = W$. L'isomorphisme $W \mapsto \widetilde{W}$ est une simple conséquence du principe de transfert de Tarski-Seidenberg (voir [BCR], 7.2.3). Si W est une partie semi-algébrique fermée de X, alors W est une union finie de

$$\{x \in X \mid f_1(x) \geq 0, \ldots, f_\ell(x) \geq 0\},$$

avec $f_1, \ldots, f_\ell \in A(X)$ (théorème de finitude). Par conséquent, comme $\widetilde{W}$ est quasi-compact, on voit que W est fermé si et seulement si $\widetilde{W}$ est fermé. On note $\operatorname{Max}(\widetilde{W})$ l'ensemble des points fermés de $\widetilde{W}$.

2.2. Proposition [Br1]. — *Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ une variété algébrique, W une partie semi-algébrique de X fermée. Alors :*

(a) $\overline{W}^{\mathrm{sp}} = \operatorname{Max}(\widetilde{W})$;

(b) $\overline{W}^{\mathrm{sp}} \setminus W = \overline{W}^{\mathrm{sp}} \bigcap_{r \in \mathbb{R}} \left\{\alpha \in \operatorname{Spec}_r A(X) \mid \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^2(\alpha) \geq r\right\}$, *où $\bar{x}_i$ est l'image de la variable x_i dans $A(X)$. En particulier, W est ouvert dans $\overline{W}^{\mathrm{sp}}$.*

Démonstration. — Comme W est dense dans $\widetilde{W}$, un fermé de $\operatorname{Spec}_r A(X)$, on a donc $\overline{W} = \overline{W}^{\widetilde{W}} = \widetilde{W}$ et par suite

$$\overline{W}^{\mathrm{sp}} = \overline{W} \cap \operatorname{Spec}_r^m A(X) = \widetilde{W} \cap \operatorname{Spec}_r^m A(X) = \operatorname{Max}(\widetilde{W}),$$

ce qui prouve (a).

Soit α un élément de $\overline{W}^{\mathrm{sp}} = \operatorname{Max}(\widetilde{W})$. Alors $F(\alpha)$ est algébrique et archimédien sur $\alpha(A) = \mathbb{R}[\bar{x}_1(\alpha), \ldots, \bar{x}_n(\alpha)]$. Si $F(\alpha)$ est archimédien sur $\mathbb{R}$, il est clair que $F(\alpha) = \mathbb{R}$. Il en résulte que $F(\alpha) = \mathbb{R}$ si et seulement

si chaque $\bar{x}_i(\alpha)$ et borné par un réel ou encore si $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^2(\alpha) < r$ pour un certain $r \in \mathbb{R}$. D'où (b). □

2.3. *Remarques*

(a) Supposons que l'on ait $W = \bigcup_{j=1}^{m} W_j$, avec

$$W_j = \{x \in X \mid f_{1j}(x) \geq 0, \ldots, f_{m_j j}(x) \geq 0\}.$$

Alors $\overline{W}^{\mathrm{sp}} = \bigcup_{j=1}^{m} \overline{W}_j^{\mathrm{sp}}$ et pour tout $1 \leq j \leq m$, les points de $\overline{W}_j^{\mathrm{sp}}$ sont les homomorphismes $\alpha : A(X) \to F(\alpha)$ vérifiant :

(i) $f_{ij}(\alpha) \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq m_j$.

(ii) $F(\alpha) = \mathbb{R}$ ou bien il existe $1 \leq k \leq n$ tel que $|\bar{x}_k(\alpha)| \in F(\alpha)$ est infiniment grand relativement à $\mathbb{R}$, et tout élément de $F(\alpha)$ est borné par une puissance convenable de $|\bar{x}_k(\alpha)|$ (un tel élément est dit un *grand élément* de $F(\alpha)$).

(b) Si W est une partie semi-algébrique compacte de X, alors on a $\overline{W}^{\mathrm{sp}} = W = \mathrm{Max}(\widetilde{W})$. □

Dans ce qui suit, nous donnons une vision un peu plus géométrique qu'il en a l'air du compactifié $\overline{W}^{\mathrm{sp}}$ d'un semi-algébrique fermé (localement fermé) $W \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Pour cela, nous montrons que $\overline{W}^{\mathrm{sp}}$ s'obtient comme limite projective des compactifications semi-algébriques de W avec la propriété du collier semi-algébrique aux frontières. Une compactification semi-algébrique de W est la donnée d'un couple (i, K) où K est un compact semi-algébrique et $i : W \to K$ un homéomorphisme semi-algébrique sur son image avec $i(W)$ ouvert dense dans K. Le compactifié d'Alexandrov (voir [BCR], 2.5.9) noté $\dot{W} = W \cup \{\omega\}$ en est un exemple. D'autres compactifications qui nous intéressent ici sont telles que $K \setminus i(W)$ admet un collier semi-algébrique dans K.

2.4. Définition. — *La compactification $K \setminus i(W)$ admet un collier semi-algébrique si, pour un certain voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $Y = K \setminus i(W)$ dans K, il existe un homéomorphisme semi-algébrique $\Phi : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} Y \times [0, 1[$ avec $\Phi(Y) = Y \times \{0\}$.* □

Ces dernières s'obtiennent en appliquant le théorème de Hardt (voir [BCR], 9.3.2) dans un cas très particulier.

2.5. Proposition. — *Soit W un semi-algébrique fermé dans $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une compactification semi-algébrique (i, K) de W telle que $K \setminus i(W)$ admet un collier semi-algébrique.*

Démonstration. — On choisit une application semi-algébrique continue propre $f : W \to \mathbb{R}^n$ (par exemple $1 + \|x\|$). Le théorème de Hardt appliqué à f montre qu'il existe $a > 0$ et un homéomorphisme semi-algébrique h de $f^{-1}([a, +\infty[)$ sur $f^{-1}(a) \times [a, +\infty[$ tel que $p \circ h = f$, où p est la projection qui oublie le premier facteur. Notons $h = (h_1, f)$ et $\theta : [a, +\infty[\to [a, a+1[$ un homéomorphisme semi-algébrique avec $\theta(a) = a$. Soit $i : W \to f^{-1}([a, a+1[)$ tel que

$$i(x) = \begin{cases} x & \text{si } f(x) \leq a, \\ h^{-1}(h_1(x), \theta(f(x)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors i est un homéomorphisme semi-algébrique. On pose :

$$K = f^{-1}([0, a+1]).$$

Alors (i, K) est une compactification semi-algébrique de W avec $K \setminus i(W) = f^{-1}(a+1)$. L'espace $f^{-1}(a+1)$ a un collier dans K. En effet, la restriction de h_1 à $f^{-1}(a+1)$ est un homéomorphisme semi-algébrique sur $f^{-1}(a)$ et par suite l'application $f^{-1}(]a, a+1]) \longrightarrow f^{-1}(a+1) \times [0, 1[$ définie par

$$x \longmapsto \left((h_1|_{f^{-1}(a+1)})^{-1} \circ h_1(x), a + 1 - f(x)\right)$$

est un homéomorphisme semi-algébrique qui envoie $f^{-1}(a+1)$ sur $f^{-1}(a+1) \times \{0\}$. □

On a un résultat d'unicité pour ce genre de compactification.

2.6. Proposition. — *Soient (i, K), (i', K') deux compactifications de W, avec la propriété du collier semi-algébrique aux frontières. Il existe alors un homéomorphisme semi-algébrique $h : K \to K'$ avec $h(K \setminus i(W)) = K' \setminus i'(W)$.*

La démonstration utilise le lemme suivant.

2.7. Lemme. — *Soit (i, K) comme dans la proposition 2.5. Alors il existe une application semi-algébrique continue $\Psi : \dot{W} = W \bigcup \{\omega\} \to [0, 1]$ avec $\Psi^{-1}(0) = \{\omega\}$ et, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, un homéomorphisme semi-algébrique $\hbar : K \to \Psi^{-1}([\varepsilon, 1])$, avec $\hbar(K \setminus i(W)) = \Psi^{-1}(\varepsilon)$.*

Démonstration. — Soient $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de $Y = K \setminus i(W)$ dans K et $h = (h_1, \bar{\varphi}) : \mathcal{U} \xrightarrow[\sim]{s.a.} Y \times [0, 1[$, avec $h(Y) = Y \times \{0\}$.

Alors $\bar{\varphi} : \mathcal{U} \to [0, 1[$ est semi-algébrique, continue avec $\bar{\varphi}^{-1}(0) = Y$. En posant $\varphi(x) = 1$ si $x \in K \setminus \mathcal{U}$, on voit que $\bar{\varphi}$ se prolonge en φ semi-algébrique

continue sur K. Donc $\varphi \circ i : W \to]0,1]$ est semi-algébrique continue. En posant $\Psi(\omega) = 0$, on voit que $\varphi \circ i$ se prolonge en Ψ semi-algébrique continue sur $\dot{W}$. L'application $\Psi : \dot{W} \to [0,1]$ est semi-algébrique continue avec $\Psi^{-1}(0) = \{\omega\}$, et pour tout $0 < \varepsilon < 1$, i définit un homéomorphisme semi-algébrique $i : \Psi^{-1}[\varepsilon,1] \xrightarrow[\sim]{s.a.} \varphi^{-1}[\varepsilon,1]$ avec $i(\Psi^{-1}(\varepsilon)) = \varphi^{-1}(\varepsilon)$. Soient $0 < \varepsilon < \varepsilon' < 1$, θ l'application affine $\theta : [0,\varepsilon'] \xrightarrow[\sim]{s.a.} [\varepsilon,\varepsilon']$ avec $\theta(0) = \varepsilon$ et $\theta(\varepsilon') = \varepsilon'$. L'application h définit un homéomorphisme semi-algébrique $h : \varphi^{-1}([0,\varepsilon']) \xrightarrow[\sim]{s.a.} Y \times [0,\varepsilon']$. Il en résulte que l'application

$$\begin{array}{rccl} \bar{h} : & K & \longrightarrow & \varphi^{-1}([\varepsilon,1]) \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } \varphi(x) \geq \varepsilon', \\ h^{-1}(h_1(x), \theta(\varphi(x))) & \text{si } \varphi(x) \leq \varepsilon', \end{cases} \end{array}$$

est un homéomorphisme semi-algébrique avec $\bar{h}(Y) = \varphi^{-1}(\varepsilon)$. Maintenant, $\hbar = i^{-1} \circ \bar{h} : K \to \Psi^{-1}([\varepsilon,1])$ complète la démonstration. □

