ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ VOROS

Résurgence quantique

Annales de l'institut Fourier, tome 43, nº 5 (1993), p. 1509-1534
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_5_1509_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 5 (1993), 1509–1534

RÉSURGENCE QUANTIQUE

par André VOROS

Dans l'Écalle est plus simple,...

B. Malgrange, exposé oral sur les travaux d'Écalle, IHES, nov. 1982 (cf. [17]).

1. Introduction.

Nous présentons une revue (version remaniée de [1]) de notre analyse résurgente de la mécanique quantique [2]–[6]. Il s'agit ici d'étudier la divergence et la resommation des développements semi-classiques (séries asymptotiques dans la constante de Planck $\hbar$), dans le prolongement d'idées de Dingle [7] et Balian–Bloch [8], et plus indirectement de considérations similaires élaborées pour les séries perturbatives [9].

En principe, toutes sortes de problèmes quantiques peuvent donner lieu à des développements semi-classiques, puis à une analyse résurgente de ceux-ci. Néanmoins, cet exposé se limitera à un survol de la théorie spectrale et plus précisément des *états liés* (spectre discret). Nous nous attacherons plus précisément à des spectres quantiques purement discrets de la forme :

$$0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots, \qquad \lambda_k \uparrow +\infty, \tag{1.1}$$

issus d'opérateurs linéaires aux dérivées partielles elliptiques positifs sur un espace de Hilbert.

Mots-clés : Résurgence – Asymptotique semi-classique – Fonctions spectrales – Équations fonctionnelles.
Classification A.M.S. : 81C05 – 35P20 – 41A60 – 40G10.

Le caractère le plus marquant d'un tel spectre est sa croissance *tempérée* (loi de Weyl) :

$$\#\{\lambda_k \leq \lambda\} = \mathrm{O}(\lambda^\rho) \text{ pour un } \rho > 0. \tag{1.2}$$

Il est plus simple d'accéder aux propriétés du spectre par l'intermédiaire de *fonctions spectrales* : ce sont des fonctions symétriques des valeurs propres, ainsi que d'une variable auxiliaire. Les principales (passées en revue dans [10]) sont :

• la fonction thêta, trace de l'opérateur de la chaleur ($\sum'$ indique l'omission des modes nuls) :

$$\theta(t) = \sum_k{}' \mathrm{e}^{-t\lambda_k} \qquad (\mathrm{Re}\, t > 0)\ ; \tag{1.3}$$

• la fonction zêta spectrale (de Minakshisundaram–Pleijel) :

$$Z(s) = \sum_k{}' \lambda_k^{-s} \qquad (\mathrm{Re}\, s \gg 0)\ ; \tag{1.4}$$

• le déterminant fonctionnel, extension en dimension infinie du polynôme caractéristique $\prod_k(\lambda + \lambda_k)$, définissable comme :

$$-\log D(\lambda) = \frac{\partial}{\partial s}\Big[\sum_k{}'(\lambda + \lambda_k)^{-s}\Big]_{s=0} \tag{1.5}$$

(la trace de la résolvante, autre fonction couramment utilisée, est simplement la dérivée première de $\log D(\lambda)$).

2. Résultats classiques.

2.1. Fonctions spectrales de base.

Une propriété spectrale typique, strictement plus forte que la loi de Weyl (1.2), est l'existence d'un développement asymptotique complet de la fonction spectrale $\theta(t)$ pour $t \downarrow 0$:

$$\theta(t) \underset{t\downarrow 0}{\sim} \sum_n c_{i_n} t^{i_n}, \quad i_n \in \mathbb{R}, \quad i_0 = -\rho < 0, \quad \{i_n\} \uparrow +\infty; \tag{2.1}$$

cette condition sera prise comme *postulat de base* pour toute la suite.

Les propriétés essentielles des fonctions spectrales sont alors décrites par le diagramme :

$$\theta(t) \underset{t\downarrow 0}{\sim} \sum_n c_{i_n} t^{i_n} \tag{2.2}$$

Mellin (2.3) $\swarrow$ $\qquad$ $\searrow$ Laplace (2.4)

$Z(s)$ méromorphe dans $\mathbb{C}$, pôles simples $s = -i_n$, résidus explicites, valeurs $Z(-m)$ $(m \in \mathbb{N})$ explicites	$\xleftarrow{\text{Mellin (2.5)}}$	$-\log D(\lambda) \underset{\lvert\lambda\rvert\to\infty}{\sim} \sum_n \Gamma(i_n) c_{i_n} \lambda^{-i_n}$ dans un secteur $\lvert\operatorname{Arg}\lambda\rvert < \pi - \delta$

avec

$$Z(s) = \Gamma(s)^{-1} \int_0^\infty \theta(t) t^{s-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \operatorname{Re} s > -i_0 > 0\ ; \tag{2.3}$$

$$-{}^\sim\log D(\lambda) = \int_0^\infty \frac{{}^\sim\theta(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t, \qquad \operatorname{Re}\lambda > -\lambda_0\ ; \tag{2.4}$$

$$Z(s) = \frac{s}{\pi}\sin \pi s \int_0^\infty {}^\sim\log D(\lambda)\,\lambda^{-s-1}\,\mathrm{d}\lambda, \qquad -1 \ll \operatorname{Re} s < 0\ ; \tag{2.5}$$

où l'on a défini les soustractions *minimales* rendant l'intégrale (2.4) convergente en $t = 0$,

$$\begin{cases} {}^\sim\theta(t) = \theta(t) - \sum_{i_n \le 0} c_{i_n} t^{i_n} \\ \implies {}^\sim\log D(\lambda) = \log D(\lambda) + \sum_{i_n \le 0} \Gamma(i_n)\, c_{i_n} \lambda^{-i_n}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Comme corollaire important (de (2.5), par exemple), $-\log D(\lambda)$ admet une série de Taylor autour de $\lambda = 0$, en termes de ce que nous appellerons « valeurs spéciales de $Z(s)$ » :

$$-\log D(\lambda) = Z'(0) + \sum_{m=1}^\infty (-1)^m \frac{Z(m)}{m}\lambda^m, \qquad \lvert\lambda\rvert < \min\{\lambda_k > 0\}. \tag{2.7}$$

Avertissement. — Les développements (2.2), (2.6), (2.7) de $-\log D(\lambda)$ doivent être corrigés en présence d'exposants i_n entiers [10].

2.2. Formules de Poisson, de trace...

Pour des opérateurs (pseudo-)différentiels *d'ordre* 1 à spectre discret $\{x_k\}$, on peut définir au sens des distributions la trace

$$T(t) = \sum_{k,\pm} \mathrm{e}^{\pm i t x_k}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Alors la formule générale de Poisson [11] admet l'expression particulière suivante [12] :

$$\begin{cases} \operatorname{Supp} \operatorname{Sing} T \subset \{0\} \cup \{\pm \text{ périodes des bicaractéristiques}\}, \\ \text{et les germes des singularités isolées de } T(t) \text{ sont en} \\ \text{principe calculables.} \end{cases} \tag{2.9}$$

Ce résultat relève donc de l'*analyse* (décomposition) de la trace (2.8) en parties singulières élémentaires.

Toutefois, dans des exemples précis, on dispose de *formules de trace* plus puissantes assurant la *synthèse* (régénération) de $T(t)$ à partir de ses parties singulières.

Ainsi, soit $\{\lambda_k\}$ le spectre du laplacien $(-\Delta)$ sur une variété riemannienne compacte :

• Cas du cercle S^1 : en prenant $x_k = \sqrt{\lambda_k} = k$, il vient la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{itk} = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(t - r\ell) \qquad (\ell = 2\pi = \text{périmètre de } S^1). \tag{2.10}$$

• Cas d'une surface X compacte hyperbolique de courbure $K = -1$. En posant $x_k = (\lambda_k + K/4)^{1/2}$, il vient la formule des traces de Selberg [13] :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k,\pm} \mathrm{e}^{\pm i t x_k} = (1-g) \frac{\cosh \frac{1}{2} t}{\sinh^2 \frac{1}{2} t} + \sum_{\{p\},\pm} \sum_{r=1}^{\infty} W_{p,r}\, \delta\big(t \pm r\ell(p)\big), \\ g = \text{genre de } X, \quad W_{p,r} = \dfrac{\ell(p)}{2 \sinh\big(\frac{1}{2} r\ell(p)\big)}, \end{cases} \tag{2.11}$$

où $\{p\}$ parcourt les géodésiques périodiques primitives de X et $\{r\ell(p)\}$ décrit le spectre des longueurs (des géodésiques périodiques de X avec tout indice de répétition r).

