ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARC WAMBST

Complexes de Koszul quantiques

Annales de l'institut Fourier, tome 43, nº 4 (1993), p. 1089-1156
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_4_1089_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 4 (1993), 1089-1156

COMPLEXES DE KOSZUL QUANTIQUES

par Marc WAMBST

Introduction.

Les années 1980 ont vu – souvent sous l'impulsion de la physique théorique – la naissance de nouvelles théories mathématiques qui se rangent dans le cadre de ce qu'on appelle la «géométrie non commutative». Dans ce cadre, les objets de base ne sont plus les espaces, mais les algèbres associatives tandis que les algèbres de Hopf tiennent lieu de groupes de symétrie.

Dans cet esprit, A. Connes [Co] a inventé en 1980 l'homologie cyclique pour servir de généralisation non commutative à la cohomologie de de Rham des variétés. Les techniques mises ultérieurement au point pour la calculer s'appliquent aux algèbres associatives les plus générales. Or la théorie des groupes quantiques – apparue également dans la dernière décennie sous l'influence directe de problèmes de physique quantique – fournit une grande quantité d'algèbres associatives qui sont des déformations non commutatives d'algèbres commutatives associées à des objets géométriques tels que groupes de Lie, espaces homogènes, *etc.* L'exemple le plus simple de telles algèbres «quantiques» est donné par le plan quantique : c'est l'algèbre engendrée par les deux «coordonnées» x et y et la relation $xy = qyx$ où q est un paramètre.

Il est tentant d'imaginer que pour ces algèbres «quantiques» qui ne sont pas loin d'être commutatives, des techniques issues de l'algèbre commutative vont servir, convenablement adaptées, au calcul de leur homologie. Or, les complexes de Koszul forment l'un des outils les plus puissants

Mots-clés : Algèbres quantiques – Complexes de Koszul – Homologie des algèbres de Lie – Homologie cyclique – Homologie de Hoschschild.
Classification A.M.S. : 16W60 – 17B37 – 17B56 – 18G – 19D55.

de l'algèbre homologique. On sait qu'ils apparaissent directement dans des problèmes de géométrie algébrique, mais aussi de manière indirecte dans les complexes de Chevalley-Eilenberg qui calculent l'homologie des algèbres de Lie. Il paraît donc important d'en avoir une version «quantique».

Le but de cet article est précisément de construire des versions «quantiques» des complexes de Koszul et de les utiliser pour le calcul de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique de certaines algèbres «quantiques».

La situation dans laquelle nous nous plaçons est celle, déjà considérée par Gurevich [G], Lyubashenko [L] et Manin [M], où l'on se donne un espace vectoriel V et une symétrie de Hecke c, c'est-à-dire un automorphisme de $V \otimes V$ vérifiant l'équation de Yang-Baxter et dont le polynôme minimal est quadratique. L'automorphisme c est une généralisation de la volte qui échange les deux composantes de $V \otimes V$. A cette donnée on attache deux algèbres $S_c(V)$ et $\Lambda_c(V)$ qui jouent le rôle d'algèbres symétrique et extérieure respectivement. Gurevich [G] a construit des complexes de $S_c(V)$-modules analogues aux complexes de Koszul traditionnels et établi des théorèmes d'acyclicité.

Nous donnons une présentation indépendante de ces complexes que nous utilisons pour définir des résolutions libres de bimodules pour $S_c(V)$ et $\Lambda_c(V)$. Ceci nous permet de construire un «petit» complexe calculant l'homologie de Hochschild de $S_c(V)$. Nous décrivons un quasi-isomorphisme entre ce «petit» complexe et le complexe standard de Hochschild. On a ainsi une version «quantique» du théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg qui est central en homologie cyclique pour les algèbres commutatives régulières.

Nous appliquons ces résultats au cas de l'espace affine quantique multiparamétré qui est l'algèbre engendrée par des variables $x_1, \ldots, x_N$ et des relations du type :

$$x_i x_j = q_{ij} x_j x_i \,.$$

Nous en calculons l'homologie de Hochschild. Lorsque la famille de paramètres $(q_{ij})_{ij}$ est «générique», on observe un phénomène déjà noté dans [FT], à savoir que la dimension homologique (au sens de l'homologie de Hochschild) de cette algèbre – qui vaut 1 – est très inférieure à sa dimension «géométrique» N définie comme la dimension homologique de l'algèbre commutative $K[x_1, \ldots, x_N]$ déformée. Dans le cas «générique», nous calculons également l'homologie cyclique de l'espace affine quantique.

Dans un deuxième temps, nous étudions l'homologie des algèbres de Lie «quantiques», définies, à peu de choses près, comme dans [G]. A chaque algèbre de Lie quantique $\mathfrak{g}$, nous associons une algèbre enveloppante $U_c(\mathfrak{g})$ et diverses versions «quantiques» des complexes de Chevalley-Eilenberg. L'une d'entre elles donne l'homologie de Hochschild de $U_c(\mathfrak{g})$. Nous explicitons ces constructions sur une version «quantique» de l'algèbre de Weyl. Son intérêt vient de ce qu'elle apparaît comme une algèbre d'opérateurs différentiels sur l'espace affine quantique multiparamétré.

Les résultats de cet article ont été partiellement annoncés dans [Wa]. En ce qui concerne les démonstrations, elles sont radicalement différentes des démonstrations classiques et les éclairent sous un jour nouveau en permettant de mieux comprendre le «coût» des relations de commutation utilisées. Ici, toutes les applications linéaires qui entrent en jeu sont définies uniquement à partir de la symétrie c et des opérations de composition et de produit tensoriel, ce qui engendre des formules algébriques complexes et malaisées à suivre. Aussi, nous avons eu recours dans les démonstrations à un langage pictural qui facilite leur lecture. Cet appel au dessin est dans le droit fil de travaux récents [JS] [KT] [RT] utilisant le lien entre le formalisme des groupes quantiques et la topologie en basse dimension.

Décrivons plus en détail le contenu de chaque paragraphe. Le § 1 est consacré à la définition des symétries et à quelques constructions de base. Au § 2, nous introduisons les algèbres symétriques et extérieures quantiques. Nous définissons les complexes de Koszul quantiques au § 3. Nous démontrons des résultats d'acyclicité pour ces complexes au § 4. Au § 5, nous explicitons un «petit» complexe calculant l'homologie de Hochschild de $S_c(V)$ et le comparons au complexe de Hochschild standard. Le § 6 est consacré au calcul des homologies de Hochschild et cyclique de l'espace affine quantique multiparamétré défini plus haut.

Au § 7, nous abordons la seconde partie avec les algèbres de Lie quantiques et leurs algèbres enveloppantes. Leurs complexes de Chevalley-Eilenberg sont construits au § 8. Au § 9, nous étendons la définition des algèbres enveloppantes à la situation où, en plus de l'algèbre de Lie quantique, on dispose d'un 2-cocycle. Cette extension couvre des exemples comme l'algèbre d'opérateurs différentiels quantiques mentionnée plus haut qui est l'objet du § 11. Au § 10, nous construisons un «petit» complexe calculant l'homologie de Hochschild des algèbres enveloppantes généralisées. Enfin, dans un appendice, nous déterminons les algèbres de Lie quantiques en dimension ≤ 3.

Ce travail a été réalisé sous la direction de M. Christian Kassel et est empreint de ses innombrables conseils et suggestions.

Notations.

Dans tout ce travail, nous notons $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Nous désignons par k un anneau commutatif et par V un module libre de rang fini N sur k. Tous les produits tensoriels sont pris sur k. Nous notons $T(V)$ l'algèbre tensorielle de V et, pour tout entier positif n, I_n l'opérateur identité sur $V^{\otimes n}$.

Pour tout élément inversible ν de k et tout entier n, nous définissons le scalaire $(n)_\nu$ en posant :

$$(0)_\nu = 0\,, \quad (1)_\nu = 1 \quad \text{et} \quad (n)_\nu = \frac{\nu^n - 1}{\nu - 1} = \nu^{n-1} + \ldots \nu + 1 \quad \text{pour } n \geq 2\,.$$

Lorsque $\nu = 1$ on a simplement $(n)_\nu = n$. Nous notons $\mathbb{N}_\nu$ (respectivement $\mathbb{N}_\nu^*$) l'ensemble des éléments $(n)_\nu$ quand n parcourt $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N}^*$). De plus, nous avons pour tous entiers m et n :

$$(m+n)_\nu = (m)_\nu + \nu^m (n)_\nu\,. \tag{0.1}$$

Enfin si $\mathcal{A}$ est une k-algèbre associative, nous notons $\mathcal{A}^{\mathrm{o}}$ l'algèbre opposée et $\mathcal{A}^{\mathrm{e}} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{o}}$ le produit tensoriel de l'algèbre $\mathcal{A}$ et de l'algèbre opposée.

1. Symétries.

Nous reprenons la notion de *symétrie* donnée par Gurevich [G] et Lyubashenko [L].

DÉFINITION 1.1. — *Soit V un k-module de rang fini N.*

(1) *On appelle symétrie un automorphisme c de $V \otimes V$ qui vérifie l'équation de Yang-Baxter :*

$$c_1 c_2 c_1 = c_2 c_1 c_2 \tag{1.1}$$

où $c_1 = c \otimes \mathrm{id}_V$ et $c_2 = \mathrm{id}_V \otimes c$.

(2) *Une symétrie c sur V est une symétrie de Hecke s'il existe un scalaire inversible $\nu \in k$ tel que la relation*

$$(c + \nu\,\mathrm{id}_{V\otimes V})(c - \mathrm{id}_{V\otimes V}) = 0\,. \tag{1.2}$$

soit vérifiée. Le scalaire ν est appelé la marque de la symétrie de Hecke c.

Remarque. — Quitte à se placer dans une extension algébrique de k, tout automorphisme c dont le polynôme minimal est de degré ≤ 2 vérifie une équation de la forme (1.2) après multiplication par un scalaire convenable.

EXEMPLES 1.2.

(1) Une symétrie involutive est une symétrie de Hecke de marque 1.

(2) L'application identité $\mathrm{id}_{V\otimes V}$ est une symétrie marquée de Hecke de marque ν pour tout ν dans k.

(3) La *volte* $\tau : v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1$ est une symétrie involutive.

(4) Si c est une symétrie de Hecke de marque ν, alors $-\nu^{-1}c$, c^{-1} et $-\nu c^{-1}$ sont des symétries de Hecke de marque ν^{-1}, ν^{-1} et ν respectivement. Nous appelons la première d'entre elles la *conjuguée* de la symétrie de Hecke c et nous posons $\overline{c} = -\nu^{-1}c$. De même, nous appelons *conjugué* d'un objet ou d'une relation définis en fonction d'une symétrie de Hecke c, l'objet ou la relation dans lesquels on a remplacé c par sa conjuguée.

(5) Nous nous attacherons particulièrement à l'exemple suivant. Soit $(q_{ij})_{i,j=1\ldots N}$ une famille d'éléments de k telle que, pour tous i et j on ait $q_{ii} = 1$ et $q_{ij}q_{ji} = q$ où q est un élément inversible de k. Cette famille définit une symétrie de Hecke Q de marque q de l'espace vectoriel V de base $\{x_1, \ldots, x_N\}$ où l'on a posé :

$$\begin{cases} Q(x_i \otimes x_j) = q_{ij}x_j \otimes x_i & \text{si } i \leq j \\ Q(x_i \otimes x_j) = q_{ij}x_j \otimes x_i + (1-q)x_i \otimes x_j & \text{si } i > j\,. \end{cases} \tag{1.3}$$

Nous appelons une telle symétrie une *symétrie simple* de rang N. Elle est liée à la représentation fondamentale du «groupe quantique » $GL_q(N)$ (cf [K3]).

(6) Sur le k-module de rang 2 de base $\{x, y\}$, les formules suivantes définissent une symétrie involutive :

$$\begin{cases} c(x \otimes x) = & -x \otimes x \\ c(x \otimes y) = & y \otimes x \\ c(y \otimes y) = & x \otimes x + y \otimes y. \end{cases}$$

On trouvera d'autres exemples dans [L] et [G].

1.3. Constructions de base. — A partir d'une symétrie de Hecke c de marque ν, nous allons construire des endomorphismes de l'algèbre tensorielle du module V. Pour $n \geq 2$, nous définissons les automorphismes $c_1, \ldots, c_{n-1}$, $\Pi_1(c), \ldots, \Pi_n(c)$ et $\check{\Pi}_1(c), \ldots, \check{\Pi}_n(c)$ de $V^{\otimes n}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} c_i = I_{i-1} \otimes c \otimes I_{n-i-1} \quad & \text{si } 1 \leq i \leq n-1\,, \\ \Pi_k(c) = c_1 \ldots c_{k-1} \quad & \text{pour } k = 2, \ldots, n \\ \text{et} \quad \check{\Pi}_k(c) = c_{n-1} \ldots c_k \quad & \text{pour } k = 1, \ldots, n-1\,. \end{aligned}$$

On pose de plus : $\Pi_1(c) = \check{\Pi}_n(c) = I_n$. Définissons de même les endomorphismes de $V^{\otimes n}$:

$$(1.4) \qquad A_n(c) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1-k} \Pi_k(c)\,, \qquad B_n(c) = \sum_{k=1}^{n} \nu^{1-k} \Pi_k(c)\,,$$

$$(1.5) \qquad \check{A}_n(c) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-n} \check{\Pi}_k(c)\,, \qquad \check{B}_n(c) = \sum_{k=1}^{n} \nu^{k-n} \check{\Pi}_k(c)\,.$$

Posons également $\check{A}_1(c) = A_1(c) = \check{B}_1(c) = B_1(c) = I_1$ et $\check{A}_0(c) = A_0(c) = B_0(c) = \check{B}_0(c) = 0$. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, nous écrivons simplement Π_k et $\check{\Pi}_k$ au lieu de $\Pi_k(c)$ et $\check{\Pi}_k(c)$ et A_n ,B_n, $\check{A}_n$ et $\check{B}_n$ au lieu de $A_n(c)$, $B_n(c)$, $\check{A}_n(c)$ et $\check{B}_n(c)$. Remarquons de plus que les opérateurs A_n et B_n, (resp. $\check{A}_n$ et $\check{B}_n$) sont conjugués l'un de l'autre au sens de l'exemple 1.2.4.

1.4. Représentation graphique. — Afin de simplifier les démonstrations à venir, nous représentons les morphismes de k-modules f de $V^{\otimes p}$ dans $V^{\otimes q}$ par des diagrammes du type de celui de la figure 1. Nous dirons que deux diagrammes sont équivalents, ce que nous noterons "$\sim$", s'ils représentent le même morphisme. L'identité I_p de $V^{\otimes p}$ sera représentée par

le diagramme dans lequel on joint les points superposés et la composition de deux morphismes f et g :

$$V^{\otimes p} \xrightarrow{f} V^{\otimes q} \xrightarrow{g} V^{\otimes r}$$

par la concaténation de deux diagrammes comme dans la figure 2. Le produit tensoriel d'un morphisme f de $V^{\otimes p}$ dans $V^{\otimes q}$ par un morphisme g de $V^{\otimes r}$ dans $V^{\otimes s}$ se traduit par la juxtaposition des deux diagrammes correspondant respectivement à f et à g. C'est ce que montre la figure 3. Il en résulte que la relation

$$f \otimes g = (f \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes g) = (g \otimes \mathrm{id})(f \otimes \mathrm{id}) \tag{1.6}$$

qui est une conséquence de la fonctorialité du produit tensoriel, s'illustre graphiquement par l'équivalence des diagrammes de la figure 4.

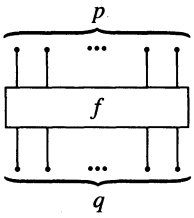


Figure 1

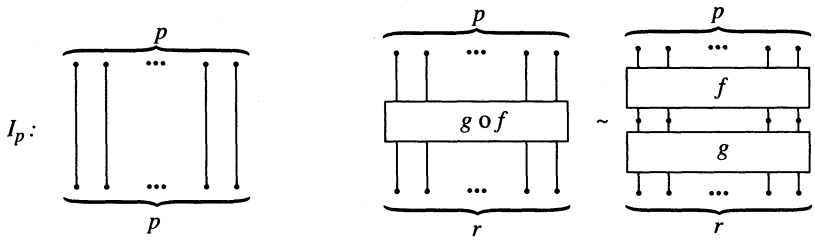


Figure 2

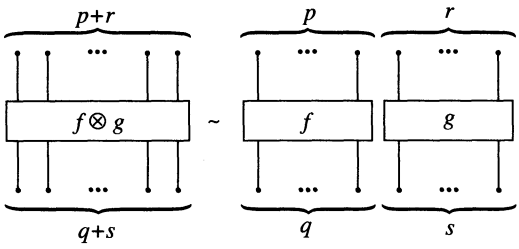


Figure 3

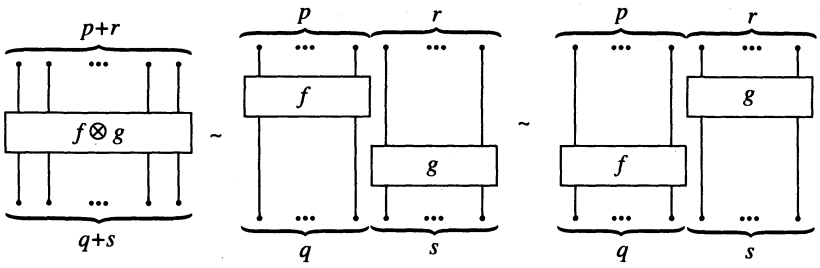


Figure 4

Convenons de représenter une symétrie c par le croisement de deux «brins» d'un diagramme, comme dans la figure 5. L'équation de Yang-Baxter se traduira alors par l'équivalence de diagrammes de la figure 6. Les opérateurs c_i, Π_i et $\check{\Pi}_i$ introduits en (1.3) se représentent par les diagrammes des figures 7 et 8. Rappelons que le groupe des tresses d'Artin $\mathfrak{B}_n$ est le groupe engendré par des générateurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ et les relations

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \qquad \text{et} \qquad \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad \text{si } |j-i| > 1\,.$$

L'équation de Yang-Baxter (1.1) montre qu'une symétrie c induit une représentation ρ de $\mathfrak{B}_n$ sur $V^{\otimes n}$ par $\rho(\sigma_i) = c_i$ pour tout $i \leq n-1$. Un opérateur provenant de cette représentation peut se représenter par un diagramme de n «brins» qui s'entrecroisent. Nous appelons *tresses* les diagrammes de ce type.

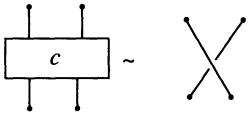


Figure 5

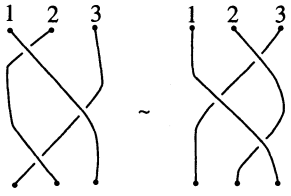


Figure 6

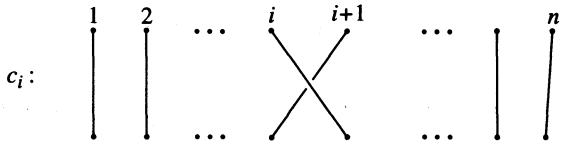


Figure 7

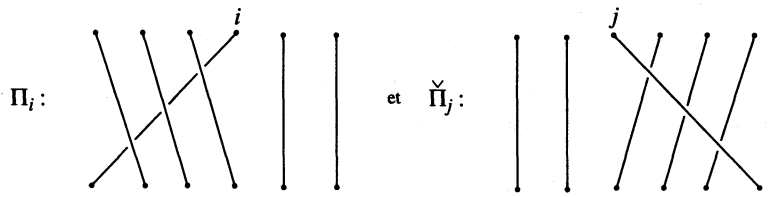


Figure 8

2. Algèbres symétriques et extérieures quantiques.

Construisons des analogues des algèbres symétrique et extérieure d'un k-module V relativement à une symétrie de Hecke c. Ce sont les objets de base de cet article. Ils vérifient des propriétés qui sont les pendants d'énoncés bien connus pour les algèbres symétriques et extérieures classiques.

DÉFINITION 2.1. — *L'algèbre symétrique $S_c(V)$ (respectivement extérieure $\Lambda_c(V)$) du module V relativement à la symétrie de Hecke c de marque ν est le quotient de l'algèbre tensorielle $T(V)$ par l'idéal bilatère gradué $I_c^+(V)$ (resp. $I_c^-(V)$) engendré par les éléments $v_1 \otimes v_2 - c(v_1 \otimes v_2)$ (resp. $v_1 \otimes v_2 + \nu^{-1}c(v_1 \otimes v_2)$) où v_1 et v_2 parcourent V.*

Les algèbres $S_c(V)$ et $\Lambda_c(V)$ héritent de la graduation naturelle de l'algèbre tensorielle $T(V)$. Nous notons $S_c^n(V)$ et $\Lambda_c^n(V)$ les k-modules des éléments homogènes de degré n et notons $v_1v_2\dots v_n$ (resp. $v_1\wedge v_2\dots\wedge v_n$) la classe d'un élément $v_1\otimes v_2\dots\otimes v_n$ dans l'algèbre symétrique (resp. dans l'algèbre extérieure). Nous appelons ρ_n^S et ρ_n^Λ les projections de $V^{\otimes n}$ dans $S_c^n(V)$ et $\Lambda_c^n(V)$ respectivement. De plus, nous notons id_S (resp. id_Λ) l'identité de l'algèbre symétrique (resp. extérieure).

