ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

C. E. CANCELIER
J. Y. CHEMIN
C. J. XU

Calcul de Weyl et opérateurs sous elliptiques

Annales de l'institut Fourier, tome 43, nº 4 (1993), p. 1157-1178
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_4_1157_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 4 (1993), 1157-1178

CALCUL DE WEYL ET OPÉRATEURS SOUS-ELLIPTIQUES

par C.E. CANCELIER, J.-Y. CHEMIN et C.J. XU

Introduction.

Dans ce travail, on considère une suite $(p_j), 1 \leq j \leq q$, de symboles classiques réels de $S^1(\Omega \times \mathbf{R}^n), \Omega$ étant un ouvert de $\mathbf{R}^n$. On suppose que la condition de sous-ellipticité de Hörmander est vérifiée à l'ordre 2 : pour tout compact K de Ω, il existe deux constantes $c, C > 0$, telles que tout $X = (x, \xi) \in K \times \mathbf{R}^n$, $|\xi| > C$, l'on ait

(1) $$\sum_{j=1}^{q} p_j^0(X)^2 + \sum_{i,j=1}^{q} \{p_i^0, p_j^0\}(X)^2 \geq c|\xi|^2,$$

p_j^0 désignant le symbole principal de $p_j, 1 \leq j \leq q$.

Soit P_j une réalisation proprement supportée de $p_j, 1 \leq j \leq q$, on considère l'opérateur laplacien généralisé

(2) $$\Delta_H = \sum_{j=1}^{q} P_j^* P_j.$$

On sait que Δ_H est sous-elliptique ([6], [2], [5]). On se propose de démontrer que Δ_H admet localement une paramétrixe qui est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole a une croissance régie par une métrique et un poids convenables. Cette démarche est bien connue lorsque les opérateurs

Mots-clés : Calcul de Weyl – Sous–ellipticité – Conditions de Hörmander – Paramétrixe – Calcul symbolique.
Classification A.M.S. : 35A20 – 35H05.

$P_j, 1 \leq j \leq q$, sont des champs de vecteurs réels réguliers ([6], [9], [10]). Elle nécessite ici le calcul de Weyl. Plus précisément :

THÉORÈME A. — *Sous les hypothèses précédentes, il existe un symbole* $b \in S^{-1}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Omega \times \mathbf{R}^n)$ *tel que,* B *étant une réalisation proprement supportée de* b, $\mathrm{Id} - \Delta_H B = \mathrm{Id} - B\Delta_H$ *soit un opérateur infiniment régularisant.*

De plus, pour tout compact K *de* Ω, *pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n}$, *il existe une constante* C *telle que*

$$\forall (x,\xi) \in K \times \mathbf{R}^n \ |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b(x,\xi)| \leq C\, m(x,\xi)^{-2-|\beta|-|\alpha|} < \xi >^{|\beta|} \tag{3}$$

$$\textit{avec} \quad m(x,\xi) = \left(\sum_{j=1}^{q} p_j^0(x,\xi)^2 + < \xi > \right)^{1/2}.$$

Remarques :

- Aux points $X = (x,\xi)$ où le système est elliptique, on a alors $m(X) \geq \mathrm{Cte} < \xi >$ et l'estimation (3) est du type $S^{-2}_{1,o}$.

- Un poids de ce type a été introduit par R. Beals dans [1].

- Lorsque les opérateurs P_j sont des champs de vecteurs, A. Nagel, E.M. Stein et S. Wainger ont obtenu dans [8] des estimations très précises sur le noyau de la paramétrixe en utilisant la géométrie sous-unitaire associée aux systèmes de champs de vecteurs. Notre résultat étant valable dans le cas où les opérateurs P_j ne sont pas nécessairement des champs de vecteurs, le lien avec la structure sous-unitaire n'est pas clair. Nous ne savons pas comparer nos résultats avec ceux de A. Nagel, E.M. Stein et S. Wainger.

L'article sera organisé de la manière suivante : Dans la *section 1*, on décrit les classes de symboles de Hörmander que l'on utilisera et l'on rappelle quelques unes de leurs propriétés de base. Dans la *section 2*, on énoncera et on démontrera un théorème d'inversion exacte. La démonstration nécessite l'introduction de l'espace de Sobolev associé à un poids m et à une métrique g déterminés par le système d'opérateurs pseudo-différentiels considéré. Dans la *section 3*, on déduira le théorème A du théorème d'inversion exacte démontré dans la précédente section et enfin la *section 4* sera consacrée à des résultats d'inclusion dans L^p des espaces de Sobolev associés à un système sous-elliptique de champs de vecteurs.

Remerciements. — Nous tenons à remercier J.-M. Bony, J. Camus, N. Lerner et G. Métivier pour de fructueuses discussions.

1. Classes de symboles.

On commencera par rappeler les résultats classiques du calcul de Weyl ([7]) repris dans l'article [4], puis on démontrera un lemme utilisé à la section 2.

1.1. *Rappels.*

A une distribution tempérée a définie sur l'espace des phases $\mathbf{R}^{2n}_X = \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_\xi$, la quantification de Weyl associe un *opérateur* a^w : $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ par la formule

$$a^w u(x) = (2\pi)^{-n} \int\int e^{i(x-y).\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy\, d\xi. \tag{1.1}$$

L'opération $\#$ de composition des symboles, définie par $(a\#b)^w = a^w b^w$ conduit au moins dans le cas où a et b appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$, au résultat :

$$a\#b(X) = \pi^{-2n} \int\int e^{-2i[Y-X,Z-X]} a(Y) b(Z) dY dZ, \tag{1.2}$$

où $[\cdot,\cdot]$ désigne la forme symplectique $[X,Y] = y\cdot\xi - x\cdot\eta$; $X = (x,\xi), Y = (y,\eta) \in \mathbf{R}^{2n}$.