• Cas de la sphère S^2 (avec $K = +1$) : on n'aboutit qu'à une variante de (2.10).

De manière semblable, la mécanique quantique possède des formules de trace censées calculer certaines fonctions spectrales de l'opérateur de Schrödinger par sommation sur les orbites périodiques classiques γ. Dans l'approximation semi-classique $\hbar \to 0$, c'est la formule de Gutzwiller [14] :

$$\sum_k \delta(\lambda - \lambda_k) \sim \sum_\gamma A_\gamma(\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_\gamma(\lambda)/\hbar}, \quad S_\gamma(\lambda) = \oint_{\gamma \subset H_{\mathrm{cl}}^{-1}(\lambda)} p\,\mathrm{d}q\,; \tag{2.12}$$

mais la théorie de Balian–Bloch [8] suggère qu'une version incluant les contributions des orbites périodiques complexes peut être rendue exacte. Cependant, la portée précise de toutes ces formules de synthèse quantiques est encore imparfaitement établie.

2.3. Exemple élémentaire.

Reprenons le spectre du laplacien sur S^1, $\lambda_k = k^2$, avec $k \in \mathbb{N}$. Les fonctions spectrales se réduisent alors à des fonctions spéciales connues :

$$\begin{cases} \theta(t) \equiv \displaystyle\sum_k{}' \, \mathrm{e}^{-tk^2} = \tfrac{1}{2}\left[\theta_3(0 \mid \mathrm{i}t/\pi) - 1\right], \\ Z(s) = \zeta(2s), \quad D(\lambda) = \dfrac{2\sin \pi\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}. \end{cases} \tag{2.13}$$

De même, pour le spectre $\mathbb{N}$ des entiers, déjà vu à propos de la formule (2.10), on a :

$$\begin{cases} \Theta(\tau) \equiv \displaystyle\sum_k{}' \, \mathrm{e}^{-\tau k} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^\tau - 1}, \\ Z(s) = \zeta(s), \quad D(\lambda) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1+\lambda)}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Dans ce cadre, les transformations de Mellin (2.3) correspondant à chacun de ces deux spectres fournissent deux preuves classiques de l'équation fonctionnelle de Riemann pour $\zeta(s)$ à partir de la formule sommatoire de Poisson (2.10) [15] :

$$\zeta(2s) = \Gamma(s)^{-1} \int_0^\infty \theta(t)\, t^{s-1} \mathrm{d}t \qquad (\mathrm{Re}\, s > \tfrac{1}{2}); \tag{2.15}$$

$$\zeta(s) = \Gamma(s)^{-1} \int_0^\infty \Theta(\tau)\, \tau^{s-1} \mathrm{d}\tau \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1). \tag{2.16}$$

Dans la première approche, la formule sommatoire de Poisson s'exprime au travers de la relation d'automorphie

$$\theta_3\big(0 \mid \mathrm{i}\tau/\pi\big) = (\tau/\pi)^{-1/2} \theta_3\big(0 \mid \mathrm{i}\pi/\tau\big).$$

Dans la seconde, c'est au travers de la décomposition polaire

$$\Theta(\tau) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau + 2\pi \mathrm{i} r}. \tag{2.17}$$

En effet, on transforme alors (2.16) en l'intégrale de contour (Fig. 1a)

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\mathrm{i}\pi} \int_C \Theta(\tau)(-\tau)^{s-1} \mathrm{d}\tau \qquad (s \notin \mathbb{N}^*), \tag{2.18}$$

puis on déforme le contour pour $\operatorname{Re} s < 0$ de façon à exprimer l'intégrale en somme des résidus aux pôles imaginaires $(\mathrm{i}r\ell)$, avec $\ell = 2\pi$, $r \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \Gamma(1-s) \sum_{r \neq 0} (\mathrm{i}r\ell)^{s-1} \qquad (\ell = 2\pi), \\ &= \Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1} 2\sin(\tfrac{1}{2}\pi s)\, \zeta(1-s). \end{aligned} \tag{2.19}$$

□

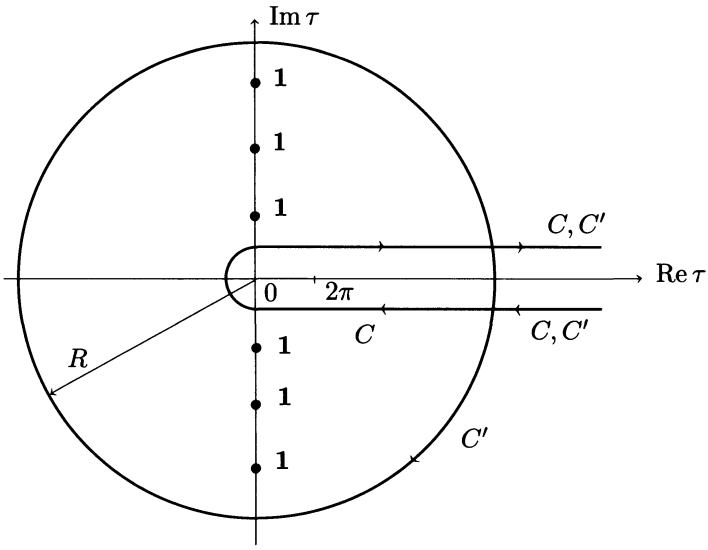
Bien que les deux argumentations soient classiquement équivalentes au niveau de $\zeta(s)$, la seconde nous paraît *préférable* à tous égards pour les généralisations spectrales car elle exploite les *singularités* d'une fonction Θ dans l'esprit de la formule de Poisson générale (2.9) : c'est un embryon de raisonnement résurgent. L'approche par le calcul des résidus est aussi plus *souple* ; par exemple nous pouvons y remplacer la transformation de Mellin (2.3) par celle de Laplace (2.4). Dans ce cas, pour arriver à une intégrale de contour, il convient de former la combinaison (Fig. 1b)

$$-{}^{\sim}\log D(\mathrm{i}\lambda) - {}^{\sim}\log D(-\mathrm{i}\lambda) = \int_C \frac{{}^{\sim}\Theta(\tau)}{\tau} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\tau} \mathrm{d}\tau, \qquad (\lambda > 0), \tag{2.20}$$

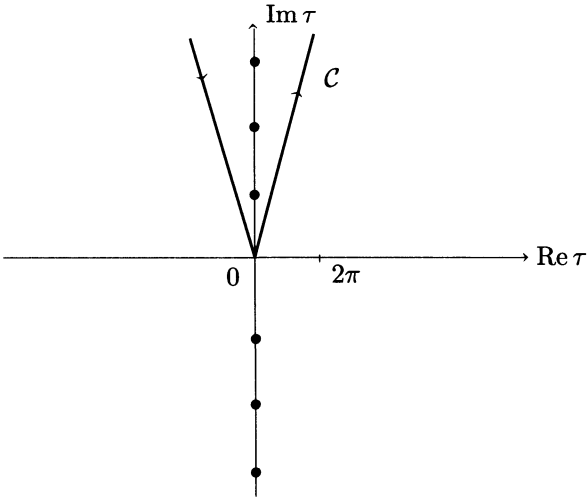
et l'évaluation par les résidus débouche sur une équation fonctionnelle *pour le déterminant* :

$$D(\mathrm{i}\lambda) D(-\mathrm{i}\lambda) = \lambda^{-1} \mathrm{e}^{\pi\lambda} (1 - \mathrm{e}^{-\ell\lambda}), \qquad (\ell = 2\pi). \tag{2.21}$$

Au vu de (2.14), ceci n'est que la formule des compléments pour la fonction Gamma; mais le point important est ici la généralité du raisonnement suivi. Il y a une différence importante entre les équations fonctionnelles (2.19) et (2.21) : la première exprime une égalité entre une série de Dirichlet spectrale à gauche et une série de Dirichlet sur les périodes de trajectoires à droite, et *l'auto-dualité* de la formule sommatoire de Poisson (2.10) intervient crucialement. Or ceci n'est pas une propriété



(a) *Contours d'intégration pour la représentation de Mellin* (2.18) *de* $\zeta(s)$. *Les pôles dont les résidus* (*en gras*) *contribuent sont marqués.*



(b) *Chemin d'intégration pour la formule de Laplace* (2.20).