Les algèbres symétrique et extérieure d'un module V relativement à une même symétrie de Hecke c sont conjuguées l'une de l'autre. Nous avons

les isomorphismes :

$$S_{\overline{c}}(V) \cong \Lambda_c(V) \qquad \text{et} \qquad \Lambda_{\overline{c}}(V) \cong S_c(V)\,.$$

Dans les démonstrations, afin d'alléger l'écriture, nous poserons souvent $S = S_c(V)$ et $\Lambda = \Lambda_c(V)$.

EXEMPLES 2.2.

(1) Lorsque c est la volte marquée par 1, on retrouve les algèbres symétrique et extérieure usuelles.

(2) Si k est un corps et que c est l'identité de V, on a les isomorphismes suivants pour tout ν différent de 0 et -1 :

$$S_c(V) \cong T(V) \qquad \text{et} \qquad \Lambda_c(V) \cong k \oplus V$$

où, dans le second cas, V est munie de la multiplication nulle.

(3) Soit Q une symétrie simple de rang N et de marque q donnée pour une famille de scalaires $(q_{ij})_{i,j=1\ldots N}$. Les algèbres $S_Q(V)$ et $\Lambda_Q(V)$ sont isomorphes aux algèbres engendrées sur k par $x_1, \ldots, x_N$ et les relations :

$$x_i x_j = q_{ij} x_j x_i \quad \text{pour } i \leq j$$

pour $S_c(V)$ et les relations :

$$x_i \wedge x_j = -q_{ji}^{-1} x_j \wedge x_i \quad \text{pour } i < j \quad \text{et} \quad (1+q) x_i \wedge x_i = 0$$

pour $\Lambda_c(V)$. L'algèbre $S_Q(V)$ est appelée *espace affine quantique multiparamétré.*

La proposition suivante semble bien connue (voir par exemple [BGS]). Sa démonstration est laissée au lecteur.

PROPOSITION 2.3. — *Soit c (respectivement c') une symétrie involutive du k-module V. Désignons par $c \oplus c'$ la symétrie de $V \oplus V'$ opérant comme c sur $V \otimes V$, c' sur $V' \otimes V'$ et comme la volte sur $(V \otimes V') \oplus (V' \otimes V)$. Nous avons alors les isomorphismes d'algèbres suivants :*

$$S_{c \oplus c'}(V \oplus V') \cong S_c(V) \otimes_{\mathrm{al}} S_{c'}(V')$$
$$\text{et} \qquad \Lambda_{c \oplus c'}(V \oplus V') \cong \Lambda_c(V) \otimes_{\mathrm{gr}} \Lambda_{c'}(V')$$

où $\otimes_{\mathrm{al}}$ désigne le produit tensoriel usuel des algèbres et $\otimes_{\mathrm{gr}}$ le produit tensoriel des algèbres graduées.

3. Complexes de Koszul quantiques.

Dans ce paragraphe, nous allons construire des complexes de modules sur $S_c(V)$ et $\Lambda_c(V)$ à l'aide des endomorphismes définis en 1.3. Ces complexes, que nous appellerons complexes de Koszul quantiques, sont des généralisations des complexes de Koszul usuels tels qu'ils sont définis dans [B] et [CE].

Etant donnée une symétrie de Hecke c de marque ν, on définit les quatre endomorphismes linéaires de $V^{\otimes(n+m)}$

$$d_r = I_m \otimes A_n\,, \quad d_\ell = \check{A}_m \otimes I_n\,, \quad \delta_r = I_m \otimes B_n\,, \quad \text{et} \quad \delta_\ell = \check{B}_m \otimes I_n\,,$$

et les deux endomorphismes de $V^{\otimes(n+m+p)}$

$$d_b = (d_r \otimes I_p) + (-1)^n (I_n \otimes d_\ell) \quad \text{et} \quad \delta_b = (\delta_r \otimes I_p) + (-1)^n (I_n \otimes \delta_\ell)\,.$$

LEMME. 3.1. — *Les applications d_r, d_ℓ, δ_r et δ_ℓ, (resp. d_b et δ_b) définissent par passage au quotient des applications $S_c(V)$-linéaires (resp. $\Lambda_c(V)$-linéaires)*

$$\begin{aligned} d_r &: S_c(V) \otimes V^{\otimes n} \longrightarrow S_c(V) \otimes V^{\otimes(n-1)} \\ d_\ell &: V^{\otimes n} \otimes S_c(V) \longrightarrow V^{\otimes(n-1)} \otimes S_c(V) \end{aligned}$$

(respectivement

$$\begin{aligned} \delta_r &: \Lambda_c(V) \otimes V^{\otimes n} \longrightarrow \Lambda_{(c,\nu)}(V) \otimes V^{\otimes(n-1)} \\ \delta_\ell &: V^{\otimes n} \otimes \Lambda_c(V) \longrightarrow V^{\otimes(n-1)} \otimes \Lambda_c(V)) \end{aligned}$$

et une application $S_c(V)$-$S_c(V)$-linéaire (resp. $\Lambda_c(V)$-$\Lambda_c(V)$-linéaire)

$$d_b : S_c(V) \otimes V^{\otimes n} \otimes S_c(V) \longrightarrow S_c(V) \otimes V^{\otimes(n-1)} \otimes S_c(V)$$

(respectivement

$$\delta_b : \Lambda_c(V) \otimes V^{\otimes n} \otimes \Lambda_c(V) \longrightarrow \Lambda_c(V) \otimes V^{\otimes(n-1)} \otimes \Lambda_c(V))$$

telles que l'on ait :

(a) $d_r^2 = \delta_r^2 = d_\ell^2 = \delta_\ell^2 = 0$,

(b) $(d_r \otimes \mathrm{id}_S)(\mathrm{id}_S \otimes d_\ell) = (\mathrm{id}_S \otimes d_\ell)(d_r \otimes \mathrm{id}_S)$,

$(\delta_r \otimes \mathrm{id}_\Lambda)(\mathrm{id}_\Lambda \otimes \delta_\ell) = (\mathrm{id}_\Lambda \otimes \delta_\ell)(\delta_r \otimes \mathrm{id}_\Lambda)$,

(c) $\delta_b^2 = d_b^2 = 0$.

Démonstration. — Le fait que d_r et d_ℓ passent au quotient est une conséquence des inclusions suivantes :

$$\begin{aligned} d_r\big(I_c^+(V)\otimes V^{\otimes n}\big) &\subset \big(I_c^+(V)\otimes V\big)\otimes V^{\otimes(n-1)} \subset \quad I_c^+(V)\otimes V^{\otimes(n-1)} \\ d_\ell\big(V^{\otimes n}\otimes I_c^+(V)\big) &\subset V^{\otimes(n-1)}\otimes\big(V\otimes I_c^+(V)\big) \subset \quad V^{\otimes(n-1)}\otimes I_c^+(V)\,. \end{aligned}$$

L'application $d_b = d_r\otimes \mathrm{id}_S + (-1)^n\,\mathrm{id}_S\otimes d_\ell$ passe donc également au quotient. Un raisonnement analogue vaut pour δ_r, δ_ℓ et δ_b.

Les applications δ_r, δ_ℓ et δ_b sont respectivement les conjuguées des applications d_r, d_ℓ et d_b. Nous ne démontrerons que les identités vérifiées par ces trois dernières, celles vérifiées par δ_r, δ_ℓ et δ_b s'en déduisant par substitution de $\overline{c}$ à c.

(a) La restriction de d_r (resp. de d_ℓ) à $S^m\otimes V^{\otimes n}$ (resp. à $V^{\otimes n}\otimes S^m$) s'écrit

$$d_r = (\rho^S_{m+1}\otimes I_{n-1})(I_m\otimes A_n)$$

(respectivement

$$d_\ell = (I_{n-1}\otimes\rho^\Lambda_{m+1})(\check{A}_n\otimes I_m))\,.$$

Il est aisé de constater que les restrictions de d_r^2 et de d_ℓ^2 aux mêmes sous-modules sont données par les formules :

$$d_r^2 = \big(\rho^S_{m+2}\otimes I_{n-2}\big)\big(I_m\otimes(I_1\otimes A_{n-1})A_n\big) \tag{3.1}$$

et

$$d_\ell^2 = \big(I_{n-2}\otimes\rho^\Lambda_{m+2}\big)\big((\check{A}_{n-1}\otimes I_1)\check{A}_n\otimes I_m\big)\,. \tag{3.2}$$

Etablissons les relations suivantes :

$$(I_1\otimes A_{n-1})A_n = (I_n - c_1)\sum_{1\le i\le j\le n-1}(-1)^{i+j}(I_1\otimes\Pi_j)\otimes\Pi_i \tag{3.3}$$

et

$$(\check{A}_{n-1}\otimes I_1)\otimes\check{A}_n = (I_n - c_{n-1})\sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{i+j+1}(\check{\Pi}_j\otimes I_1)\otimes\check{\Pi}_i\,. \tag{3.4}$$

D'après l'équation de Yang-Baxter (figure 6), on a l'équivalence des tresses de la figure 9. Il s'agit de la traduction graphique de la formule : $(I_1\otimes\Pi_j)\Pi_i = c_1(I_1\otimes\Pi_{i-1})\Pi_j$ où les entiers i et j vérifient $1\le j<i\le n-1$.

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}(I_1 \otimes A_{n-1})A_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{i+j}(I_1 \otimes \Pi_j)\Pi_i \\ &= \sum_{1\le i\le j\le n-1}(-1)^{i+j}(I_1 \otimes \Pi_j)\Pi_i \\ &\quad + \sum_{1\le j<i\le n}(-1)^{i+j}c_1(I_1 \otimes \Pi_{i-1})\Pi_j \\ &= (I_n - c_1)\sum_{1\le i\le j\le n-1}(I_1 \otimes \Pi_j)\Pi_i\,,\end{aligned}$$

ce qui est la relation (3.3). Par un calcul analogue, on déduit la relation (3.2) de la formule $(\check{\Pi}_j \otimes I_1)\check{\Pi}_i = c_{n-1}(\check{\Pi}_i \otimes I_1)\check{\Pi}_{j+1}$ pour $1 \le j \le i \le n-1$. Cette égalité résulte de l'équivalence des tresses de la figure 10 qui est elle aussi une conséquence immédiate de l'équation de Yang-Baxter.

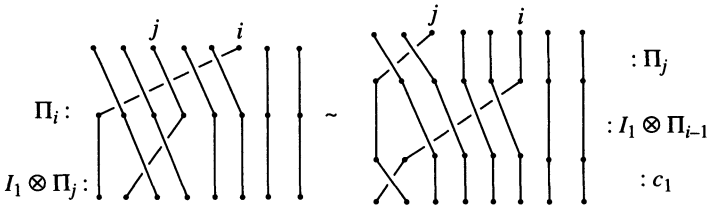


Figure 9

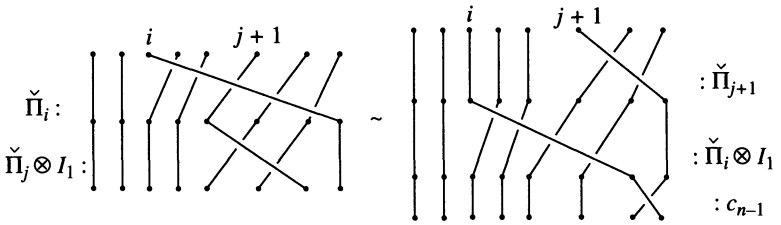


Figure 10

Il ne reste plus qu'à constater que, d'après (3.1) et (3.3), on a :

$$d_r^2 = \left(\rho_{m+2}^S \circ (I_{m+2} - c_{m+1}) \otimes I_{n-2}\right)\Big(I_m \otimes \sum_{1\le i\le j\le n-1}(-1)^{i+j}(I_1 \otimes \Pi_j)\Pi_i\Big)\,,$$

ce qui est nul car $\rho_{m+2}^S \circ (I_{m+2} - c_{m+1}) = 0$. De la même manière, on déduit de (3.2) et (3.4) que $d_\ell^2 = 0$.

(b) Ce point résulte de la relation

$$(I_1 \otimes \check{A}_{n-1})A_n = (A_{n-1} \otimes I_1)\check{A}_n\,. \tag{3.5}$$

La relation (1.6) implique que pour $1 \leq i \leq j \leq n-1$, on a $(I_1 \otimes \check{\Pi}_j)\Pi_i = (\Pi_i \otimes I_1)\check{\Pi}_{j+1}$ et, pour $1 \leq i < j \leq n$, la formule $(I_1 \otimes \check{\Pi}_j)\Pi_i = (\Pi_{i-1} \otimes I_1)\check{\Pi}_j$ (voir figure 11). Ainsi on a :

$$\begin{aligned}(I_1 \otimes \check{A}_{n-1})A_n &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n-1} (-1)^{n-j+i}(\Pi_i \otimes I_1)\check{\Pi}_{j+1} \\ &\quad + \sum_{1\leq j<i\leq n} (-1)^{n-j+i}(\Pi_{i-1} \otimes I_1)\check{\Pi}_j \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j+1+1}(I_1 \otimes \check{\Pi}_j)\Pi_i \\ &= (A_{n-1} \otimes I_1)\check{A}_n\,.\end{aligned}$$

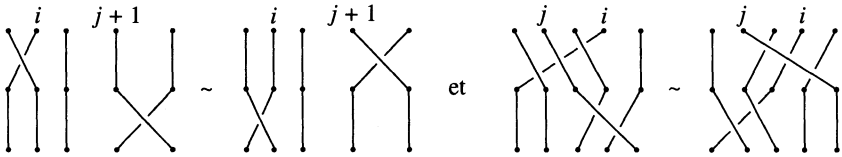


Figure 11

Or, les restrictions des opérateurs $(\mathrm{id}_S \otimes d_\ell)(d_r \otimes \mathrm{id}_S)$ et $(d_r \otimes \mathrm{id}_S)(\mathrm{id}_S \otimes d_\ell)$ à $S^m \otimes V^{\otimes n} \otimes S^p$ s'écrivent respectivement :

$$(\mathrm{id}_S \otimes d_\ell)(d_r \otimes \mathrm{id}_S) = (\rho^S_{m+1} \otimes I_{n-2} \otimes \rho^S_{p+1})\big(I_m \otimes (I_1 \otimes A_{n-1})\check{A}_n \otimes I_p\big)$$

et

$$(d_r \otimes \mathrm{id}_S)(\mathrm{id}_S \otimes d_\ell) = (\rho^S_{m+1} \otimes I_{n-2} \otimes \rho^S_{p+1})\big(I_m \otimes (\check{A}_{n-1} \otimes I_1)A_n \otimes I_p\big)\,.$$

On en déduit, d'après (3.5), que $(\mathrm{id}_S \otimes d_\ell)(d_r \otimes \mathrm{id}_S) = (d_r \otimes \mathrm{id}_S)(\mathrm{id}_S \otimes d_\ell)$.

(c) C'est une conséquence de (a) et (b). □

Tout bimodule M_b sur une algèbre $\mathcal{A}$ peut être considéré comme un $\mathcal{A}^e$-module à droite (resp. à gauche)) pour l'action décrite par la formule

$$m\cdot(a \otimes b) = bma \qquad\qquad (\text{resp. } (a \otimes b)\cdot m = amb)$$

où $a, b \in \mathcal{A}$ et $m \in M_b$. Cette observation jointe au lemme 3.1 permet de poser la

DÉFINITION 3.2. — *Soient M_r, M_ℓ, M_b respectivement un module à droite, un module à gauche et un bimodule sur $S_c(V)$ et N_r, N_ℓ, N_b respectivement un module à droite, un module à gauche et un bimodule sur $\Lambda_c(V)$. Nous appelons complexes de Koszul non commutatifs les complexes :*

$$\begin{aligned}
T_*(S_c(V); M_r) &= (M_r \otimes_{S_c(V)} (S_c(V) \otimes V^{\otimes *}), \mathrm{id}_M \otimes d_r),\\
T_*(S_c(V); M_\ell) &= ((V^{\otimes *} \otimes S_c(V)) \otimes_{S_c(V)} M_\ell, d_\ell \otimes \mathrm{id}_M),\\
T_*(S_c(V); M_b) &= (M_b \otimes_{S_c(V)^e} (S_c(V) \otimes V^{\otimes *} \otimes S_c(V)), \mathrm{id}_M \otimes d_b),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_*(\Lambda_c(V); N_r) &= (N_r \otimes_{\Lambda_c(V)} (\Lambda_c(V) \otimes V^{\otimes *}), \mathrm{id}_N \otimes \delta_r),\\
T_*(\Lambda_c(V); N_\ell) &= ((V^{\otimes *} \otimes \Lambda_c(V)) \otimes_{\Lambda_c(V)} N_\ell, \delta_\ell \otimes \mathrm{id}_N),\\
T_*(\Lambda_c(V); N_b) &= (N_b \otimes_{\Lambda_c(V)^e} (\Lambda_c(V) \otimes V^{\otimes *} \otimes \Lambda_c(V)), \mathrm{id}_N \otimes \delta_b).
\end{aligned}$$

Des identifications évidentes de k-modules nous donnent les isomorphismes de complexes suivants :

$$T_*(S_c(V); M_r) = \big(M_r \otimes V^{\otimes *}, d_{M,r}\big), \; T_*(S_c(V); M_\ell) = \big(V^{\otimes *} \otimes M_\ell, d_{M,\ell}\big),$$
$$T_*(S_c(V); M_b) = \big(M_b \otimes V^{\otimes *}, d_{M,b}\big)$$

et

$$T_*(\Lambda_c(V); N_r) = \big(N_r \otimes V^{\otimes *}, \delta_{N,r}\big), \quad T_*(\Lambda_c(V); N_\ell) = \big(V^{\otimes *} \otimes N_\ell, \delta_{N,\ell}\big),$$
$$T_*(\Lambda_c(V); N_b) = \big(N_b \otimes V^{\otimes *}, \delta_{N,b}\big)$$

où $d_{M,r}$, $d_{M,\ell}$,... sont les différentielles que nous explicitons comme suit. Si pour tous $v_1, \dots, v_k \in V$, on a :

$$c_1 c_2 \dots c_{k-1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \sum \tilde{v}_k \otimes \tilde{v}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{v}_{k-1} \tag{3.6}$$

$$c_{k-1} c_{k-2} \dots c_1(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \sum \tilde{\tilde{v}}_2 \otimes \cdots \otimes \tilde{\tilde{v}}_k \otimes \tilde{\tilde{v}}_1, \tag{3.7}$$

alors pour tout $m \in M$, on a :

$$\begin{aligned}
d_{M,r}(m \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = {} & m \cdot v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n\\
& - \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \sum m \cdot \tilde{v}_k \otimes \tilde{v}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{v}_{k-1} \otimes v_{k+1} \otimes \cdots \otimes v_n
\end{aligned} \tag{3.8}$$

et

$$\begin{aligned}
d_{M,\ell}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_1 \otimes m) = {} & v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1} \otimes v_n \cdot m\\
& + \sum_{k=2}^{n} \sum (-1)^{n-k} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{k+1} \otimes \tilde{\tilde{v}}_{k-1} \otimes \cdots \otimes \tilde{\tilde{v}}_n \otimes \tilde{\tilde{v}}_k \cdot m
\end{aligned} \tag{3.9}$$

où $\cdot$ désigne l'action de module à gauche (resp. à droite) de $T(V)$ sur M. La forme de $d_{M,b}$ se déduit de ces deux dernières formules. Les formules pour $\delta_{M,r}$, $\delta_{M,\ell}$ et $\delta_{M,b}$ se déduisent respectivement de celles de $d_{M,r}$, $d_{M,\ell}$ et $d_{M,b}$ en remplaçant la symétrie c par $-\nu^{-1}c$.

Le lemme suivant permettra de définir les *complexes de Koszul quantiques* comme quotient des complexes de Koszul non commutatifs.