Soit g une métrique, c'est-à-dire la donnée, pour tout $X \in \mathbf{R}^{2n}$, d'une forme quadratique définie positive $g_X(\cdot)$. On note g^σ_X la métrique duale de g_X pour la dualité définie par la forme symplectique. Pour tout $T \in \mathbf{R}^{2n}$, on a

$$g^\sigma_X(T) = \sup_{W\neq 0} \frac{[T,W]^2}{g_X(W)}. \tag{1.3}$$

On dira que g est une métrique de Hörmander si l'application $X \to g_X$ dépend mesurablement de X et si elle satisfait les trois propriétés suivantes :

g est une *métrique lente* : il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$(1.4) \qquad g_X(X-Y) \le 1/C \Rightarrow (g_Y(\cdot)/g_X(\cdot))^{\pm 1} \le C.$$

g vérifie le *principe d'incertitude* : $g_X(\cdot) \le g_X^\sigma(\cdot)$, ce qui revient à dire que

$$(1.5) \qquad \lambda_g(Y) = \inf_{W \neq 0} (g_Y^\sigma(W)/g_Y(W))^{1/2} \ge 1.$$

g est une *métrique tempérée* : il existe une constante $C > 0$ et un entier N tels que l'on ait

$$(1.6) \qquad (g_Y(\cdot)/g_X(\cdot))^{\pm 1} \le C(1 + g_Y^\sigma(Y-X))^N.$$

Soit M une fonction strictement positive, définie sur $\mathbf{R}^{2n}$. On dira que M est un *poids admissible* pour g s'il existe une constante $\widetilde{C}$ et un entier $\widetilde{N}$ tels que l'on ait

(1.7)
$$\begin{aligned} g_X(X-Y) \le 1/C \quad &\Rightarrow \quad (M(Y)/M(X))^{\pm 1} \le \widetilde{C} \qquad X, Y \in \mathbf{R}^{2n}, \\ (M(Y)/M(X))^{\pm 1} \quad &\le \quad \widetilde{C}(1 + g_Y^\sigma(Y-X))^{\widetilde{N}} \qquad X, Y \in \mathbf{R}^{2n}. \end{aligned}$$

Une fonction a de classe $C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ appartient à la *classe de symboles* $S(M,g)$ si toutes les semi-normes suivantes sont finies :

$$(1.8) \qquad ||a||_{k;S(M,g)} = \sup_{\substack{\ell \le k \; ; \; X \in \mathbf{R}^{2n} \\ g_X(T_j) \le 1}} |\partial_{T_1} \cdots \partial_{T_\ell} a(X)|/M(X),$$

en notant ∂_T la dérivée directionnelle $a \rightarrow < da, T >$.

Lorsque $a \in S(M,g)$, l'opérateur a^w est borné de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même, de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même et, si $M = 1$, de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même. De plus les classes $S(M,g)$ forment une algèbre graduée, par le groupe multiplicatif des poids, pour l'opération $\#$. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [7].

1.2. *Enoncé et démonstration du lemme 1.2.1.*

Soit a un symbole classique, positif, de $S^2(\mathbf{R}^{2n})$. Considérons les fonctions m et g_X définies par

$$(1.9) \qquad m(X) = (a(X) + < \xi >)^{1/2} \qquad X \in \mathbf{R}^{2n},$$

$< \xi >$ désignant $(1+|\xi|^2)^{1/2}$,

$$g_X(dx, d\xi) = m^{-2}(X)(< \xi >^2 dx^2 + d\xi^2) \qquad X \in \mathbf{R}^{2n}. \tag{1.10}$$

LEMME 1.2.1. — *Soient a un symbole classique, positif de $S^2(\mathbf{R}^{2n})$, m et g les fonctions définies en (1.9) et (1.10), alors*

1) *a appartient à $S(m^2, g)$,*

2) *g est une métrique de Hörmander, m un poids admissible pour g et*

$$\lambda_g(X) = \frac{m^2(X)}{< \xi >}. \tag{1.11}$$

Démonstration du lemme 1.2.1. — 1) Pour démontrer que $a \in S(m^2, g)$, on a, d'après la définition (1.8) à vérifier que pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe une constante C_k telle que l'on ait pour tous $X, T_1, \cdots, T_k \in \mathbf{R}^{2n}$

$$| < a^{(k)}(X) \; ; \; T_1 \otimes \cdots \otimes T_k > | \leq C_k \; m^2(X) \prod_{j=1}^{k} g_X^{1/2}(T_j),$$

où $a^{(k)}$ est le tenseur k-dérivé de a au point X pour la structure affine de $\mathbf{R}^{2n}$. On utilisera le fait suivant très simple :

Toute fonction f positive de classe $C^2(\mathbf{R})$ satisfait l'inégalité

$$(f')^2 \leq 2\|f''\|_{L^\infty} f. \tag{1.12}$$

Il s'agit maintenant de vérifier que, pour tout $2n$-uplet $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n}$, on a

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(X)| \leq \text{ Cte } m^{2-|\alpha|-|\beta|}(X) < \xi >^{|\beta|}$$

puisque, pour tout $T = (t, \tau) = (t_1, \cdots, t_n, \tau_1, \cdots, \tau_n)$,

$$t_i / g_X^{1/2}(T) \leq m(X) / < \xi > \; \text{ et } \tau_j / g_X^{1/2}(T) \leq m(X).$$

Lorsque $k = 1$, on utilise la positivité du symbole $a \in S^2(\mathbf{R}^{2n})$ et l'inégalité (1.12). Il en résulte que

$$|(\partial a / \partial x_j)(X)|(1/m^2(X))(m(X)/ < \xi >) \leq \text{ Cte } (a^{1/2}(X)/m(X)) \leq \text{ Cte.}$$

De même, on démontre que

$$|(\partial a/\partial \xi_j)(X)|(1/m^2(X))m(X) \leq \text{ Cte.}$$

Lorsque $k \geq 2$, on utilise seulement l'appartenance de a à $S^2(\mathbf{R}^{2n})$, ce qui donne

$$\begin{aligned}|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(X)| &\leq C_{\alpha,\beta} < \xi >^{2-|\alpha|} \\ &\leq m^2(X) < \xi >^{|\beta|} m^{|\beta|-|\alpha|} < \xi >^{2-|\alpha|-|\beta|} m^{-2+|\beta|+|\alpha|}.\end{aligned}$$

Comme $m(X) \geq < \xi > 1/2$ et que $2 \leq |\alpha| + |\beta|$, on a

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(X)| \leq C_{\alpha,\beta}\, m^2(X) < \xi >^{|\beta|} m^{|\beta|-|\alpha|}.$$

Donc $a \in S(M^2, g)$.

2) Remarquons que

$$g_X = \frac{< \xi >^2}{m^2(X)} g_{1,0,X} \quad \text{avec} \quad g_{1,0,X}(dx, d\xi) = dx^2 + \frac{d\xi^2}{< \xi >^2}.$$

La métrique $g_{1,0}$ est tempérée. De plus, il est clair que

$$\frac{< \xi >^2}{m^2(X)} \geq 1.$$

Il en résulte imédiatement que $g \leq g^\sigma$. Il suffit maintenant, d'après la proposition 18.5.6 de [7], de démontrer que la métrique g est lente.