Figure 1. *Structure analytique de la fonction* $\Theta(\tau) = \left(\mathrm{e}^{\tau} - 1\right)^{-1}$ *associée au spectre des entiers* ($\bullet$ = *pôle simple*).

générique; donc la relation de Riemann ne doit pas pouvoir s'étendre *en tant qu'équation fonctionnelle*. Au contraire, la preuve de la relation (2.21) est pleinement généralisable et de fait, *les déterminants fonctionnels seront sujets à des équations fonctionnelles.*

C'est pourquoi il est utile de rappeler que les valeurs spéciales bien connues $\zeta'(0)$ et $\zeta(2m)$ peuvent s'obtenir directement de la relation (2.21), sans faire appel à l'équation fonctionnelle de Riemann (substituer la série de Taylor (2.7) dans le logarithme de (2.21), puis identifier terme à terme).

Le schéma de raisonnement pour le spectre des entiers se résume ainsi :

(2.22)

$$\begin{tikzcd}
 & \Theta(\tau) \text{ méromorphe} \arrow[dl, "\text{Mellin (2.3)}"'] \arrow[dr, "\text{Laplace (2.4)}"] & \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{équation fonctionnelle}\\ \text{pour } \zeta(s)\end{array}} \arrow[dr] & & \boxed{\begin{array}{l}\text{formule des compléments pour } \Gamma(z)\end{array}} \arrow[dl] \\
 & \boxed{\text{valeurs spéciales } \zeta'(0),\ \zeta(2m)} &
\end{tikzcd}$$

3. Questions en suspens, réponses résurgentes.

Notre problématique d'ensemble sera de généraliser au maximum en direction des fonctions spectrales les propriétés classiques de fonctions spéciales telles que $\Gamma(z)$, $\zeta(s)$ (cf. (2.14)) en cherchant à les décrire en termes spectraux (les propriétés arithmétiques devant échapper à cette approche). En particulier, sous quelle forme l'équation fonctionnelle de Riemann pour $\zeta(s)$ s'étend-elle aux fonctions zêta spectrales $Z(s)$?

De manière inattendue, ce type de questions est lié à une meilleure compréhension de la divergence et de la resommabilité (dans l'esprit de Dingle [7]) des développements de $\theta(t)$ et $\log D(\lambda)$ figurant dans le diagramme (2.2); or ces préoccupations (par exemple : quelle est la forme asymptotique des coefficients c_{i_n} pour $n \to \infty$?) échappent aux méthodes classiques.

Un autre problème connexe sera de trouver une formule de Poisson rigoureuse analogue à (2.9) pour l'opérateur de Schrödinger du point de vue de l'asymptotique semi-classique.

Notre approche vis-à-vis de tous ces problèmes sera de rechercher une déformation du spectre initial $\{\lambda_k\}$ en un spectre auxiliaire $\{x_k\}$ tel que la fonction thêta associée,

$$\Theta(\tau) = \sum_k \mathrm{e}^{-\tau x_k} \qquad (\mathrm{Re}\,\tau > 0), \tag{3.1}$$

ait une structure analytique aussi riche et explicite que possible (ramifications isolées, monodromie calculable). Cette fonction Θ s'avérera être *résurgente* en général, méromorphe dans des cas dégénérés solubles. Le schéma de raisonnement (2.22) se généralisera alors partiellement :

(3.2)

$$\begin{tikzcd}
 & \Theta(\tau) \text{ résurgente} \arrow[dl, "\text{Mellin (2.3)}"'] \arrow[dr, "\text{Laplace (2.4)}"] & \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{développement asympto-}\\ \text{tique pour } Z(s) \text{ lorsque}\\ \mathrm{Re}\, s \to -\infty\end{array}} \arrow[d] & & \boxed{\begin{array}{c}\text{équations fonctionnelles}\\ \text{pour}\\ \text{déterminants fonctionnels}\end{array}} \arrow[d] \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{développement asympto-}\\ \text{tique pour } c_{i_n},\ n \to \infty\end{array}} & & \boxed{\begin{array}{l}\text{identités algébriques pour}\\ \text{valeurs spéciales de } Z(s).\end{array}}
\end{tikzcd}$$

Ce programme va être illustré sur deux exemples complémentaires : d'abord le spectre (2.11) d'une surface hyperbolique compacte à l'aide de la formule des traces de Selberg, puis le spectre de l'oscillateur anharmonique homogène $(-\mathrm{d}^2/\mathrm{d}q^2 + q^{2M})$ sur $\mathbb{R}$ grâce à l'arsenal des techniques propres aux équations différentielles ordinaires.

4. Premier exemple : spectre d'un laplacien hyperbolique.

Le spectre du laplacien $-\Delta_X$ sur une surface hyperbolique compacte X (de genre g et de courbure $K = -1$) est déterminé par la formule des traces de Selberg (2.11) *via* la distribution $\sum_{k,\pm} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}tx_k}$. Celle-ci n'est aucunement prolongeable en dehors de $t \in \mathbb{R}$, mais la simplicité de son expression par (2.11) suggère de garder $x_k = (\lambda_k - 1/4)^{1/2}$ et de choisir

pour fonction thêta

$$\Theta(\tau) = \sum_k{}' \mathrm{e}^{-\tau x_k}, \qquad \operatorname{Re}\tau > 0. \tag{4.1}$$

A présent, x_k est pris positif si $\lambda_k > 1/4$, sinon (pour un nombre fini de λ_k) imaginaire au choix ; la fonction zêta qui s'impose est alors :

$$Z(s) = \sum_k{}' x_k^{-2s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1. \tag{4.2}$$

La formule des traces de Selberg calcule en principe toute fonction spectrale par intégration de (2.11) sur une fonction test appropriée, du moins formellement. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\Theta(\tau) = (2g-2)\left[\frac{1}{\tau^2} + 2\sum_{r'=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r'}}{(\tau+2\pi r')^2}\right] \\ + \sum_{\{p\},\pm} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{W_{p,r}}{2\pi}\left[\frac{1}{\tau \pm \mathrm{i} r\ell(p)}\right],\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}Z(s) = (1-g)\frac{(2^{2s}-2)\,\zeta(2s-1)}{\cos \pi s} \\ + \frac{\pi^{-1/2}}{2^{2s}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\Gamma(s)} \sum_{\{p\}} \sum_{r=1}^{\infty} W_{p,r}\left[r\ell(p)\right]^{2s-1};\end{aligned} \tag{4.4}$$

mais dans les deux cas, les sommations sur les géodésiques *divergent*. Toutefois, une « formule des traces sectorielle » (analogue à la formule de sommation de Borel pour les séries de puissances) permet de les resommer sous la forme :

$$\begin{aligned}\Theta(\tau) = (2g-2)\left[\frac{1}{\tau^2} + 2\sum_{r'=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r'}}{(\tau+2\pi r')^2}\right] \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \sin \tau\kappa \,\mathrm{d}\log \mathcal{Z}_X(\tfrac{1}{2}+\kappa),\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}Z(s) = (1-g)\frac{(2^{2s}-2)\,\zeta(2s-1)}{\cos \pi s} \\ + \frac{\sin \pi s}{\pi}\int_0^{\infty} \kappa^{-2s} \,\mathrm{d}\log \mathcal{Z}_X(\tfrac{1}{2}+\kappa),\end{aligned} \tag{4.6}$$

au moyen de la *fonction zêta de Selberg* $\mathcal{Z}_X(z)$ prolongée à $\operatorname{Re} z \geq 1/2$:

$$\mathcal{Z}_X(z) \equiv \prod_{\{p\}} \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-(z+m)\ell(p)}\right) \qquad (\operatorname{Re} z > 1), \tag{4.7}$$

et sous des conventions précises d'intégration [6]. Cette resommation permet de *valider les séries divergentes* (4.3–4.4), comme décrivant respectivement : la *structure analytique* de $\Theta(\tau)$ (c'est bien une fonction méromorphe admettant les pôles et résidus donnés par (4.3), voir Fig. 2), et le *développement asymptotique* de $Z(s)$ pour $\operatorname{Re} s \to -\infty$ (donné par (4.4)).

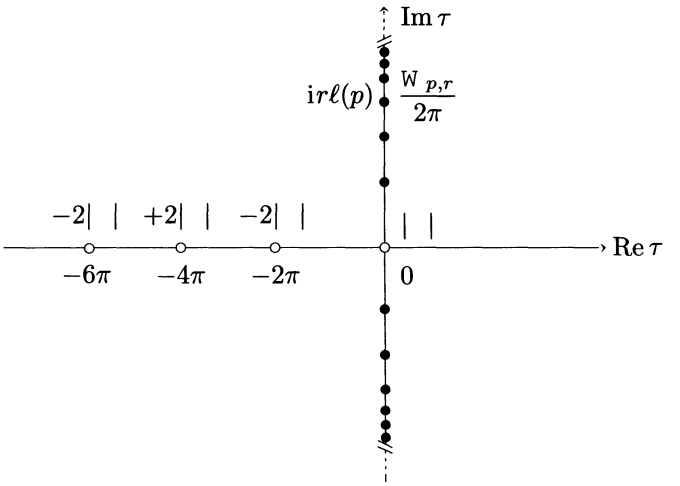


Figure 2. *Structure analytique de la fonction* $\Theta(\tau)$ (4.1) *associée au spectre d'une surface hyperbolique compacte de courbure* (-1) *et de genre* g, *de caractéristique d'Euler–Poincaré* $\chi = 2 - 2g$ ($\bullet$ = *pôle simple*, $\circ$ = *pôle double ; en gras : coefficients des parties polaires principales*) ; *d'après* [6].