LEMME 3.3. — *Pour toute symétrie de Hecke c de marque ν, les applications d_r, d_ℓ, δ_r, δ_ℓ, d_b et δ_b définissent, par passage au quotient, des différentielles*

$$\begin{aligned} d_r, \delta_\ell &: S_c(V) \otimes \Lambda_c(V) \longrightarrow S_c(V) \otimes \Lambda_c(V)\,, \\ d_\ell, \delta_r &: \Lambda_c(V) \otimes S_c(V) \longrightarrow \Lambda_c(V) \otimes S_c(V) \\ d_b, \delta_b &: S_c(V) \otimes \Lambda_c(V) \otimes S_c(V) \longrightarrow S_c(V) \otimes \Lambda_c(V) \otimes S_c(V)\,. \end{aligned}$$

De plus,

(a) *sur* $S_c^m(V) \otimes \Lambda_c^n(V)$ *, on a :*

$$\nu^{-1} d_r \delta_\ell + \delta_\ell d_r = \nu^{-m}(m+n)_\nu \,\mathrm{id}\,,$$

(b) *et sur* $\Lambda_c^m(V) \otimes S_c^n(V)$ *, on a :*

$$\nu^{-1} d_\ell \delta_r + \delta_r d_\ell = \nu^{-n}(m+n)_\nu \,\mathrm{id}\,.$$

Démonstration. — Ici encore, nous ne démontrerons que les propriétés vérifiées par d_r, d_ℓ et d_b, celles vérifiées par δ_r, δ_ℓ et δ_b s'en déduisant par conjugaison. Il s'agit en premier lieu de montrer que d_r, d_ℓ et d_b passent au quotient, c'est-à-dire que l'on a les inclusions suivantes :

$$d_r\big(S^m \otimes I_c^-(V)\big) \subset S^{m+1} \otimes I_c^-(V) \tag{3.10}$$

et

$$d_\ell\big(I_c^-(V) \otimes S^m\big) \subset I_c^-(V) \otimes S^{m+1}\,. \tag{3.11}$$

Remarquons que, pour tous les entiers i et k on a $\Pi_i c_k = c_k \Pi_i$ lorsque $1 \le i < k \le n$ et $\Pi_i c_k = c_{k+1}\Pi_i$ lorsque $0 \le k-1 < i \le n$. De plus on a $\Pi_k c_k = \Pi_{k+1}$ et, comme c est de Hecke, d'après (1.2), on a :

$$\Pi_{k+1} c_k = \Pi_k c_k^2 = (1-\nu)\Pi_k c_k + \nu \Pi_k = (1-\nu)\Pi_{k+1} + \nu \Pi_k\,.$$

Nous déduisons de ces relations que, pour tout $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\begin{aligned} A_n(\nu^{-1}c_k) &= \nu^{-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\Pi_i c_k \\ &= \nu^{-1}c_k\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}\Pi_i + (-1)^k(\Pi_k - \Pi_{k+1}) \\ &\quad + \nu^{-1}c_{k+1}\sum_{i=k+2}^{n}(-1)^{i+1}\Pi_i\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$A_n(I_n+\nu^{-1}c_k) = (I_n+\nu^{-1}c_k)\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}\Pi_i + (I_n+\nu^{-1}c_{k+1})\sum_{i=k+2}^{n}(-1)^{i+1}\Pi_i$$

et donc :

$$\begin{aligned} (3.12)\quad & d_r\big(I_m \otimes A_n(I_n+\nu^{-1}c_k)\big) \\ &= \big(\rho^S_{m+1}\otimes(I_{n-1}+\nu^{-1}c_{k-1})\big)\left(I_m\otimes\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}\Pi_i\right) \\ &\quad + \big(\rho^S_{m+1}\otimes(I_{n-1}+\nu^{-1}c_k)\big)\left(I_m\otimes\sum_{i=k+2}^{n}(-1)^{i+1}\Pi_i\right), \end{aligned}$$

le premier terme de cette somme n'étant non nul que lorsque $k \geq 2$. Les éléments homogènes de degré n de l'idéal $I_c^-(V)$ sont de la forme $(I_n+\nu^{-1}c_k)\zeta$ où k est compris entre 1 et $n-1$ et $\zeta \in V^{\otimes n}$. La formule (3.12) implique donc l'inclusion (3.10). La relation (3.11) se déduit de la formule

$$\check{A}_n(I_n+\nu^{-1}c_k) = (I_n+\nu^{-1}c_{k-1})\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{n-i}\check{\Pi}_i + (I_n+\nu^{-1}c_k)\sum_{i=k+2}^{n}(-1)^{n-i}\check{\Pi}_i$$

qui est elle-même une conséquence des relations de commutation entre $\check{\Pi}_i$ et c_k. En effet, on a $\check{\Pi}_i c_k = c_{k-1}\check{\Pi}_i$ lorsque $1 \leq i \leq k-1 < n-1$, $\check{\Pi}_i c_k = c_k\check{\Pi}_i$ lorsque $1 < k+1 < i \leq n$, $\check{\Pi}_{k+1}c_k = \check{\Pi}_k$ et $\check{\Pi}_k c_k = (1-\nu)\check{\Pi}_k + \nu\check{\Pi}_k$.

Nous venons de démontrer que d_r et d_ℓ passent au quotient ; c'est donc aussi le cas pour la différentielle $d_b = d_r \otimes \mathrm{id}_S + (-1)^n\,\mathrm{id}_S \otimes d_\ell$. A présent, montrons les points (a) et (b). Ils résultent de la formule :

(3.13)
$$\nu^{-1}(I_{m-1}\otimes A_{n+1})(\check{B}_m\otimes I_n)+(\check{B}_{m-1}\otimes I_{n-1})(I_m\otimes A_n)=\nu^{-1}\check{B}_m\otimes I_n+I_m\otimes A_n$$

que nous établissons maintenant.

Calculons :

$$\begin{aligned}
(3.14)\quad (I_{m-1}\otimes A_{n+1})(\check{B}_m\otimes I_n) &= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}(I_{m-1}\otimes \Pi_i)(\check{B}_m\otimes I_n)\\
&= \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i-1}(I_{m-1}\otimes \Pi_i)(\check{B}_m\otimes I_n)+\check{B}_m\otimes I_n\\
&= \sum_{i=2}^{n+1}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{i-1}\nu^{j-m}(I_{m-1}\otimes \Pi_i)(\check{\Pi}_j\otimes I_n)+\check{B}_m\otimes I_n\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{i}\nu^{j-m}(I_{m-1}\otimes \Pi_{i+1})(\check{\Pi}_j\otimes I_n)+\check{B}_m\otimes I_n
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
(3.15)\quad (\check{B}_{m+1}\otimes I_{n-1})(I_m\otimes A_n) &= \sum_{j=1}^{m+1}\nu^{j-m-1}(\check{\Pi}_j\otimes I_{n-1})(I_m\otimes A_n)\\
&= \sum_{j=1}^{m}\nu^{j-m-1}(\check{\Pi}_j\otimes I_{n-1})(I_m\otimes A_n)+I_m\otimes A_n\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{1-i}\nu^{j-m-1}(\check{\Pi}_j\otimes I_{n-1})(I_m\otimes \Pi_i)+I_m\otimes A_n\,.
\end{aligned}$$

Or, l'équivalence des diagrammes de la figure 12 donne la relation :

$$(I_{m-1}\otimes \Pi_{i+1})(\check{\Pi}_j\otimes I_n)=(\check{\Pi}_j\otimes I_{n-1})(I_n\otimes \Pi_i)$$

pour tous les entiers i et j tels que $1\le i\le n$ et $1\le j\le m$. En additionnant (3.14) multiplié par ν^{-1} et (3.15), nous obtenons (3.13). Si l'on projette (3.13) sur $S^m\otimes\Lambda^n$ on obtient :

$$\nu^{-1}d_r\delta_\ell+\delta_\ell d_r=\left[\nu^{-m}\sum_{j=1}^{m}\nu^{j-1}+\sum_{i=1}^{n}\nu^{i-1}\right]\mathrm{id}=\left[\nu^{-m}(m)_\nu+(n)_\nu\right]\mathrm{id}\,.$$

D'après (0.1), on a alors : $\nu^{-1}d_r\delta_\ell+\delta_\ell d_r=\nu^{-m}(m+n)_\nu\,\mathrm{id}$, c'est-à-dire le point (a) du lemme 3.3. Cette dernière relation est la conjuguée de :

$$\nu\delta_r d_\ell+d_\ell\delta_r=\nu^m(m+n)_{\nu^{-1}}\,\mathrm{id}\,,$$

ce qui équivaut à :

$$\nu^{-1} d_\ell \delta_r + \delta_r d_\ell = \nu^{-n}(m+n)_\nu \, \mathrm{id}$$

et démontre le point (b). □

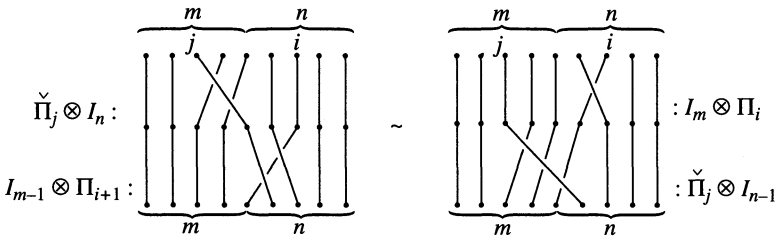


Figure 12

DÉFINITION 3.4. — *Soient M_r, M_ℓ, M_b, N_r, N_ℓ, et N_b des modules sur $S_c(V)$ et $\Lambda_c(V)$ comme dans la définition 3.2. Nous appelons complexes de Koszul quantiques les complexes suivants :*

$$\begin{aligned}
K_*(S_c(V); M_r)_r &= \big(M_r \otimes_{S_c(V)} \big(S_c(V) \otimes \Lambda_c^*(V)\big)\,,\, \mathrm{id}_M \otimes d_r\big)\,,\\
K_*(S_c(V); M_\ell)_\ell &= \big(\big(\Lambda_c^*(V) \otimes S_c(V)\big) \otimes_{S_c(V)} M_\ell\,,\, d_\ell \otimes \mathrm{id}_M\big)\,,\\
K_*(S_c(V); M_b)_b &= \big(M_b \otimes_{S_c(V)^e} \big(S_c(V) \otimes \Lambda_c^*(V) \otimes S_c(V)\big)\,,\, \mathrm{id}_M \otimes d_b\big)\,,\\
K_*(\Lambda_c(V); N_r)_r &= \big(N_r \otimes_{\Lambda_c(V)} \big(\Lambda_c(V) \otimes S_c^*(V)\big)\,,\, \mathrm{id}_N \otimes \delta_r\big)\,,\\
K_*(\Lambda_c(V); N_\ell)_\ell &= \big(\big(S_c^*(V) \otimes \Lambda_c(V)\big) \otimes_{\Lambda_c(V)} N_\ell\,,\, \delta_\ell \otimes \mathrm{id}_M\big)\,,\\
K_*(\Lambda_c(V); N_b)_b &= \big(N_b \otimes_{\Lambda_c(V)^e} \big(\Lambda_c(V) \otimes S_c^*(V) \otimes \Lambda_c(V)\big)\,,\, \mathrm{id}_N \otimes \delta_b\big)\,.
\end{aligned}$$

Comme précédemment, des identifications de k-modules canoniques induisent les identifications :

$$\begin{aligned}
K_*(S_c(V); M_r)_r &= \big(M_r \otimes \Lambda_c^*(V)\,,\, d_{M,r}\big)\,,\\
K_*(S_c(V); M_\ell)_\ell &= \big(\Lambda_c^*(V) \otimes M_\ell\,,\, d_{M,\ell}\big)\,,\\
K_*(S_c(V); M_b)_b &= \big(M_b \otimes \Lambda_c^*(V)\,,\, d_{M,b}\big)\,,\\
K_*(\Lambda_c(V); N_r)_r &= \big(N_r \otimes S_c^*(V)\,,\, \delta_{N,r}\big)\,,\\
K_*(\Lambda_c(V); N_\ell)_\ell &= \big(S_c^*(V) \otimes N_\ell\,,\, \delta_{N,\ell}\big)\,,
\end{aligned}$$

et

$$K_*(\Lambda_c(V); N_b)_b = \big(N_b \otimes S_c^*(V)\,,\, \delta_{N,b}\big)$$

où les différentielles $d_{M,r}$, $d_{M,\ell}$,... sont données par les mêmes formules que dans le cas des complexes de Koszul non commutatifs.

EXEMPLES 3.5.

(1) Supposons que chacune des algèbres $S_c(V)$ et $S_c(V)^e$ soit munie de sa structure naturelle de $S_c(V)$-bimodule. Les trois complexes de Koszul quantiques $K_*\big(S_c(V);S_c(V)\big)_r$, $K_*\big(S_c(V);S_c(V)\big)_\ell$ et $K_*\big(S_c(V);S_c(V)^e\big)_b$ sont isomorphes aux complexes

$$\begin{aligned} K_*\big(S_c(V);S_c(V)\big)_r &= \big(S_c(V)\otimes\Lambda_c^*(V)\,,\,d_r\big)\,,\\ K_*\big(S_c(V);S_c(V)\big)_\ell &= \big(\Lambda_c^*(V)\otimes S_c(V)\,,\,d_\ell\big)\,,\\ K_*\big(S_c(V);S_c(V)^e\big)_b &= \big(S_c(V)\otimes\Lambda_c^*(V)\otimes S_c(V)\,,\,d_b\big) \end{aligned}$$

où les différentielles d_r, d_ℓ et d_b sont celles définies dans le lemme 3.2. Observons que le premier complexe (resp. le deuxième, resp. le troisième) est un complexe de $S_c(V)$-modules à droite (resp. module à gauche, resp. bimodules). Il en résulte que l'on récupère les complexes de Koszul de la définition 3.4 par

$$\begin{aligned} K_*(S_c(V),M_r)_r &= M_r\otimes_{S_c(V)}K_*(S_c(V),S_c(V))_r\\ K_*(S_c(V),M_\ell)_\ell &= K_*(S_c(V),S_c(V))_\ell\otimes_{S_c(V)}M_\ell\\ K_*(S_c(V),M_b)_b &= M_b\otimes_{S_c(V)^e}K_*(S_c(V),S_c(V)^e)_b\,. \end{aligned} \tag{3.16}$$

De plus, nous pouvons identifier le complexe $K_*\big(S_c(V);S_c(V)\big)_b$ au complexe

$$K_*\big(S_c(V);S_c(V)\big)_b = \big(S_c(V)\otimes\Lambda_c^*(V)\,,\,\tilde d\big)$$

où la différentielle $\tilde d$ s'exprime, avec les conventions d'écriture (3.9) et (3.10), par la formule

$$\begin{aligned} \tilde d(\zeta) =& xv_1\otimes v_2\wedge\cdots\wedge v_n - \sum_{k=2}^{n}(-1)^k\sum x\tilde v_k\otimes\tilde v_1\wedge\cdots\wedge\tilde v_{k-1}\wedge v_{k+1}\wedge\cdots\wedge v_n\\ &+(-1)^n v_n x\otimes v_1\wedge\cdots\wedge v_{n-1} + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{n-k}\sum\tilde{\tilde v}_k x\otimes v_1\wedge\ldots\\ &\qquad\qquad\wedge v_{k+1}\wedge\tilde{\tilde v}_{k-1}\wedge\ldots\wedge\tilde{\tilde v}_n \end{aligned}$$

où $\zeta = x\otimes v_1\wedge\cdots\wedge v_n$ est un élément homogène de $S_c(V)\otimes\Lambda_c^n(V)$.

(2) Lorsque la symétrie c est la volte τ, nous retrouvons les complexes de Koszul classiques. Par exemple, pour un $S(V)$-module à droite M_r, le

complexe $K_*(S(V); M_r)_r$ est isomorphe à $(M_r \otimes \Lambda^*(V), d_{M,r})$ muni de la différentielle définie sur un élément homogène par :

$$d_{M,r}(m \otimes x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{i_n}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} m \cdot x_{i_k} \otimes x_{i_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{x_{i_k}} \otimes \cdots \otimes x_{i_n}$$

où, pour $m \in M_r$ et $x \in S(V)$, $m \cdot x$ désigne l'action de module à droite sur M_r.

Dans ce cas particulier, pour tout $S(V)$-bimodule M_b, le complexe $K_*\big(S(V); M_b\big)_b$ est isomorphe au complexe $K_*\big(S(V); M_b\big)_r$ où $S(V)$ opère à droite sur M_b par $m \cdot x = mx - xm$ où $m \in M_b$ et $x \in S(V)$.

(3) Supposons que k soit un corps et que $c = \mathrm{id}$ (cf. l'exemple 2.2.2). Alors pour tout ν différent de 0 et -1, les complexes $K_*\big(S_c(V); S_c(V)\big)_r$ et $K_*\big(\Lambda_c(V); \Lambda_c(V)\big)_r$ se réduisent respectivement à

$$K_*\big(T(V); T(V)\big)_r = \big(T(V) \otimes (k \oplus V), d_r\big)$$

avec la différentielle

$$d_r\left[\sum_{i=1}^{N} m_i \otimes x_i\right] = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

où $m_i \in T(V)$ et

$$K_*(k \oplus V; k \oplus V) = \big((k \oplus V) \otimes V^{\otimes *}, \delta_r\big)$$

avec $\delta_r = 0$. Les quatres autres complexes $K_*(S_c(V), S_c(V))_\ell$, $K_*(\Lambda_c(V); \Lambda_c(V))_\ell$, $K_*(S_c(V); S_c(V))_b$ et $K_*(\Lambda_c(V); \Lambda_c(V))_b$ se déduisent aisément de ceux-ci.

(4) Soit Q une symétrie simple de rang N et de marque q telle que $q+1$ soit inversible dans k. L'algèbre extérieure $\Lambda_Q(V)$ est alors engendrée par des éléments homogènes du type $\zeta = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}$ où $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ (cf. l'exemple 2.2.3). Les complexes de Koszul quantiques prennent la forme suivante :

$$K_*(S_Q(V); S_Q(V))_r = \big(S_Q(V) \otimes \Lambda_Q^*(V), d_r\big)$$

et

$$K_*(S_Q(V); S_Q(V))_\ell = \big(\Lambda_Q^*(V) \otimes S_Q(V), d_\ell\big)$$

où les différentielles sont données, pour tout $m \in S_Q(V)$, par

$$d_r(m \otimes \zeta) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\prod_{h=1}^{k-1} q_{i_h i_k}\right) m x_{i_k} \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_{i_k}} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}$$

et

$$d_\ell(\zeta \otimes m) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \left(\prod_{h=k+1}^{n} q_{i_k i_h} \right) x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_{i_k}} \wedge \cdots \wedge x_{i_n} \otimes x_{i_k} m.$$

La différentielle du complexe $K(S_Q(V); S_Q(V))_b$ est donnée par

$$\tilde{d} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\prod_{h=1}^{k-1} q_{i_h i_k} m x_{i_k} - \prod_{h=k+1}^{n} q_{i_k i_h} x_{i_k} m \right) \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_{i_k}} \wedge \cdots \wedge x_{i_n} . \tag{3.17}$$

Nous calculerons l'homologie de ce dernier complexe au paragraphe 6.

4. Résolutions.

Dans ce paragraphe, nous montrons que, sous certaines conditions, certains complexes de Koszul quantiques construits au paragraphe 3 sont acycliques. Nous en déduisons des résolutions de k et de $S_c(V)$.

PROPOSITION 4.1. — *Si c est une symétrie de Hecke de marque ν et si tout élément de $\mathbb{N}_\nu^*$ est inversible dans k, alors :*

(a) *le complexe $K(S_c(V); S_c(V))_r$ [resp. le complexe $K(S_c(V); S_c(V))_\ell$] est une résolution de k par des $S_c(V)$-modules à gauche (resp. à droite),*

(b) *le complexe $K(\Lambda_c(V); \Lambda_c(V))_r$ [resp. le complexe $K(\Lambda_c(V); \Lambda_c(V))_\ell$] est une résolution de k par des $\Lambda_{(c,\nu)}(V)$-modules à gauche (resp. à droite),*

(c) *le complexe $K(S_c(V); S_c(V)^{\mathrm{e}})_b$ [resp. le complexe $K(\Lambda_c(V); \Lambda_c(V)^{\mathrm{e}})_b$] est une résolution de $S_c(V)$ (resp. de $\Lambda_c(V)$) par des $S_c(V)$-bimodules (resp. des $\Lambda_c(V)$-bimodules).*

Lorsque k est un corps, toutes les résolutions de la proposition 4.1 sont libres par construction.