Pour ce dernier point, considérons le poids équivalent au précédent, que l'on notera encore m, défini par

$$m(X) = (a^2(X) + < \xi >^2)^{1/4}.$$

On va démontrer en fait une propriété plus forte que la lenteur de g, à savoir, la lenteur de m pour la métrique de Hörmander de type $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$\tilde{g}_X(dx, d\xi) = < \xi > dx^2 + < \xi >^{-1} d\xi^2 \qquad X \in \mathbf{R}^{2n}. \tag{1.13}$$

Ecrivons tout d'abord que

$$\begin{aligned}m^4(X) - m^4(Y) &= a^2(X) - a^2(Y) + |\xi|^2 - |\eta|^2 \\ &= (a(X) - a(Y) + a(Y))^2 - a^2(Y) + |\xi|^2 - |\eta|^2.\end{aligned}$$

Il vient alors que

$$|m^4(X) - m^4(Y)| \leq \text{ Cte } \left((a(X) - a(Y))^2 + a^2(Y) + ||\xi|^2 - |\eta|^2|\right).$$

Or, vu que $m^2(Y) \geq <\eta>$, on a

$$\begin{aligned}\frac{||\xi|^2 - |\eta|^2|}{m^4(Y)} &\leq \text{ Cte } \left(\frac{|\xi-\eta|^2}{m^4(Y)} + \frac{|\eta|^2}{m^4(Y)}\right)\\ &\leq \text{ Cte } (1 + \tilde{g}_Y(X-Y)).\end{aligned}$$

Donc pour majorer

$$\frac{m^4(X)}{m^4(Y)} = \frac{m^4(X) - m^4(Y)}{m^4(Y)} + 1,$$

il ne reste plus qu'à considérer le terme

$$\frac{(a(X) - a(Y))^2}{m^4(Y)}.$$

Supposons que

$$(1.14) \qquad |\xi - \eta|^2 \leq \epsilon < \eta > \quad \text{et que} \quad |x-y|^2 \leq \epsilon < \eta >^{-1}.$$

On utilise alors l'inégalité de Taylor à l'ordre deux.

$$|a(X) - a(Y) - da(Y)\cdot(X-Y)| \leq C \sup_{t\in[0,1]} |d^2a(Y + t(X-Y))\cdot(X-Y)^2|.$$

Comme $a \in S^2(\mathbf{R}^n)$, on a

$$\sup_{t\in[0,1]} |d^2a(Y + t(X-Y))\cdot(X-Y)^2| \leq C|x-y|^2 < \eta >^2 + |\xi - \eta|^2.$$

D'après l'inégalité (1.12), il vient

$$\begin{aligned}|da(Y)\cdot(X-Y)| &\leq |\partial_x a(Y)\cdot(x-y)| + |\partial_\xi a(Y)\cdot(\xi-\eta)|\\ &\leq a^{1/2}(Y)\left(< \eta > |x-y| + < \eta >^{1/2} |\xi - \eta|\right).\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$|a(X) - a(Y)|^2 \leq C\left(1 + |x-y|^4 < \eta >^4 + |\xi-\eta|^4 + a(Y)|\xi-\eta|^2\right).$$

D'après les conditions (1.14), on a

$$|a(X) - a(Y)|^2 \leq C(1 + \epsilon < \eta >^2 + < \eta > a(Y)).$$

Comme $m(Y) \geq C(a(Y) + <\eta>^{1/2})$, il vient

$$\frac{(a(X) - a(Y))^2}{m^4(Y)} \leq C(1 + \epsilon).$$

Comme le poids $<\xi>$ est de toute évidence lent pour la métrique $\tilde{g}$, ceci conclut la démonstration du lemme.

Comme $g \leq \tilde{g}$, on a $\tilde{g}^\sigma \leq g^\sigma$. Il résulte donc du lemme ci-dessus que m est un poids tempéré pour la métrique $\tilde{g}$. D'où le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.2.2. — *Le poids m défini par (1.9) est un poids pour la métrique $\tilde{g}$ définie par (1.13).*

2. Enoncé et démonstration du théorème global.

THÉORÈME 2.1. — *Soit a un symbole classique de $S^2(\mathbf{R}^{2n})$ dont la partie principale a_0 est positive. On suppose que a^w est inversible et que $a^w(x, D)^{-1}$ applique continûment $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $H^1(\mathbf{R}^n)$. Alors il existe un symbole $b \in S(m^{-2}, g)$ tel que $a \# b = b \# a = 1$ (m et g définis par (1.9) et (1.10) avec a_0).*

La démonstration de ce résultat nécessite plusieurs théorèmes démontrés dans [3] et [4], concernant en particulier les espaces de Sobolev associés à une métrique de Hörmander et l'inversibilité, dans l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels, d'opérateurs inversibles en tant qu'opérateurs entre espaces de Sobolev. Les hypothèses de ces théorèmes sont vérifiées pour la métrique g du théorème 2.1 ci-dessus.

Soit $U_{Y,r}$ la boule $\{X \mid g_Y(Y - X) < r^2\}$ où $r^2 < C^{-1}$ (C constante de lenteur (1.4)). Par définition l'espace des *symboles confinés dans $U_{Y,r}$* est l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ muni de la famille de semi-normes

(2.1)
$$||d||_{k;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} = \sup_{\substack{\ell \leq k \ ; \ X \in \mathbf{R}^{2n} \\ g_X(T_j) \leq 1}} | \partial_{T_1} \cdots \partial_{T_\ell} d(X)|(1 + g_Y^\sigma(X - U_{Y,r}))^{k/2},$$

en posant

$$g_Y^\sigma(X - U_{Y,r}) = \inf_{W \in U_{Y,r}} g_Y^\sigma(X - W).$$

Une famille de symboles $(d_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ est dite *uniformément confinée dans les boules* $U_{Y,r}$ si les semi-normes $||d||_{k;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}$ sont majorées par des constantes C_k indépendantes de Y.

• Il existe une g-partition de l'unité (théorème 3.1.3 de [3]), c'est-à-dire une famille uniformément confinée de fonctions $(\varphi_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ à support dans $U_{Y,r}$ vérifiant

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} \varphi_Y |g_Y|^{1/2}\, dY = 1, \tag{2.2}$$

où $|g|$ désigne le déterminant de g.