Quant à la formule (4.6) pour $Z(s)$, elle occupe exactement la place de l'équation fonctionnelle de Riemann pour $\zeta(s)$. La comparaison des pôles de ses deux membres fournit notamment les valeurs spéciales de $Z(s)$, en termes de $\mathcal{Z}_X(1/2+\kappa)$ et de ses dérivées pour $\kappa = 0$ [19]. La relation fonctionnelle homologue à (4.6) du côté du déterminant fonctionnel est [10] :

$$\text{(4.8)} \qquad \operatorname{Det}\bigl(-\Delta_X - \tfrac{1}{4} + \kappa^2\bigr)\Bigl[\mathrm{e}^{\kappa^2}\operatorname{Det}\Bigl(\sqrt{-\Delta_{S^2} + \tfrac{1}{4}} + \kappa\Bigr)\Bigr]^{2g-2} = \mathcal{Z}_X(\tfrac{1}{2} + \kappa),$$

dont le développement autour de $\lambda = 0$ redonne aussi les valeurs spéciales de $Z(s)$. On a donc réalisé pour ce problème un diagramme analogue à (2.22) (spectre des entiers) avec la notable différence qu'il subsiste dans les fonctions spectrales une partie transcendante irréductible (la fonction zêta

de Selberg $\mathcal{Z}_X$, engendrée par le spectre des longueurs des géodésiques périodiques réelles).

Le principal résultat dans l'optique de cet exposé est l'apparition d'une nouvelle fonction $\Theta(\tau)$ qui n'est plus la trace de l'opérateur de la chaleur (1.3) (celle-ci, analogue à la fonction $\theta(\tau)$ (2.13), se réserve à présent le bénéfice d'un développement asymptotique (2.1) *complètement explicite* à l'origine). La fonction $\Theta(\tau)$, définie par (4.1), ressemble au contraire à la fonction $\Theta(\tau)$ (2.14) en ceci qu'elle admet un prolongement *méromorphe à tout le plan complexe*; ses singularités sur l'axe imaginaire correspondent bien aux périodes des géodésiques en accord avec la formule de Poisson (2.9); de plus, cette correspondance s'étend aux singularités révélées par le prolongement analytique sur l'axe réel négatif. et qui se trouvent reliées aux *périodes non réelles des géodésiques complexifiées* (à savoir les multiples de $2\pi\mathrm{i}$: dans la direction de temps imaginaire pur, la géométrie est celle de la sphère S^2) [6]. Ceci suggère, en accord avec les arguments de Balian–Bloch, qu'il doit exister une forme étendue au plan complexe de la formule générale de Poisson (2.9).

5. Deuxième exemple : un oscillateur homogène.

Il s'agit du problème aux valeurs propres pour l'équation différentielle ordinaire :

$$\Big(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+z^{2M}\Big)\psi_k(z)=\lambda_k\,\psi_k(z),\qquad z\in\mathbb{R}, \tag{5.1}$$

avec M un entier positif quelconque, fixé. Certains des arguments ci-dessous dégénèrent pour le cas $M=1$ (oscillateur harmonique), mais comme le spectre consiste alors des entiers impairs, les fonctions spectrales sont très voisines de (2.14).

La fonction $\theta(t)=\sum_k \mathrm{e}^{-t\lambda_k}$ (ici, $\lambda_0>0$) admet bien un développement asymptotique à l'origine de la forme (2.1),

$$\theta(t)\underset{t\downarrow 0}{\sim}\sum_n c_{i_n}t^{i_n},\qquad i_n=(2n-1)\frac{M+1}{2M}\cdot \tag{5.2}$$

Toutefois, en dimension 1, une information plus précise est disponible : c'est l'asymptotique des valeurs propres *individuelles* (règle de Bohr–Sommerfeld),

$$\lambda_k\propto\big(k+\tfrac{1}{2}\big)^{2M/(M+1)}\big[1+\{\text{développement en}(1/k)\}\big], \tag{5.3}$$

lorsque k tend vers l'infini ; d'où il suit [20] que $\theta(t)$ doit avoir une frontière naturelle sur tout l'axe imaginaire, comme la fonction automorphe (2.13).

La formule (5.3) suggère de déformer le spectre pour le rendre asymptotiquement linéaire [2] :

$$x_k = \lambda_k^{(M+1)/(2M)}, \tag{5.4}$$

et de poser

$$\Theta(\tau) \equiv \sum_k \mathrm{e}^{-\tau x_k}. \tag{5.5}$$

Remarque capitale pour la généralisation ultérieure (§ 6) : par simple changement d'échelle dans (5.1), $\{x_k\}$ s'identifie au spectre d'un problème aux valeurs propres *implicite* :

$$\left[-x^{-2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2} + (q^{2M} - 1)\right]\psi(q) = 0, \tag{5.6}$$

à savoir le spectre des valeurs de x (inverse de la constante de Planck $\hbar$) pour lesquelles cette équation admet des fonctions propres à énergie classique fixée (ici, $\lambda = 1$).

Au niveau de la fonction $\Theta(\tau)$ donnée par (5.5), la formule de Bohr–Sommerfeld (5.3) se traduit par l'énoncé suivant : $\Theta(\tau)$ admet une progression arithmétique de *singularités* sur l'axe imaginaire, chacune consistant en une ramification de type *logarithmique* (induite par les corrections en $1/k$ dans (5.3)) en sus d'un pôle simple (induit par le terme principal). De plus, dans le cas $M = 2$ (oscillateur quartique), certaines corrections exponentiellement petites à la formule (5.3), calculables par la méthode BKW complexe, s'interprètent comme décrivant une seconde rangée de singularités du même type, cette fois sur l'axe $\operatorname{Re}\tau = -1/2$. Enfin, la cohérence des formules impose des *relations non-linéaires* entre les fonctions de discontinuité de $\Theta(\tau)$ en tous ces points de branchement (*bootstrap analytique*) [2].

Toutefois, ce formalisme n'est ni assez rigoureux ni assez systématique pour étendre la description de manière exhaustive, que ce soit au-delà de $\operatorname{Re}\tau = -1/2$, ou bien vers les autres feuillets de la surface de Riemann de $\Theta(\tau)$, ou encore pour des valeurs $M > 2$.

Une stratégie plus efficace suit l'idée que la bonne représentation de Laplace pour $(-\log D)$ dans le diagramme (2.2) doit être recherchée par

rapport à la variable naturelle de développement à grand λ, qui justement n'est pas λ mais $x = \lambda^{(M+1)/(2M)}$. En effet, d'après (2.6) et (5.2), pour $M > 1$, nous avons

$$\log D(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{1-2n}, \quad a_n = -\Gamma(i_n)\, c_{i_n}, \tag{5.7}$$

$$^{\sim}\log D(\lambda) = \log D(\lambda) - a_0 x. \tag{5.8}$$

La transformée de Borel *formelle* du développement de (5.8),

$$\Theta_0(\tau) = (^{\sim}\log D)_{\mathrm{B}}(\tau) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \tau^{2n-1}}{(2n-1)\,!} \tag{5.9}$$

est donc candidate à fournir la relation cherchée :

$$^{\sim}\log D(\lambda) = x \int_0^{\infty} \Theta_0(\tau) \mathrm{e}^{-x\tau} \mathrm{d}\tau, \qquad x = \lambda^{(M+1)/(2M)}, \tag{5.10}$$

et par analogie avec la fonction $\Theta(\tau)$ issue du changement de variable (5.4), on peut envisager que la fonction $\Theta_0(\tau)$ ait une structure ramifiée intéressante et essayer de rendre (5.10) rigoureux.