Démonstration de la proposition 2.6. — Le raisonnement est essentiellement dû à M. Shiota. Soient $\Psi, \Psi' : \dot{W} \to [0,1]$ comme dans le lemme 2.7. Le théorème de triangulation de fonction semi-algébrique [Sh] appliqué à Ψ et Ψ' donne

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\tau", "\sim"'] & \dot{W} \arrow[d, shift right, "\psi"'] \arrow[d, shift left, "\psi'"] & L' \arrow[l, "\tau'"', "\sim"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd}$$

où L, L' sont des complexes simpliciaux finis et τ, τ' des homéomorphismes semi-algébriques tels que $u = \Psi \circ \tau$ et $u' = \Psi' \circ \tau'$ soient linéaires sur chaque simplexe. Ceci peut être choisi de sorte que $\tau^{-1}(\omega)$ et $\tau'^{-1}(\omega)$ soient des sommets. Ainsi L et L' sont deux triangulations semi-algébriques de $\dot{W}$. Le théorème d'unicité de triangulation d'ensemble semi-algébrique [ShY] donne $\sigma : L \to L'$, un P.L. homéomorphisme (c'est-à-dire un homéomorphisme linéaire par morceaux). On peut choisir σ avec $\sigma(\tau^{-1}(\omega)) = \tau'^{-1}(\omega)$ et, quitte à subdiviser les simplexes de L et L', on peut supposer que σ est un isomorphisme simplicial (c'est-à-dire un homéomorphisme qui envoie de façon linéaire simplexe sur simplexe). Alors $u : L \to [0,1]$ et $u' \circ \sigma : L \to [0,1]$ sont linéaires sur chaque simplexe de L avec $u^{-1}(0) = (u' \circ \sigma)^{-1}(0) = \tau^{-1}(\omega)$, sommet de L. Dans ce qui suit, nous allons montrer que pour ε assez petit, $u^{-1}[\varepsilon,1]$ est P.L. homéomorphe à $(u' \circ \sigma)^{-1}([\varepsilon,1])$ avec $u^{-1}(\varepsilon)$ qui s'envoie sur $(u' \circ \sigma)^{-1}(\varepsilon)$.

Soient $\sigma_i = [\tau^{-1}(\omega), a_{i1}, \ldots, a_{in_i}]$, avec $1 \leq i \leq k$, les simplexes de L contenant $\tau^{-1}(\omega)$ et

$$0 < \varepsilon < \inf\Big\{u(b), u'(\sigma(b)) \mid b \neq \tau^{-1}(\omega) \text{ et } b \text{ sommet de } L\Big\}.$$

Pour tout $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq n_i$, il existe b_{ij} et b'_{ij} dans $[\tau^{-1}(\omega), a_{ij}]$ tels que $b_{ij}, b'_{ij} \neq a_{ij}, \tau^{-1}(\omega)$ et $u(b_{ij}) = \varepsilon$, $u' \circ \sigma(b'_{ij}) = \varepsilon$.

Vu l'hypothèse sur ε, on a :

$$u^{-1}([0,\varepsilon]) = \bigcup_{i=1}^{k} [\tau^{-1}(\omega), b_{i1}, \ldots, b_{in_i}], \quad u^{-1}(\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{k} [b_{i1}, \ldots, b_{in_i}].$$

De même :

$$(u' \circ \sigma)^{-1}[0,\varepsilon] = \bigcup_{i=1}^{k} [\tau^{-1}(\omega), b'_{i1}, \ldots, b'_{in_i}], \quad (u' \circ \sigma)^{-1}(\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{k} [b'_{i1}, \ldots, b'_{in_i}].$$

L'ensemble $\overline{L} = \bigcup_{i=1}^{k} \sigma_i \setminus u^{-1}([0,\varepsilon[)$ (resp. $\overline{L'} = \bigcup_{i=1}^{k} \sigma_i \setminus (u' \circ \sigma)^{-1}([0,\varepsilon[)$) se décompose en des simplexes dont les sommets sont les a_{ij} et b_{ij} (resp. a_{ij} et b'_{ij}). Suivant une décomposition convenable de $\overline{L}$ et $\overline{L'}$, l'application linéaire sur chaque simplexe

$$\begin{array}{ccc} \overline{L} & \longrightarrow & \overline{L'} \\ a_{ij} & \longmapsto & a_{ij} \\ b_{ij} & \longmapsto & b'_{ij} \end{array}$$

définit un P.L. homéomorphisme de $\overline{L}$ sur $\overline{L'}$ qui envoie chaque $[b_{i1}, \ldots, b_{in_i}]$ sur $[b'_{i1}, \ldots, b'_{in_i}]$. En prolongeant par l'application identité sur $L \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \sigma_i$, on obtient ainsi un P.L. homéomorphisme de $u^{-1}[\varepsilon, 1]$ sur $(u' \circ \sigma)^{-1}[\varepsilon, 1]$, qui envoie $u^{-1}(\varepsilon)$ sur $(u' \circ \sigma)^{-1}(\varepsilon)$.

Maintenant, avec le lemme 2.7 on a les homéomorphismes semi-algébriques suivants :

$$K \xrightarrow[\sim]{h} \Psi^{-1}([\varepsilon,1]) \xrightarrow[\sim]{\tau^{-1}} u^{-1}[\varepsilon,1] \xrightarrow[\sim]{P.L.} (u' \circ \sigma)^{-1}[\varepsilon,1]$$
$$\xrightarrow[\sim]{\tau' \circ \sigma} \Psi'^{-1}[\varepsilon,1] \xrightarrow[\sim]{h'^{-1}} K',$$

avec dans l'ordre :

$$Y \xrightarrow{\sim} \Psi^{-1}(\varepsilon) \xrightarrow{\sim} u^{-1}(\varepsilon) \xrightarrow{\sim} (u' \circ \sigma)^{-1}(\varepsilon) \xrightarrow{\sim} \Psi'^{-1}(\varepsilon) \xrightarrow{\sim} Y'. \qquad \square$$

L'homéomorphisme qu'on obtient n'induit pas forcément l'identité sur W. Par contre, ces compactifications forment un système projectif filtrant. On note I l'ensemble de toutes les compactifications semi-algébriques de W et $J \subset I$, celles avec la propriété du collier semi-algébrique à la frontière. Sur I on définit le préordre $(i, K) < (i', K')$ s'il existe $h : K' \to K$, continu, semi-algébrique tel que $h \circ i' = i$.

2.8. Proposition. — *J est une partie cofinale filtrante de I. Par conséquent $\varprojlim_{(i,K)\in I} K$ est homéomorphe à $\varprojlim_{(i,K)\in J} K$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que (i) I est filtrante et que (ii) J est cofinale dans I.

(i) Soient (i, K) et$(i', K') \in I$. Alors l'application $i'' : W \to K \times K'$ définie par $i''(x) = (i(x), i'(x))$ est un homéomorphisme semi-algébrique sur son image. L'ensemble $\overline{i''(W)} \setminus i''(W)$ est fermé. En effet, supposons que (y_1, y_2) est dans l'adhérence de $\overline{i''(W)} \setminus i''(W)$. Alors (y_1, y_2) appartient à $\overline{i''(W)}$ et, puisque $i(W) \times i'(W)$ est ouvert dans $K \times K'$, on a $y_1 \notin i(W)$ ou $y_2 \notin i'(W)$ et donc $(y_1, y_2) \notin i''(W)$.

Posons $K'' = \overline{i''(W)}$. Alors (i'', K'') appartient à I, $(i, K) < (i'', K'')$, avec $h_1 : K'' \to K$ la projection qui oublie le deuxième facteur et $(i', K') < (i'', K'')$ avec $h_2 : K'' \to K$ la projection qui oublie le premier facteur.

(ii) Soit $(i, K) \in I$ et montrons qu'il existe $(i', K') \in J$ tel que $(i, K) < (i', K')$. Il suffit (grâce à la triangulation d'ensemble semi-algébrique compact) de considérer le cas où K est un complexe simplicial fini, i une inclusion et $K \setminus W$ un sous-complexe de K. Le reste de la démonstration est de la P.L. topologie élémentaire. Notons $L = K \setminus W$. On peut supposer (quitte à faire une subdivision barycentrique) que L est un sous-complexe plein de K (ce qui signifie que si tous les sommets d'un simplexe sont dans L, alors le simplexe est dans L). Soit f la fonction affine sur chaque simplexe qui vaut 0 aux sommets de L et 1 aux autres sommets. Alors $f^{-1}(0) = L$. Soit $h : f^{-1}([\frac{1}{2}, 1]) \to K$ l'application définie comme suit : supposons que $x \in f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$ est un point du simplexe $[a_0, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n]$, où $a_0, \ldots, a_p \in L$ et $a_{p+1}, \ldots, a_n \notin L$, de coordonnées barycentriques $\lambda_0, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$. Alors $h(x)$ est le point de $[a_0, \ldots, a_n]$ de coordonnées barycentriques

$$2\lambda_0, \ldots, 2\lambda_p, \frac{2f(x) - 1}{f(x)} \lambda_{p+1}, \ldots, \frac{2f(x) - 1}{f(x)} \lambda_n.$$

(Remarquons que $f(x) = \lambda_{p+1} + \ldots + \lambda_n \geq \frac{1}{2}$.) La restriction de h à $f^{-1}(]\frac{1}{2}, 1])$ est un P.L. homéomorphisme sur $K \setminus L$, donc un homéomorphisme semi-algébrique.

Considérons l'application $\Phi : f^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[) \to f^{-1}(\frac{1}{2}) \times [0, 1[$ telle que $\Phi(x) = (h'(x), 4f(x) - 2)$, où $h'(x)$ est définie comme suit (comme au-dessus). Si $x \in [a_0, \ldots, a_n]$ est de coordonnées barycentriques $\lambda_0, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$ alors $h'(x)$ est le point de $[a_0, \ldots, a_n]$ de coordonnées barycentriques

$$\frac{-1}{2f(x) - 2}\lambda_0, \ldots, \frac{-1}{2f(x) - 2}\lambda_p, \frac{1}{2f(x)}\lambda_{p+1}, \ldots, \frac{1}{2f(x)}\lambda_n.$$

L'application Φ est un homéomorphisme semi-algébrique avec

$$\Phi_{|f^{-1}(\frac{1}{2})} = \left(\mathrm{Id}_{|f^{-1}(\frac{1}{2}),0}\right).$$

Pour terminer, posons $K' = f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$, $i' = (h_{|f^{-1}(]\frac{1}{2},1])})^{-1}$. Alors on a $(i', K') \in J$, $(i, K) < (i', K')$ avec $h : K' \to K$. □

Pour une partie W semi-algébrique de $X \subset \mathbb{R}^n$, fermée, on aboutit au résultat suivant :

2.9. Proposition. — *L'espace $\overline{W}^{\mathrm{sp}}$ est homéomorphe à $\varprojlim_{(i,K)\in I} K$. En particulier, $\overline{W}^{\mathrm{sp}}$ est homéomorphe à $\varprojlim_{(i,K)\in J} K$.*

Démonstration. — Soit (i, K) un élément de I. De $i : W \to K$ on en déduit $\tilde{i} : \widetilde{W} \to \widetilde{K}$ un homéomorphisme sur son image. Notons $r_K : \widetilde{K} \to \mathrm{Max}(\widetilde{K}) = K$ la rétraction continue fermée de la proposition 2.1 (d). L'application $r_K \circ \tilde{i} : \overline{W}^{\mathrm{sp}} \to K$ est donc continue fermée. Soit $\Psi : \overline{W}^{\mathrm{sp}} \to \prod_{(i,K)\in I} K$ telle que $\Psi(\alpha) = (r_K \circ \tilde{i}(\alpha))_{(i,K)\in I}$. Il est clair que Ψ est continue et fermée.