Démonstration. — Nous allons construire des homotopies explicites pour démontrer l'acyclicité des complexes en question. Nous considérons les restrictions suivantes des différentielles d_r, d_ℓ, δ_r, et δ_ℓ.

$$\begin{aligned}
d_r^{m,n} &: \quad S^m \otimes \Lambda^n \to \quad S^{m+1} \otimes \Lambda^{n-1}, \\
d_\ell^{m,n} &: \quad \Lambda^m \otimes S^n \to \quad \Lambda^{m-1} \otimes S^{n+1}, \\
\delta_\ell^{m,n} &: \quad S^m \otimes \Lambda^n \to \quad S^{m-1} \otimes \Lambda^{n+1}, \\
\delta_r^{m,n} &: \quad \Lambda^m \otimes S^n \to \quad \Lambda^{m+1} \otimes S^{n-1}.
\end{aligned}$$

Nous posons alors :

$$h_r = \bigoplus_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m+n\neq 0}} \frac{\nu^{m-1}}{(m+n)_\nu}\delta_\ell^{m,n}, \qquad \eta_r = \bigoplus_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m+n\neq 0}} \frac{\nu^{-n}}{(m+n)_\nu}d_\ell^{m,n},$$

$$h_\ell = \bigoplus_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m+n\neq 0}} \frac{\nu^{n-1}}{(m+n)_\nu}\delta_r^{m,n} \quad \text{et} \quad \eta_\ell = \bigoplus_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m+n\neq 0}} \frac{\nu^{-m}}{(m+n)_\nu}d_r^{m,n}.$$

Nous prétendons que, sur les éléments de degré ≥ 1 (dans la graduation du complexe correspondant), nous avons :

$$\begin{aligned} &h_\ell d_\ell + d_\ell h_\ell = \mathrm{id}, && \eta_\ell\delta_\ell + \delta_\ell\eta_\ell = \mathrm{id}, \\ &h_r d_r + d_r h_r = \mathrm{id} \quad \text{et} && \eta_r\delta_r + \delta_r\eta_r = \mathrm{id}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Il nous suffit de démontrer les deux formules de gauche, celles de droite étant leurs conjuguées. La restriction $h_r d_r + d_r h_r$ à $S^m \otimes \Lambda^n$ s'écrit :

$$\frac{\nu^n}{(m+n)_\nu}\delta_\ell^{m+1,n-1}d_r^{m,n} + \frac{\nu^{n-1}}{(m+n)_\nu}d_r^{m-1,n+1}\delta_\ell^{m,n}$$
$$= \frac{\nu^m}{(m+n)_\nu}\left(\delta_\ell d_r + \nu^{-1}d_r\delta_\ell\right) = \mathrm{id}$$

d'après l'identité du point (a) du lemme 3.3. En utilisant le point (b) de ce lemme, on montre de même que $h_\ell d_\ell + d_\ell h_\ell = \mathrm{id}$. Ce qui démontre les points (a) et (b) de la proposition.

Afin de construire une homotopie sur le complexe $K(S;S^{\mathrm{e}})_b$, introduisons l'opérateur j sur $S\otimes\Lambda\otimes S$ défini par :

$$j = \mathrm{id} - hd_b - d_b h \tag{4.2}$$

où l'on a posé $h = (h_r \otimes \mathrm{id}_S)$. D'après les formules (4.1) on a :

$$j = -(h_r\otimes\mathrm{id}_S)(\mathrm{id}_S\otimes\hat{d}_\ell) - (\mathrm{id}_S\otimes\hat{d}_\ell)(h_r\otimes\mathrm{id}_S)$$

où $\hat{d}_\ell$ désigne la différentielle $\hat{d}_\ell = \bigoplus_{n,p\in\mathbb{N}}(-1)^n d_\ell^{n,p}$. La restriction $j^{m,n,p}$ de j à $S^m\otimes\Lambda^n\otimes S^p$ (pour $n\geq 1$ et $m\geq 1$) s'écrit :

$$j^{m,n,p} = (-1)^{n+1}\frac{\nu^{m-1}}{(m+n-1)_\nu}(\delta_\ell^{m,n-1}\otimes\mathrm{id}_S)(\mathrm{id}_S\otimes d_\ell^{n,p})$$
$$+(-1)^n\frac{\nu^{m-1}}{(m+n)_\nu}(\mathrm{id}_S\otimes d_\ell^{n+1,p})(\delta_\ell^{m,n}\otimes\mathrm{id}_S).$$

On constate que l'opérateur j envoie un élément de tri-degré (m,n,p) sur un élément de tri-degré $(m-1,n,p+1)$ et qu'il est nul sur un élément de degré $(0,n,p)$. L'opérateur j est donc nilpotent sur tout élément de $S\otimes\Lambda\otimes S$. Par conséquent, l'application J donnée par

$$J=\sum_{n\geq 0} j^n$$

est bien définie. Or j commute avec d_b, car si l'on applique d_b à droite ou à gauche de (4.2), on obtient :

$$d_b j = d_b + d_b h d_b = j d_b\,.$$

Pour tout $n\geq 1$, on a aussi :

$$j^n = (\mathrm{id} - h d_b - d_b h) j^{n-1} = j^{n-1} - h j^{n-1} d_b - d_b h j^{n-1}\,.$$

En sommant ces égalités pour tout n, on obtient :

$$h J d_b + d_b h J = \mathrm{id}\,.$$

Ce qui démontre que le complexe $K(S;S^{\mathrm{e}})_b$ est acyclique en degré $n\geq 1$. Son complexe conjugué $K(\Lambda;\Lambda^{\mathrm{e}})_b$ l'est donc également. Pour ce qui est du degré 1, on a :

$$d_b(a\otimes x\otimes b) = ax - xb$$

pour tous $a,b\in S$ et $x\in V$. D'où

$$\begin{cases} H_0\big(K(S;S^{\mathrm{e}})_b\big) = S \\ H_0\big(K(\Lambda;\Lambda^{\mathrm{e}})_b\big) = \Lambda\,. \end{cases}$$

Ce qui démontre (c). □

De la proposition 4.1, on déduit immédiatement le

COROLLAIRE 4.2. — *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k et c une symétrie de Hecke sur V. Sous les hypothèses de la proposition 4.1, on a :*

$$\mathrm{Tor}_*^{S_c(V)}(k,k)\cong\Lambda_c^*(V)\,,\qquad \mathrm{Tor}_*^{\Lambda_c(V)}(k,k)\cong S_c^*(V)\,,$$
$$\mathrm{Tor}_*^{S_c(V)^{\mathrm{e}}}\big(k,S_c(V)\big)\cong\Lambda_c^*(V)\,,\quad \mathrm{Tor}_*^{\Lambda_c(V)^{\mathrm{e}}}\big(k,\Lambda_c(V)\big)\cong S_c^*(V)\,.$$

Démonstration. — Le corps k est muni de la structure de S et de Λ-bimodule induite par $v{\cdot}\lambda = 0$ pour tous $v \in V$ et $\lambda \in k$. D'après la proposition 4.1, $K_*(S;S)_r$ est de k par des S-modules. Comme k est un corps, cette résolution est libre et on a :

$$\mathrm{Tor}_*^S(k,k) = H_*\big(k \otimes_S K(S;S)_r\big)\,.$$

Les formules (3.8) et (3.9) montrent que la différentielle de $k \otimes_S K_*(S;S)_r$ est nulle. Par conséquent,

$$\mathrm{Tor}_*^S(k,k) = k \otimes_S K_*(S;S)_r = \Lambda^*\,.$$

Les autres isomorphismes se démontrent de manière analogue. □

Remarque. — Le corollaire 4.2. implique que $S_c(V)$ et $\Lambda_c(V)$ sont des algèbres de Koszul, un fait déjà démontré dans [BGS]. Signalons que pour une algèbre de Koszul $\mathcal{A}$, M. van den Bergh [vdB] vient de construire une résolution de $\mathcal{A}$ par des $\mathcal{A}$-bimodules analogue à la nôtre.

5. Homologie de Hochschild des algèbres symétriques quantiques.

Rappelons brièvement la définition de l'homologie de Hochschild d'une algèbre associative unitaire $\mathcal{A}$. Nous notons $C'_*(\mathcal{A}) = \big(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{\otimes *} \otimes \mathcal{A},\, b'\big)$ la résolution standard de Hochschild et $C_*(\mathcal{A}) = \big(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{\otimes *},\, b\big)$ le complexe standard de Hochschild où les différentielles b et b' sont données par :

$$b'(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots a_{i-1} \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_n$$

et

$$b(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = b'(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) + (-1)^n a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}$$

où $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$. Par définition, *l'homologie de Hochschild* $HH_*(\mathcal{A})$ de l'algèbre $\mathcal{A}$ est l'homologie du complexe $C_*(\mathcal{A})$.

THÉORÈME 5.1. — *Soit k un corps commutatif et V un espace vectoriel de dimension finie muni d'une symétrie de Hecke c de marque ν telle que les éléments de $\mathbb{N}_\nu^*$ soient inversibles dans k, alors l'homologie de*

Hochschild de l'algèbre $S_c(V)$ est isomorphe à l'homologie du complexe $K_*\big(S_c(V); S_c(V)\big)_b$:

$$HH_*\big(S_c(V)\big) \cong H_*\big(K(S_c(V); S_c(V))_b\big)\,.$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe de la présentation de l'homologie de Hochschild comme foncteur dérivé. En effet, on a : $HH_*(\mathcal{A}) = \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{A}^e}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$. Or d'après la proposition 4.1, le complexe $K_*(S; S^e)_b$ est une résolution libre de S par des S^e-modules. De plus d'après (3.16), on a : $K_*(S; S)_b \cong S \otimes_{S^e} K_*(S, S^e)_b$. Par conséquent :

$$\mathrm{Tor}_*^{S^e}(S, S) \cong H_*\big(S \otimes_{S^e} K(S, S^e)_b\big) \cong H_*\big(K(S; S)_b\big)\,.$$

□

Dans le cas où $\mathcal{A}$ est l'algèbre symétrique $S(V)$ d'un k-module V, l'isomorphisme du théorème 5.1 provient d'un quasi-isomorphisme γ du complexe de Koszul $K_*\big(S(V); S(V)\big)_b$ dans le complexe standard de Hochschild $C_*(S(V))$. Ce quasi-isomorphisme, dû à Hochschild-Kostant-Rosenberg [HKR], est donné par la formule

$$\gamma(a \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a \otimes v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)}$$

où $\mathfrak{S}_n$ désigne le groupe symétrique d'ordre n et où $a \in S(V)$ et $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Nous allons montrer que cette propriété peut s'étendre au cas où l'algèbre $\mathcal{A}$ est l'algèbre symétrique quantique $S_c(V)$.

Comme dans [R] et [Wo], à tout élément σ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ d'ordre n, nous associons un opérateur c_σ sur $V^{\otimes n}$ comme suit. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ étant engendré par les transpositions $t_i = (i, i+1)$ où i parcourt les entiers compris entre 1 et $n-1$, toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en un produit du type :

$$\sigma = t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_r}\,.$$

Une telle décomposition est dite réduite quand l'entier r est minimal. Dans ce cas, nous notons $r = I(\sigma)$. La signature de la permutation σ est alors donnée par : $\mathrm{Sgn}(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$. Comme les endomorphismes c_i vérifient l'équation des tresses, nous pouvons poser :

$$c_\sigma = c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{I(\sigma)}\,.$$

L'automorphisme c_σ ne dépend pas de la décomposition réduite choisie. Si de plus, pour deux permutations σ et σ', on a $I(\sigma\sigma') = I(\sigma) + I(\sigma')$, alors $c_{\sigma\sigma'} = c_\sigma c_{\sigma'}$. Par exemple, les opérateurs Π_i et $\check{\Pi}_i$ sont obtenus de cette façon à partir de permutations circulaires. En effet, pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $\Pi_i(c) = c_{(1,2,\ldots,i)}$ et $\check{\Pi}_i(c) = c_{(n,n-1,\ldots,i)}$.

Pour toute symétrie c, nous définissons l'antisymétrisation Ant_n de $V^{\otimes n}$ par

$$\mathrm{Ant}_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{Sgn}(\sigma) c_\sigma .$$

Lorsque c est la volte, Ant_n est l'antisymétrisation usuelle.

LEMME 5.2. — *Pour toute symétrie de Hecke c, l'antisymétrisation passe au quotient et définit un morphisme de k-modules de $\Lambda_c(V)$ dans $V^{\otimes n}$, également noté* Ant_n.

Démonstration . — Il suffit de montrer que l'idéal $I_c^-(V)$ est contenu dans le noyau de l'antisymétrisation Ant_n, c'est-à-dire que $\mathrm{Ant}_n \circ (I_n + \nu^{-1} c_i) = 0$ pour tout $n \geq 2$ et tout $1 \leq i \leq n-1$.

Nous remarquons que pour tout entier $i = 1, \ldots, n-1$, il existe une partie $\mathfrak{R}_i$ (respectivement $\mathfrak{L}_i$) de $\mathfrak{S}_n$ telle que $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{R}_i t_i \cup \mathfrak{R}_i$ (resp. $\mathfrak{S}_n = t_i \mathfrak{L}_i \cup \mathfrak{L}_i$) et que si $\sigma \in \mathfrak{R}_i$ (resp. si $\sigma \in \mathfrak{L}_i$), alors $I(\sigma t_i) = I(\sigma) + 1$ (resp. $I(t_i \sigma) = I(\sigma) + 1$).

Il ne reste plus qu'à calculer :

$$\mathrm{Ant}_n \circ c_i = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{Sgn}(\sigma) c_\sigma c_i = \sum_{\sigma \in \mathfrak{R}_i} \mathrm{Sgn}(\sigma) c_\sigma (I_n - c_i)(c_i) .$$

Comme c est de Hecke, d'après (1.2), on a :

$$(I_n - c_i) c_i = I_n - (1 - \nu) c_i - \nu I_n = -\nu (I_n - c_i) .$$

Il en résulte que

$$\mathrm{Ant}_n \circ c_i = -\nu \sum_{\sigma \in \mathfrak{R}_i} \mathrm{Sgn}(\sigma) c_\sigma (I_n - c_i) = -\nu \, \mathrm{Ant}_n$$

et donc $\mathrm{Ant}_n \circ (I_n + \nu^{-1} c_i) = \mathrm{Ant}_n - \mathrm{Ant}_n = 0$. □

Si l'on pose $\gamma' = \mathrm{id}_S \otimes \mathrm{Ant}_* \otimes \mathrm{id}_S$, on a le

LEMME 5.3. — *L'application $S_c(V)$–$S_c(V)$-linéaire γ' est un morphisme de complexes au-dessus de l'identité du complexe de Koszul $K_*\big(S_c(V); S_c(V)^{\mathrm{e}}\big)_b$ dans la résolution standard de Hochschild $C'_*(S_c(V))$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
S \otimes \Lambda^n \otimes S \arrow[r, "d_b"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ant}_n \otimes \mathrm{id}"'] & S \otimes \Lambda^{n-1} \otimes S \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{Ant}_{n-1} \otimes \mathrm{id}"] \\
S \otimes S^{\otimes n} \otimes S \arrow[r, "b'"'] & S \otimes S^{\otimes(n-1)} \otimes S
\end{tikzcd}$$

En degré 1, l'application Ant_n se réduit à l'identité de $S_c(V)$. Or dans ce cas, on a bien $b' = d_b$. Dans le cas où $n > 1$, nous calculons :

$$b'\gamma' = b'(\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{Ant}_n \otimes \mathrm{id}_S) = b'\left(\mathrm{id}_S \otimes \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{Sgn}(\sigma) c_\sigma \otimes \mathrm{id}_S\right).$$

Désignons par m la multiplication de S et définissons l'application k-linéaire m_i de $S^{\otimes n}$ dans $S^{\otimes(n-1)}$ en posant :

$$\mathrm{m}_i = \mathrm{id}_S^{\otimes(i-1)} \otimes \mathrm{m} \otimes \mathrm{id}_S^{\otimes(n-i-1)}$$

pour $1 \leq i \leq n-1$. La restriction du bord b' à $S^{\otimes(n+2)}$ s'écrit :

$$b' = \mathrm{m} \otimes \mathrm{id}_S^{\otimes n} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \, \mathrm{id}_S \otimes \mathrm{m}_i \otimes \mathrm{id}_S + (-1)^n \, \mathrm{id}_S^{\otimes n} \otimes \mathrm{m}.$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
b'\gamma =& b'\big(\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{Ant}_n \otimes \mathrm{id}_S\big) \\
=& \left((\mathrm{m} \otimes \mathrm{id}_S^{\otimes(n-1)})(\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{Ant}_n)\right) \otimes \mathrm{id}_S + \mathrm{id}_S \otimes \left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \, \mathrm{m}_i \, \mathrm{Ant}_n\right) \otimes \mathrm{id}_S \\
&+ (-1)^n \, \mathrm{id}_S \otimes \left((\mathrm{id}_S^{\otimes(n-1)} \otimes \mathrm{m})(\mathrm{Ant}_n \otimes \mathrm{id}_S)\right).
\end{aligned}$$

Considérons la décomposition $\mathfrak{S}_n = t_i \mathfrak{L}_i \cup \mathfrak{L}_i$ définie dans la démonstration du lemme précédente. On a :

$$\mathrm{m}_i \, \mathrm{Ant}_n = \mathrm{m}_i \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{Sgn}(\sigma) c_\sigma = \sum_{\sigma \in \mathfrak{L}_i} \mathrm{Sgn}(\sigma) \, \mathrm{m}_i (c_i - I_n) c_\sigma.$$

Ce qui est nul car $\mathrm{m}_i(I_n - c_i) = 0$. L'expression de $b' \circ \gamma'$ se réduit donc à

$$\begin{aligned}
b'\gamma = \; & \left((\mathrm{m} \otimes \mathrm{id}_S^{\otimes(n-1)})(\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{Ant}_n)\right) \otimes \mathrm{id}_S \\
& + (-1)^n \, \mathrm{id}_S \otimes \left((\mathrm{id}_S^{\otimes(n-1)} \otimes \mathrm{id}_S)(\mathrm{Ant}_n \otimes \mathrm{id}_S)\right).
\end{aligned}$$

Pour tout $i = 1, \ldots, n$, considérons les permutations $\pi_i = (1, 2, \ldots, i)$ et $\check{\pi}_i = (n, n-1, \ldots, i)$. Il est possible de décomposer $\mathfrak{S}_n$ en une réunion disjointe $\bigcup_{i=1}^{n} (\mathfrak{S}_{n-1}\pi_i)$ telle que si $\sigma = \sigma'\pi_i$, alors $I(\sigma) = I(\sigma') + i - 1$. De même, on aura une décomposition d'ensembles disjoints $\bigcup_{i=1}^{n} (\mathfrak{S}_{n-1}\check{\pi}_i)$ telle que si $\sigma = \sigma'\check{\pi}_i$, alors $I(\sigma) = I(\sigma') + n - i$. C'est ce qu'illustrent les équivalences de tresses des figures 13 et 14. En rappelant que $\Pi_i = c_{\pi_i}$ et que $\check{\Pi}_i = c_{\check{\pi}_i}$, nous calculons :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{m} \otimes \mathrm{id}_S^{\otimes(n-1)})(\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{Ant}_n) &= (\mathrm{m} \otimes \mathrm{id}_S^{\otimes(n-1)}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{Sgn}(\sigma)(\mathrm{id}_S \otimes c_\sigma) \\
&= (\mathrm{m} \otimes \mathrm{id}_S^{\otimes(n-1)}) \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \mathrm{Sgn}(\sigma)(\mathrm{id}_S^2 \otimes c_\sigma)(\mathrm{id}_S \otimes \Pi_i) \\
&= \left(\mathrm{id}_S \otimes \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \mathrm{Sgn}(\sigma) c_\sigma\right)(\mathrm{m}_1(\mathrm{id}_S \otimes A_n)) \\
&= (\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{Ant}_{n-1}) d_r \,.
\end{aligned}$$

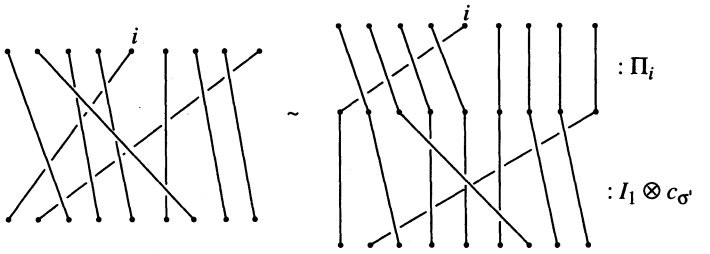


Figure 13

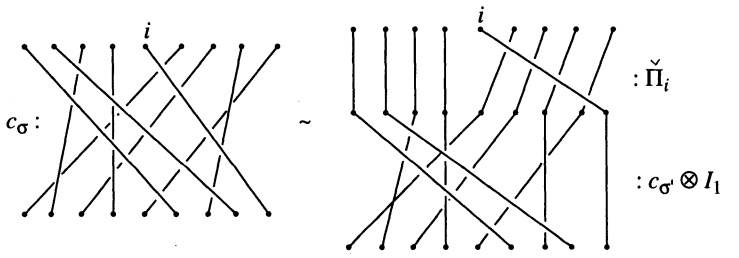


Figure 14

De même en considérant la décomposition $\mathfrak{S}_n = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathfrak{S}_{n-1}\check{\pi}_i)$, on montre que

$$(\mathrm{id}_S^{\otimes(n-1)} \otimes \mathrm{m})(\mathrm{Ant}_n \otimes \mathrm{id}_S) = (\mathrm{Ant}_{n-1} \otimes \mathrm{id}_S)d_\ell\,.$$

D'où :

$$b'\gamma' = (\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{Ant}_{n-1} \otimes \mathrm{id}_S)(d_r \otimes \mathrm{id}_S + (-1)^n\, \mathrm{id}_S \otimes d_\ell) = \gamma' d_b\,,$$

ce qui démontre la commutativité du diagramme. □

Nous venons de construire un morphisme de complexes au-dessus de l'identité du complexe de Koszul $K_*\big(S_c(V); S_c(V)^{\mathrm{e}}\big)_b$ dans la résolution standard de Hochschild $C'_*(S_c(V))$.