Il faut souligner que la précédente fonction $\Theta(\tau) = \sum_k \mathrm{e}^{-\tau x_k}$ (formule (5.5)) ne semble pas adéquate ici, car elle se transformerait (par Laplace) dans un produit régularisé du style $\prod_k^{\mathrm{reg}}(x + x_k)$, alors que seul $D(\lambda) = \prod_k^{\mathrm{reg}}(\lambda + \lambda_k)$ apparaît comme un déterminant analytique naturel pour le problème (5.1). De même que la théorie générale nécessite deux fonctions thêta, (5.2) pour fournir un développement explicite à l'origine et (5.5) pour exhiber de la résurgence, il semble qu'elle ne permette pas de faire l'économie de deux variables liées mais distinctes (ici λ et x) pour accéder à des propriétés analytiques complémentaires.

Concrètement, c'est l'étude asymptotique de l'équation différentielle (5.1) pour un paramètre spectral *quelconque* qui permet d'élucider la structure de $\Theta_0(\tau)$ [4]. Avec le choix de $x = \lambda^{(M+1)/(2M)}$ comme variable spectrale, l'équation admettant le déterminant caractéristique $\prod_k^{\mathrm{reg}}(\lambda + \lambda_k)$ se ramène par transformation d'échelle à :

$$\Big[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2} + x^2(q^{2M} + 1)\Big]\psi(q) = 0. \tag{5.11}$$

Soit $\psi(x, q)$ la solution de (5.11) décroissante pour $q \to -\infty$ (par exemple), unique à un facteur près, et soit $\psi_{\mathrm{BKW}}(x, q)$ sa forme

asymptotique bien connue pour $x \to +\infty$ ou $q \to \pm\infty$, s'appliquant également à un facteur près :

$$\psi_{\mathrm{BKW}}(x,q) = (1+q^{2M})^{-1/4}\, \mathrm{e}^{x\int_0^q (1+q'^{2M})^{1/2}\mathrm{d}q'}. \tag{5.12}$$

Après le changement de fonction inconnue (pour $x > 0$, puis par prolongement analytique)

$$a(x,q) = \frac{\psi(x,q)}{\psi_{\mathrm{BKW}}(x,q)}, \tag{5.13}$$

on peut définir un facteur de transfert ou *fonction de Jost*,

$$a(x) = \frac{a(x,+\infty)}{a(x,-\infty)}. \tag{5.14}$$

On accède ainsi au déterminant (5.8) qui nous intéresse via l'identité (voir [4], App. A) :

$$\begin{aligned} a(x) &\equiv \exp \sim \log D(\lambda) \qquad (x = \lambda^{(M+1)/(2M)}) \\ &= \mathrm{e}^{-a_0 x} D(\lambda) \qquad (M \geq 2). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Ensuite, le cœur de la stratégie est un algorithme d'« asymptotique exacte » mis en œuvre dans la représentation de Balian–Bloch [8]. On réécrit tout le problème dans la variable τ conjuguée de Laplace de x $(= \hbar^{-1})$; le calcul asymptotique devient un calcul de singularités dans les transformées de Borel. La dynamique est définie par l'équation transformée de (5.11) :

$$\Big[-\frac{\partial^2}{\partial q^2} + (q^{2M}+1)\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\Big]\widetilde{\psi}(\tau,q) = 0 \tag{5.16}$$

(habituellement, on se hâterait de séparer la variable τ dans cette équation en effectuant la transformation inverse !). Les définitions (5.12)–(5.13) deviennent :

$$\tilde{a}(\tau,q) = (1+q^{2M})^{1/4}\, \widetilde{\psi}\Big(\tau - \int_0^q (1+q'^{2M})^{1/2}\mathrm{d}q',\, q\Big) \tag{5.17}$$

et (5.14) peut s'écrire

$$\tilde{a}(\tau) = \lim_{q\to+\infty} \tilde{a}(\tau,q) \quad \text{sous la normalisation} \quad \lim_{q\to-\infty} \tilde{a}(\tau,q) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}\tau}\ ; \tag{5.18}$$

cette fonction $\tilde{a}(\tau)$ fournit alors l'argument de la formule de Laplace :

$$\begin{cases} a(x) = x \displaystyle\int_0^\infty a_{\mathrm{B}}(\tau)\mathrm{e}^{-x\tau}\mathrm{d}\tau, \\ a_{\mathrm{B}}(\tau) = -\operatorname*{Var}_{\tau=0} \tilde{a}(\tau) = \tilde{a}(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}}\tau) - \tilde{a}(\tau), \end{cases} \tag{5.19}$$

qui réalise la représentation recherchée (5.10), sous forme exponentiée. Autrement dit, $\Theta_0(\tau)$ se trouve déterminé comme un logarithme de convolution de $a_{\mathrm{B}}(\tau)$. Le problème a ainsi été ramené à la description de la structure analytique de $\tilde{a}(\tau, q)$ pour $q = +\infty$ à partir de la donnée (5.18) pour $q = -\infty$ et de l'équation (5.16). Or cette dernière, une équation *homogène*, induit la *propagation des singularités*, par rapport à la variable q complexe, le long des *bicaractéristiques complexes* [21]. Toutes les singularités de $\tilde{a}(\tau)$ s'obtiennent donc par propagation le long de tous les chemins complexes allant de $q = -\infty$ à $+\infty$, à partir de la singularité élémentaire $(-2\pi\mathrm{i}\tau)^{-1}$. L'intégrabilité de la dynamique classique permet d'expliciter le calcul complet à tous les ordres.

Les résultats sont illustrés figure 3 pour $M = 2$ (oscillateur quartique). Le phénomène essentiel est celui d'*algèbre de résurgence* au sens d'Écalle [16]–[18] : une algèbre de convolution de génération finie dont les éléments sont des fonctions analytiques ramifiées à singularités isolées au-dessus d'un réseau fixe de $\mathbb{C}$. Ici, le réseau est formé de toutes les actions $\oint_\gamma \sqrt{1+q^{2M}}\mathrm{d}q$ prises sur les chemins γ périodiques, les singularités sont de type logarithmique, et toutes les fonctions ainsi que leurs discontinuités ramenées à l'origine sont des monômes de convolution sur M fonctions. Pour $M = 2$ le réseau est engendré par deux périodes, ω ($\equiv a_0$) et $\omega' = \mathrm{i}\omega$, l'algèbre par les transformées de Borel $a_{\mathrm{B}}(\tau)$ et $a'_{\mathrm{B}}(\tau) \equiv a_{\mathrm{B}}(-\mathrm{i}\tau)$ des fonctions $a(x)$ et $a'(x) \equiv a(\mathrm{i}x)$. Notre algorithme fournit directement la description de ces deux fonctions dans un feuillet principal (Fig. 3a), description qui condense récursivement celle de toute l'algèbre. Par ailleurs, on peut aussi calculer algébriquement (c'est le développement BKW) les coefficients a_n à tout ordre fini, ce qui spécifie en parallèle au même ordre tous les développements de toutes les fonctions de l'algèbre (et donc de leurs discontinuités). Tout ceci est explicité sous forme d'algorithme dans [4], et formalisé de façon plus rigoureuse et générale dans [22].

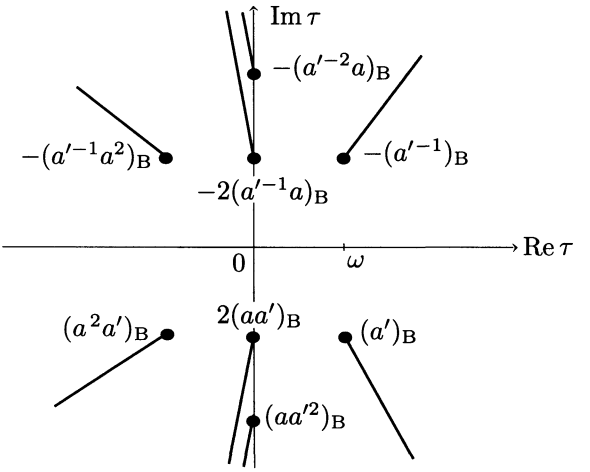


Figure 3a. *Structure ramifiée résurgente de quelques fonctions spectrales de l'oscillateur quartique* $(-x^{-2}\mathrm{d}^2/\mathrm{d}q^2 + q^4)$: *la transformée de Borel* $a_{\mathrm{B}}(\tau)$ *de la fonction de Jost* $a(x)$ (*formules* (5.15), (5.19) *avec* $M = 2$).