1) On a $\mathrm{Im}\,\Psi \subset \varprojlim_{(i,K)\in I} K$. Soit $(i, K) < (i', K')$ avec $h : K' \to K$. Montrons que pour tout $\alpha \in \overline{W}^{\mathrm{sp}}$, on a $h(r_{K'} \circ \tilde{i}'(\alpha)) = r_K \circ \tilde{i}(\alpha)$. Comme $\tilde{i}'(\alpha)$ tend vers $r_{K'}(\tilde{i}'(\alpha))$, on en déduit que $\tilde{h}(\tilde{i}'(\alpha))$ tend vers $h(r_{K'}(\tilde{i}'(\alpha))$; or $\tilde{h}(\tilde{i}'(\alpha)) = \widetilde{h \circ i'}(\alpha) = \tilde{i}(\alpha)$ et $\tilde{h} = h$ sur K', d'où $h(r_{K'}(\tilde{i}'(\alpha)))$ est une spécialisation de $\tilde{i}(\alpha)$ et par unicité $h(r_{K'}(\tilde{i}'(\alpha))) = r_K(\tilde{i}(\alpha))$.

2) On a $\varprojlim_{(i,K)\in I} K \subset \mathrm{Im}\,\Psi$. Soit $(y_K)_{(i,K)\in I} \in \varprojlim_{(i,K)\in I} K$. Notons

$$\Omega_{(i,K)} = \left\{\alpha \in \widetilde{W} \mid \tilde{i}(\alpha) \text{ tend vers } y_K\right\}.$$

L'ensemble $\Omega_{(i,K)}$ est un proconstructible dans $\widetilde{W}$ (c'est-à-dire une intersection de constructibles), donc un fermé pour la topologie constructible.

La famille $\{\Omega_{(i,K)}\}_{(i,K)\in I}$ forme un système filtrant à gauche pour l'inclusion. En effet, comme I est filtrant, pour tout $(i,K),(i',K') \in I$, il existe $(i'',K'') \in I$ avec $(i,K) < (i'',K'')$ et $(i',K') < (i'',K'')$ et par suite on vérifie facilement que $\Omega_{(i'',K'')} \subset \Omega_{(i,K)} \cap \Omega_{(i',K')}$. L'espace $\widetilde{W}$ est compact pour la topologie constructible, donc $\bigcap_{(i,K)\in I} \Omega_{(i,K)} \neq \phi$ et est fermé dans $\widetilde{W}$. Un point fermé de $\bigcap_{(i,K)\in I} \Omega_{(i,K)}$ aura $(y_K)_{(i,K)\in I}$ comme image par Ψ.

3) L'application Ψ est injective. Soient $\alpha,\beta \in \overline{W}^{\mathrm{sp}}$ tels que $\alpha \neq \beta$ et montrons qu'il existe $(i,K) \in I$ tel que $r_K(\tilde{\imath}(\alpha))) \neq r_K(\tilde{\imath}(\beta))$. La proposition 2 dans [CC] assure qu'il existe deux fermés semi-algébriques V_α, V_β de W disjoints tels que $\alpha \in \widetilde{V}_\alpha$ et $\beta \in \widetilde{V}_\beta$. Choisissons une fonction semi-algébrique $f : W \to \mathbb{R}^+$ continue et propre, et une trivialisation (à l'aide du théorème de Hardt) de f

$$g = (h_1, f) : f^{-1}\big([a,+\infty[\big) \xrightarrow[\sim]{s.a.} f^{-1}(a) \times [a,+\infty[$$

telle que

$$g(f^{-1}\big([a,+\infty[\big) \cap V_\alpha) = \big(V_\alpha \cap f^{-1}(a)\big) \times [a,+\infty[,$$

$$g(f^{-1}\big([a,+\infty[\big) \cap V_\beta) = \big(V_\beta \cap f^{-1}(a)\big) \times [a,+\infty[.$$

On pose $K = f^{-1}[0,a+1]$ et $i : W \to K$ comme dans la démonstration de la proposition 2.5. Alors $(i,K) \in J$, $r_K \circ \tilde{\imath}(\alpha) \in f^{-1}(a+1) \cap V_\alpha \subset K$ et $r_K \circ \tilde{\imath}(\beta) \in f^{-1}(a+1) \cap V_\beta \subset K$. □

Un semi-algébrique localement fermé (intersection d'un fermé et d'un ouvert) est homéomorphe semi-algébriquement à un semi-algébrique fermé (cf. [BCR], 2.2.9). Avec les résultats précédents nous aboutissons à :

2.10. Théorème. — *Soit W une partie semi-algébrique localement fermée d'une variété algébrique réelle X. Alors l'ensemble des compactifications semi-algébriques (i,K) de W (respectivement les compactifications telle que $K \setminus i(W)$ a un collier semi-algébrique dans K), est un système projectif. La limite projective est homéomorphe à l'adhérence de W dans l'ensemble des points fermés de* $\mathrm{Spec}_r\, A(X)$ *(muni de la topologie ordinaire).*

3. Compactification via le spectre réel de $D^n(\Gamma)$.

On se fixe un groupe Γ de présentation finie. Ce groupe a un nombre fini de générateurs $\nu_1,\dots,\nu_k$ vérifiant un nombre fini (éventuellement nul) de relations $r_1,\dots,r_s$, non élémentaire (c'est-à-dire

ne contenant pas de sous-groupe abélien d'indice fini) et sans torsion. Pour tout corps F de caractéristique nulle, la donnée d'une représentation de Γ dans $\mathrm{SO}_F(n,1)$ est la donnée de k matrices dans $\mathrm{SO}_F(n,1)$, une pour chaque ν_i, satisfaisant les équations polynomiales données par les relations $r_1,\ldots,r_s$ (chacune des r_i donne lieu à $(n+1)^2$ équations polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$). Dans ce sens et pour $n \geq 2$, on définit la variété algébrique affine définie sur $\mathbb{Q}, \mathfrak{R}^n(\Gamma)$. Pour tout corps F contenant $\mathbb{Q}$, l'ensemble $\mathfrak{R}^n_F(\Gamma) \subset F^{k(n+1)^2}$ est canoniquement identifié à l'ensemble des représentations de Γ dans $\mathrm{SO}_F(n,1)$.

Soient $\mathrm{O}(n,1)$ le groupe algébrique linéaire des matrices de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ qui préservent la forme $q = x_0x_1 + \frac{1}{2}(x_2^2 + \cdots + x_n^2)$ et $\mathrm{SO}(n,1) = \mathrm{O}(n,1) \cap \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Les groupes $\mathrm{O}(n,1)$ et $\mathrm{SO}(n,1)$ opèrent algébriquement par conjugaison sur $\mathfrak{R}^n_{\mathbb{C}}(\Gamma)$ et sont réductifs. Par conséquent, les espaces quotients $\mathfrak{R}^n_{\mathbb{C}}(\Gamma)/\mathrm{O}(n,1)$ et $\mathfrak{R}^n_{\mathbb{C}}(\Gamma)/\mathrm{SO}(n,1)$ s'identifient à des variétés algébriques affines (définies sur $\mathbb{Q}$), notées respectivement $X_{\mathbb{C}}(\Gamma)$ et $X'_{\mathbb{C}}(\Gamma)$ (voir [S], 2.4.9). L'action de $\mathrm{O}(n,1)$ sur $\mathfrak{R}^n_{\mathbb{C}}(\Gamma)$ induit une action sur son anneau de coordonnées $A(\mathfrak{R}^n_{\mathbb{C}}(\Gamma))$. La sous-algèbre laissée fixe par cette action est isomorphe à l'anneau de coordonnées de $X_{\mathbb{C}}(\Gamma)$. Cet anneau est engendré par les fonctions trace_ν, avec $\nu \in \Gamma$, où pour toute représentation $\rho \in \mathfrak{R}^n(\Gamma)$, on a $\mathrm{trace}_\nu(\rho) = \mathrm{trace}\,\rho(\nu)$. On peut donc identifier $A(X_{\mathbb{C}}(\Gamma))$ avec la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[\mathrm{trace}_\nu\,;\,\nu \in \Gamma]$ (voir [M1], 3.1). Les applications quotients $\pi : \mathfrak{R}^n_{\mathbb{C}}(\Gamma) \to X_{\mathbb{C}}(\Gamma)$ et $\pi' : \mathfrak{R}^n_{\mathbb{C}}(\Gamma) \to X'_{\mathbb{C}}(\Gamma)$ sont surjectives polynomiales définies sur $\mathbb{Q}$. La variété $X_{\mathbb{C}}(\Gamma)$ est aussi obtenue comme l'espace quotient de l'action induite de $\mathrm{O}(n,1)/\mathrm{SO}(n,1)$ sur $X'_{\mathbb{C}}(\Gamma)$. L'application quotient $p : X'_{\mathbb{C}}(\Gamma) \to X_{\mathbb{C}}(\Gamma)$ est polynomiale et définie sur $\mathbb{Q}$, propre de fibres finies ($\mathrm{card}(p^{-1}(x)) \leq 2$ pour tout x), avec $p \circ \pi' = \pi$. En restriction aux points réels de ces variétés, les applications $\pi_{\mathbb{R}} : \mathfrak{R}^n_{\mathbb{R}}(\Gamma) \to X_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ et $\pi'_{\mathbb{R}} : \mathfrak{R}^n_{\mathbb{R}}(\Gamma) \to X'_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ sont algébriques et non surjectives en général, et l'application $p_{\mathbb{R}} : X'_{\mathbb{R}}(\Gamma) \to X_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ est semi-algébrique continue propre de fibres finies. On note Z et Z' les ensembles images respectifs de $\pi_{\mathbb{R}}$ et $\pi'_{\mathbb{R}}$. Il est facile de voir que $Z' \subset X'_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ et $Z \subset X_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ sont des parties semi-algébriques fermées. L'ensemble Z' est appelé l'*espace des caractères* des représentations réelles de Γ dans $\mathrm{SO}(n,1)$. Il est important de signaler que l'anneau de coordonnée de $X_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ est engendré, comme $\mathbb{R}$-algèbre, par les fonctions trace_ν pour $\nu \in \Gamma$. Le résultat (voir [P], 7.1) permet de constater que $A(X_{\mathbb{R}}(\Gamma))$ est isomorphe à

$$\mathbb{R}\big[\mathrm{trace}_{\nu'_{1i},\ldots,\nu'_{i\ell}}\,;\,1 \leq i_1 < \ldots < i_\ell \leq 2k\big]$$

où $\nu'_j = \nu_j$ ou bien $\nu'_j = \nu_j^{-1}$.