Si M est un poids admissible pour g, on peut alors décomposer tout symbole $d \in S(M,g)$ sous forme intégrale en posant $d_Y(X) = M^{-1}(Y)d(X)\varphi_Y(X)$ et

$$d(X) = \int_{\mathbf{R}^{2n}} M(Y)d_Y(X)|g_Y|^{1/2}dY. \tag{2.3}$$

La famille $(d_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ est uniformément confinée et réciproquement si $(d_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ est une famille de symboles uniformément confinée, l'intégrale (2.3) converge et définit un élément de $S(M,g)$.

• D'après le corollaire 1.2.2, la métrique g est dominée par la métrique de Hörmander $\tilde{g}$ de type $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ((1.13), définition 7.1 de [4]). On a donc toutes les propriétés suivantes pour tous poids M et M_1 admissibles pour g et tout symbole $d \in S(M,g)$:

– On peut définir l'espace de Sobolev $H(M)$ (théorème 7.8 de [4]). L'espace $H(M)$ est l'espace des distributions $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ vérifiant

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} M^2(Y)||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2|g_Y|^{1/2}dY < \infty \tag{2.4}$$

(φ_Y partition de l'unité définie en (2.2)).

L'espace $H(M)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H(M)} = \int_{\mathbf{R}^{2n}} M^2(Y)(\varphi_Y^w u, \varphi_Y^w v)_{L^2}|g_Y|^{1/2}dY. \tag{2.5}$$

On notera $||\cdot||_{H(M)}$ la norme associée.

– $H(1)$ est identique à $L^2(\mathbf{R}^n)$ (théorème 4.6 de [4]).

– Opérance dans les espaces de Sobolev (corollaire 4.5 de [4]) ; d^w applique continûment $H(M_1)$ dans $H(M_1/M)$.

– La condition suffisante d'inversibilité (corollaire 7.7 de [4]) : Pour qu'il existe $d' \in S(M^{-1}, g)$ tel que $d \# d' = d' \# d = 1$, il suffit que pour un poids admissible $\widetilde{M}$, l'opérateur d^w soit inversible en tant qu'opérateur de $H(\widetilde{M})$ dans $H(\widetilde{M}/M)$.

L'idée directrice de la démonstration du théorème 2.1 consiste à traiter le symbole a comme un symbole elliptique (de poids m^2) au sens suivant :

$$\exists (c, C) \in \mathbf{R}_+^2 \ \forall X \in \mathbf{R}^{2n} \ \lambda_g(X) \geq C \Rightarrow a(x) \geq cm^2(X), \tag{2.6}$$

où λ_g est la fonction définie par la relation (1.5). Ceci suggère la décomposition de l'espace des phases $\mathbf{R}^{2n}$ en la réunion d'une zone dite sous-elliptique

$$\mathcal{S} = \{Y = (y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n} \mid m(Y) \leq A < \eta >^{1/2}\} \tag{2.7}$$

et d'une zone dite elliptique $\mathcal{E} = \mathcal{S}^c$ ($A > 0$ désigne une constante assez grande que l'on choisira ultérieurement).

Le théorème 2.1 résulte alors des deux lemmes suivants que nous admettrons momentanément.

Lemme 2.2. — *Soit $(\varphi_Y)_{Y \in \mathbf{R}^{2n}}$ une g-partition de l'unité définie par (2.2). Il existe deux familles $(\delta_Y)_{Y \in \mathbf{R}^{2n}}$ et $(R_Y)_{Y \in \mathbf{R}^{2n}}$ uniformément confinées dans les $U_{Y,r}$ telles que l'on ait, pour $Y \in \mathcal{E}$,*

$$\varphi_Y = m^{-2}(Y)\delta_Y \# a + \lambda_g^{-1}(Y) R_Y. \tag{2.8}$$

Lemme 2.3. — *Soit $(\theta_Y)_{Y \in \mathbf{R}^{2n}}$ une famille de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ uniformément confinée. Alors pour tout poids M admissible pour g, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} M^2(Y) ||\theta_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \leq C ||u||_{H(M)}^2. \tag{2.9}$$

Démonstration du théorème 2.1. — Comme $a \in S(m^2, g)$, alors a^w applique continûment $H(m^2)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$. Donc en vertu de la condition suffisante d'inversibilité, il suffit dès lors de vérifier que

$$||u||_{H(m^2)} \leq \text{ Cte } ||a^w u||_{L^2}. \tag{2.10}$$

Or

(2.11)
$$
\begin{aligned}
||u||_{H(m^2)} &= \int_{\mathbf{R}^{2n}} m^4(Y)||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\
&= \int_{S} m^4(Y)||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY + \int_{\mathcal{E}} m^4(Y)||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Comme par hypothèse, l'opérateur $a^w(x,D)^{-1}$ applique continûment $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $H^1(\mathbf{R}^n)$, on a, pour le premier terme I_1 :

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq A^4 \int_{\mathbf{R}^{2n}} <\eta>^2 ||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\
&\leq A^4 ||u||_{H^1(\mathbf{R}^n)}^2 \leq \mathrm{Cte} A^4 ||a^w u||_{L^2}^2.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Pour majorer I_2, on va décomposer φ_Y dans $\mathcal{E}$. En appliquant le lemme 2.2, puis en quantifiant, il vient

$$
\varphi_Y^w = m^{-2}(Y)\delta_Y^w a^w + \lambda_g^{-1}(Y) R_Y^w. \tag{2.13}
$$

D'après le lemme 2.3 d'une part et le fait que $\lambda_g(\cdot) \geq A$ dans $\mathcal{E}$ d'autre part, on en déduit que

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathcal{E}} m^4(Y)||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\
&\leq \mathrm{Cte} \left(\int_{\mathbf{R}^{2n}} ||\delta_Y^w a^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \right. \\
&\qquad \left. + \sup_{Y \in \mathcal{E}} \left\{ \lambda_g^{-2}(Y) \int_{\mathbf{R}^{2n}} m^4(Y) ||R_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \right\} \right) \\
&\leq \mathrm{Cte} \left(||a^w u||_{L^2}^2 + \frac{1}{A^2} ||u||_{H(m^2)}^2 \right).
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Démonstration du lemme 2.2. — Pour démontrer le lemme 2.2, il est nécessaire d'introduire la notion de biconfinement. On note $\Delta_r(X,Y)$ la quantité suivante qui mesure l'éloignement pour g^σ de deux g-boules.

$$
\Delta_r(X,Y) = 1 + \max\{g_X^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r}), g_Y^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r})\} \tag{2.15}
$$

où

$$
g_X^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r}) = \inf\ \{g_X^\sigma(X' - Y') \mid X' \in U_{X,r}, Y' \in U_{Y,r}\}.
$$