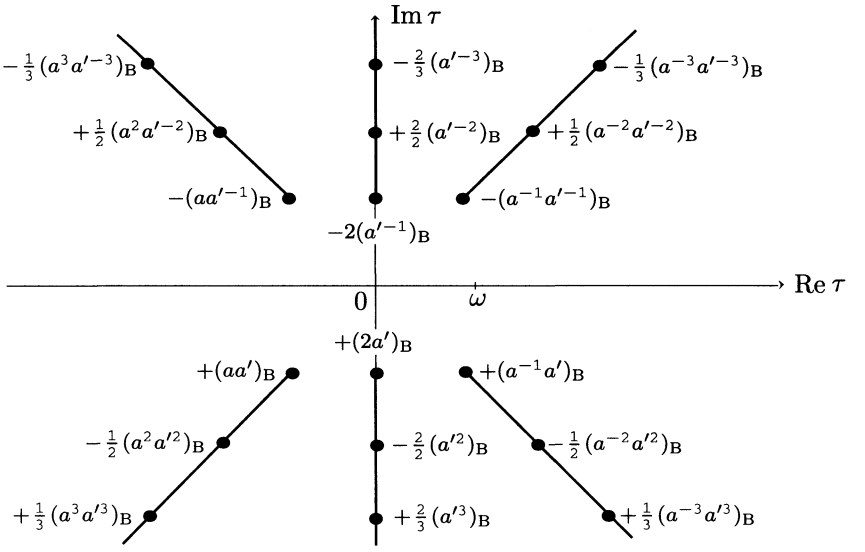


Figure 3b. *Structure ramifiée résurgente de quelques fonctions spectrales de l'oscillateur quartique* $(-x^{-2}\mathrm{d}^2/\mathrm{d}q^2 + q^4)$: *la fonction* $\Theta_0(\tau)$, *transformée de Borel de* $\sim\log D(\lambda) \equiv \log a(x)$ (*formules* (5.9)–(5.10) *avec* $M = 2$).

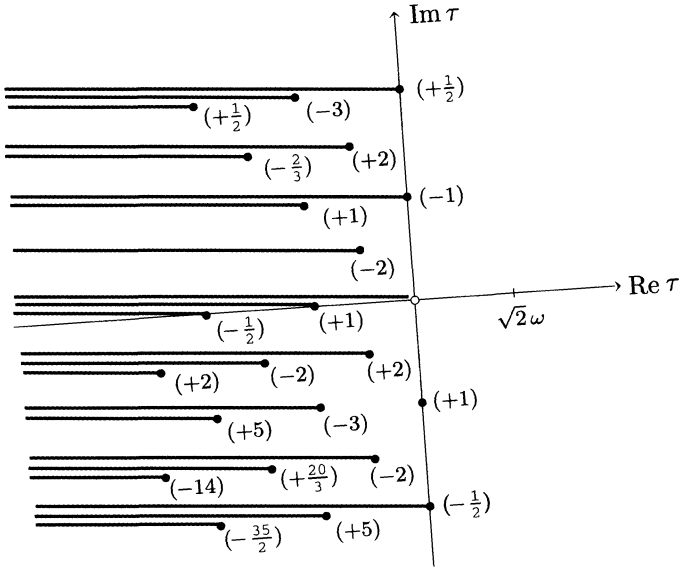


Figure 3c. *Structure ramifiée résurgente de quelques fonctions spectrales de l'oscillateur quartique* $(-x^{-2}\mathrm{d}^2/\mathrm{d}q^2 + q^4)$: *la fonction* $\tau^{-1}\Theta(\tau)$ (*formules* (5.4)–(5.5) *avec* $M = 2$).

Les fonctions de discontinuité sont explicitées sur les figures 3a *et* 3b, *seuls les coefficients le sont sur* 3c ; *dans* 3b, *l'ordre de traversée des coupures qui se superposent est indifférent* (*détails dans* [4]).

D'autres propriétés sont intéressantes et incomplètement comprises. Le point $(m\omega + m'\omega')$ joue pour la fonction $(a^m a'^{m'})_{\mathrm{B}}$, $(m, m' \in (\mathbb{Z}^2)^*)$ un rôle remarquable de « foyer » : la fonction

$$\chi_{mm'}(\tau) = (a^m a'^{m'})_{\mathrm{B}}(m\omega + m'\omega' + \tau)$$

est toujours régulière en (et au-dessus de) $\tau = 0$, et vérifie l'identité

$$\chi_{mm'}(\tau) + \chi_{mm'}(\mathrm{i}\tau) + \chi_{mm'}(\mathrm{i}^2\tau) + \chi_{mm'}(\mathrm{i}^3\tau) \equiv 2^{|(|m|-|m'|)|}\, 3^{\min(|m|,|m'|)+1}, \tag{5.20}$$

sous réserve de la conjecture que les *limites radiales* $\lim_{r\to\infty} \chi_{mm'}(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})$ existent et soient finies hors des directions singulières (en effet le membre de gauche de (5.20) a, d'une part toutes ses singularités de résurgence

identiquement nulles, et d'autre part, pour $\tau \to \infty$, une limite finie (calculable) de par cette conjecture; d'où une fonction analytique dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donc constante). Au plan numérique, il est difficile de tester directement les limites radiales, mais le corollaire (5.20), lui, se vérifie spectaculairement bien ! Il semblerait donc que les fonctions $\chi_{mm'}$ aient un comportement à l'infini aussi régulier que possible ; il serait alors raisonnable que leur structure résurgente les décrive, voire les détermine complètement.

Remarque. — Il est intéressant d'étendre l'algèbre ci-dessus en une algèbre plus riche engendrée par les fonctions $\big((a/a')^{1/2}\big)_{\mathrm{B}}(\tau)$ et $\big((aa')^{1/2}\big)_{\mathrm{B}}(\tau)$ (transformées de Borel de multiplicateurs de Stokes), lesquelles présentent une structure analytique plus élémentaire que a_{B} et a'_{B} qui en sont des composites; cf. [4], figure 33. Toutes les remarques précédentes s'étendent alors moyennant des m, m' demi-entiers).

La fonction $\Theta_0(\tau) = (\log a)_{\mathrm{B}}(\tau)$ est une fonction à part, dérivée de l'algèbre ci-dessus, de foyer $\tau = 0$ correspondant à $(m, m') = (0, 0)$; toutes ses discontinuités sont du type $(a^m a^{m'})_{\mathrm{B}}$ avec $(m, m') \neq (0, 0)$ (Fig. 3b) ; et nous avons abouti en fin de compte à une représentation de Laplace (5.10) de ${}^{\sim}\log D(\lambda)$ en termes de cette fonction $\Theta_0(\tau)$ dont la structure analytique est complètement décrite par des relations de résurgence (équations du pont, ou « bootstrap analytique »). On peut aussi montrer que (modulo des rotations de $\pm\pi/4$) la fonction $\Theta(\tau) = \sum_k \mathrm{e}^{-\tau x_k}$ introduite en (5.5) est apparentée à la fonction Θ_0, et en déduire complètement sa structure analytique (cf. Fig. 3c et [4] pour les détails).

Quant à la fonction zêta spectrale $Z(s) = \sum \lambda_k^{-s}$, si l'on compose (2.5) avec (5.10), on obtient sa représentation de Mellin en termes de la fonction $\Theta_0(\tau)$:

$$Z\Big(\frac{M+1}{2M}s\Big) = \frac{\sin\Big(\dfrac{M+1}{2M}\pi s\Big)}{\sin \pi s} \times \frac{s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \Theta_0(\tau)\, \tau^{s-1} \mathrm{d}\tau \quad (-1 < \operatorname{Re} s < 0). \tag{5.21}$$

La même déformation de contour que dans la « preuve résurgente » de l'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$ donne alors formellement (Fig. 4) :

$$Z\Big(\frac{M+1}{2M}s\Big) = \frac{\sin\Big(\dfrac{M+1}{2M}\pi s\Big)}{\sin \pi s}\, \frac{s\Gamma(1-s)}{2i\pi} \times \sum_{j=1}^{6} \int_{C_j} \Theta_0(\tau)(-\tau)^{s-1} \mathrm{d}\tau \qquad (\operatorname{Re} s < 0). \tag{5.22}$$

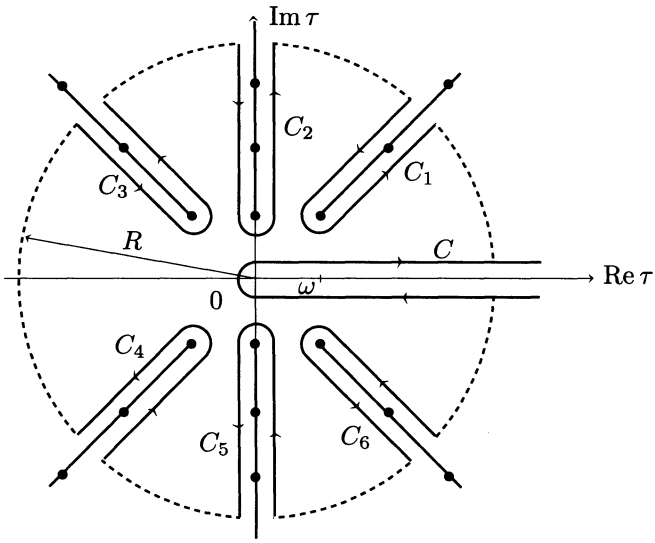


Figure 4. *Contours d'intégration pour la représentation de Mellin* (5.22) *de la fonction zêta spectrale* $Z(s)$ *de l'oscillateur quartique, dans le feuillet principal* (*figure* 3b) *de la fonction* $\Theta_0(\tau)$ *; comparer à la figure* 1a (*d'après* [1]).