Notons $\mathfrak{R}^+_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{R}^n_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ l'ensemble des représentations de Γ dans $\mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(n,1)$, et $\mathfrak{R}^0 \subset \mathfrak{R}^+_{\mathbb{R}}$, les représentations discrètes et fidèles. Alors $\mathfrak{R}^+_{\mathbb{R}}$ est une partie semi-algébrique fermée de $\mathfrak{R}^n_{\mathbb{R}}(\Gamma)$. Et $\mathfrak{R}^0$ est fermé (voir [Wi]). Dans le cas particulier $n = 2$ et où Γ est le groupe fondamental d'une surface de Riemann, $\mathfrak{R}^0$ est une partie fermée ouverte de $\mathfrak{R}^+_{\mathbb{R}}$ (voir [SS], [He]), donc un semi-algébrique. Pour $n > 2$, on ne sait pas si une telle structure existe sur $\mathfrak{R}^0$. Via l'identification de $D^n(\Gamma)$ avec l'espace des orbites $\mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(n,1) \setminus \mathfrak{R}^0$, $D^n(\Gamma)$ s'envoie de manière propre et finie sur un fermé de Z. L'application $\varphi_\Gamma : D^n(\Gamma) \to Z'$ définie par $\varphi_\Gamma([\rho]) = \pi'_{\mathbb{R}}(\rho)$, est continue, propre et à fibres finies (voir [M1], 1.3). Et par suite, l'application $p_{\mathbb{R}} \circ \varphi_\Gamma : D^n(\Gamma) \to Z' \to Z$ est continue propre de fibres finies. On compactifie $D^n(\Gamma)$ et Z' en compactifiant leurs images dans Z. On note respectivement $\overline{D^n(\Gamma)}^{\mathrm{sp}} = \overline{\pi_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}^0)}^{\mathrm{sp}}$ et $\overline{Z'}^{\mathrm{sp}} = \overline{Z}^{\mathrm{sp}}$ les adhérences dans $\mathrm{Spec}^m_r A(X_{\mathbb{R}}(\Gamma))$ (avec la topologie ordinaire du spectre réel) de $p_{\mathbb{R}} \circ \varphi_\Gamma(D^n(\Gamma)) = \pi_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}^0)$ et $p_{\mathbb{R}}(Z') = Z$. Un premier résultat concernant les points frontières de $\overline{Z'}^{\mathrm{sp}}$ est :

3.1. Proposition. — *Tout point α de $\overline{Z'}^{\mathrm{sp}} \setminus Z$ donne une représentation ρ_α de Γ dans $\mathrm{SO}_{F(\alpha)}(n,1)$ où $F(\alpha) \supset \mathbb{R}$ est un corps réel clos non archimédien, algébrique et archimédien sur la $\mathbb{R}$-algèbre*

$$\mathbb{R}[\mathrm{trace}\,\rho_\alpha(\nu'_{i1}\cdots\nu'_{i\ell})\,;\, 1 \le i_1 < \ldots < i_\ell \le 2k].$$

Démonstration. — Soit $\alpha \in \overline{Z'}^{\mathrm{sp}} \setminus Z'$. D'après 2.1 (e) et 2.3, il existe un homomorphisme $\alpha : A(X_{\mathbb{R}}(\Gamma)) \to F(\alpha)$, avec $F(\alpha) \supset \mathbb{R}$ réel clos non archimédien, algébrique et archimédien sur $\alpha(A(X_{\mathbb{R}}(\Gamma)))$. De $\pi_{\mathbb{R}} : \mathfrak{R}^n_{\mathbb{R}}(\Gamma) \to Z$, on en déduit l'extension $\pi_{F(\alpha)} : \mathfrak{R}^n_{F(\alpha)}(\Gamma) \to Z_{F(\alpha)}$, où $Z_{F(\alpha)} \subset F(\alpha)^{k(n+1)^2}$ et l'ensemble semi-algébrique défini par le même système d'équations définissant Z ($Z_{F(\alpha)}$ est bien défini, c'est une conséquence du principe de transfert de Tarski-Seidenberg, voir [BCR], 5.1.1). L'application $\pi_{F(\alpha)}$ est surjective comme l'est $\pi_{\mathbb{R}}$. En regardant α comme un point de $Z_{F(\alpha)}$, on a donc $\rho_\alpha \in \mathfrak{R}^n_{F(\alpha)}(\Gamma)$ tel que $\pi_{F(\alpha)}(\rho_\alpha) = \alpha$. Maintenant, $F(\alpha)$ est algébrique et archimédien sur

$$\begin{aligned}\alpha\big(A(X_{\mathbb{R}}(\Gamma))\big) &= \alpha\big(\mathbb{R}\big[\mathrm{trace}_{\nu'_{i1}\cdots\nu'_{i\ell}}\,;\, 1 \le i_1 < \ldots < i_\ell \le 2k\big]\big)\\ &= \mathbb{R}\big[\mathrm{trace}\,\rho_\alpha(\nu'_{i1}\cdots\nu'_{i\ell})\,;\, 1 \le i_1 < \ldots < i_\ell \le 2k\big]. \qquad \square\end{aligned}$$

Le groupe $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ des automorphismes de Γ agit sur $\mathfrak{R}^n_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ par $\mu \cdot \rho = \rho \circ \mu^{-1}$ si $\mu \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ et $\rho \in \mathfrak{R}^n_{\mathbb{R}}(\Gamma)$. Cette action préserve $\mathfrak{R}^0$. La formule $\mu \cdot f(\rho) = f(\mu^{-1} \cdot \rho)$ définit une action de Γ par automorphisme sur

l'anneau de coordonnées $A(\mathfrak{R}^n_{\mathbb{R}}(\Gamma))$. En restriction au sous-groupe $\mathrm{Int}(\Gamma)$ des automorphismes intérieurs de Γ, l'action est triviale sur les fonctions trace_ν, avec $\nu \in \Gamma$. D'où une action de $\mathrm{Out}(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\Gamma)/\mathrm{Int}(\Gamma)$ par automorphisme sur $A(X_{\mathbb{R}}(\Gamma))$, et par suite une action de $\mathrm{Out}(\Gamma)$ par homéomorphisme sur $\mathrm{Spec}_r\, A(X_{\mathbb{R}}(\Gamma))$ où $[\mu] \in \mathrm{Out}(\Gamma)$, $\alpha : A(X_{\mathbb{R}}(\Gamma)) \to F(\alpha)$, $[\mu] \cdot \alpha(f) = \alpha(\mu \cdot f) \in F(\alpha)$. En résumé, le groupe $\mathrm{Out}(\Gamma)$ agit par homéomorphisme semi-algébrique sur $X_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ en préservant Z et $\pi_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}^0)$. Cette action s'étend en une action par homéomorphisme sur $\overline{X_{\mathbb{R}}(\Gamma)}^{\mathrm{sp}}$ en préservant $\overline{Z}^{\mathrm{sp}}$ et $\overline{\pi_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}^0)}^{\mathrm{sp}}$. Lorsque $n = 2$ et $\Gamma = \pi_1(S_g)$ où S_g est une surface de Riemann fermée orientée de genre $g \geq 2$, l'espace des orbites $D^2(\Gamma)$ a deux composantes connexes, qui sont toutes les deux des modèles de l'espace de Teichmüller T_g de la surface S_g. De ce fait et au moyen de φ_Γ, T_g s'identifie au semi-algébrique fermé $\pi'_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}^0) \simeq \pi_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}^0)$ (l'action de $\mathrm{O}(n,1)/\mathrm{SO}(n,1)$ sur $X'_{\mathbb{C}}(\Gamma)$ est triviale si n est pair et par conséquent $X'_{\mathbb{C}}(\Gamma) \simeq X_{\mathbb{C}}(\Gamma)$). Ainsi l'action du groupe des classes d'isotopie de difféomorphismes de S_g (identifié dans ce cas là à $\mathrm{Out}(\Gamma)$) par homéomorphisme semi-algébrique sur $T_g = \pi_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}^0)$, s'étend par homéomorphisme sur $\overline{T}_g^{\mathrm{sp}}$.

Soit F un corps réel non archimédien. Supposons que F possède un grand élément, c'est-à-dire un élément $b > 1$ tel que pour tout $a \in F$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a < b^n$. Alors sur $F^{*+} = \{a \in F \mid a > 0\}$ on a la fonction logarithme à base b, noté $\log_b$, où pour $a > 0$, le nombre $\log_b(a)$ est le réel défini par la relation

$$\frac{m'}{n} \leq \log_b(a) \leq \frac{m}{n} \quad \text{si} \quad b^{m'} \leq a^n \leq b^m,$$

avec $m, m' \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Voici quelques propriétés de cette fonction.