La fonction Δ_r vérifie la propriété d'intégration suivante (théorème 3.2.2 de [3], section 2.3 de [4]) :

$$\exists C, \exists N, \forall X \qquad \int_{\mathbf{R}^{2n}} \Delta_r^{-N}(X,Y)\ |g_Y|^{1/2} dY \leq C. \tag{2.16}$$

Les conditions (1.4) et (1.6) de lenteur et de tempérance de la métrique ainsi que le fait, pour un poids M, d'être un g-poids se traduisent (voir également [3]) par

$$\left(\frac{g_X(\cdot)}{g_Y(\cdot)}\right)^{\pm 1} \leq C\Delta_r(X,Y)^N \quad \text{et} \quad \left(\frac{M(X)}{M(Y)}\right)^{\pm 1} \leq C\Delta_r(X,Y)^N. \tag{2.17}$$

Le théorème de biconfinement suivant (théorème 3.2.1 de [3]) donne une estimation du reste $d \# h - dh$ que l'on notera $\lambda_g^{-1}(Y)R(d,h)$:

Soient d et h deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$, on a alors l'estimation suivante pour le reste $R(d,h)$ défini ci-dessus :

$$\begin{gathered} \forall k \in \mathbf{N} \quad \forall N \in \mathbf{N} \quad \exists \ell \in \mathbf{N} \quad \exists C > 0, \\ ||R(d,h)||_{k;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} \leq C||d||_{\ell;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}||h||_{\ell;\mathrm{Conf}(\delta,Z,r)}\Delta_r^{-N}(Y,Z). \end{gathered} \tag{2.18}$$

En particulier, si $(d_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ et $(h_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ sont deux familles de symboles uniformément confinées dans les boules $U_{Y,r}$, la famille $(\Delta_r^{-N}(Y,Z)$ $R(d_Y,h_Z))_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ est, pour chaque entier N, uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$ et dans les $U_{Z,r}$.

Pour obtenir la décomposition (2.8) dans $\mathcal{E}$, on écrit φ_Y sous la forme du produit

$$\varphi_Y(X) = (\varphi_Y(X)/a(X))a(X) \qquad X \in \mathbf{R}^{2n},$$

puis à l'aide de la forme intégrale (2.3) de a

$$\varphi_Y(X) = m^{-2}(Y)\tilde{\delta}_Y(X) \int_{\mathbf{R}^{2n}} m^2(Z)a_Z(X)|g_Z|^{1/2}dZ, \tag{2.19}$$

avec

$$\tilde{\delta}_Y(X) = (m^2(Y)\varphi_Y(X)/a(X)). \tag{2.20}$$

La famille $(a_Z)_{Z\in\mathbf{R}^{2n}}$ est uniformément confinée dans les boules $U_{Z,r}$ et la famille $(\delta_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ définie par

$$\delta_Y = \begin{cases} \tilde{\delta}_Y & \text{si } Y \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est uniformément confinée dans les boules $U_{Y,r}$.

D'après le théorème de biconfinement (2.18) on a :

$$\delta_Y a_Z = \delta_Y \# a_Z + \lambda_g^{-1}(Y)\ \widetilde{R}\ (\delta_Y, a_Z). \tag{2.21}$$

De plus la famille $(\Delta_r^{-N}(Y,Z)\widetilde{R}(\delta_Y), a_Z))_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ est uniformément confinée pour tout N et la fonction Δ_r vérifie la propriété d'intégration (2.16). Il s'ensuit alors que la famille $(R_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ définie par

(2.22)

$$R_Y(X) = \begin{cases} m^{-2}(Y)\displaystyle\int_{\mathbf{R}^{2n}} m^2(Z)\widetilde{R}(\delta_Y, a_Z)(X)|g_Z|^{1/2}dZ & \text{si} \quad Y\in\mathcal{E} \\ 0 \quad \text{sinon,} \end{cases}$$

est uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$. D'après (2.21), il vient, pour tout $Y\in\mathcal{E}$,

$$\varphi_Y(X) = m^{-2}(Y)\tilde{\delta}_Y(X)\# \int_{\mathbf{R}^{2n}} m^2(Z)a_Z(X)|g_Z|^{1/2}dZ + \lambda_g^{-1}(Y)R_Y.$$

Vu que

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} m^2(Z)a_Z(X)|g_Z|^{1/2}dZ = a,$$

il vient, pour tout $Y\in\mathcal{E}$,

$$\varphi_Y(X) = m^{-2}(Y)\tilde{\delta}_Y(X)\#a + \lambda_g^{-1}(Y)R_Y,$$

ce qui n'est rien d'autre que l'énoncé du lemme 2.2.

Démonstration du lemme 2.3. — On a pour cela le théorème 7.8 de [4]. Ce théorème affirme qu'étant donnée une g-partition de l'unité $(\varphi_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$, il existe une famille $(\psi_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$ telle que l'on ait

$$\int \psi_Y \# \varphi_Y|g_Y|^{1/2}dY = 1. \tag{2.23}$$

On sait par ailleurs que l'on a l'estimation L^2 suivante (proposition 2.4.1 de [3])

$$\exists C>0\ \exists k\in\mathbf{N} \quad ||d^w||_{\mathcal{L}(L^2)} \le C\ ||d||_{k;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}, \tag{2.24}$$

pour tout symbole $d\in S(M,g)$.

La démonstration du lemme 2.3 s'inspire de celle de la proposition 4.3 de [4].

Etant donnée une famille de symboles $(\theta_Y)_{Y\in\mathbf{R}^{2n}}$ uniformément confinée, considérons la partition de l'unité (2.23), alors

(2.25)
$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} M^2(Y)||\theta_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2}dY$$
$$= \int_{\mathbf{R}^{6n}} M^2(Y)(\theta_Y^w \psi_Z^w \varphi_Z^w u, \theta_Y^w \psi_{Z'}^w \varphi_{Z'}^w u)_{L^2} |g_Z|^{1/2}dZ|g_{Z'}|^{1/2}dZ'|g_Y|^{1/2}dY.$$

On a

$$|(\theta_Y^w \psi_Z^w \varphi_Z^w u, \theta_Y^w \psi_{Z'}^w \varphi_{Z'}^w u)_{L^2}| \leq ||\bar{\psi}_{Z'}^w \bar{\theta}_Y^w \theta_Y^w \psi_Z^w||_{\mathcal{L}(L^2)} ||\varphi_Z^w u||_{L^2} ||\varphi_{Z'}^w, u||_{L^2}.$$