Bien que le membre de droite doive être une fonctionnelle de $Z(s)$ de par les relations de résurgence, cette dépendance est sans rapport avec celle trouvée pour $\zeta(s)$; elle est non-linéaire, non locale ; de plus elle n'est guère explicite ni suffisamment démontrée, sauf à ne calculer les contributions des singularités qu'ordre par ordre et de proche en proche, ce qui suffit à engendrer le *développement asymptotique de* $Z(s)$ *pour* $\operatorname{Re} s \to -\infty$ (et par ricochet, celui des coefficients c_{i_n} pour $n \to \infty$, à l'aide des résidus de $Z(s)$ aux points $-i_n$) [1], [4].

Les relations de résurgence de $\Theta_0(\tau)$ sont beaucoup plus faciles à expliciter au niveau de sa transformée de Laplace. L'analogue du calcul (2.20) est ici de considérer toutes les transformées de Laplace I_φ définies comme (5.10) mais en intégrant dans des directions variables φ (Fig. 5), et d'utiliser les relations de résurgence pour exprimer les sauts $I_{\varphi_{j+1}} - I_{\varphi_j}$ en fonction de $I_0 = {}^{\sim}\log D(\lambda)$. Les relations obtenues engendrent alors par élimination une équation fonctionnelle polynômiale symétrique du type de Cameron–Sibuya [23] :

$$P\big[D(\lambda), D(\Omega^2\lambda), \ldots, D(\Omega^{2M}\lambda)\big] = 0, \quad \big(\Omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/(M+1)}\big).$$

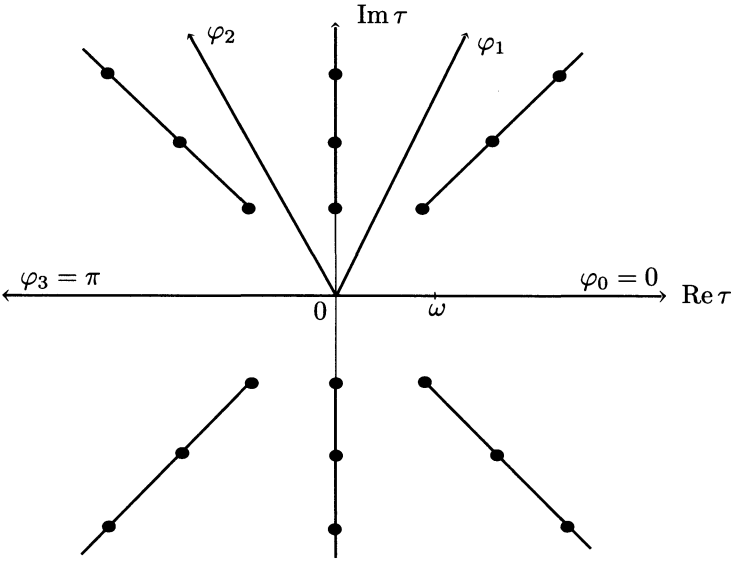


Figure 5. *Chemins d'intégration inéquivalents pour les transformations de Laplace de la fonction* $\Theta_0(\tau)$ *associée à l'oscillateur quartique ; comparer à la figure* 1b (*d'après* [1]).

Pour $M = 1$, cela redonne la formule des compléments (2.21) ; pour $M = 2$, on trouve

$$D(\lambda)\, D(\mathrm{j}\lambda)\, D(\mathrm{j}^2\lambda) \equiv D(\lambda) + D(\mathrm{j}\lambda) + D(\mathrm{j}^2\lambda) + 2 \qquad (\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}). \tag{5.23}$$

Pour M quelconque, la relation fonctionnelle à la fois la plus simple et la plus complète recourt aux déterminants à parité fixée, $D^+(\lambda)$ et $D^-(\lambda)$, correspondant respectivement aux sous-espaces pairs et impairs (pour la symétrie $q \leftrightarrow -q$) :

$$\Omega^{1/2} D^+(\Omega^{-1}\lambda) D^-(\Omega\lambda) - \Omega^{-1/2} D^+(\Omega\lambda) D^-(\Omega^{-1}\lambda) \equiv 2\,\mathrm{i} \qquad (\Omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/(M+1)};\ M > 1). \tag{5.24}$$

La substitution dans (5.24) des séries de Taylor (2.7) associées à chaque moitié du spectre fournit l'identité entre séries entières :

$$Z'(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{M+1} \frac{Z(n)}{n} (-\lambda)^n \equiv \log \sin\Big[\frac{\pi}{2(M+1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{M+1} \frac{Z^{\mathrm{P}}(m)}{m} (-\lambda)^m\Big] \tag{5.25}$$

où

$$Z(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{-s}, \quad Z^{\mathrm{P}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \lambda_k^{-s}. \tag{5.26}$$

Ordre par ordre, ceci engendre des identités algébriques entre valeurs spéciales de $Z(s)$ et $Z^{\mathrm{P}}(s)$, à savoir :

$$Z'(0) = \log \sin \frac{\pi}{2(M+1)}, \tag{5.27}$$

$$\begin{cases} \cot \dfrac{\pi}{2(M+1)} \sin \dfrac{\pi}{M+1}\, Z^{\mathrm{P}}(1) - \cos \dfrac{\pi}{M+1}\, Z(1) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (M > 1), \\ \cot \dfrac{\pi}{2(M+1)} \sin \dfrac{2\pi}{M+1}\, Z^{\mathrm{P}}(2) - \cos \dfrac{2\pi}{M+1}\, Z(2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = [2 \cos \dfrac{\pi}{2(M+1)}\, Z^{\mathrm{P}}(1)]^2, \\ \vdots \\ \cot \dfrac{\pi}{2(M+1)} \sin \dfrac{n\pi}{M+1}\, Z^{\mathrm{P}}(n) - \cos \dfrac{n\pi}{M+1}\, Z(n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = P_n\{Z(m), Z^{\mathrm{P}}(m)\}_{\{1 \le m \le n-1\}}, \end{cases} \tag{5.28}$$

(P_n polynôme).

On ignore si le spectre est déterminé de manière unique par l'équation fonctionnelle (5.24) ou les identités (5.27)–(5.28) (modulo les homothéties $\lambda_k \mapsto \lambda\lambda_k$, qui constituent une invariance évidente). Curieusement, autant il est facile d'infliger à ces équations fonctionnelles toutes sortes de métamorphoses (comme de passer de (5.24) à (5.23) pour $M = 2$), ainsi que d'écrire parfois leur solution générale *locale*, par exemple

$$\begin{cases} (5.23) \iff H(\lambda) + H(\mathrm{j}\lambda) + H(\mathrm{j}^2\lambda) \equiv 1, \quad H(\lambda) \equiv \big(1 + D(\lambda)\big)^{-1} \\ \qquad\qquad \implies H(\lambda) = \lambda f(\lambda^3) + \lambda^2 g(\lambda^3) + \frac{1}{3}, \quad f,\ g \text{ analytiques}, \end{cases} \tag{5.29}$$

autant leur résolution devient inextricable présentement dans le cadre des fonctions *entières* (condition impérative pour sélectionner des déterminants fonctionnels !).

6. Conclusion.

Le traitement de deux exemples aux propriétés complémentaires, une équation aux dérivées partielles non séparable mais soluble et une équation

différentielle ordinaire non exactement soluble, a permis de dégager un diagramme (3.2) de propriétés communes qui peuvent être considérées comme des généralisations du diagramme (2.22) relatif au spectre des entiers.

Il est raisonnable d'en induire que plus généralement, pour des opérateurs globalement analytiques, leurs propriétés spectrales doivent pouvoir se coder par une algèbre de fonctions résurgentes dont les relations de structure sont régies par la dynamique classique complexe (version « constructive » du programme de Balian–Bloch).