Si b' est un autre grand élément de F, alors $\log_b = \log_b(b') \log_{b'}$. La fonction $\log_b$ est croissante et elle est un homomorphisme du groupe multiplicatif F^{*+} dans le groupe additif $\mathbb{R}$, triviale sur $\mathbb{Q}^+ \subset F^{*+}$ (puisque F est non archimédien, pour tout $r \in \mathbb{Q}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $b^{-1} < r^n < b$ et par suite $\log_b(r) = 0$). En posant $\log_b(0) = -\infty$, ceci fait de $v_b = -\log_b |\cdot|$ une valuation de F compatible avec l'ordre d'anneau de valuation $\Theta_{v_b} = \{a \in F\,;\ \log_b(a) \leq 0\}$ et de groupe de valuation $v_b(F^*) \subset \mathbb{R}$, donc de rang 1. Notons que les anneaux de valuations de F compatibles avec l'ordre forment une chaîne totalement ordonnée pour l'inclusion dont Θ_{v_b} est l'élement maximal, et que si v en est une (non triviale) alors v et $\log_b$ sont liées par la relation suivante : pour tout $a \in F^*$,

on a :

$$\mathrm{Max}\big(0, \log_b |a|\big) = \inf_{p\in\mathbb{N}, q\in\mathbb{N}^*} \Big\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+ \,;\, pv(b) \leq qv(a) \Big\}.$$

Si F contient $\mathbb{R}$, une autre valuation de F compatible avec l'ordre — et qui nous sera particulièrement utile par la suite — est celle dont l'anneau de valuation est l'enveloppe convexe des réels dans F, c'est-à-dire $\Theta_v = \{x \in F\,;\ \exists r \in \mathbb{R},\ |x| \leq r\}$, son idéal maximal est $m_v = \{x \in F\,;\ \forall r \in \mathbb{R}^{*+},\ |x| < r\}$ (voir [BCR], 10.1.11). En général, cette valuation est de rang strictement supérieur à 1 ou encore $\Theta_v \subsetneq \Theta_{v_b}$.

3.2. Proposition. — *Tout point α de $\overline{Z'}^{\mathrm{sp}} \setminus Z$ donne une action sans point fixe de Γ par isométrie sur un $\mathbb{R}$-arbre T, quotient de $\mathbb{H}F(\alpha)^n$.*

Démonstration. — D'après 3.1, une des $|\operatorname{trace} \rho_\alpha(\nu)|$ est un grand élément dans $F(\alpha)$, soient $b = |\operatorname{trace} \rho_\alpha(\nu_0)|$ et $v_b = -\log_b |\ \ |$. Considérons le $v_b(F(\alpha)^*)$-arbre $T_{vb}F(\alpha)^n$ (défini dans la section 1), avec l'action :

$$(*) \qquad \nu \in \Gamma, \quad [x] \in T_{v_b}F(\alpha)^n, \quad \nu \cdot [x] = [(-1)^{\varepsilon(\rho_\alpha(\nu))} \cdot \rho_\alpha(\nu)x],$$

où ε est l'homomorphisme $\mathrm{SO}_F(n,1) \to \mathbb{Z}/2$ de noyau $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$.

C'est bien une action par isométrie sur $T_{v_b}F(\alpha)^n$, qui est sans point fixe puisque $v_b(b) = -1$ et avec la proposition 1.11. $\tau_{\nu 0} = 1$. Le groupe $v_b(F(\alpha)^*)$ est contenu dans $\mathbb{R}$. Par [MS], 2.2.13, on a un $\mathbb{R}$-arbre T, extension de $T_{v_b}F(\alpha)^n$, avec une action extension de (*) par isométrie sur T, sans point fixe. □

Remarquons que si α provient de $\overline{D^n(\Gamma)}^{\mathrm{sp}} \setminus \pi_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}^\circ)$, alors ρ_α peut être choisi dans $\mathfrak{R}^+_{F(\alpha)}$ puisque $\mathfrak{R}^+_{\mathbb{R}}$ est un semi-algébrique fermé et $\mathfrak{R}^0 \subset \mathfrak{R}^+_{\mathbb{R}}$. L'action (*) devient alors $\nu \cdot [x] = \rho_\alpha(\nu)[x]$. Dans ce qui suit on va montrer que ρ_α peut être choisi de sorte que cette action vérifie la propriété du « petit stabilisateur ». Pour les points frontières de $\overline{D^n(\Gamma)}^{\mathrm{sp}}$, on a la description un peu plus précise suivante :

3.3. Théorème. — *Tout point de $\overline{D^n(\Gamma)}^{\mathrm{sp}} \setminus \pi_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}^\circ)$ donne un $\mathbb{R}$-arbre T et une action de Γ par isométrie sur T, sans point fixe, telle que le stabilisateur de tout segment fermé non dégénéré de T (c'est-à-dire segment fermé avec des extrémités différentes) est un sous-groupe élémentaire de Γ.*

L'application $\pi_{\mathbb{R}} : \mathfrak{R}^n_{\mathbb{R}}(\Gamma) \to Z$ n'est pas propre. Pour la démonstration du théorème, une première difficulté sera surmontée lorsqu'on se

placera dans le cas d'une application propre. Rappelons que la distance hyperbolique dans $\mathbb{H}^n$ peut être donnée par l'une des deux formules suivantes : $\cosh(d_{\mathbb{H}}(x,y)) = -x \circ y$ ou $d_{\mathbb{H}}(x,y) = \log D(x,y)$, si

$$D(x,y) = \frac{1+t}{1-t} \quad \text{et} \quad t = \frac{\sqrt{-1-x\circ y}}{\sqrt{1-x\circ y}}.$$

3.4. Proposition. — *Soit s un entier supérieur ou égal à 2. Alors, pour tout $K > 0$, il existe $C_s(K) > 0$ tel que pour tous $g_1, \dots, g_s$ dans $\mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(n,1)$, on ait l'implication :*

$$\operatorname*{Sup}_{1\le i,j\le s} \left\{ |\operatorname{trace} g_i|, |\operatorname{trace} g_i g_j| \right\} \le K$$
$$\Longrightarrow \textit{ il existe } x \in \mathbb{H}^n \textit{ tel que } \sum_{i=1}^{i=s} D\big(x, g_i(x)\big) \le C_s(K).$$

Nous proposons ici une démonstration utilisant les constructions de la section 1, ainsi que les techniques du spectre réel. Pour cela on a besoin du lemme suivant :

3.5. Lemme. — *Soient $g_1, \dots, g_s$ des isométries d'un Λ-arbre T avec la propriété que chacune des isométries g_i et $g_i g_j$, pour $1 \le i < j \le s$, fixe au moins un point de T. Alors $g_1, \dots, g_s$ ont un point fixe commun.*

Démonstration. — Le cas $s = 2$ est le lemme 12 dans [M2]. Raisonnons par récurrence sur s. Supposons que le lemme est vrai pour $s \ge 2$ et soient $g_1, \dots, g_{s+1}$ comme dans le lemme. Soient x_1 un point fixe commun à $g_1, \dots, g_s$, x_2 un point fixe commun à $g_2, \dots, g_{s+1}$ et x un point fixe commun à g_1, g_{s+1}. Dans l'arbre T il existe un segment fermé unique reliant x au segment $[x_1, x_2]$. Il en résulte qu'il existe $y \in [x_1, x_2]$ avec $[x_1, x_2] \cap [y, x] = \{y\}$ et $[x_1, x] \cap [x_2, x] = [y, x]$. Une isométrie de T qui fixe les deux extrémités d'un segment fermé de T, fixe tous les point du segment. A l'aide de cet argument, y est un point fixe commun à $g_1, \dots, g_{s+1}$. □

Démonstration de la proposition 3.4. — On fait un raisonnement par l'absurde. Le contraire entraîne qu'il existe $K > 0$, des isométries $(g_{1m}, \dots, g_{sm}) \in (\mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(n,1))^s$ et une suite infinie telle que :

$$\operatorname*{Sup}_{1\le i,j\le s} \left\{ |\operatorname{trace} g_{im}|, |\operatorname{trace} g_{im} g_{jm}| \right\} \le K,$$

$$\lim_{m\to\infty} \inf_{x\in\mathbb{H}^n} \left\{ \sum_{i=1}^{i=s} D\big(x, g_{im}(x)\big) \right\} = +\infty.$$

L'ensemble $W = (\mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(n,1))^s$ est un semi-algébrique fermé dans la variété algébrique $X = (\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}(n,1))^s \subset \mathbb{R}^{s(n+1)^2}$. On considère la famille B des semi-algébriques $S \subset W$ tel que $(g_{1m}, \ldots, g_{sm}) \in S$ sauf pour un nombre fini de m. Alors B est une base de filtre de l'algèbre de Boole des parties semi-algébriques de X. On a donc un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ avec $\mathfrak{F} \supset B$ et pour tout $A \in \mathfrak{F}$, il existe $S \in B$ tel que $S \subset A$. A l'ultrafiltre $\mathfrak{F}$ correspond un point $\alpha = \alpha_{\mathfrak{F}} \in \widetilde{X}$. Il est clair que $\alpha \in \widetilde{W}$. L'interprétation de $\alpha : A(X) \to F(\alpha)$ donne des isométries $g_1(\alpha), \ldots, g_s(\alpha)$ de $\mathbb{H}F(\alpha)^n$, vérifiant les deux conditions suivantes :

1) $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{1\le i,j\le s} \{|\operatorname{trace} g_i(\alpha)g_j(\alpha)|\} \le K$;

2) $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{x\in\mathbb{H}F(\alpha)^n} \Big\{\sum_{i=1}^{i=s} D\big(x, g_i(\alpha)x\big)\Big\} \in F(\alpha)$
est infiniment grand relativement à $\mathbb{R} \subset F(\alpha)$.

En effet, l'ensemble

$$S = \Big\{(g_1, \ldots, g_s) \in W\,;\ \operatorname*{Sup}_{1\le i,j\le s} \big\{|\operatorname{trace} g_i|, |\operatorname{trace} g_i g_j|\big\} \le K\Big\}$$

est un semi-algébrique avec $S \in B \subset \mathfrak{F}$. D'où $\alpha \in \widetilde{S}$ et par conséquent 1). Si 2) n'est pas vrai, on a un entier N tel qu'il existe $x \in \mathbb{H}F(\alpha)^n$ avec $\sum_{i=1}^{i=s} D(x, g_i(\alpha)x) \le N$. En posant

$$S = \Big\{(g_1, \ldots, g_s) \in W\,;\ \exists x \in \mathbb{H}^n,\ \sum_{i=1}^{s} D(x, g_i x) \le N\Big\},$$

on voit que α est dans $\widetilde{S}$, ce qui est contraire à la définition de α.

Soit maintenant v la valuation de $F(\alpha)$ dont l'anneau de valuation Θ_v est l'enveloppe convexe des réels dans $F(\alpha)$. Alors $g_1(\alpha), \ldots, g_s(\alpha)$ sont des isométries de $T_vF(\alpha)^n$ avec :

(a) $v(\operatorname{trace} g_i(\alpha)) = v(\operatorname{trace} g_i(\alpha)g_j(\alpha)) = 0$, pour $1 \le i < j \le s$;

(b) $v\Big(\displaystyle\operatorname*{inf}_{x\in\mathbb{H}F(\alpha)^n} \Big\{\sum_{i=1}^{s} D(x, g_i(\alpha)x)\Big\}\Big) < 0$.