THÉORÈME 5.4. — *Lorsque V est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k et muni d'une symétrie de Hecke c de marque ν telle que les éléments de $\mathbb{N}^*_\nu$ soient inversibles dans k, l'application*

$$\gamma = \mathrm{id}_S \otimes \mathrm{Ant}_n : S_c(V) \otimes \Lambda^n_c(V) \longrightarrow S_c(V) \otimes S_c(V)^{\otimes n}$$

est un quasi-isomorphisme entre le complexe de Koszul $K_*(S_c(V); S_c(V))_b$ et le complexe de Hochschild $C_*(S_c(V))$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le foncteur $S \otimes_{S^{\mathrm{e}}} -$ au morphisme de complexes

$$\gamma' : K_*(S; S^{\mathrm{e}})_b \to C'_*(S)$$

et d'observer que $\mathrm{id}_S \otimes_{S^{\mathrm{e}}} \gamma' = \mathrm{id}_S \otimes \mathrm{Ant}_*\,.$ □

Remarque. — Soit R un sous-k-module de $V^{\otimes 2}$. Il définit l'algèbre quadratique $\mathcal{A} = T(V)/(R)$ où (R) désigne l'idéal bilatère engendré par R. Dans [BGS], A. Beilinson, V. Ginzburg et W. Soergel associent à toute algèbre quadratique $\mathcal{A}$ un complexe de $\mathcal{A}$-modules $L_*(A) = (L_*, \partial)$ défini comme suit. Les modules L_n sont donnés par $L_0 = \mathcal{A}$, $L_1 = \mathcal{A} \otimes V$ et $L_n = \mathcal{A} \otimes \bigcap_{i=1}^{n} R_i$ où $R_i = V^{\otimes(i-1)} \otimes R \otimes V^{\otimes(n-i-1)}$ pour $n \geq 2$. La différentielle ∂ est la restriction à L_* de l'application de $\mathcal{A} \otimes V^{\otimes n}$ dans $\mathcal{A} \otimes V^{\otimes(n-1)}$ qui à $a \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ associe $av_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_n$.

Dans le cas où R est linéairement engendré sur k par les éléments $v_1 \otimes v_2 - c(v_1 \otimes v_2)$ où v_1 et v_2 parcourent V, l'algèbre quadratique définie par R n'est autre que $S_c(V)$. Pour une symétrie de Hecke c de marque

ν telle que les éléments de $\mathbb{N}_\nu^*$ sont inversibles dans k, les applications $\gamma = \mathrm{id}_S \otimes \mathrm{Ant}_n$ et $\rho = \dfrac{1}{(n)_\nu!}\,\mathrm{id}_S \otimes \rho_n^\Lambda$ où $(n)_\nu! = (1)_\nu(2)_\nu \dots (n)_\nu$ réalisent un quasi-isomorphisme de complexes

$$K_*\big(S_c(V); S_c(V)\big)_r \underset{\rho}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} \big(S_c(V) \otimes \bigcap_{i=1}^{n} R_i,\, \partial\big) = L_*\big(S_c(V)\big)\,.$$

6. Le cas de l'espace affine quantique multiparamétré.

Ce paragraphe est consacré au calcul des groupes d'homologie de Hochschild de l'espace affine quantique multiparamétré à l'aide des résultats du paragraphe précédent. Dans le cas «générique», on en déduit les groupes d'homologie cyclique par la longue suite de Connes et un calcul en bas degrés.

L'espace affine quantique multiparamétré $\mathcal{A}$ est l'algèbre engendrée sur le corps k par les N variables $x_1, \dots, x_N$ et les relations $x_i x_j = q_{ij} x_j x_i$ pour tous $1 \leq i < j \leq N$ et où $\{q_{ij}\}_{i<j}$ est une famille d'éléments non nuls de k. Pour tous $1 \leq i < j \leq N$, posons $q_{ji} = q_{ij}^{-1}$ et $q_{ii} = 1$. La famille de scalaires $\{q_{ij}\}_{i,j=1\dots,N}$ détermine une symétrie simple involutive Q comme dans l'exemple 1.2.5. L'algèbre symétrique $S_Q(V)$, où V est l'espace vectoriel de base $\{x_i\}_{i=1,\dots,N}$, est naturellement isomorphe à $\mathcal{A}$. L'algèbre $S_Q(V)$ admet $\{x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}\}_{\alpha_1,\dots,\alpha_N \in \mathbb{N}}$ comme base. De plus il appert que l'algèbre $\Lambda_Q(V)$ est linéairement engendrée par la famille $\{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_N^{\varepsilon_N}\}_{\varepsilon_i \in \{0,1\}}$.

Nous introduisons de plus les notions suivantes. Considérons l'ensemble des multi-entiers $\alpha = (\alpha_i)_{i=1,\dots,N}$ de $\mathbb{N}^N$ muni de l'addition usuelle donnée par $\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_i$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$. La *longueur* du multi-entier α est l'entier $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, nous posons $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N}$.

Définissons le sous-ensemble C de $\mathbb{N}^N$ en posant :

$$C = \big\{\alpha \in \mathbb{N}^N \;\big|\; \text{pour tout } 1 \leq i \leq N,\ \alpha_i = 0 \text{ ou } x^\alpha x_i = x_i x^\alpha\big\}\,.$$

De manière équivalente C se décrit comme l'ensemble des multi-entiers α pour lesquels on a : $\alpha_i = 0$ ou $\prod_{k=1}^{N} q_{ik}^{\alpha_k} = 1$ pour tout $i = 1, \dots, N$.

Observons d'une part que si $[i]$ désigne le multi-entier défini par $x^{[i]} = x_i$, alors $[i] \in C$. D'autre part, si $\alpha \in C$, alors $n\alpha \in C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc C contient au moins le sous-ensemble $C_{\text{gen}} = \bigcup_{i=1}^{N} \mathbb{N}[i]$.

Calculons l'homologie de Hochschild de l'algèbre $S_Q(V)$.

THÉORÈME 6.1. — *Les groupes d'homologie de Hochschild de l'espace affine quantique multiparamétré $\mathcal{A}$ défini par la famille $\{q_{ij}\}_{1\leq i<j\leq N}$ sur un corps k de caractéristique nulle sont donnés par :*

$$HH_n(\mathcal{A}) = \bigoplus_{\substack{\beta\in\{0,1\}^N \\ |\beta|=n}} \bigoplus_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^N \\ \alpha+\beta\in C}} kx^\alpha \otimes x^\beta$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On dit que la famille $\{q_{ij}\}_{1\leq i<j\leq N}$ est *générique* si pour tout entier i et tout multi-entier $\alpha \notin \mathbb{N}[i]$, il existe un entier j tel que $\alpha_j \neq 0$ et $\prod_{k=1}^{N} q_{jk}^{\alpha_k} \neq 1$. La symétrie simple associée à une famille générique est également qualifiée de *générique*. Dans ce cas, $C = C_{\text{gen}} = \bigcup_{i=1}^{N} \mathbb{N}[i]$ et le théorème 6.1 implique le

COROLLAIRE 6.2. — *Les groupes d'homologie de Hochschild de l'espace affine quantique multiparamétré $\mathcal{A}$ défini par la famille générique $\{q_{ij}\}_{1\leq i<j\leq N}$ sur un corps k de caractéristique nulle sont donnés par*

$$\begin{cases} HH_0(\mathcal{A}) &= k \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \bigoplus_{s\geq 1} kx_i^s \\ HH_1(\mathcal{A}) &= \bigoplus_{i=1}^{N} \bigoplus_{s\geq 0} kx_i^s \otimes x_i \\ HH_n(\mathcal{A}) &= 0 \qquad \text{si } n \geq 2\,. \end{cases}$$

Démonstration du théorème 6.1. — D'après le théorème 5.1, les groupes d'homologie de Hochschild de $S_Q(V)$ sont isomorphes aux groupes d'homologie du complexe $K_*(S;S)_b = (S \otimes \Lambda^*, \tilde{d})$. Pour commencer, réécrivons la différentielle $\tilde{d}$ qui est donnée par :

$$\tilde{d}(x^\alpha \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_n})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[\Big(\prod_{s=1}^{k-1} q_{i_s i_k} \Big) x^\alpha x_{i_k} - \Big(\prod_{s=k+1}^{n} q_{i_k i_s} \Big) x_{i_k} x^\alpha \right] \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_{i_k}} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}$$

sur un élément homogène de $S \otimes \Lambda$ et où $\widehat{x_{i_k}}$ signifie que l'élément x_{i_k} a été retiré du produit. Convenons de noter x^β l'élément homogène $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}$ de $\Lambda_Q(V)$, β étant le multi-entier défini par $\beta_{i_k} = 1$ pour tout k variant de 1 à n et $\beta_j = 0$ si $j \notin \{i_k\}_{k=1,\ldots,n}$. Explicitons la différentielle $\tilde{d}$ sur un élément de la forme $x^\alpha \otimes x^\beta$ de $S \otimes \Lambda$.

Pour tous $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\beta \in \{0,1\}^N$ et $i = 1, \ldots, N$, nous posons :

$$\Omega(\alpha, \beta, i) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^{\alpha+\beta} x_i = x_i x^{\alpha+\beta} \\ 0 & \text{si } \beta_i = 0 \\ \varepsilon(\beta, i) \Big(\prod_{s=1}^{i} q_{si}^{\beta_s} \prod_{r=i+1}^{N} q_{ir}^{-\alpha_r} - \prod_{s=i+1}^{N} q_{is}^{\beta_s} \prod_{r=1}^{i-1} q_{ri}^{-\alpha_r} \Big) & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\varepsilon(\beta, i) = (-1)^{\sum_{s=1}^{i-1} \beta_s}$. Alors la différentielle se réécrit :

$$\tilde{d}(x^\alpha \otimes x^\beta) = \sum_{i=1}^{N} \Omega(\alpha, \beta, i) x^{\alpha+[i]} \otimes x^{\beta-[i]}. \tag{6.1}$$

Ensuite, on donne au complexe une $\mathbb{N}^N$ graduation en posant : $\deg(x^\alpha \otimes x^\beta) = \alpha + \beta$. Pour tout multi-entier $\gamma \in \mathbb{N}^N$, soit K_γ le sous complexe de graduation γ. Si $\gamma \in C$, alors d'après la formule (6.1), la restriction de $\tilde{d}$ à K_γ est nulle. Si $\gamma \notin C$, nous allons montrer que K_γ est acyclique en exhibant une homotopie. Il en résulte que $HH(\mathcal{A}) = \bigoplus_{\gamma \in C} K_\gamma$, ce qui démontre le théorème.

Pour tous $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\beta \in \{0,1\}^N$ tels que $\alpha + \beta \notin C$ et $i = 1, \ldots, N$, considérons le scalaire suivant :

$$\omega(\alpha, \beta, i) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^{\alpha+\beta} x_i = x_i x^{\alpha+\beta} \\ 0 & \text{si } \beta_i = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha_i = 0 \\ \Omega(\alpha - [i], \beta + [i], i)^{-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définissons $\tilde{h}$ par :

$$\tilde{h}(x^\alpha \otimes x^\beta) = \frac{1}{\|\alpha + \beta\|} \sum_{i=1}^{N} \omega(\alpha, \beta, i) x^{\alpha-[i]} \otimes x^{\beta+[i]}$$

où, pour $\gamma \in \mathbb{N}^N$, $\|\gamma\|$ désigne le nombre d'entiers $1 \leq i \leq N$ tels que $x_i x^\gamma \neq x^\gamma x_i$ et $\gamma_i \neq 0$. C'est bien défini car si $\gamma \notin C$, alors $\|\gamma\| \neq 0$. On a ainsi un endomorphisme $\tilde{h}$ de degré 1 de K_γ. Montrons qu'il vérifie la propriété :

$$\tilde{h}\tilde{d} + \tilde{d}\tilde{h} = \mathrm{id}\ .$$

Pour ce faire, calculons $\tilde{h}\tilde{d} + \tilde{d}\tilde{h}$ sur l'élément homogène $x^\alpha \otimes x^\beta$:

$$\begin{aligned}
&(\tilde{h}\tilde{d} + \tilde{d}\tilde{h})(x^\alpha \otimes x^\beta) \\
&\quad = \frac{1}{\|\gamma\|} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \Omega(\alpha, \beta, i)\omega\big(\alpha + [i], \beta - [i], j\big) x^{\alpha+[i]-[j]} \otimes x^{\beta-[i]+[j]} \\
&\qquad + \frac{1}{\|\gamma\|} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \omega(\alpha, \beta, j)\Omega\big(\alpha - [j], \beta + [j], i\big) x^{\alpha+[i]-[j]} \otimes x^{\beta-[i]+[j]} \\
&\quad = \frac{1}{\|\gamma\|} \sum_{i=1}^{N} \Big[\Omega(\alpha, \beta, i)\omega\big(\alpha + [i], \beta - [i], i\big) \\
&\qquad\qquad + \omega(\alpha, \beta, i)\Omega\big(\alpha - [i], \beta + [i], i\big)\Big] x^\alpha \otimes x^\beta \\
&\qquad + \frac{1}{\|\gamma\|} \sum_{i \neq j} \Big[\omega(\alpha, \beta, j)\Omega(\alpha - [j], \beta + [j], i) \\
&\qquad\qquad + \Omega(\alpha, \beta, i)\omega(\alpha + [i], \beta - [i], j)\Big] \times x^{\alpha-[j]+[i]} \otimes x^{\beta+[j]-[i]}
\end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha + \beta = \gamma$

Dans un premier temps, montrons que pour tous i et j distincts on a :

$$\omega(\alpha, \beta, j)\Omega(\alpha - [j], \beta + [j], i) + \Omega(\alpha, \beta, i)\omega(\alpha + [i], \beta - [i], j) = 0\,. \tag{6.2}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
\Xi(i, j) &= \omega(\alpha, \beta, j)\Omega(\alpha - [j], \beta + [j], i) \\
\text{et}\quad \Xi'(i, j) &= \Omega(\alpha, \beta, i)\omega(\alpha + [i], \beta - [i], j)\,.
\end{aligned}$$

D'après les définitions de ω et Ω, soit $\Xi(i, j) = \Xi'(i, j) = 0$, soit ni $\Xi(i, j)$, ni $\Xi'(i, j)$ ne sont nuls. Il faut alors étudier les deux cas : $i < j$ et $j < i$. Supposons que $i < j$. On a :

$$\begin{aligned}
\Xi(i, j) = \varepsilon(\beta - [j], j) &\left(\prod_{s=1}^{j} q_{sj}^{\beta_s} \prod_{r=j+1}^{N} q_{jr}^{-\alpha_r} - \prod_{s=j+1}^{N} q_{js}^{\beta_s} \prod_{r=1}^{j-1} q_{rj}^{-\alpha_r}\right)^{-1} \\
&\times \varepsilon(\beta + [j], i) \left(\prod_{s=1}^{i} q_{si}^{\beta_s} \prod_{r=i+1}^{N} q_{ir}^{-\alpha_r} q_{ij} - \prod_{s=i+1}^{N} q_{is}^{\beta_s} q_{ij} \prod_{r=1}^{i-1} q_{ri}^{-\alpha_r}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\Xi'(i,j) = \varepsilon(\beta,i)\left(\prod_{s=1}^{i} q_{si}^{\beta_s} \prod_{r=i+1}^{N} q_{ir}^{-\alpha_r} - \prod_{s=i+1}^{N} q_{is}^{\beta_s} \prod_{r=1}^{i-1} q_{ri}^{-\alpha_r}\right)$$
$$\times\varepsilon(\beta+[i]-[j],j)\left(\prod_{s=1}^{j} q_{sj}^{\beta_s} q_{ji} \prod_{r=j+1}^{N} q_{jr}^{-\alpha_r} - \prod_{s=j+1}^{N} q_{js}^{\beta_s} \prod_{r=1}^{j-1} q_{rj}^{-\alpha_r} q_{ji}\right)^{-1}.$$

Il en résulte que

$$\varepsilon(\beta-[j],j)\varepsilon(\beta+[j],i)\Xi(i,j) = \varepsilon(\beta,i)\varepsilon(\beta+[i]-[j],j)\Xi'(i,j).$$

Or un rapide calcul donne :

$$\varepsilon(\beta-[j],j)\varepsilon(\beta+[j],i) = -\varepsilon(\beta,i)\varepsilon(\beta+[i]-[j],j).$$

On en déduit immédiatement que l'on a $\Xi(i,j)+\Xi'(i,j)=0$, c'est-à-dire la relation (6.2). Un raisonement similaire se fait dans le cas $i>j$. Il est de plus aisé de constater que l'on a :

$$\sum_{i=1}^{N}\big(\omega(\alpha,\beta,i)\Omega(\alpha-[i],\beta+[i],i)+\Omega(\alpha,\beta,i)\omega(\alpha+[i],\beta-[i],i)\big) = \|\alpha+\beta\|.$$

Ainsi on a la relation cherchée :

$$(\tilde{h}\tilde{d}+\tilde{d}\tilde{h})(x^\alpha\otimes x^\beta) = \frac{\|\alpha+\beta\|}{\|\alpha+\beta\|}x^\alpha\otimes x^\beta = x^\alpha\otimes x^\beta.$$

□

D'après le théorème précédent, lorsque Q est symétrie simple générique, l'algèbre $S_Q(V)$ a un comportement homologique proche de celui d'une algèbre libre (l'homologie de Hochschild de $T(V)$ a été calculée dans [LQ]). Ce phénomène inattendu nous incite à introduire la notion suivante :

DÉFINITION 6.3. — *On appelle dimension de Hochschild* $\mathrm{Hdim}(\mathcal{A})$ *d'une algèbre* $\mathcal{A}$ *le plus grand entier* n *(s'il existe) tel que* $HH_n(\mathcal{A})\neq 0$.

Le corollaire 6.2 nous permet de construire des exemples d'algèbres quantiques dont la dimension de Hochschild a une valeur supérieure à 1 donnée.

THÉORÈME 6.4. — *Soient* k *un corps de caractéristique nulle,* n *un entier* <1 *et* $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ *une famille de* k*-espace vectoriels de dimension finie,*

chaque espace V_i étant muni d'une symétrie simple involutive générique Q_i. On désigne par $Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n$ la symétrie de $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ construite en itérant la définition de la symétrie $c \oplus c'$ de $V \oplus V'$ décrite dans la proposition 1.3. On a alors

$$\mathrm{Hdim}(S_{Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n)) = n\,.$$

Démonstration. — D'après la proposition 1.3 on a :

$$S_{Q_1 \oplus \cdots \oplus c_n}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) \cong S_{Q_1}(V_1) \otimes \cdots \otimes S_{Q_n}(V_n)\,.$$

Chaque symétrie involutive Q_i vérifie les conditions du théorème 6.1 et donc la dimension de Hochschild de chaque algèbre $S_{Q_i}(V_i)$ est 1. La formule de Künneth nous donne immédiatement

$$\mathrm{Hdim}(S_{Q_1}(V_1) \otimes \cdots \otimes S_{Q_n}(V_n)) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hdim}(S_{Q_i}(V_i))$$

et donc,

$$\mathrm{Hdim}\big(S_{c_1 \oplus \cdots \oplus c_n}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n)\big) = n.$$

□

Lorsque la famille $(q_{ij})_{i,j=1\ldots N}$ n'est pas générique, la dimension de Hochschild de $S_Q(V)$ est comprise entre 1 et N. Nous donnons un exemple où la famille (q_{ij}) est réduite à un élément q qui est racine de l'unité.

THÉORÈME 6.5. — *Les groupes d'homologie de Hochschild de l'algèbre $\mathcal{A}$ engendré sur un corps k par les variables x et y et la relation $xy = qyx$ où q est une racine primitive d-ième de l'unité sont donnés par :*

$$\begin{cases} HH_0(\mathcal{A}) = k \oplus \displaystyle\bigoplus_{r,s\in\mathbb{N}^*} kx^{rd}y^{sd} \oplus \bigoplus_{r\in\mathbb{N}^*} \big(kx^r \oplus ky^r\big) \\ HH_1(\mathcal{A}) = \displaystyle\bigoplus_{r,s\in\mathbb{N}^*} \big(kx^{rd-1}y^{sd}\otimes x \oplus kx^{rd}y^{sd-1}\otimes y\big) \oplus \bigoplus_{s\in\mathbb{N}} \big(kx^s\otimes x \oplus ky^s\otimes y\big) \\ HH_2(\mathcal{A}) = \displaystyle\bigoplus_{r,s\in\mathbb{N}^*} kx^{rd-1}y^{sd-1} \otimes x\wedge y \\ HH_m(\mathcal{A}) = 0 \quad si\ m \geq 3. \end{cases}$$

Démonstration. — Il suffit de constater que dans ce cas l'ensemble C est composé des éléments $(0,0)$, $(0,r)$ où $r > 0$, $(s,0)$ où $s > 0$ et (rd, sd) où $r, s > 0$. □

Le cas où tous les scalaires q_{ij} sont égaux à une même constante q a été traité dans [T].