Nous disposons d'un résultat partiel et conjectural dans cette direction [5]. Mettons le problème spectral sous la forme *implicite* suivante : soient $x_k(\lambda)$ les valeurs caractéristiques de $x = 1/\hbar$ pour lesquelles le hamiltonien quantique admet des fonctions propres *à énergie classique* λ *fixée* (cette formulation englobe les exemples précédents (4.1), (5.5)). Alors, par simple transformation de Borel de la formule des traces de Gutzwiller par rapport à la variable $x = 1/\hbar$, on trouve (formellement) que la fonction

$$\Theta_\lambda(\tau) = \sum_k \mathrm{e}^{-\tau x_k(\lambda)} \tag{6.1}$$

a ses singularités imaginaires pures localisées aux valeurs $\mathrm{i}S_\gamma(\lambda)$ où γ parcourt les orbites périodiques réelles d'énergie λ; par ailleurs, le formalisme de Balian–Bloch suggère l'extension naturelle de ce résultat aux autres singularités complexes, ce que nos exemples corroborent parfaitement.

Notre conjecture de Poisson générale pour un hamiltonien quantique analytique est donc que la fonction $\Theta_\lambda(\tau)$ définie par (6.1) a ses singularités aux valeurs $\mathrm{i}\,\tau =$ actions des orbites périodiques complexes d'énergie λ, et qu'elle est résurgente si ces orbites sont isolées. A cause de cette dernière condition, les systèmes pertinents pour cette généralisation sont ceux à un degré de liberté, ou au contraire les systèmes dont la dynamique classique est très mélangeante (axiome A) ; pour les systèmes classiquement complètement intégrables, il faudrait plutôt envisager une résurgence à plusieurs variables de type τ (une par degré de liberté) ; quant aux systèmes mixtes (classiquement décrits par le théorème KAM), leur description résurgente pourrait n'être que locale dans la mesure où le prolongement analytique des trajectoires à temps complexe présente génériquement des singularités denses [24].

Une autre extension concerne les « quantum maps » (quantifiés directs de symplectomorphismes de surfaces compactes). La résurgence devrait s'y

manifester dans un cadre d'opérateurs de Tœplitz (auquel on accèderait par une transformation de Borel par rapport à la dimension N ($\propto 1/\hbar$) de l'espace de Hilbert quantique) [25].

Dans tous les cas, un bon objectif concret serait de décrire complètement les algèbres résurgentes par des algorithmes effectifs et d'expliciter le contenu du diagramme (3.2), problème essentiellement ouvert en dehors du cas unidimensionnel. Toutefois, les développements déjà existants à plusieurs dimensions [8], et l'identification réussie d'au moins une fonction thêta d'allure résurgente telle que (6.1), sont des indices favorables.

Remerciements. — Non seulement ce travail, mais aussi toute mon activité dans le domaine de l'asymptotique, ont bénéficié de nombreux contacts avec Bernard Malgrange, qui m'a toujours prodigué de précieux encouragements et conseils; je suis donc très heureux de pouvoir ici lui témoigner ma plus vive reconnaissance.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. VOROS, Spectral zeta functions, dans : Zeta functions in geometry, Proceedings Tokyo, 1990, eds. N. Kurokawa et T. Sunada, Advanced Studies in Pure Mathematics, Math. Soc. Japan, Kinokuniya, Tokyo, 21 (1992), 327–358.

[2] R. BALIAN, G. PARISI and A. VOROS, Quartic oscillator, dans : Feynman path integrals, Proceedings, Marseille 1978, eds. S. Albeverio et al., Lecture Notes in Physics, Springer, 106 (1979), 337–360.

[3] A. VOROS, Le problème spectral de Sturm–Liouville..., Séminaire Bourbaki 1982/83, exposé 602, Astérisque, Soc. Math. France, 105–106 (1983), 95–103.

[4] A. VOROS, The return of the quartic oscillator. The complex WKB method, Ann. Inst. H. Poincaré, 39 A (1983), 211–338 (note de résultats : Correspondance semi-classique et résultats exacts : cas des spectres d'opérateurs de Schrödinger homogènes, C.R. Acad. Sc. Paris 293, Série I (1981), 709–712).

[5] A. VOROS, Schrödinger equation from $O(\hbar)$ to $o(\hbar^\infty)$, dans : Path integrals from meV to MeV, Proceedings, Bielefeld, 1985, eds. M.C. Gutzwiller et al., World Scientific, 1986, 173–195.

[6] P. CARTIER et A. VOROS, Une nouvelle interprétation de la formule des traces de Selberg, C.R. Acad. Sci. Paris, 307, Série I (1988), 143–148 et dans : The Grothendieck Festschrift (vol. 2), eds. P. Cartier et al., Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1991, 1–67.

[7] R.B. DINGLE, Asymptotic expansions : their derivation and interpretation, Academic Press, 1973.

[8] R. BALIAN and C. BLOCH, Solutions of the Schrödinger equation in terms of classical paths, Ann. Phys., New York, 85 (1974), 514–545; F. PHAM, ce volume.

[9] C. BENDER and T.T. WU, Anharmonic oscillator, Phys. Rev., 184 (1969), 1231–1260 et D 7 (1973), 1620–1636; J. ZINN-JUSTIN, Instantons in quantum mechanics : numerical evidence for a conjecture, J. Math. Phys., 25 (1983), 549–555; E. DELABAERE, H. DILLINGER et F. PHAM, Développements semi-classiques exacts des niveaux d'énergie d'un oscillateur à une dimension, C.R. Acad. Sci. Paris, 310 Série I (1990), 141–146; T. AOKI, T. KAWAI et Y. TAKEI, The Bender-Wu analysis..., dans : Special Functions, Proceedings, Hayashibara Forum, Okayama, 1990, eds. M. Kashiwara et T. Miwa, Springer, 1991, 1–29.

[10] A. VOROS, Spectral functions, special functions and the Selberg zeta function, Commun. Math. Phys., 110 (1987), 439–465.

[11] Y. COLIN DE VERDIÈRE, Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II, Compos. Math., 27 (1973), 159–184.

[12] J. CHAZARAIN, Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes, Invent. Math., 24 (1974), 65–82; J.J. DUISTERMAAT et V.W. GUILLEMIN, The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, Invent. Math., 29 (1975), 39–79.

[13] A. SELBERG, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., 20 (1956), 47–87; V.W. GUILLEMIN, Lectures on the spectral theory of elliptic operators, Duke Math. J., 44 (1977), 485–517.

[14] M.C. GUTZWILLER, Periodic orbits and classical quantization conditions, J. Math. Phys., 12 (1971), 343–358.

[15] E.C. TITCHMARSH, The theory of the Riemann zeta function, Clarendon Press, 1951.

[16] J. ÉCALLE, Les fonctions résurgentes, vol. 1, Publ. Math. Univ. Paris-Sud, Orsay, 81–05 (1981); Cinq applications des fonctions résurgentes, chap. 1, prétirage Orsay Math. 84T62 (1984) non publié; et : exposé dans ce volume.

[17] B. MALGRANGE, Introduction aux travaux de J. Écalle, L'Enseignement Math., 31 (1985), 261–282.

[18] B. CANDELPERGHER, J.-C. NOSMAS et F. PHAM, Approche de la résurgence, Hermann, 1993.

[19] F. STEINER, On Selberg's zeta function for compact Riemann surfaces, Phys. Lett., B 188 (1987), 447–454.

[20] V. BERNSTEIN, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Gauthier-Villars, 1933.

[21] J. LERAY, Problème de Cauchy I, Bull. Soc. Math. Fr., 85 (1957), 389–429.

[22] E. DELABAERE et H. DILLINGER, Thèse, Université de Nice, 1991; E. DELABAERE, H. DILLINGER et F. PHAM, Ann. Inst. Fourier, 43-1 (1993), 163–199.

[23] Y. SIBUYA, Global theory of a second order linear ordinary differential operator with a polynomial coefficient, chap. 5, North Holland, 1975.

[24] Y.F. CHANG, J.M. GREENE, M. TABOR and J. WEISS, The analytical structure of dynamical systems and self-similar natural boundaries, Physica, D 8 (1983), 183–207.

[25] L. BOUTET DE MONVEL and V.W. GUILLEMIN, The spectral theory of Tœplitz operators, Ann. of Math. Studies, 99, Princeton University Press, 1981; Th. PAUL et A. URIBE, Sur la formule semi-classique des traces, C.R. Acad. Sci. Paris, 313 Série I (1991), 217–222.

A. VOROS,
Service de Physique Théorique†,
Centre d'Études de Saclay
F 91191 Gif-sur-Yvette CEDEX (France).

† Laboratoire de la Direction des Sciences de la Matière du Commissariat à l'Énergie Atomique.