La condition (a) entraîne que chacune des isométries $g_i(\alpha)$, $g_i(\alpha)g_j(\alpha)$ fixe un point dans $T_vF(\alpha)^n$ (voir proposition 1.11).

La condition (b) entraîne que pour tout $x \in \mathbb{H}F(\alpha)^n$, il existe i tel que $v(D(x, g_i(\alpha)x)) < 0$ ou encore $d_v([x], g_i(\alpha)[x]) \ne 0$. Ceci contredit le lemme 3.5. $\square$

La fonction $C_s(K)$ dans la proposition peut être choisie semi-algébrique continue. En effet, $C_s(K)$ est obtenue à partir d'une formule du premier ordre du langage des corps ordonnés (voir [BCR], 2.2.4 et 2.6.1). Soit $C_k : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction semi-algébrique continue telle que pour tout $K > 0$, la fonction $C_k(K)$ vérifie la proposition. Considérons l'ensemble :

$$L_{C_k} = \Big\{\rho \in \mathfrak{R}_{\mathbb{R}}^n(\Gamma)\,;\ \sum_{i=1}^{k} D(\xi_0, \rho(\nu_i)\xi_0) \\ \leq C_k\big(\operatorname*{Sup}_{1\leq i,j\leq k}\{|\operatorname{trace}\rho(\nu_i)|, |\operatorname{trace}\rho(\nu_i\nu_j)|\}\big)\Big\}.$$

Alors L_{C_k} est une partie semi-algébrique fermée de $\mathfrak{R}_{\mathbb{R}}^n(\Gamma)$.

3.6. Proposition. — *L'application $\pi_{\mathbb{R}|L_{C_k}} : L_{C_k} \to Z$ est semi-algébrique continue propre et surjective avec $\pi_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}^0) = \pi_{\mathbb{R}|L_{C_k}}(L_{C_k} \cap \mathfrak{R}^0)$.*

Démonstration. — Le groupe $\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(n,1)$ opère transitivement sur $\mathbb{H}^n$ et $C_k(\cdot)$ vérifie la proposition 3.4. Donc, pour tout $\rho \in \mathfrak{R}_{\mathbb{R}}^n(\Gamma)$, il existe $h \in \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(n,1)$ tel que $h^{-1}\rho h$ soit dans L_{C_k}. Ceci montre d'une part que $\pi_{\mathbb{R}}(L_{C_k}) = Z$ et donc la surjectivité de $\pi_{\mathbb{R}|L_{C_k}}$, et d'autre part que $\pi_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}^0) = \pi_{\mathbb{R}|L_{C_k}}(L_{C_k} \cap \mathfrak{R}^0)$ puisque $\mathfrak{R}^0$ est stable par l'action par conjugaison de $\mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(n,1)$ sur $\mathfrak{R}_{\mathbb{R}}^n(\Gamma)$. Par un calcul simple en géométrie hyperbolique, on montre que si $g = (a_{ij}) \in \mathrm{SO}_{\mathbb{R}}^+(n,1)$ alors

$$\|g\|^2 = \sum_{ij} |a_{ij}|^2 = n + 1 + 4\sinh^2\big(d_{\mathbb{H}}(g\xi_0, \xi_0)\big).$$

Ceci montre que $\pi_{\mathbb{R}|L_{C_k}}$ est propre. □

Le résultat qui suit concerne les fonctions semi-algébriques propres continues.

3.7. Proposition. — *Soient X, Y deux variétés algébriques réelles, $W \subset X$ une partie semi-algébrique fermée et $f : W \to Y$ une application semi- algébrique propre continue. Alors pour tout sous-ensemble A de W on a : $\beta \in \overline{f(A)}^{\mathrm{sp}} \setminus f(A)$ entraîne qu'il existe $\alpha \in \overline{A}^{\mathrm{sp}} \setminus A$ tel que $\tilde{f}(\alpha) = \beta$ et $F(\alpha)$ est une extension de $F(\beta)$, archimédien sur $F(\beta)$.*

Démonstration. — On considère la famille B formée par toutes les parties semi-algébriques de W contenant A et par tous les $f^{-1}(\mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ est une partie semi-algébrique ouverte de Y avec $\beta \in \widetilde{\mathcal{U}}$. La famille B est une

sous-base de filtre de l'algèbre de Boole des parties semi-algébrique de X, et engendre un ultrafiltre $\mathfrak{F}$. A cet ultrafiltre correspond un $\alpha_{\mathfrak{F}} \in \widetilde{X}$ qui vérifie les deux conditions :

1) $\alpha_{\mathfrak{F}} \in \overline{A}^{\widetilde{W}}$;

2) $\tilde{f}(\alpha_{\mathfrak{F}})$ tend vers β.

Soit $\alpha = r(\alpha_{\mathfrak{F}}) \in \mathrm{Max}(\widetilde{W})$ (voir la proposition 2.1. d)). Alors de 1), on tire $\alpha \in \overline{A}^{\mathrm{sp}}$ et de 2), on tire $\tilde{f}(\alpha) = \beta$ (puisque $\tilde{f}$ est fermée comme f) et par suite α appartient à $\overline{A}^{\mathrm{sp}} \setminus A$. Les corps $F(\alpha)$ et $F(\beta)$ peuvent être choisis de sorte que $F(\alpha)$ contienne $F(\beta)$ et $F(\alpha)$ soit archimédien sur $F(\beta)$. En effet, tout élément de $F(\beta)$ (resp. $F(\alpha)$) est la valeur en β (resp. α) d'une fonction semi-algébrique continue sur Y (resp. W) (voir [BCR], 7.3.5). La composition avec f induit un homomorphisme injective $F(\beta) \to F(\alpha)$ et comme f est propre, on a $F(\alpha)$ archimédien sur $F(\beta)$. □

Le lemme qui suit est annaloge au lemme 2.7 dans [M1]. Avec les notations de la section 1 on a :

3.8. Lemme. — *Si un élément g de $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ fixe deux points distincts $[x],[y]$ de T_vF^n, alors il existe $h \in \mathrm{SO}_F^+(n,1)$ ne dépendant que de $[x]$ et $[y]$ tel que l'on ait :*

$$h^{-1}gh = (a_{ij})_{0\le i\le n 0\le j\le n} \in \mathrm{SO}_\Theta^+(n,1),$$

$$d_v\big([x],[y]\big) \le \inf_{\substack{2\le i\le n\\ 2\le j\le n}} \big\{\tfrac{1}{2}v(a_{01}), v(a_{0j}), v(a_{i1})\big\}.$$

Démonstration. — Le groupe $\mathrm{SO}_F^+(n,1)$ opère transitivement sur les droites hyperboliques de $\mathbb{H}F^n$ et sur $\mathbb{H}F^n$. Il existe donc $h \in \mathrm{SO}_F^+(n,1)$ tel que $h(x) = \xi_0$ et $h(y) = \xi = (\alpha, -\alpha^{-1}, 0, \dots, 0)$ avec $v(\alpha) > 0$ et

$$v(\alpha) = d_v([x],[y]) = d_v([\xi_0],[\xi]).$$

Les égalités $g([x]) = [x]$ et $g([y]) = [y]$ impliquent $h^{-1}gh([\xi_0]) = [\xi_0]$ et $h^{-1}gh([\xi]) = [\xi]$ ou encore $h^{-1}gh(L(\xi_0)) = L(\xi_0)$ et $h^{-1}gh(L(\xi)) = L(\xi)$. Il en résulte que l'on a :

1) $h^{-1}gh(e_i) \in L(\xi_0)$ pour $0 \le i \le n$;

2) $h^{-1}gh(\alpha^{-1}e_1) \in L(\xi)$;

3) $h^{-1}gh(e_i) \in L(\xi)$ pour $2 \le i \le n$.

Si $(a_{ij})_{0\leq i,j\leq n} = h^{-1}gh$, alors la propriété 1) implique $v(a_{ij}) \geq 0$ pour tous i, j ; la propriété 2) implique $v(\alpha^{-1}a_{01}) \geq v(\alpha)$ et $v(\alpha^{-1}a_{i1}) \geq 0$ pour $i = 2, \ldots, n$ et la propriété 3) implique $v(a_{0j}) \geq v(\alpha)$ pour $j = 2, \ldots, n$. D'où le résultat. □

Démonstration du théorème 3.3. — En s'accordant avec les propositions 3.6 et 3.7, à $\beta \in \overline{D^n(\Gamma)}^{\mathrm{sp}} \backslash \pi_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}^0)$ est associé $\alpha \in \overline{L_{C_k} \cap \mathfrak{R}^0}^{\mathrm{sp}} \backslash L_{C_k} \cap \mathfrak{R}^0$ avec $\widetilde{\pi}_{\mathbb{R}}(\alpha) = \beta$. Donc α appartient à $\overline{\mathfrak{R}^0}^{\mathrm{sp}} \setminus \mathfrak{R}^0 \subset \overline{\mathfrak{R}^0_{\mathbb{R}}}^{\mathrm{sp}} \setminus \mathfrak{R}^+_{\mathbb{R}}$ et à α correspond une représentation $\rho_\alpha : \Gamma \to \mathrm{SO}^+_{F(\alpha)}(n,1)$, où $F(\alpha) \supset \mathbb{R}$ est non archimédien, archimédien sur $\mathbb{R}[\mathrm{trace}\,\rho_\alpha(\nu)\,;\, \nu \in \Gamma] \subset F(\beta)$. Si on désigne par v la valuation de $F(\alpha)$ dont l'anneau de valuation Θ_v est l'enveloppe convexe des réels dans $F(\alpha)$, alors Γ agit sans point fixe sur le $F(\alpha)^*/\Theta_v^\times$-arbre $T_vF(\alpha)^n$ par $\nu \in \Gamma$, $[x] \in T_vF(\alpha)^n$, $\nu[x] = \rho_\alpha(\nu)[x]$. Soit $[[x],[y]] \subset T_vF(\alpha)^n$ un segment fermé avec $[x] \neq [y]$. On va montrer que $\Gamma_0 = \mathrm{st}([[x],[y]])$ est un sous-groupe élémentaire de Γ.

Soit $h \in \mathrm{SO}^+_{F(\alpha)}(n,1)$ comme dans le lemme 3.8. Le point $\alpha_h \in \widetilde{\mathfrak{R}}^+_{\mathbb{R}}$, qui correspond à la représentation $h^{-1}\rho_\alpha h : \Gamma \to \mathrm{SO}^+_{F(\alpha)}(n,1)$ définie par $\nu \mapsto h^{-1}\rho_\alpha(\nu)h$, est dans l'adhérence de $\mathfrak{R}^0$ dans $\widetilde{\mathfrak{R}}^+_{\mathbb{R}}$.