Nous allons à présent, dans le cas générique, déduire les groupes d'homologie cyclique de $S_Q(V)$ du corollaire 6.2 grâce à la longue suite exacte de Connes. Pour toutes les définitions et propriétés se rapportant à l'homologie cyclique, nous renvoyons le lecteur à [LQ].

THÉORÈME 6.6. — *Les groupes d'homologie cyclique du plan affine quantique multiparamétré $\mathcal{A}$ défini par la famille générique $\{q_{ij}\}_{1\leq i<j\leq N}$ sur un corps k de caractéristique nulle sont donnés par :*

$$\begin{cases} HC_0(S_Q(V)) & = HH_0(S_Q(V)) & \\ HC_{2n}(S_Q(V)) & = k & \text{si } n \geq 1 \\ HC_{2n+1}(S_Q(V)) & = 0 & \text{si } n \geq 0\,. \end{cases}$$

Démonstration. — D'après le corollaire 6.2, l'application S de la longue suite exacte de Connes

$$\cdots \longrightarrow HH_n(S_Q(V)) \xrightarrow{I} HC_n(S_Q(V)) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(S_Q(V)) \xrightarrow{B} HH_{n-1}(S_Q(V)) \longrightarrow \cdots$$

induit des isomorphismes de $HC_n(S_Q(V))$ sur $HC_{n-2}(S_Q(V))$ lorsque $n \geq 3$. Par conséquent, on a : $HC_{2n+1}(S_Q(V)) \simeq HC_1(S_Q(V))$ et $HC_{2n}(S_Q(V)) \simeq HC_2(S_Q(V))$ lorsque $n \geq 1$. On sait d'autre part que $HC_0(S_Q(V)) \simeq HH_0(S_Q(V))$, groupe que nous venons de calculer. Il ne reste plus qu'à déterminer les groupes d'homologie cyclique en degré 1 et 2, c'est-à-dire calculer le noyau et le conoyau de l'opérateur de Connes B. En effet, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow HC_2(S_Q(V)) = HH_0(S_Q(V)) \xrightarrow{B} HH_1(S_Q(V)) \longrightarrow HC_1(S_Q(V)) \longrightarrow 0\,.$$

Pour ce faire, nous allons construire, en degré 1, un quasi-isomorphisme de $S_Q(V)$-bimodules entre la résolution de Hochschild $C'_*(S_Q(V))$ et le complexe $K_*(S_Q(V); S_Q(V)^{\mathrm{e}})_b$. Nous pourrons alors «descendre» B en un opérateur β sur le complexe de Koszul $K_*(S_Q(V); S_Q(V))_b$. Posons $S_Q = S_Q(V)$. Cherchons une application j' qui fasse commuter le diagramme

suivant :

$$\begin{array}{ccc} S_Q \otimes S_Q \otimes S_Q & \xrightarrow{b'} & S_Q \otimes S_Q \\ {\scriptstyle j'}\downarrow & & \| \\ S_Q \otimes V \otimes S_Q & \xrightarrow[d_b]{} & S_Q \otimes S_Q \end{array}$$

LEMME 6.7. — *Le morphisme de S_Q-bimodules j' de $S_Q \otimes S_Q \otimes S_Q$ dans $S_Q \otimes V \otimes S_Q$ défini par :*

$$j'(1 \otimes x^\alpha \otimes 1) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{\alpha_k - 1} x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} x_k^i \otimes x_k \otimes x_k^{\alpha_k - 1 - i} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \dots x_N^{\alpha_N}$$

vérifie $d_b j' = b'$.

C'est le quasi-isomorphisme cherché.

Démonstration du lemme. — Montrons que j' fait commuter le diagramme. Posons

$$T(x_k^{\alpha_k}) = x_k^{\alpha_k} \otimes 1 - 1 \otimes x_k^{\alpha_k} \quad \text{et} \quad \frac{T(x_k^{\alpha_k})}{T(x_k)} = \sum_{i=0}^{\alpha_k - 1} x_k^i \otimes x_k^{\alpha_k - 1 - i}.$$

Pour tous $a, b, x \in S_Q$, nous identifions l'élément $a \otimes x \otimes b$ de $S_Q \otimes S_Q \otimes S_Q$ à l'élement $(a \otimes b) \otimes x$ de $S_Q^e \otimes S_Q$. Nous pouvons alors écrire l'application $j' : S_Q^e \otimes S_Q \to S_Q^e \otimes V$ sous la forme

$$j'((1 \otimes 1) \otimes x^\alpha) = \sum_{k=1}^{N} \left((x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \otimes x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \dots x_N^{\alpha_N}) \frac{T(x_k^{\alpha_k})}{T(x_k)} \right) \otimes x_k.$$

Avec ces conventions d'écriture, $b'((1 \otimes 1) \otimes x_k^{\alpha_k}) = T(x_k^{\alpha_k})$. Nous calculons :

$$\begin{aligned} d_b \circ j'((1 \otimes 1) \otimes x^\alpha) &= \sum_{k=1}^{N} \left((x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \otimes x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \dots x_N^{\alpha_N}) \frac{T(x_k^{\alpha_k})}{T(x_k)} \right) T(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k} \otimes x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \dots x_N^{\alpha_N} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{N} x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \otimes x_k^{\alpha_k} \dots x_N^{\alpha_N} \\ &= x^\alpha \otimes 1 - 1 \otimes x^\alpha = b'((1 \otimes 1) \otimes x^\alpha), \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme. Montrons qu'il s'agit bien d'un quasi-isomorphisme. Soit π le plongement de $S_Q \otimes V \otimes S_Q$ dans $S_Q^{\otimes 3}$. Considérons l'application S_Q-S_Q-linéaire s de $S_Q^{\otimes 3}$ dans $S_Q^{\otimes 4}$ définie par

$$s(1 \otimes x^\alpha \otimes 1) = 1 \otimes \pi j'(1 \otimes x^\alpha \otimes 1) - 1 \otimes 1 \otimes x^\alpha \otimes 1$$

pour tout $x^\alpha = x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_N} \in S_Q$. Cette application vérifie la relation

$$\mathrm{id} = \pi j' - b's\,. \tag{6.3}$$

En effet, le calcul donne :

$$\begin{aligned}
b'(1\otimes\pi j'(1\otimes x^\alpha\otimes 1)) &= \pi j'(1\otimes x^\alpha\otimes 1) - \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{\alpha_k-1} 1\otimes x_1^{\alpha_1}\dots x_k^{i+1}\otimes x_k^{\alpha_k-1-i}\dots x_N^{\alpha_N} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=0}^{\alpha_k-1} 1\otimes x_1^{\alpha_1}\dots x_k^{i}\otimes x_k^{\alpha_k-i}\dots x_N^{\alpha_N} \\
&= \pi j'(1\otimes x^\alpha\otimes 1) - \sum_{k=1}^{N} 1\otimes x_1^{\alpha_1}\dots x_k^{\alpha_k}\otimes x_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\dots x_N^{\alpha_N} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N} 1\otimes x_1^{\alpha_1}\dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\otimes x_k^{\alpha_k}\dots x_N^{\alpha_N} \\
&= \pi j'(1\otimes x^\alpha\otimes 1) - 1\otimes x^\alpha\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes x^\alpha \\
&= \pi j'(1\otimes x^\alpha\otimes 1) - 1\otimes x^\alpha\otimes 1 + b'(1\otimes 1\otimes x^\alpha\otimes 1)\,,
\end{aligned}$$

ce qui démontre (6.3).

L'application j' est la quasi-réciproque du plongement π et donc, elle induit un quasi-isomorphisme $j = \mathrm{id}_S \otimes_{S_Q} j'$ en degré 1 du complexe $C_*(S_Q)$ vers le complexe $K_*(S_Q; S_Q)_b$. Nous posons $\beta = j \circ B$. Un calcul immédiat nous donne :

$$\beta(x^\alpha) = \sum_{k=1}^{N} 1 \cdot \Big((x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \otimes x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \dots x_N^{\alpha_N}) \Big(\frac{T(x_k^{\alpha_k})}{T(x_k)} \Big) \Big) \otimes x_k$$

où $1 \cdot (a \otimes b) = ba$ par convention.

Puisque

$$HH_0(S_Q(V)) = k \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \bigoplus_{s\geq 1} k x_i^s \qquad \text{et} \qquad HH_1(S_Q(V)) = \bigoplus_{i=1}^{N} \bigoplus_{s\geq 0} k x_i^s \otimes x_i\,,$$

nous avons $\beta(x_i^s) = sx_i^{s-1} \otimes x_i$ pour tout $x_i^s \in HH_0(S_Q(V))$. Il en résulte que le noyau est k et que le conoyau est nul et donc que les groupes d'homologie cyclique de $S_Q(V)$ sont nuls en dimension impaire et égaux à k en dimension paire supérieure à 1. □

Après la diffusion d'une première version de cet article, j'ai reçu l'article [GG] qui calcule indépendamment l'homologie de Hochschild et cyclique de $S_Q(V)$. Par ailleurs, je remercie M. van den Bergh qui m'a convaicu que la démonstration du cas générique peut facilement s'étendre au cas général.

7. Algèbres de Lie quantiques.

Nous définissons des analogues quantiques des algèbres de Lie relativement à une symétrie de Hecke c.

DÉFINITION 7.1. — *Une algèbre de Lie quantique est la donnée* $(\mathfrak{g}, c, [.,.])$ *d'un k-module $\mathfrak{g}$ muni d'une symétrie de Hecke c de marque ν et d'une application linéaire* $[.,.] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *vérifiant :*

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && [.,.] \circ c = -\nu[.,.]\,,\\
&\text{(ii)} && [.,.][.,.]_2 = [.,.][.,.]_1(\mathrm{id}_{\mathfrak{g}^{\otimes 3}} - c_2)\\
&\text{(iii.a)} && c[.,.]_1 = [.,.]_2 c_1 c_2\\
&\text{(iii.b)} && c[.,.]_2 = [.,.]_1 c_2 c_1\\
&\text{(iii.c)} && c[.,.]_1 c_2 = [.,.]_2 c_1
\end{aligned}$$

où l'on a posé $[.,.]_1 = [.,.] \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ *et* $[.,.]_2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \otimes [.,.]$.

Remarque. — La propriété (i) est l'analogue de l'antisymétrie du crochet de Lie et le point (ii) l'analogue de l'identité de Jacobi. Via les propriétés (i), (iii.a) et (iii.b), le point (ii) est équivalent à l'identité :

$$[.,.][.,.]_1(\mathrm{id}_{\mathfrak{g}^{\otimes 3}} + \nu^{-1} c_1 c_2 + \nu^{-1} c_2 c_1) = 0\,.$$

Si c est involutive, les trois conditions (iii.a–c) sont équivalentes et la définition 7.1 est équivalente à celle donnée par Gurevich dans [G].

EXEMPLES 7.2.

(1) Si c est la volte τ, une algèbre de Lie quantique n'est rien d'autre qu'une algèbre de Lie ordinaire.

(2) Soit $\mathcal{A}$ une k-algèbre dont le k-module sous-jacent est muni d'une symétrie involutive c et dont la multiplication est notée m. Si l'on a : $c\,\mathrm{m}_1 = \mathrm{m}_2\, c_2 c_1$ où $\mathrm{m}_1 = \mathrm{m} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ et $\mathrm{m}_2 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{m}$, alors l'algèbre $\mathcal{A}$ peut être munie d'une structure d'algèbre de Lie quantique relativement à c pour le crochet $[.,.] = \mathrm{m}(\mathrm{id}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}} - c)$.

(3) On peut munir tout module V, pour toute symétrie marquée, de la structure d'algèbre de Lie quantique triviale avec un crochet identiquement nul.

(4) Dans l'appendice, nous déterminons toutes les structures d'algèbres de Lie quantique pour une symétrie simple Q de rang 2 ou 3 et de marque $q = 1$.

7.3. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE. — Comme dans les paragraphes précédents, nous représenterons les opérateurs sur les puissances tensorielles de $\mathfrak{g}$ par des diagrammes. Nous représentons le crochet de Lie par le diagramme de la figure 15. On trouvera dans la figure 16 la traduction graphique des points (i), (ii) et (iii.a–c) de la définition 7.1.

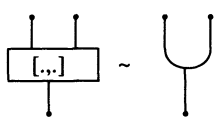


Figure 15

Définissons la notion d'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie quantique.

DÉFINITION 7.4. — *On appelle algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie quantique* $(\mathfrak{g}, c, [.,.])$ *l'algèbre quotient* $U_c(\mathfrak{g})$ *de l'algèbre tensorielle de* $\mathfrak{g}$ *par l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme* $v_1 \otimes v_2 - c(v_1 \otimes v_2) - [v_1, v_2]$ *où* v_1 *et* v_2 *parcourent* $\mathfrak{g}$.

Nous notons id_U l'identité de l'algèbre $U_c(\mathfrak{g})$.

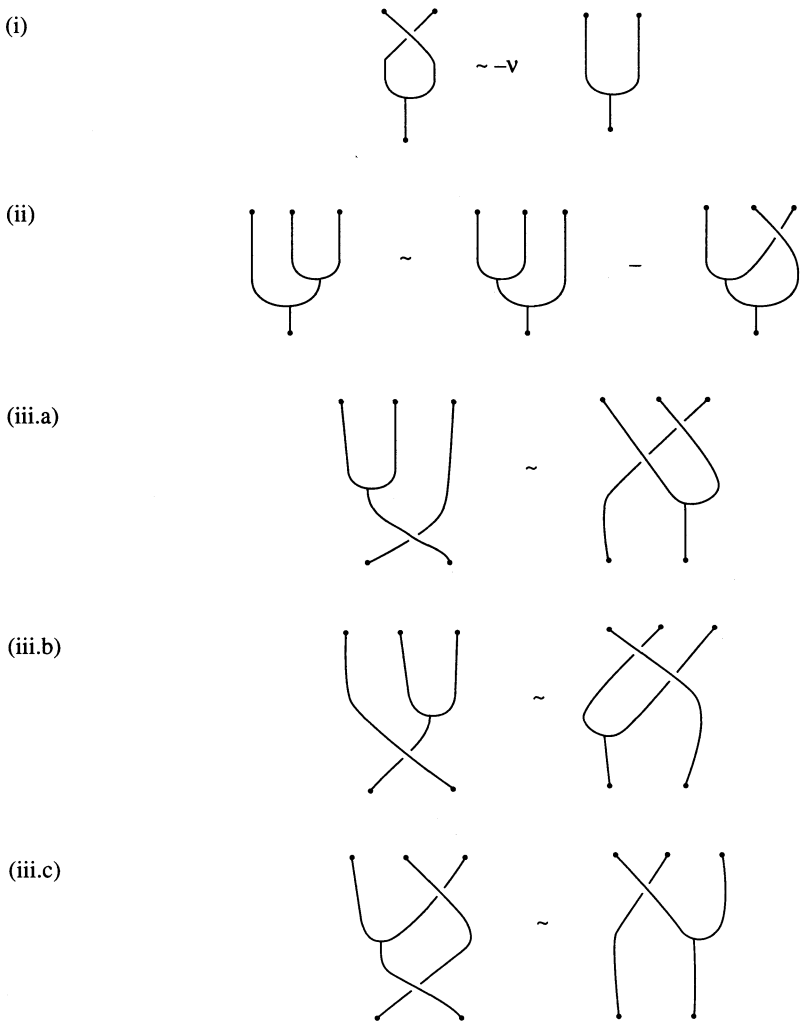


Figure 16

8. Complexes de Chevaley-Eilenberg quantiques.

Nous allons maintenant construire un analogue du complexe de Chevalley-Eilenberg pour les algèbres de Lie quantiques. Soit $(\mathfrak{g}, c, [.,.])$

une algèbre de Lie quantique. En nous inspirant d'une idée de J.-L. Loday [cf. Cu], nous construisons une famille d'applications $(D_n : \mathfrak{g}^{\otimes n} \to \mathfrak{g}^{\otimes(n-1)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui définit une différentielle sur le k-module $T(\mathfrak{g})$ en posant pour $n \geq 2$:

$$D_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} (-1)^{j-1}[.,.]_i \Pi_{i,j}$$

où $[.,.]_i = I_{i-1} \otimes [.,.] \otimes I_{n-i-1}$ et $\Pi_{i,j} = c_{i+1} \dots c_{j-1}$ si $i < j-1$ et $\Pi_{i,i+1} = I_n$. Suivant les conventions graphiques de 7.3, l'opérateur $[.,.]_i \Pi_{i,j}$ peut être représenté par le diagramme de la figure 17. Nous posons de plus $D_1 = D_0 = 0$.

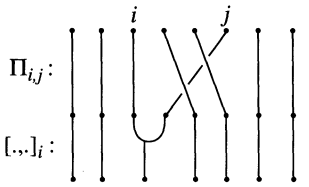


Figure 17

LEMME 8.1. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $D_{n-1} \circ D_n = 0$.*

Démonstration . — On a :

$$D_{n-1}D_n = \sum_{1\leq r<s\leq n-1} \sum_{1\leq i<j\leq n} (-1)^{s+j}[.,.]_r \Pi_{r,s}[.,.]_i \Pi_{i,j} .$$

Nous décomposons l'ensemble d'indices de cette double somme en les neuf ensembles disjoints suivants :

$$\begin{aligned}
(a) &= \{i,j,r,s : 1 \leq i < j < r < s \leq n\} \\
(b) &= \{i,j,r,s : 1 \leq i < r < j < s \leq n\} \\
(c) &= \{i,j,r,s : 1 \leq i < r < s < j \leq n\} \\
(a') &= \{i,j,r,s : 1 \leq r < s < i < j \leq n\} \\
(b') &= \{i,j,r,s : 1 \leq r < i < s < j \leq n\} \\
(c') &= \{i,j,r, : 1 \leq r < i < j < s \leq n\} \\
(d) &= \{i,j,k : 1 \leq i < j < k \leq n\} \\
(e) &= \{i,j,k : 1 \leq i < k < j \leq n\} \\
(f) &= \{i,j,k : 1 \leq k < l < j \leq n\} .
\end{aligned}$$

Définissons les applications k-linéaires $\Lambda_{i,j,r,s}$ et $M_{i,j,k}$ de $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ dans $\mathfrak{g}^{\otimes(n-2)}$ par

$$\begin{aligned}
\Lambda_{i,j,r,s} &= [.,.]_{r-1}\Pi_{r-1,s-1}[.,.]_i\Pi_{i,j} && \text{sur } (a),\\
\Lambda_{i,j,r,s} &= [.,.]_r\Pi_{r,s-1}[.,.]_i\Pi_{i,j} && \text{sur } (b) \text{ et (c')},\\
\Lambda_{i,j,r,s} &= [.,.]_r\Pi_{r,s}[.,.]_i\Pi_{i,j} && \text{sur } (a'),\ (b') \text{ et (c)}\\
\text{et}\qquad M_{i,j,k} &= [.,.]_i\Pi_{i,k-1}[.,.]_i\Pi_{i,j} && \text{sur } (d),\\
M_{i,j,k} &= [.,.]_i\Pi_{i,k}[.,.]_i\Pi_{i,j} && \text{sur } (e),\\
M_{i,j,k} &= [.,.]_k\Pi_{k,i}[.,.]_i\Pi_{i,j} && \text{sur } (f).
\end{aligned}$$

Ces applications sont représentées dans les figures 18-23. Nous avons la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
D_{n-1}D_n = &\sum_{(a)(b)(c')}(-1)^{j+s+1}\Lambda_{i,j,r,s} + \sum_{(a')(b')(c)}(-1)^{j+s}\Lambda_{i,j,r,s}\\
&+\sum_{(d)}(-1)^{j+k+1}M_{i,j,k} + \sum_{(e)(f)}(-1)^{j+k}M_{i,j,k}\,.
\end{aligned}\tag{8.1}$$

D'après les axiomes (iii.a) et (iii.c) de la définition 7.1 (figure 15), on a les équivalences de diagrammes des figures 18, 19 et 20 qui démontrent que, sur les ensembles d'indices (a), (b) et (c), on a : $\Lambda_{i,j,r,s} = \Lambda_{r,s,i,j}$. Or, les ensembles (a'), (b') et (c') peuvent s'obtenir à partir de (a), (b) et (c) en intervertissant les indices i et r et les indices j et s. On a donc la formule :

$$\begin{aligned}
&\sum_{(a)(b)(c')}(-1)^{j+s+1}\Lambda_{i,j,r,s} + \sum_{(a')(b')(c)}(-1)^{j+s}\Lambda_{i,j,r,s}\\
&\qquad = \sum_{(a')(b')(c')}(-1)^{j+s+1}\Lambda_{i,j,r,s} + \sum_{(a')(b')(c')}(-1)^{j+s}\Lambda_{i,j,r,s} = 0\,.
\end{aligned}\tag{8.2}$$

sur (a) $\Lambda_{i,j,r,s}$:

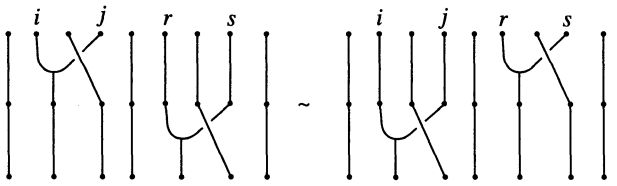
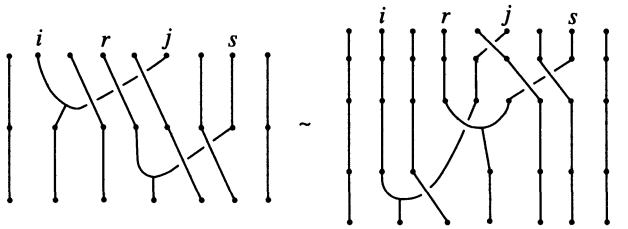


Figure 18

Par ailleurs, considérons les diagrammes des figures 21, 22 et 23. Ces équivalences montrent que les termes de l'identité de Jacobi peuvent être mis en facteur dans les opérateurs $M_{i,j,k}$.

sur (b) $\Lambda_{i,j,r,s}$:



$\underset{\text{(iii.c)}}{\sim}$

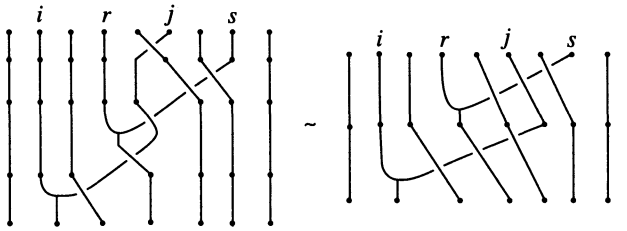
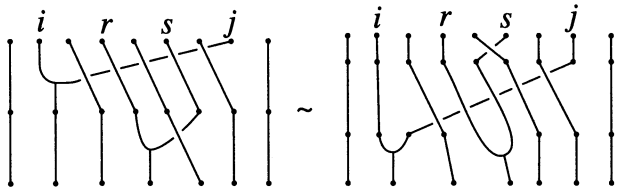


Figure 19

sur (c) $\Lambda_{i,j,r,s}$:



$\underset{\text{(iii.a)}}{\sim}$

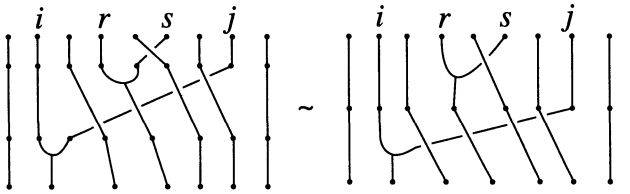


Figure 20

sur (d) : $M_{i,j,k}$:

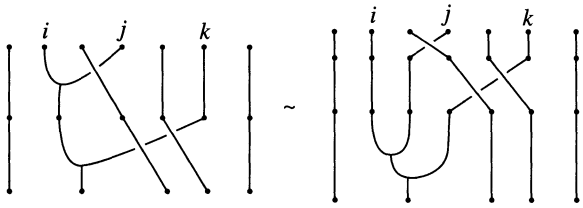


Figure 21

sur (e) : $M_{i,j,k}$:

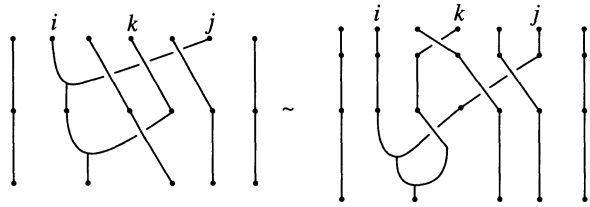


Figure 22

sur (f) : $M_{i,j,k}$:

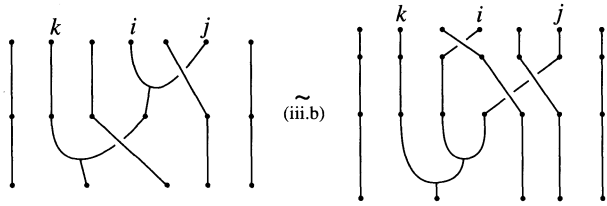


Figure 23

Moyennant des changements d'indices, on obtient :

$$\sum_{(d)}(-1)^{j+k+1}M_{i,j,k} + \sum_{(e)(f)}(-1)^{j+k}M_{i,j,k}$$
$$= \sum_{(d)}[.,.]_i\big(-[.,.]_i + [.,.]_i c_{i+1} + [.,.]_{i+1}\big)\big(I_{j-1}\otimes \Pi_{k-j+1}\big)c_{j-1}\,.$$

Or on a :

$$[.,.]_i\big(-[.,.]_i+[.,.]_i c_{i+1}+[.,.]_{i+1}\big) = I_{n-1}\otimes[.,.](-[.,.]_1+[.,.]_1 c_2+[.,.]_2)\otimes I_{n-i-2}\,.$$

Le terme de droite est nul d'après l'identité de Jacobi (7.1.ii). De la confrontation de ce dernier résultat et de (8.2), il ressort que l'expression (8.1) est nulle, c'est-à-dire que $D_{n-1}D_n = 0$. $\square$

Nous allons à présent définir une différentielle sur le $U_c(\mathfrak{g})$-module $U_c(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}^{\otimes *}$. Elle est donnée comme la somme $d_r + d_{[.,.]}$ où d_r et $d_{[.,.]}$ sont des applications linéaires de $U_c(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}^{\otimes n}$ dans $U_c(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}^{\otimes (n-1)}$. La première est définie de même manière que l'application d_r du lemme 3.1 par

$$d_r = (m^U \otimes I_{n-1}) \circ (\mathrm{id}_U \otimes A_n)$$

où m^U désigne la multiplication de $U_c(\mathfrak{g})$. La seconde est, quant à elle, donnée par

$$d_{[.,.]} = \mathrm{id}_S \otimes D_n \,.$$

LEMME 8.2. — *L'application $d_r + d_{[.,.]}$ est de carré nul.*

Démonstration. — D'après le lemme précédent,$d^2_{[.,.]} = 0$. On a donc :

$$(d_r + d_{[.,.]})^2 = d_r^2 + d_{[.,.]} d_r + d_r d_{[.,.]}$$

ou encore, en degré $n \geq 1$,

(8.3)
$$(d_r + d_{[.,.]})^2 = (\mathrm{m}^U \, \mathrm{m}_1^U \otimes I_{n-2})(\mathrm{id}_U \otimes P_n) = (\mathrm{m}^U \, \mathrm{m}_2^U \otimes I_{n-2})(\mathrm{id}_U \otimes P_n)$$

où nous notons $\mathrm{m}_1^U = \mathrm{m}^U \otimes \mathrm{id}_U$, $\mathrm{m}_2^U = \mathrm{id}_U \otimes \mathrm{m}^U$ et avons posé

$$P_n = (I_1 \otimes A_{n-1}) A_n + (I_1 \otimes D_{n-1}) A_n + A_{n-1} D_n \,. \tag{8.4}$$

Nous allons établir que

$$P_n = (I_n - c_1 - [.,.]_1) \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (-1)^{i+j} (I_1 \otimes \Pi_j) \Pi_i \,. \tag{8.5}$$

Posons $N_{i,j} = [.,.]_i \Pi_{i,j}$. Nous avons :

$$A_{n-1} D_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{j+k} \Pi_k N_{i,j} \,.$$

D'après les équivalences des diagrammes des figures 24, 25 et 26, nous avons les relations :

$$\begin{aligned} \Pi_k N_{i,j} &= (I_1 \otimes N_{i-1,j-1}) \Pi_k && \text{pour } k < i \,, \\ \Pi_k N_{i,j} &= (I_1 \otimes N_{i,j-1}) \Pi_k && \text{pour } i < k < j \,, \\ \text{et} \quad \Pi_k N_{i,j} &= (I_1 \otimes N_{i,j}) \Pi_{k+1} && \text{pour } j \leq k \,. \end{aligned}$$

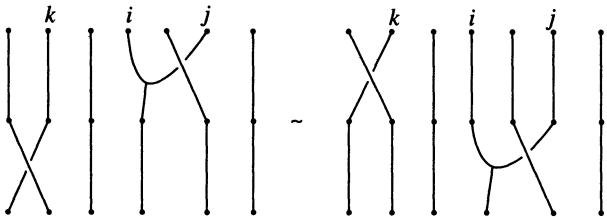


Figure 24

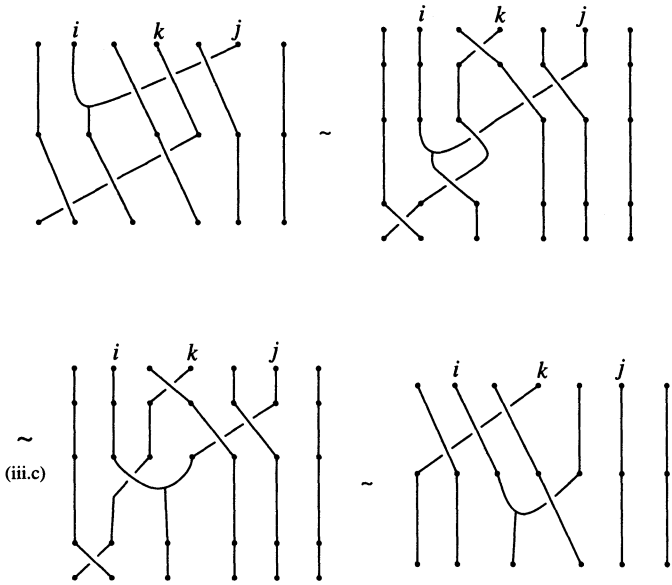


Figure 25

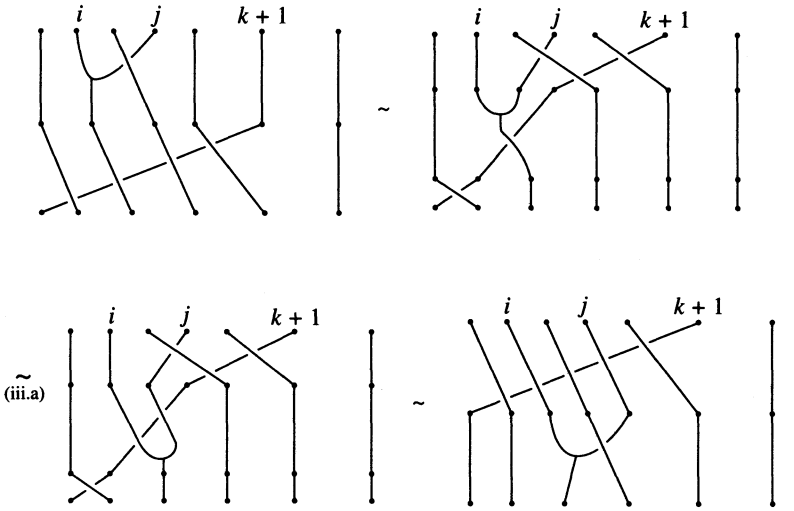


Figure 26

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
A_{n-1}D_n = & \sum_{1\le k<i<j\le n-1} (-1)^{i+j}(I_1\otimes N_{i-1,j-1})\Pi_k + \sum_{1\le i<j\le n-1} (-1)^{i+j}\Pi_i N_{i,j} \\
& + \sum_{1\le i<k<j\le n-1} (-1)^{i+j}(I_1\otimes N_{i,j-1})\Pi_k \\
& + \sum_{1<i<j\le k\le n-1} (-1)^{i+j}(I_1\otimes N_{i,j})\Pi_{k+1} \\
= & - \sum_{1\le i<j\le n-1} (-1)^{j+1}(I_1\otimes N_{i,j})\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\Pi_k \\
& + \sum_{1\le i<j\le n-1} (-1)^{i+j}\Pi_i N_{i,j} \\
= & -(I_1\otimes D_{n-1}A_n) + \sum_{1\le i<j\le n-1} (-1)^{i+j}\Pi_i N_{i,j}\,.
\end{aligned}$$

D'autre part, l'équivalence des diagrammes de la figure 27 donne

$$\sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{i+j}\Pi_i N_{i,j} = -\sum_{1\le i\le j\le n-1}(-1)^{i+j}[.,.]_1(I_1\otimes\Pi_{j-1})\Pi_i\,.$$

Nous avons donc

$$A_{n-1}D_n + (I_1\otimes D_{n-1})A_n = -\sum_{1\le i\le j\le n-1}(-1)^{i+j}[.,.]_1(I_1\otimes\Pi_j)\Pi_i\,.$$

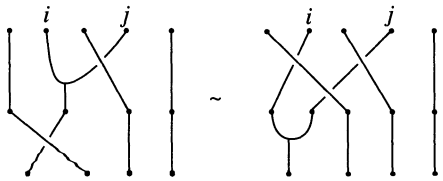


Figure 27

Si nous additionnons terme à terme cette dernière relation avec la relation (3.3), nous obtenons la formule (8.5) que nous voulions démontrer.

Par conséquent, d'après (8.5), on a :

$$(d_r + d_{[.,.]})^2 = (m^U \otimes I_{n-1})\big(\mathrm{id}_U \otimes \mathrm{m}^U(I_2 - c - [.,.]) \otimes I_{n-2}\big) \circ \left(\mathrm{id}_U \otimes \sum_{1\le i\le j\le n-1} (-1)^{i+j}(I_1 \otimes \Pi_j)\Pi_i\right).$$

Ce qui est nul car, par définition de $U_c(\mathfrak{g})$, $\mathrm{m}^U(I_2 - c - [.,.]) = 0$. □

Observons que d_r et $d_{[.,.]}$ sont $U_c(\mathfrak{g})$-linéaires. Le lemme 8.2 nous permet de définir un complexe de $U_c(\mathfrak{g})$-modules.

Définition 8.3. — *Soit* $(\mathfrak{g}, c, [.,.])$ *une algèbre de Lie quantique et soit* M_r *un* $U_c(\mathfrak{g})$*-module à droite. Nous appelons complexe de Chevalley-Eilenberg non commutatif le complexe :*

$$T_*(\mathfrak{g}; M_r) = \big(M_r \otimes_{U_c(\mathfrak{g})} \big(U_c(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}^{\otimes *}\big),\ \mathrm{id}_M \otimes (d_r + d_{[.,.]})\big).$$

Nous identifions canoniquement $T_*(\mathfrak{g}; M_r)$ au complexe $\big(M_r \otimes \mathfrak{g}^{\otimes *}, d_{M,r,[.,.]}\big)$ dont la différentielle s'exprime, avec la convention d'écriture (3.6), sur un élément homogène $\xi = m \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \in M_r \otimes \mathfrak{g}^{\otimes *}$, par la formule

$$\begin{aligned} d_{M,r,[.,.]}(\xi) = {} & m \cdot g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n \\ & + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum m \cdot \tilde{g}_k \otimes \tilde{g}_1 \otimes \ldots \tilde{g}_{k-1} \otimes g_{k+1} \otimes \ldots \otimes g_n \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes [g_i, g_{i+1}] \otimes \ldots \otimes g_n \\ & + \sum_{1\le i<j+1\le n+1} \sum (-1)^{j+1} m \otimes g_1 \otimes \ldots [g_i, \tilde{g}_j] \otimes \tilde{g}_{i+1} \otimes \ldots \\ & \qquad \otimes \tilde{g}_{j-1} \otimes g_{j+1} \otimes \cdots g_n . \end{aligned}$$

Montrons que cette différentielle passe au quotient lorsqu'on la projette sur $M_r \otimes \Lambda_c^*(\mathfrak{g})$.

LEMME 8.4. — *Pour toute une symétrie de Hecke c, les opérateurs d_r et $d_{[.,.]}$ induisent deux applications*

$$d_r, d_{[.,.]} : U_c(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda_c^n(\mathfrak{g}) \to U_c(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda_c^{(n-1)}(\mathfrak{g})$$

par passage au quotient.

Démonstration. — Pour d_r, la démonstration est identique à celle du lemme 3.2. Afin de démontrer la propriété pour $d_{[.,.]}$ il nous faut montrer que $(\mathrm{id}_U \otimes \rho_{n-1}^{\Lambda})(\mathrm{id}_U \otimes D_n) \circ (\mathrm{id}_U \otimes I_c^-(\mathfrak{g})) = 0$. L'idéal $I_c^-(\mathfrak{g})$ est k-linéairement engendré par les éléments de la forme $(\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}^{\otimes n} - \nu^{-1} c_k)(\zeta)$ où $\zeta \in \mathfrak{g}^{\otimes n}$ et où k est compris entre 1 et $n-1$. Posons $N_{i,j} = [.,.]_i \Pi_{i,j}$. On a :

$$D_n \circ c_k = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{j+1} N_{i,j} c_k \,.$$

Nous allons décomposer l'ensemble des indices de cette somme et examiner l'opérateur $\Pi_{i,j} c_k$ dans chaque cas. Pour ce faire, considérons les ensembles d'indices suivants :

$$(a) = \{i,j \ : \ 1 \leq i < j < k\} \qquad (b) = \{i,j \ : \ 1 \leq i < k \lhd j \leq n\}$$
$$(c) = \{i,j \ : \ k \lhd i < j \leq n\}$$

où $k \lhd j$ signifie que $k+1 < j$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} D_n \circ c_k = & \sum_{(a),(b),(c)} (-1)^{j+1} N_{i,j} c_k + \sum_{k \lhd j \leq n} (-1)^{j+1} (N_{k,j} c_k + N_{k+1,j} c_k) \\ & + (-1)^k N_{k,k+1} c_k \\ & + \sum_{1 \leq i < k} (-1)^{k+1} (N_{i,k} c_k - N_{i,k+1} c_k) \,. \end{aligned}$$

Le lecteur se convaincra aisément en traçant les dessins correspondants que nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&N_{i,j}c_k = c_{k-1}N_{i,j} \quad \text{sur } (a)\,,\\
&N_{i,j}c_k = c_kN_{i,j} \quad \text{sur } (b) \text{ et } (c)\,,\\
&N_{k,j}c_k = c_kN_{k,j} \quad \text{d'après 7.1.(iii.b)}\,,\\
&N_{k+1,j}c_k = c_kN_{k+1,j} \quad \text{d'après 7.1.(iii.c)}\,,\\
&N_{k,k+1}c_k = -\nu N_{k,k+1} \quad \text{d'après 7.1.(i)}\,,\\
&N_{i,k}c_k = N_{i,k+1}\,,\\
\text{et}\quad &N_{i,k+1}c_k = N_{i,k}c_k^2 = (1-\nu)N_{i,k+1} + \nu N_{i,k} \quad \text{d'après (1.1)}\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
D_n\circ c_k = c_{k-1}&\sum_{(a)}(-1)^{j+1}N_{i,j} + c_k\sum_{(b)(c)}(-1)^{j+1}N_{i,j}\\
&+ c_k\sum_{k\lhd j\leq n}(-1)^{j+1}(N_{k+1,j}+N_{k,j}) + (-1)^{k+1}\nu N_{k,k+1}\\
&- \nu\sum_{1\leq i<k}(-1)^{k+1}(N_{i,k}-N_{i,k+1})\,.
\end{aligned}$$

Or pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, on a $\rho_n^\Lambda\circ(-\nu^{-1}c_k) = \rho_n^\Lambda$ et donc $\rho_n^\Lambda\circ D_n\circ(-\nu^{-1}c_k) = \rho_n^\Lambda\circ D_n$ ou encore $\rho_n^\Lambda\circ D_n(I_n - \nu^{-1}c_k) = 0$. □

D'après le lemme précédent, il est possible de passer au quotient dans les complexes de Chevalley-Eilenberg non commutatifs. On pose la

DÉFINITION 8.5. — *Soient* $(\mathfrak{g}, c, [.,.])$ *une algèbre de Lie quantique et* M_r *un* $U_c(\mathfrak{g})$*-module à droite. Nous appelons le complexe de Chevalley-Eilenberg quantique le complexe*

$$C_*(\mathfrak{g}, M_r) = \big(M_r\otimes_{U_c(\mathfrak{g})}\big(U_c(\mathfrak{g})\otimes\Lambda_c^*(\mathfrak{g})\big),\ \mathrm{id}_M\otimes(d_r + d_{[.,.]})\big)\,.$$

En identifiant canoniquement $M_r\otimes_{U_c(\mathfrak{g})}U_c(\mathfrak{g})$ et M_r, nous avons :

$$C_*(\mathfrak{g}, M_r) \cong \big(M_r\otimes\Lambda_c^*(\mathfrak{g}),\ d_{M,r,[.,.]}\big)\,,$$

la différentielle $d_{M,r,[.,.]}$ étant donnée par la même formule que précédemment.