En vertu de l'estimation L^2 (2.24) et du théorème de biconfinement (2.18), on obtient, que, pour tout N,

$$||\bar{\psi}_{Z'}^w \bar{\theta}_Y^w \theta_Y^w \psi_Z^w||_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \text{ Cte } \Delta_r^{-N}(Y,Z)\Delta_r^{-N}(Y,Z').$$

On en déduit finalement que l'expression (2.25) est majorée par

(2.26)
$$\text{Cte} \int_{\mathbf{R}^{4n}} A(Z,Z')M(Z)||\varphi_Z^w u||_{L^2} M(Z')||\varphi_{Z'}^w u||_{L^2} |g_Z|^{1/2}dZ|g_{Z'}|^{1/2}dZ'$$

où la fonction $A(Z,Z')$ est elle-même majorée par

$$\text{Cte} \int M^2(Y)M^{-1}(Z)M^{-1}(Z')\Delta_r^{-N}(Y,Z)\Delta_r^{-N}(Y,Z')|g_Y|^{1/2}dY.$$

D'après (2.17), on a

$$\left(\frac{M(X)}{M(Y)}\right)^{\pm 1} \leq C\Delta_r(X,Y)^{N_0}.$$

En posant $f(Z) = ||\varphi_Z^w u||_{L^2}$, il en résulte que la quantité (2.26) est majorée, pour tout N, par

(2.27)
$$C_N \int_{\mathbf{R}^{6n}} \Delta_r^{-N}(Y,Z)\Delta_r^{-N}(Y,Z')f(Z)f(Z')|g_Y|^{1/2}dY|g_Z|^{1/2}dZ|g_{Z'}|^{1/2}dZ'.$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz aux deux fonctions $f(Z)$ et $f(Z')$ et à la mesure

$$\Delta_r^{-N}(Y,Z)\Delta_r^{-N}(Y,Z')|g_Y|^{1/2}dY|g_Z|^{1/2}dZ|g_{Z'}|^{1/2}dZ',$$

on conclut la démonstration du lemme 2.3.

3. Localisation.

Il s'agit de démontrer le théorème A qui n'est rien d'autre qu'une version locale du théorème 2.1. On va préalablement construire une paramétrixe sur chaque compact de Ω.

Soit K un compact de Ω (on utilise les notations de l'introduction), on pose

$$A_K = \sum_{j=1}^{q} (\varphi_K P_j^\star)(\varphi_K P_j) - \sum_{j=1}^{n} (1-\tilde{\varphi}_K)\partial_j^2(1-\tilde{\varphi}_K), \tag{3.1}$$

où φ_K et $\tilde{\varphi}_K$ sont deux fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ telles que $\tilde{\varphi}_K$ vaille identiquement 1 près de K et soit supportée à l'intérieur de l'ensemble où φ_K vaut 1.

L'opérateur A_K est un opérateur positif, globalement sous-elliptique avec perte d'une dérivée, donc il existe deux constantes c et C positives telles que

$$||u||_{H^1(\mathbf{R}^n)} \leq C||(A_K + c\ \mathrm{Id})u||_{L^2}. \tag{3.2}$$

Le symbole principal $a_K + c$ de $A_K + c$ Id est positif; on peut lui appliquer le théorème 2.1 avec m_K et g_K définis par (1.9) et (1.10). Donc il existe un symbole $p_K \in S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que

$$(a_K + c) \# p_K = p_K \# (a_K + c) = 1. \tag{3.3}$$

De (3.3) on obtient

$$\begin{aligned} u &= p_K^w A_K u && + c\, p_K^w u \\ &= p_K^w A_K u && + c\, p_K^w (p_K^w A_K u + c p_K^w u) \\ &= p_K^w A_K u && + c\, (p_K^w)^2 A_K u + c^2 (p_K^w)^2 u, \end{aligned} \tag{3.4}$$

ainsi de suite, d'où pour chaque $j \in \mathbf{N}^\star$ un symbole b_j défini par

$$b_j = c^{j-1} p_K^{\# j} \in S(m_K^{-2j}, g_K),$$

avec la convention $q^{\# j} = q\# \dots \# q$, j fois.

Admettons un instant le lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Soient g une métrique de Hörmander et M un poids admissible pour cette métrique tel que $M \leq 1$. On considère une suite de symboles $(b_j)_{j\in\mathbf{N}}$ telle que $b_j \in S(M^{\mu_j}, g)$ où $(\mu_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est une suite* *strictement décroissante tendant vers $-\infty$ lorsque j tend vers $+\infty$. Alors il existe un symbole $b \in S(M^{\mu_0}, g)$ tel que, pour tout N, on ait*

$$b - \sum_{j<N} b_j \in S(M^{\mu_N}, g).$$

Il en résultera l'existence d'un symbole $\tilde{b}_K \in S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que :

$$A_K \tilde{b}_K^w(x, D) - \text{ Id et } \tilde{b}_K^w A_K - \text{ Id opèrent de } \mathcal{E}'_K \text{ dans } C_0^\infty(\Omega). \tag{3.5}$$

Le théorème 18.5.10 de [7] assure par ailleurs l'existence d'un symbole b'_K appartenant à $S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que $b_K^w = b'_K(x, D)$. Soit alors b_K défini par $b_K(x, \xi) = \varphi(x) b'_K(x, \xi)$. Il est clair que

$$\Delta_H b_K(x, D) - \text{ Id et } b_K(x, D)\Delta_H - \text{ Id opèrent de } \mathcal{E}'_K \text{ dans } C_0^\infty(\Omega). \tag{3.6}$$

Considérons maintenant un recouvrement $(\Omega_j)_{j\in\mathbf{N}}$ localement fini de Ω tel que $K_j = \bar{\Omega}_j$ soit un compact de Ω. Soient $(\varphi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une partition de l'unité associée à ce recouvrement et $(\chi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions $C_0^\infty(\Omega_j)$ telles que, pour tout j, χ_j vaille 1 près du support de φ_j. On pose $B = \sum\limits_{j\in\mathbf{N}} \chi_j b_{K_j}(x, D)\varphi_j$.