En effet $h \in \mathrm{SO}^+_{F(\alpha)}(n,1)$ correspond à $H : S \to \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(n,1)$, avec $\alpha \in \widetilde{S}$, H semi-algébrique continue et $\widetilde{H}(\alpha) = h$. On peut supposer S ouvert dans $\mathfrak{R}^+_{\mathbb{R}}$. On a alors $k : S \to \mathfrak{R}^+_{\mathbb{R}}$, $k(\rho) = H(\rho)^{-1}\rho H(\rho)$, semi-algébrique continue qui vérifie $\tilde{k}(\alpha) = \alpha_h$. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\widetilde{\mathfrak{R}}^+_{\mathbb{R}}$ contenant α_h. Alors $\tilde{k}^{-1}(\mathcal{U}) \subset S$ est un voisinage ouvert de α dans $\widetilde{\mathfrak{R}}^+_{\mathbb{R}}$, donc $\tilde{k}^{-1}(\mathcal{U})$ rencontre $\mathfrak{R}^0$, et $\mathcal{U}$ rencontre $\mathfrak{R}^0$. Le reste de la démonstration est un raisonnement par l'absurde. Supposons que Γ_0 est non élémentaire. Le sous-groupe

$$\overline{\Gamma}_0 = \{\nu \in \Gamma \mid \nu \cdot [x] = [x] \text{ et } \nu \cdot [y] = [y]\}$$

est d'indice au plus deux dans Γ_0, donc non élémentaire et par conséquent contient un sous-groupe libre de rang 2, soit $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \subset \overline{\Gamma}_0$. Vu la définition de v, on a $\Theta_v/m_v = \mathbb{R}$. La fonction h vérifie : pour tout ν dans $\overline{\Gamma}_0$, $h^{-1}\rho_\alpha(\nu)h = (a_{ij}(\nu)(\alpha_h))_{0\leq i,j\leq n}$ est dans $\mathrm{SO}^+_{\Theta_v}(n,1)$ avec

$$a_{01}(\nu)(\alpha_h),\ a_{0j}(\nu)(\alpha_h),\ a_{i1}(\nu)(\alpha_h) \in m_v, \quad 2 \leq i \leq n,\ 2 \leq j \leq n.$$

Donc pour tout $\nu \in \overline{\Gamma}_0$, la matrice $\overline{h^{-1}\rho_\alpha(\nu)h} = \left(\overline{a_{ij}(\nu)}(\alpha_h)\right)_{0\leq i,j\leq n}$, où $\overline{a_{ij}(\nu)}(\alpha_h)$ est le projeté dans $\mathbb{R}$ de $a_{ij}(\nu)(\alpha_h)$, est de la forme

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ r & p^{-1} & Y \\ X & 0 & A \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(n,1).$$

Autrement, pour tout $\nu \in \overline{\Gamma}_0$, la transformation $\overline{h^{-1}\rho_\alpha(\nu)h}$ appartient au sous-groupe parabolique standard de $\mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(n,1)$, noté P. Soit $\rho_\infty : \langle\gamma_1,\gamma_2\rangle \to \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(n,1)$ telle que $\rho_\infty(\nu) = \overline{h^{-1}\rho_\alpha(\nu)h}$. Alors $\rho_\infty(\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle)$ est contenu dans P. Le groupe Γ est finiment engendré, donc les $a_{ij}(\gamma_1)$, $a_{ij}(\gamma_2)$ sont des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{R}^n_{\mathbb{R}}(\Gamma)$. Pour tout entier $n > 0$, considérons l'ouvert de $\widetilde{\mathfrak{R}}^+_{\mathbb{R}}$

$$\mathcal{U}_n = \Big\{\beta \in \widetilde{\mathfrak{R}}^+_{\mathbb{R}}\ ;\ \big|a_{ij}(\gamma_k)(\beta) - \overline{a_{ij}(\gamma_k)}(\alpha_h)\big| < \frac{1}{n},\ k = 1,2,\ 0 \le i,j \le n\Big\}.$$

On a $\alpha_h \in \mathcal{U}_n$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient une suite $\rho_n \in \mathfrak{R}^0$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n(\gamma_k) = \rho_\infty(\gamma_k)$ pour $k = 1,2$. On en conclut que ρ_∞ appartient à l'adhérence de l'ensemble des représentations discrètes et fidèles de $\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle$ dans $\mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(n,1)$. Ce dernier étant un fermé [Wi], conduit à la contradiction puisque les seuls sous-groupes discrets de P sont les groupes élémentaires [Wi] et que $\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle$ ne l'est pas. Il reste à passer d'un Λ-arbre à un $\mathbb{R}$-arbre : c'est le lemme 3.9 qui s'en charge. □

Le lemme qui suit permet le passage d'un Λ-arbre à un $\mathbb{R}$-arbre (pour Λ assez régulier). Nous suivons la démonstration de 3.7 [M1], en la complètant sur un point qui n'est pas évident.

3.9. Lemme. — *Soit $\Gamma \subset \mathrm{SO}^+_{\mathbb{R}}(n,1)$ un sous-groupe discret de type fini non élémentaire. Supposons donnée une action de Γ par isométrie sur un Λ-arbre T où Λ est de rang fini et $2\Lambda = \Lambda$, vérifiant les deux propriétés :*

(i) *l'action est sans point fixe*

(ii) *l'action est telle que le stabilisateur de tout segment non dégénéré de T est un sous-groupe élémentaire de Γ.*

Alors il existe une action de Γ par isométrie sur un $\mathbb{R}$-arbre, extension d'un arbre quotient de T, vérifiant les propriétés (i) *et* (ii).

Démonstration. — A chacune des isométries $\nu \in \Gamma$, sont associés : la distance de translation $\tau_\nu = \inf_{x\in T} d(x,\nu x) \in \Lambda$ (voir [AB], chap. 2) (l'hypothèse $2\Lambda = \Lambda$ supprimant le cas d'une inversion), et son axe $A_\nu = \{x \in T \mid d(x,\nu x) = \tau_\nu\}$. Alors A_ν est un segment non vide de T, qui est Γ-invariant, et qui rencontre tout segment $[x,\nu x]$, $x \in T$ (voir [AB], 6.6). A l'action de Γ sur T est associée la fonction longueur $\tau : \Gamma \to \Lambda$ définie par $\nu \mapsto \tau_\nu$. D'après le lemme 3.5, cette action a un point fixe si et seulement si τ est identiquement nulle. Soit Λ_1 le plus petit sous-groupe isolé de Λ contenant tout les τ_ν. Alors $\Lambda_1 \neq (0)$ est de rang fini avec $2\Lambda_1 = \Lambda_1$. On

a un Λ/Λ_1-arbre quotient $T \to T'$ où $[x] = [y]$ si $d(x,y) \in \Lambda_1$. L'action induite sur T' a pour fonction longueur $\tau' : \Gamma \xrightarrow{\tau} \Lambda \to \Lambda/\Lambda_1$. On a $\tau' = 0$. Soit T_1 l'espace Λ_1-métrique, image réciproque par la projection $T \to T'$, d'un point fixe dans T'. Alors T_1 est une partie convexe de T, Γ-invariante. La restriction de l'action de Γ à T_1 a pour fonction longueur $\tau_1 = \tau$ (voir [MS], 2.2.12). Maintenant, T et l'action de Γ dans le lemme sont remplacés par le Λ_1-arbre T_1 et l'action restriction de Γ à T_1. Soient $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$ le plus grand sous-groupe isolé de Λ_1, et T_2 le Λ_1/Λ_2-arbre quotient où $[x] = [y]$ si $d(x,y) \in \Lambda_2$. On a une action induite sur T_2 avec la fonction longueur $\tau_2 : \Gamma \xrightarrow{\tau_1} \Lambda_1 \to \Lambda_1/\Lambda_2$. Vu le choix de Λ_1, on a $\tau_2 \neq 0$. Le groupe archimédien Λ_1/Λ_2 s'identifie à un sous-groupe de $\mathbb{R}$ et par [MS], 2.2.13, on a un $\mathbb{R}$-arbre $T_{2\mathbb{R}}$, extension de T_2, et une action extension de Γ sur $T_{2\mathbb{R}}$. Maintenant, pour montrer le lemme il suffit de montrer que l'action de Γ sur T_2 vérifie la propriété (ii).

Supposons par l'absurde qu'il existe $x, y \in T_1$ avec $t = d(x,y) \notin \Lambda_2$ tels que $\Gamma_0 = \mathrm{st}([[x],[y]]) \subset \Gamma$ n'est pas élémentaire. Le sous-groupe $\overline{\Gamma}_0 = \{\nu \in \Gamma\,;\ \nu[x] = [x] \text{ et } \nu[y] = [y]\}$ est au plus d'indice 2 dans Γ_0, donc non élémentaire et par conséquent contient un sous-groupe libre de rang 2, soit $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \subset \overline{\Gamma}_0$. Notons $\varepsilon = \sup\limits_{i=1,2} \{d(x, \gamma_i x), d(y, \gamma_i y)\} \in \Lambda_2$. Supposons par exemple $t > 5\varepsilon$. Les segments $[x, \gamma_1 x]$ et $[y, \gamma_1 y]$ ne se rencontrent pas, tous deux contiennent un point de $A_{\gamma 1}$. Par convexité, le segment $S_{\gamma 1}$ connectant ces deux points est contenu dans $A_{\gamma 1}$. Puisque $\gamma_i x$ est proche de x et $\gamma_i y$ est proche de y pour $i = 1, 2$, les segments $S_{\gamma 1}$ et $S_{\gamma 2}$ ont une intersection avec $[x,y]$ de longueur strictement supérieure à 3ε. Ainsi $A_{\gamma 1} \cap A_{\gamma 2}$ contient un segment de longueur $> 3\varepsilon$. Avec $2\tau_{1\gamma 1} + \tau_{1\gamma 2} \leq 3\varepsilon$, on conclut que l'un des deux sous-groupes libres $\langle [\gamma_1, \gamma_2], [\gamma_1^2, \gamma_2] \rangle$, $\langle [\gamma^{-1}, \gamma_2], [\gamma_1^{-2}, \gamma_2] \rangle$, fixe un segment non dégénéré dans $A_{\gamma 1} \cap A_{\gamma 2} \subset T_1$ (on a l'un ou l'autre sous-groupe suivant le sens de déplacement des deux translations $\gamma_{1|A_{\gamma 1}}$ et $\gamma_{2|A_{\gamma 2}}$). Ceci contredit l'hypothèse. □