Il est évident que le symbole b de B appartient à $S^{-1}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Omega \times \mathbf{R}^n)$. Reste à vérifier que $\Delta_H B -$ Id est un opérateur infiniment régularisant. On a :

$$\Delta_H B = \sum_{j\in\mathbf{N}} \chi_j \Delta_H B \varphi_j + \sum_{j\in\mathbf{N}} (1 - \chi_j)\Delta_H B \varphi_j. \tag{3.7}$$

Le symbole de $\sum\limits_j (1 - \chi_j)\Delta_H B\varphi_j$ appartient à $S^{-\infty}(\Omega \times \mathbf{R}^n)$, il est donc infiniment régularisant ; alors

$$\begin{aligned} \Delta_H B &\equiv \sum_{j,k\in\mathbf{N}} \chi_j \Delta_H \chi_k b_{K_k}(x, D)\varphi_k\varphi_j \\ &\equiv \sum_{j,k\in\mathbf{N}} \chi_j \Delta_H b_{K_k}(x, D)\varphi_k\varphi_j \\ &\equiv \sum_{j,k\in\mathbf{N}} \chi_j \text{ Id } \varphi_k\varphi_j \\ &\equiv \text{Id} \end{aligned} \tag{3.8}$$

(où l'on a noté $A \equiv B$ si et seulement $A - B$ opère de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $C^\infty(\Omega)$).

Les estimations (3) de l'introduction résultent immédiatement de l'unicité des paramétrixes $b_K(x,D)$ modulo un opérateur infiniment régularisant.

Démontrons alors l'unicité annoncée, ce qui achèvera la démonstration du théorème A :

Pour tout compact K de $\Omega, A \equiv B_{(K)}$ signifie $A - B$ opère de $\mathcal{E}'_K$ dans C^∞_o. Soient b_K et c_K deux paramétrixes vérifiant (3.6), alors

$$\begin{aligned} b_K - c_K &\equiv b_K \Delta_H c_K - c_K \Delta_H b_K \\ &\equiv c_K - b_K, \end{aligned} \tag{3.9}$$

d'où l'unicité.

Pour conclure, reste à démontrer le lemme 3.1 qui prouvera l'existence d'un symbole $b_K \in S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que $b_K - \sum_{j<N} b_j \in S(m_K^{-2N}, g_K)$.

Démonstration du lemme 3.1. — Remarquons tout d'abord que, quitte à remplacer $M(X)$ par

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} M(Y)\varphi_Y(X)|g_Y|^{1/2}dY,$$

on peut supposer que $M \in S(M, g)$.

Nous allons suivre une stratégie "à la Borel". Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ égale à 0 dans un petit voisinage de l'origine, et à 1 pour $|x| \geq 1$. On pose

$$\tilde{b}_j(X) = \chi(M(X)/t_j)b_j(X)$$

où $(t_j)_{j\in\mathbf{N}}$ est une suite de nombres réels > 0. On se propose de démontrer que, pour un choix convenable de la suite $(t_j)_{j\in\mathbf{N}}$, le symbole $b = \sum_{j\in\mathbf{N}} \tilde{b}_j$ répond à la question. La première étape consiste à majorer les semi-normes de

$$\chi\left(\frac{m(X)}{t}\right)$$

dans l'espace des symboles $S(1,g)$. La formule de Faa-di-Bruno affirme que

$$D^k\left[\chi\left(\frac{m(X)}{t}\right)\right] = \sum_{\substack{q,k_1+\ldots+k_q=k \\ k_i\geq 1}} t^{-q}\chi^{(q)}\left(\frac{M(X)}{t}\right)D^{k_1}M \otimes \ldots \otimes D^{k_q}M.$$

Comme $M \in S(M,g)$, il vient, pour tout $(T_1,\ldots,T_k) \in (\mathbf{R}^{2n})^k$ tels que $g_X(T_i)=1$,

$$|(D^{k_1}M \otimes \ldots \otimes D^{k_q}M)(T_1,\ldots,T_k)| \leq C_k M^q(X).$$

D'où il résulte que

$$\left|\partial_{T_1}\ldots\partial_{T_k}\chi\left(\frac{M(X)}{t}\right)\right| \leq C_k \sum_{\substack{q,k_1+\ldots+k_q=k\\ k_i\geq 1}} t^{-q}M^q(X)\chi^{(q)}\left(\frac{M(X)}{t}\right).$$

Or, il existe une constante A strictement supérieure à 1 telle que

$$\chi^{(q)}\left(\frac{M(X)}{t}\right) \neq 0 \Rightarrow A^{-1}t \leq M(X) \leq At.$$

Il en résulte que, pour tout λ et pour tout α, on a

$$\left|\partial_{T_1}\ldots\partial_{T_k}\chi\left(\frac{M(X)}{t}\right)\right| \leq C_k A^{|\lambda|}M^{\alpha}(X)t^{-\lambda}.$$

D'après la formule de Leibnitz, pour tout entier j et k, il existe une constante $C_{j,k}$ telle que, pour tout λ et tout t, on ait

$$\left|\partial_{T_1}\ldots\partial_{T_k}\left(b_j(X)\chi\left(\frac{M(X)}{t}\right)\right)\right| \leq C_{k,j}A^{|\lambda|}M^{\mu_j+\lambda}(X)t^{-\lambda}.$$

En prenant $\lambda=\mu_{j-1}-\mu_j$, il en résulte que

$$\left\|b_j\chi\left(\frac{M(\cdot)}{t}\right)\right\|_{k,S(M^{\mu_{j-1}},g)} \leq C_{j,k}t^{\mu_j-\mu_{j-1}}. \tag{3.10}$$

Posons alors

$$t_j = \left(2^j(1+C_{j,j})\right)^{\frac{1}{\mu_{j-1}-\mu_j}} \quad \text{et} \quad \widetilde{b}_j(X) = \chi\left(\frac{M(X)}{t_j}\right)b_j(X).$$

D'après l'inégalité ci-dessus, on a, pour tout $j \geq \max\{N,k\}$,

$$\|\widetilde{b}_j\|_{k;S(M^{\mu_{N-1}},g)} \leq 2^{-j}.$$

D'autre part, d'après (3.10), on sait que, pour tout $j \geq N$, $\widetilde{b}_j \in S(M^{\mu_{j-1}},g)$. Donc la $(\widetilde{b}_j)_{j\geq N}$ est une série convergente dans l'espace $S(\mu_{N-1},g)$.

En particulier,

$$b = b_0 + \sum_{j\geq 1}\widetilde{b}_j \in S(\mu_0,g).$$

Il reste maintenant à vérifier que

$$b - \sum_{j<N} b_j \in S(\mu_N, g).$$

Pour ce faire, on écrit

$$b - \sum_{j<N} b_j = \sum_{j\geq N} \widetilde{b}_j + \sum_{j<N} \chi\left(\frac{M}{t_j}\right) b_j.$$

La série $(\widetilde{b}_j)_{j>N}$ est une série convergente dans l'espace $S(\mu_N, g)$. Comme $\widetilde{b}_N$ appartient à $S(\mu_N, g)$, il vient

$$\sum_{j\geq N} \widetilde{b}_j \in S(\mu_N, g).$$

Enfin,

$$b_j \in S(M^{\mu_j}, g) \quad \text{et} \quad \left\| \chi\left(\frac{M}{t_j}\right) \right\|_{k;S(1,g)} \leq C_k.$$

Donc, d'après la formule de Leibnitz, il existe pour tout entier k une constante C_k telle que

$$\forall X, \forall j, \left| \partial_{T_1} \ldots \partial_{T_k} \left(\chi\left(\frac{M}{t_j}\right) - 1 \right) \right| \leq C_k M^{\mu_j}(X) \prod_{1\leq \ell \leq k} g_X(T_\ell)^{1/2}.$$

Or, comme χ vaut identiquement 1 près de l'origine, il existe une constante c telle que

$$\chi\left(\frac{M}{t_j}\right) - 1 \neq 0 \Rightarrow t_j \geq cM(X).$$

Comme on a supposé que $M \geq 1$, on a

$$\left| \partial_{T_1} \ldots \partial_{T_k} \left(\chi\left(\frac{M}{t_j}\right) - 1 \right) \right| \leq C_k M^{\mu_N}(X) t_j^{\mu_j - \mu_N} \prod_{1\leq \ell \leq k} g_X(T_\ell)^{1/2}.$$

D'où le lemme.

4. Inclusion dans les espaces L^p.

On se propose de démontrer, dans le cas d'une somme de carrés de champs de vecteurs, le théorème 4.1 d'inclusion dans les espaces L^p. On utilisera les résultats de la section 4.6 de [4] que nous allons rappeler après avoir énoncé le théorème 4.1.

THÉORÈME 4.1. — *On suppose que les opérateurs $P_j, 1 \leq j \leq q$, sont des champs de vecteurs à coefficients C^∞. On note Ω_ℓ l'ouvert*

$$(4.1)\quad \Omega_\ell = \{x \in \mathbf{R}^n \text{ ; le système } P_1(x,\xi), \cdots, P_q(x,\xi) \text{ est de rang } \ell \text{ en } x\}.$$

Soit $p > 2$; on pose

$$(4.2)\qquad h_{s,p}(x) = \Big(\int (1 + p_j^0(x,\xi)^2 + <\xi>\Big)^{-sp/(p-2)} d\xi)^{(p-2)/2p}.$$

Pour tout compact K de Ω, pour tous s, p, ℓ tels que $s > (n-\ell/2)(1-2/p)$, il existe $c > 0$ tels que l'on ait :

$$(4.3)\qquad ||h_{s,p}^{-1} u||_{L^p(\Omega_\ell \cap K)} \leq C\ ||u||_{H(m_K^s)}$$

pour m_K et g_K définis par (1.9) et (1.10).

Remarque. — La condition sous laquelle (4.3) est vraie revient à

$$p < \frac{2Q}{Q-2s} \qquad \text{avec} \qquad Q = l + 2(n-l).$$

L'entier Q est la dimension homogène du système de champs de vecteurs $(P_j)_{1\leq j\leq q}$.

Démonstration. — La métrique g_K est scindée c'est-à-dire qu'il existe des formes quadratiques définies positives $g_{1,X}$ et $g_{2,X}$ sur $\mathbf{R}^n$ telles que

$$(4.4)\qquad g_K(dx, d\xi) = g_{1,X}(dx) + g_{2,X}(d\xi).$$

On a alors le théorème suivant (théorème 4.7 de [4]) que l'on rappelle pour la commodité du lecteur :

Soient M un poids admissible pour g et $p \in]2, +\infty[$. On note Ω_p l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^n$ tels que la quantité

$$h_p(x) = ||M^{-1}(x,\xi)||_{L^{2p/(p-2)}(d\xi)}$$

soit finie.

Si la mesure de Ω_p est > 0, alors l'application $u \to h_p^{-1} u|_{\Omega_p}$ définie sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ se prolonge en une application définie sur $H(M)$ vérifiant

$$||h_p^{-1} u||_{L^p(\Omega_p)} \leq \text{ Cte } ||u||_{H(M)}.$$

On observe alors qu'un changement de variable ramène, via le théorème 4.7 de [4] ci-dessus, à l'étude évidente de la convergence de l'intégrale

$$\int (1 + \xi_1^4 + \cdots + \xi_\ell^4 + \xi_{\ell+1}^2 + \cdots + \xi_n^2)^{-sp/(2(p-2))} d\xi.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BEALS, Characterization of pseudodifferential operators and applications, Duke Math. J., 44 (1977), 45-57.

[2] P. BOLLEY, J. CAMUS, J. NOURRIGAT, La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudo-différentiels, Comm. in P.D.E., 7 (1982), 197-221.

[3] J.-M. BONY et N. LERNER, Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur I, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 22, (1989), p.377-433.

[4] J.-M. BONY et J.-Y. CHEMIN, Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander, Preprint n°1042 de l'Ecole Polytechnique, octobre 1991, à paraître au Bull. Soc. Math. France et Séminaire E.D.P. de l'Ecole Polytechnique 1991-1992, exposé n°23.

[5] C.E. CANCELIER et J.-Y. CHEMIN, Sous-ellipticité d'opérateurs intégro-différentiels vérifiant le principe du maximum, Preprint n°1016, octobre 1991, Ecole Polytechnique, à paraître aux Annali della Scuola Normale superiore di Pisa

[6] L. HÖRMANDER, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math., 119 (1967), 147-171.

[7] L. HÖRMANDER, The analysis of partial differential operators III, Springer-Verlag 1985.

[8] A.NAGEL, E.M. STEIN and S. WAINGER, Balls and metrics defined by vector fields I : Basic properties, Acta Math., 155 (1985), 103-147.

[9] L. ROTHSCHILD and E.M. STEIN, Hypoelliptic differential operators and nilpotent Lie groups, Acta Math., 137 (1977), 247-320.

[10] C.-J. XU, Opérateurs sous-elliptiques et régularité des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre en deux variables, Comm. in P.D.E., 11 (1986), 1575-1603.

[11] C.-J. XU, Subelliptic variational problems, Bull. Soc. Math. France, 118 (1990), 147-159.

Manuscrit reçu le 25 février 1993.

C.E. CANCELIER,
Université de Reims
Dépt. de Mathématiques
B.P. 347
F-51062 Reims Cedex.

J.-Y. CHEMIN,
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
Plateau de Palaiseau
F-91128 Palaiseau Cedex.

C.J. XU,
Department of mathematics
Wuhan University
Wuhan 430072 (P.R. China).