3.10. *Remarque.* — Dans la démonstration du théorème 3.3, un tel choix de valuation sur $F(\alpha)$ sert en particulier à visualiser la propriété (ii) du lemme 3.9 pour l'action de Γ. Une autre valuation (compatible avec l'ordre) donnera (modulo les constructions du lemme) un $\mathbb{R}$-arbre isométrique avec une action semblable. En effet, avec les notations du lemme 3.9, soient v_i, $i = 1, 2$ deux valuations de $F(\alpha)$ compatibles avec l'ordre d'anneaux de valuation Θ_{vi}. Alors par exemple Θ_{v1} est contenu dans Θ_{v2}. On a donc la projection entre les groupes

de valuations $F(\alpha)^*/\Theta_{v_1}^\times = \Lambda_{v_1} \to \Lambda_{v_2} = F(\alpha)^*/\Theta_{v_2}^\times$, préservant l'ordre au sens large. Comme $F(\alpha)$ est archimédien sur $\mathbb{R}[\operatorname{trace}\rho_\alpha(\nu)\,;\,\nu \in \Gamma]$, on a $(\Lambda_{vi})_1 = \Lambda_{vi}$ et par suite $(T_{vi}F(\alpha)^n)_1 = T_{vi}F(\alpha)^n$. L'application composé $\Lambda_{v1} \to \Lambda_{v2} \to \Lambda_{v2}/(\Lambda_{v2})_2$ a pour noyau le plus grand sous-groupe isolé de Λ_{v1}, comme l'est $(\Lambda_{v2})_2 \subset \Lambda_{v2}$. Les deux groupes archimédiens $\Lambda_{vi}/(\Lambda_{vi})_2$, sont donc isomorphes pour $i = 1, 2$, et par suite les deux $\mathbb{R}$-arbres $(T_{vi}F(\alpha)^n)_{2\mathbb{R}}$ sont isométriques. □

Terminons cette section en donnant une comparaison entre $\overline{D^n(\Gamma)}^{\mathrm{sp}}$ (resp. $\overline{Z'}^{\mathrm{sp}}$) et le compactifié de Morgan $\widehat{D^n}(\Gamma)$ (resp. $\widehat{Z'}$ dans [M1]. La famille $\{\operatorname{trace}_\ell\}_{\ell\in\varphi}$, où φ est l'ensemble des classes de conjugaison dans Γ, engendre $A(X_{\mathbb{R}}(\Gamma))$ comme une $\mathbb{R}$-algèbre. De ce fait, si l'on désigne par P^φ l'espace projectif $[0,+\infty[^\varphi - 0/\sim$, où l'on a $(x_\ell)_{\ell\in\varphi} \sim (y_\ell)_{\ell\in\varphi}$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(x_\ell)_{\ell\in\varphi} = (\lambda y_\ell)_{\ell\in\varphi}$, l'application $\theta : X_{\mathbb{R}}(\Gamma) \to P^\varphi$ définie par $x \mapsto \log(|\operatorname{trace}_\ell x| + 2)_{\ell\in\varphi}$ est continue, et l'adhérence de son ensemble image est compacte (voir [MS], § 1). L'espace $\widehat{D^n}(\Gamma)$ (resp. $\widehat{Z'}$) est l'adhérence de $\theta(\pi_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}^\circ))$ (resp. $\theta(Z)$) dans P^φ. L'idée est de prolonger θ à $\overline{X_{\mathbb{R}}(\Gamma)}^{\mathrm{sp}} = \operatorname{Spec}_r^m A(X_{\mathbb{R}}(\Gamma))$ de façon continue. Soit $r = 2 + \sum f_i^2$, où $\{f_i\}_{i1,\dots,N}$ est un système générateur de $A(X_{\mathbb{R}}(\Gamma))$, choisi parmi les $\operatorname{trace}_\ell$, pour $\ell \in \varphi$. Pour tout $\ell \in \varphi$, notons pour $\alpha \in \overline{X_{\mathbb{R}}(\Gamma)}^{\mathrm{sp}} \setminus X_{\mathbb{R}}(\Gamma)$

$$\ell_\ell(\alpha) = \operatorname{Max}\big(0, \log_{r(\alpha)}(\operatorname{trace}_\ell \alpha|)\big)$$

($r(\alpha)$ est un grand élément dans $F(\alpha)$) et pour $\alpha \in X_{\mathbb{R}}(\Gamma)$,

$$\ell_\ell(\alpha) = \frac{\log(|\operatorname{trace}_\ell \alpha| + 2)}{\log(r(\alpha))}.$$

3.11. Proposition. — *L'application $\tilde\theta : \overline{X_{\mathbb{R}}(\Gamma)}^{\mathrm{sp}} \to P^\varphi$ telle que $\tilde\theta(\alpha) = (\ell_\ell(\alpha))_{\ell\in\varphi}$ est bien définie, indépendante du choix de r et continue. Par conséquent, elle envoie $\overline{Z'}^{\mathrm{sp}}$ sur $\widehat{Z'}$ et $\overline{D^n}(\Gamma)^{\mathrm{sp}}$ sur $\widehat{D^n}(\Gamma)$.*

Démonstration. — Pour tout $\alpha \in \overline{X_{\mathbb{R}}(\Gamma)}^{\mathrm{sp}} \setminus X_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, l'élément $(\ell_\ell(\alpha))_{\ell\in\varphi} \in [0,+\infty[^\varphi$ est différent de 0 puisque l'une des $|\operatorname{trace}_\ell \alpha| \in F(\alpha)$ est un grand élément. Donc $\tilde\theta$ est bien définie. Le choix d'un autre r' revient à multiplier $(\ell_\ell(\alpha))_{\ell\in\varphi} \in [0,+\infty[^\varphi$ par $\log_{r'(\alpha)}(r(\alpha)) > 0$. Pour tout $\ell \in \varphi$, l'application $\ell_\ell : \overline{X_{\mathbb{R}}(\Gamma)}^{\mathrm{sp}} \to [0,+\infty[$ est continue puisque

$$\ell_\ell^{-1}[0,s] = \bigcap_{m/n>s} \Big\{\alpha \in \overline{X_{\mathbb{R}}(\Gamma)}^{\mathrm{sp}} / \big(|\operatorname{trace}_\ell \alpha| + 2\big)^n \le r^m(\alpha)\Big\},$$

$$\ell_\ell^{-1}[s,+\infty[= \bigcap_{m/n>s} \Big\{\alpha \in \overline{X_{\mathbb{R}}(\Gamma)}^{\mathrm{sp}} / \big(|\operatorname{trace}_\ell \alpha| + 2\big)^n \ge r^m(\alpha)\Big\}.$$

Par conséquent, l'application $\ell : \alpha \mapsto (\ell_\ell(\alpha))_{\ell\in\varphi} \in [0,+\infty[^\varphi$ est continue. Comme ℓ est un relevé de $\tilde{\theta}$,cela montre que $\tilde{\theta}$ est continue. □

Remarquons que l'action sur le $\mathbb{R}$-arbre, obtenue à partir d'un point $\alpha \in \overline{D^n(\Gamma)}^{\mathrm{sp}} \setminus \pi_{\mathbb{R}}(\mathfrak{R}^0)$ (resp. $\alpha \in \overline{Z'}^{\mathrm{sp}} \setminus Z$) (voir les démonstrations de 3.3 et 3.9) a pour fonction longueur τ, vérifiant $\tilde{\theta}(\alpha) = (\tau_\ell)_{\ell\in\varphi} \in P^\varphi$. A noter aussi que $\mathrm{Out}(\Gamma)$ agit sur P^φ par $[\mu]\cdot(x_\ell)_{\ell\in\varphi} = (x_{\mu(\ell)})_{\ell\in\varphi}$, et que $\tilde{\theta}$ est $\mathrm{Out}(\Gamma)$-invariante, c'est-à-dire vérifie $\tilde{\theta}([\mu]\cdot\alpha) = [\mu]\cdot\tilde{\theta}(\alpha)$.

BIBLIOGRAPHIE

[AB] R. ALPERIN, H. BASS, Length functions of group actions on Λ–Trees, Combinatorial Group Theory and Topology (S.M. Gersten and J.R. Stallings, eds.), Ann. of Math. Studies, vol. 111, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987, 265–378.

[Br1] G.-W. BRUMFIEL, The real spectrum compactification of Teichmüller space, Contemp. Math., 74 (1988), 51–75.

[Br2] G.-W. BRUMFIEL, The tree of non archimediean hyperbolic plane, Contemp. Math., 74 (1988), 83–106.

[BCR] J. BOCHNAK, M. COSTE, M.-F. ROY, Géométrie algébrique réelle, Springer–Verlag.

[CC] M. COSTE, M. CARRAL, Normal spectral spaces and their dimensions, Journal of Pure and applied Algebra, 30 (1983), 227–235.

[FLP] A. FATHI, F. LAUDENBACH, V. POENARU, Travaux de Thurston sur les surfaces, Astérisque, (1979), 66–67.

[He] H. HELLING, Diskrete untergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, Invent. Math., 17 (1972), 217 – 229.

[M1] J.-W. MORGAN, Group actions on trees and compactification of the space of classes of $\mathrm{SO}(n,1)$ representations, Topology, 25 (1986), 1–33.

[M2] J.-W. MORGAN, Λ–Trees and their applications., Bulletin (New series) of the American Mathematical Society, 26, number 1 (January 1992).

[MS] J.-W. MORGAN, P.-B. SHALEN, Valuation trees, and degenerations of hyperbolic structures, Annals of Math., 120 (1984), 401–476.

[P] C. PROCESI, The invariant theory of $n \times n$ matrices, Advances in Mathematics, 19 (1976), 306–381.

[SS] M. SEPPÄLÄ, T. SORVALI, Affine coordinates for Teichmüller spaces, Ann. Math., 284 (1989), 165–176.

[S] T. SPRINGER, Invariant Theory, Lecture notes in Mathematics, 585, Springer–Verlag, New York, 1977.

[Sh] M. SHIOTA, Piecewise Linearisation of subanalytic fonctions II, Lecture notes in Mathematics, 1420, 247–307.

[ShY] M. SHIOTA, M. YOKOI, Triangulations of Subanalytic Sets and Locally Subanalytic Manifolds, RIMS–454.

[Wi] N.-J. WIELENBERG, Discrete Mœbius groups : Fondamental polyhedra and convergence, American Journal of Mathematics, vol. 99, n° 4, p. 861–877.

Manuscrit reçu le 7 juin 1993,
révisé le 23 novembre 1993.

Taoufik BOUZOUBAA,
Université de Rennes I
IRMAR
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex (France).