Remarques. — Lorsque le crochet de Lie est identiquement nul, le complexe de Chevalley-Eilenberg quantique s'identifie au complexe de Koszul quantique $K_*(S_{(c,\nu)}(\mathfrak{g}); M_r)_r$.

Dans le cas où c est la volte, le complexe $C_*(\mathfrak{g}, U_c(\mathfrak{g}))$ est le complexe de Chevalley-Eilenberg classique $V(\mathfrak{g})$ tel qu'il est construit dans [CE].

Un argument de suite spectrale (cf. proposition 10.3) implique le

THÉORÈME 8.6. — *Soient k un corps de caractéristique nulle et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quantique. Si le gradué associé à la filtration canonique de l'algèbre $U_c(\mathfrak{g})$ est égale à $S_c(\mathfrak{g})$, le complexe $C_*\big(\mathfrak{g}; U_c(\mathfrak{g})\big)$ est une résolution libre de k par des $U_c(\mathfrak{g})$-modules à gauche.*

DÉFINITION 8.7. — *Nous appelons homologie de l'algèbre de Lie quantique $(\mathfrak{g}, c, [.,.])$ à coefficients dans M_r l'homologie $H_*(\mathfrak{g}, M_r)$ du complexe $C_*(\mathfrak{g}, M_r)$.*

On a immédiatement

$$H_0(\mathfrak{g}, M_r) = M_r / M_r \cdot \mathfrak{g}\,.$$

Si l'on pose $M_r = k$, le complexe $C_*(\mathfrak{g}, k)$ se réduit au complexe

$$C_*(\mathfrak{g}, k) = \big(\Lambda_c^*(\mathfrak{g}),\, d_{[.,.]}\big)$$

et on a :

$$H_0(\mathfrak{g}, k) = k \qquad \text{et} \qquad H_1(\mathfrak{g}, k) = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

où $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est le sous espace vectoriel engendré par les éléments $[g_1, g_2]$ où g_1 et g_2 parcourent $\mathfrak{g}$.

Il est également possible de définir une cohomologie des algèbre de Lie quantiques. Soient M_ℓ un $U_c(\mathfrak{g})$-module à gauche et $\mathrm{Hom}_U(U_c(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda_c(\mathfrak{g}),\, M_\ell)$ le k-module des morphismes de $U_c(\mathfrak{g})$-modules de $U_c(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda_c(\mathfrak{g})$ dans M_ℓ. C'est un $U_c(\mathfrak{g})$-module à droite, nous notons $\mathrm{Hom}_U^n(U_c(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda_c(\mathfrak{g}),\, M_\ell)$ le sous-module de degré n dans la graduation induite par celle de $\Lambda_c^*(\mathfrak{g})$.

DÉFINITION 8.8. — *Nous appelons cohomologie de l'algèbre quantique $(\mathfrak{g}, c, [.,.])$ à valeurs dans le $U_c(\mathfrak{g})$-module à gauche M_ℓ la cohomologie $H^*(\mathfrak{g}, M_\ell)$ du complexe de cochaînes*

$$C^*(\mathfrak{g}, M_\ell) = \big(\mathrm{Hom}_U^*\big(U_c(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda_c(\mathfrak{g}),\, M_\ell\big),\, \partial\big)$$

où ∂ est la différentielle $\mathrm{Hom}_U(d_r + d_{[.,.]}, \mathrm{id}_M)$.

Identifions $\mathrm{Hom}_U(U_c(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda_c(\mathfrak{g}), M_\ell)$ à $\mathrm{Hom}_k(\Lambda_c(\mathfrak{g}), M_\ell)$. On a :

$$C^*(\mathfrak{g}, M_\ell) \cong \big(\mathrm{Hom}_k^*(\Lambda_c(\mathfrak{g}),\, M_\ell),\, \partial\big)$$

où, pour un élément homogène $f \in \mathrm{Hom}_k^n(\Lambda_c(\mathfrak{g}),\, M_\ell)$, ∂f est le morphisme, élément de $\mathrm{Hom}_k^{n+1}(\Lambda_c(\mathfrak{g}),\, M_\ell)$, qui à $g_1 \wedge \cdots \wedge g_{n+1}$ associe

$$\begin{aligned} & g_1 f(g_2 \wedge \cdots \wedge g_n) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum \tilde{g}_k f(\tilde{g}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{g}_{k-1} \wedge g_{k+1} \wedge \cdots \wedge g_n) \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(g_1 \wedge \cdots \wedge [g_i, g_{i+1}] \wedge \cdots \wedge g_n) \\ & + \sum_{1 \le i < j+1 \le n+1} \sum (-1)^{j+1} f(g_1 \wedge \cdots \wedge [g_i, \tilde{g}_j] \wedge \tilde{g}_{i+1} \wedge \cdots \wedge \tilde{g}_{j-1} \wedge g_{j+1} \wedge \cdots \wedge g_n) \end{aligned}$$

où nous utilisons la convention d'écriture (3.6). Supposons k muni de la structure de $U_c(\mathfrak{g})$-module trivial. Nous posons la

DÉFINITION 8.9. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quantique de symétrie de Hecke c. Nous appelons cocycles de $\mathfrak{g}$ les cocycles du complexe $C^*(\mathfrak{g}, k)$.*

Le k-module des 0-cocycles de toute algèbre de Lie quantique $\mathfrak{g}$ est isomorphe à k, celui des 1-cocycles au module des formes linéaires f sur $\mathfrak{g}$ vérifiant $f \circ [.,.] = 0$ et celui des 2-cocycles au module des formes linéaires g sur $\mathfrak{g}^{\otimes 2}$ vérifiant

$$g \circ c = -\nu g \qquad \text{et} \qquad g \circ ([.,.]_1 - [.,.]_1 c_2 - [.,.]_2) = 0\,.$$

9. Algèbres enveloppantes généralisées.

L'algèbre enveloppante de Sridharan $U(\mathfrak{g}, f)$ associée à une algèbre de Lie $(\mathfrak{g},\, [.,.])$ ordinaire et un 2-cocycle f du complexe de Chevalley-Eilenberg est le quotient de l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g})$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 - [v_1, v_2] - f(v_1, v_2)$ où v_1 et v_2 parcourent $\mathfrak{g}$. Dans [Sr] R. Sridharan montre que cette algèbre ne dépend que de $\mathfrak{g}$ et de la classe de cohomologie de f dans $H^2(\mathfrak{g}, k)$, que $U(\mathfrak{g}, f)$ est une algèbre presque commutative au sens de [K1] et que, pour toute algèbre presque

commutative $\mathcal{A}$ dont le gradué associé est une algèbre symétrique, il existe une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et un 2-cocycle $f \in Z^2(\mathfrak{g}, k)$ tel que $\mathcal{A} \cong U(\mathfrak{g}, f)$.

Dans le cas quantique, nous associons à la donnée d'une algèbre de Lie quantique $(\mathfrak{g}, c, [.,.])$ et d'un 2-cocycle de $\mathfrak{g}$ au sens de 8.9 une algèbre $U_c(\mathfrak{g}, f)$, analogue de l'algèbre enveloppante de Sridharan.

DÉFINITION 9.1. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quantique relativement à la symétrie de Hecke c et f un 2-cocycle de $\mathfrak{g}$. On appelle algèbre enveloppante généralisée de $\mathfrak{g}$ relativement à f, l'algèbre $U_c(\mathfrak{g}, f)$, quotient de l'algèbre tensorielle sur $\mathfrak{g}$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $v_1 \otimes v_2 - c(v_1 \otimes v_2) - [v_1, v_2] - f(v_1, v_2)$ où v_1 et v_2 parcourent $\mathfrak{g}$.*

Remarque. — Lorsque f est la forme nulle, l'algèbre $U_c(\mathfrak{g}, f)$ est l'algèbre enveloppante $U_c(\mathfrak{g})$ et lorsque le crochet et la forme sont tous deux nuls, c'est l'algèbre symétrique $S_c(\mathfrak{g})$.

Nous notons id_U l'identité de l'algèbre $U_c(\mathfrak{g}, f)$. Dans les démonstrations, nous poserons $U = U_c(\mathfrak{g}, f)$.

A tout 2-cocycle f d'un algèbre de Lie quantique $(\mathfrak{g}, c, [.,.])$, associons l'application f' de $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ dans $\mathfrak{g}^{\otimes(n-2)}$ définie par la formule :

(9.1)
$$f' = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+1}((f \otimes I_{n-2})(I_1 \otimes \Pi_{j-1})\Pi_i - (I_{n-2} \otimes f)(\check{\Pi}_i \otimes I_1)\check{\Pi}_j).$$

Nous appelons $\tilde{f}'$ la composée de f' avec la projection de $\mathfrak{g}^{\otimes(n-2)}$ dans $\Lambda_c^{n-2}(\mathfrak{g})$.

Remarque. — La restriction de f à $\mathfrak{g}^{\otimes 2}$ est nulle. Lorsque la symétrie c est la volte, la forme f est identiquement nulle sur toute l'algèbre $T(\mathfrak{g})$.

10. Homologie de Hochschild des algèbres enveloppantes généralisées.

Nous reprenons les notations du paragraphe 9. Sous certaines conditions, il est possible de construire un complexe du type Chevalley-Eilenberg (analogue quantique de celui décrit dans [K1]) qui est une résolution de $U_c(\mathfrak{g}, f)$ par des $U_c(\mathfrak{g}, f)$-bimodules. Ce paragraphe est consacré à cette construction.

Définissons l'opérateur d_r (resp. d_ℓ) de $U_c(\mathfrak{g},f)\otimes\mathfrak{g}^{\otimes n}$ dans $U_c(\mathfrak{g},f)\otimes\mathfrak{g}^{\otimes(n-1)}$ (resp. de $\mathfrak{g}^{\otimes n}\otimes U_c(\mathfrak{g},f)$ dans $\mathfrak{g}^{\otimes(n-1)}\otimes U_c(\mathfrak{g},f)$) en posant :

$$d_r=\big(\mathrm{m}^U\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}^{\otimes(n-1)}\big)\big(\mathrm{id}_U\otimes A_n\big)\quad\big(\text{ resp. } d_\ell=\big(\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}^{\otimes(n-1)}\otimes\mathrm{m}^U\big)\big(\check{A}_n\otimes\mathrm{id}_U\big)\big)$$

où m^U désigne la multiplication de l'algèbre $U_c(\mathfrak{g},f)$.

LEMME 10.1. — *Soit f un 2-cocycle sur l'algèbre de Lie quantique $(\mathfrak{g},c,[.,.])$ tel que $f'=0$. Alors l'application d de $U_c(\mathfrak{g},f)\otimes\mathfrak{g}^{\otimes n}\otimes U_c(\mathfrak{g},f)$ dans $U_c(\mathfrak{g},f)\otimes\mathfrak{g}^{\otimes(n-1)}\otimes U_c(\mathfrak{g},f)$ donnée par :*

$$d=d_r\otimes\mathrm{id}_U+\mathrm{id}_U\otimes D_n\otimes\mathrm{id}_U+(-1)^n\,\mathrm{id}_U\otimes d_\ell$$

est de carré nul.

Démonstration. — Calculons :

$$\begin{aligned}d^2=&\big[d_r^2+d_r(\mathrm{id}_U\otimes D_n)+(\mathrm{id}_U\otimes D_{n-1})d_r\big]\otimes\mathrm{id}_U\\&+\mathrm{id}_U\otimes D_{n-1}D_n\otimes\mathrm{id}_U+(-1)^n\big((d_r\otimes\mathrm{id}_U)(\mathrm{id}_U\otimes d_\ell)\\&-(\mathrm{id}_U\otimes d_\ell)(d_r\otimes\mathrm{id}_U)\big)\\&+(-1)^n\,\mathrm{id}_U\otimes\big[(-1)^{n-1}d_\ell^2-d_\ell(D_n\otimes\mathrm{id}_U)+(D_{n-1}\otimes\mathrm{id}_U)d_\ell\big]\,.\end{aligned}$$

D'après les lemmes 3.1.b et 8.1, la seconde et la troisième lignes de cette somme sont nulles. Il reste :

(10.1)
$$d^2=\big[(\mathrm{m}^U\,\mathrm{m}_2^U\otimes I_2)(\mathrm{id}_U\otimes P_n)\big]\otimes\mathrm{id}_U-\mathrm{id}_U\otimes\big[(I_{n-2}\otimes\mathrm{m}^U\,\mathrm{m}_1^U)(R_n\otimes\mathrm{id}_U)\big]$$

où P_n est défini par (8.4) et où l'on a posé :

$$R_n=(-1)^{n-1}((D_{n-1}\otimes I_1)\check{A}_n-\check{A}_{n-1}D_n)+(\check{A}_{n-1}\otimes I_1)\check{A}_n\,.$$

Nous allons établir la formule :

$$R_n=(I_n-c_{n-1}-[.,.]_{n-1})\sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{i+j+1}(\check{\Pi}_j\otimes I_1)\check{\Pi}_i\,. \tag{10.2}$$

Pour ce faire, calculons :

$$\begin{aligned}\check{A}_{n-1}D_n=&\sum_{1\le k<i<j\le n}(-1)^{j+k+n}\check{\Pi}_kN_{i,j}+\sum_{1\le i<k<j\le n}(-1)^{j+k+n}\check{\Pi}_kN_{i,j}\\&+\sum_{1\le i<j<k\le n}(-1)^{j+k+n+1}\check{\Pi}_{k-1}N_{i,j}+\sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{j+i+n}\check{\Pi}_iN_{i,j}\,.\end{aligned}$$

Il s'agit de faire commuter $\check{\Pi}_k$ et $N_{i,j}$. Les relations

$$\begin{aligned} \check{\Pi}_k N_{i,j} &= (N_{i-1,j-1} \otimes I_1)\,\check{\Pi}_k && \text{si } 1 \leq k < i\,, \\ \check{\Pi}_k N_{i,j} &= (N_{i,j-1} \otimes I_1)\,\check{\Pi}_k && \text{si } i < k < j\,, \\ \text{et}\quad \check{\Pi}_{k-1} N_{i,j} &= (N_{i,j} \otimes I_1)\,\check{\Pi}_{k-1} && \text{si } j < k \leq n\,, \end{aligned}$$

peuvent êtres obtenues en considérant les diagrammes correspondants. Nous ne les tracerons pas ici. Finalement :

$$\begin{aligned} \check{A}_{n-1} D_n &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (-1)^{j+1}\,(N_{i,j} \otimes I_1)\,\check{\Pi}_k \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+n+1} \check{\Pi}_i N_{i,j} \\ &= (D_{n-1} \otimes I_1)\check{A}_n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+n+1} \check{\Pi}_i N_{i,j} \end{aligned}$$

ou encore

$$(-1)^{n-1}((D_{n-1} \otimes I_1)\check{A}_n - \check{A}_{n-1} D_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+1} \check{\Pi}_i N_{i,j}\,.$$

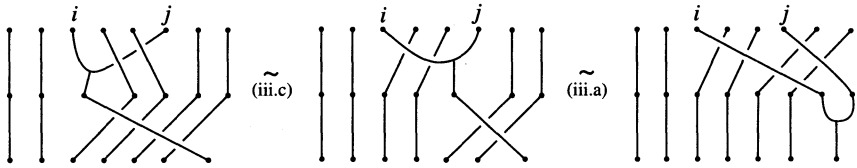


Figure 28

D'après les points (iii.a) et (iii.c) de la définition 7.1, nous avons l'équivalence de la figure 28 qui représente la relation : $\check{\Pi}_i N_{i,j} = [.,.]_{n-1}(\check{\Pi}_i \otimes I_1)\check{\Pi}_j$. D'où :

$$(-1)^{n-1}((D_{n-1} \otimes I_1)\check{A}_n - \check{A}_{n-1} D_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+1} [.,.]_{n-1} (\check{\Pi}_i \otimes I_1)\check{\Pi}_j.$$

En retranchant terme à terme cette dernière formule de l'identité (3.4), nous obtenons (10.2). La formule (10.1) devient :

$$\begin{aligned} d^2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+1}\, \mathrm{id}_U \otimes \big[(f \otimes I_{n-2})(I_1 \otimes \Pi_{j-1})\Pi_i \\ &\qquad\qquad - (I_{n-2} \otimes f)(\check{\Pi}_i \otimes I_1)\check{\Pi}_j\big] \otimes \mathrm{id}_U \\ &= \mathrm{id}_U \otimes f' \otimes \mathrm{id}_U\ . \end{aligned}$$

Ce qui est nul par hypothèse. □

Nous construisons deux complexes ayant d pour différentielle. Soit $(\mathfrak{g}, c, [.,.])$ une algèbre de Lie quantique munie d'un 2-cocycle f tel que $f' = 0$. Nous avons le complexe

$$T_*(U_c(\mathfrak{g}, f), M_b) = \big(M_b \otimes_{U^e} \big(U_c(\mathfrak{g}, f) \otimes \mathfrak{g}^{\otimes *} \otimes U_c(\mathfrak{g}, f)\big), \mathrm{id}_M \otimes d\big)$$

pour tout $U_c(\mathfrak{g}, f)$-bimodule M_b.

L'application d passe au quotient en induisant une différentielle d de $U_c(\mathfrak{g}, f) \otimes \Lambda_c^n(\mathfrak{g}) \otimes U_c(\mathfrak{g}, f)$ dans $U_c(\mathfrak{g}, f) \otimes \Lambda_c^{n-1}(\mathfrak{g}) \otimes U_c(\mathfrak{g}, f)$. Ainsi pour tout 2-cocycle f de $\mathfrak{g}$ vérifiant $\tilde{f}' = 0$ et tout $U_c(\mathfrak{g}, f)$-bimodule M_b, on a le complexe

$$C_*(U_c(\mathfrak{g}, f), M_b) = \big(M_b \otimes_{U^e} \big(U_c(\mathfrak{g}, f) \otimes \Lambda_c^*(\mathfrak{g}) \otimes U_c(\mathfrak{g}, f)\big), \mathrm{id}_M \otimes d\big)\,.$$

EXEMPLES 10.2.

(1) L'algèbre $U_c(\mathfrak{g}, f)^{\mathrm{e}}$ est un $U_c(\mathfrak{g}, f)$-bimodule d'une façon naturelle. On a l'isomorphisme de complexes

$$C_*(U_c(\mathfrak{g}, f), U_c(\mathfrak{g}, f)^{\mathrm{e}}) \cong (U_c(\mathfrak{g}, f) \otimes \Lambda_c^*(\mathfrak{g}) \otimes U_c(\mathfrak{g}, f),\ d)\,.$$

(2) L'algèbre $U_c(\mathfrak{g}, f)$ est également un $U_c(\mathfrak{g}, f)$-bimodule. Nous identifions le complexe $C_*(U_c(\mathfrak{g}, f), U_c(\mathfrak{g}, f))$ à $\big(U_c(\mathfrak{g}, f) \otimes \Lambda_c^*(\mathfrak{g}),\ \tilde{d}\big)$ où $\tilde{d}$ est la différentielle donnée, sur un élément homogène $\xi = x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \in U_c(\mathfrak{g}, f) \otimes \Lambda_c^n(\mathfrak{g})$, par la formule

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(\xi) &= x g_1 \otimes g_2 \wedge \cdots \wedge g_n + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{(k)_\ell} x \tilde{g}_k \otimes \tilde{g}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{g}_{k-1} \wedge g_{k+1} \wedge \cdots \wedge g_n \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge [g_i, g_{i+1}] \wedge \cdots \wedge g_n \\
&+ \sum_{1 \le i < j+1 \le n+1} \sum_{(j-i)_\ell} (-1)^{j+1} x \otimes g_1 \wedge \ldots [g_i, \tilde{g}_j] \otimes \tilde{g}_{i+1} \wedge \ldots \tilde{g}_{j-1} \wedge g_{j+1} \wedge \ldots g_n \\
&+ (-1)^n g_n x \otimes g_1 \wedge \ldots \wedge g_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \sum_{(k)_r} \tilde{\tilde{g}}_k x \otimes g_1 \wedge \ldots g_{k+1} \wedge \tilde{\tilde{g}}_{k-1} \wedge \ldots \tilde{\tilde{g}}_n
\end{aligned}$$

suivant les conventions (3.6) et (3.7).

Enonçons le résultat principal de ce paragraphe.

PROPOSITION 10.3. — *Soient k un corps de caractéristique nulle, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quantique relativement à la symétrie de Hecke c et f est un 2-cocycle de $\mathfrak{g}$ tel que $\tilde{f}' = 0$. Si de plus, le gradué associé à la filtration canonique de l'algèbre $U_c(\mathfrak{g}, f)$ est égal à $S_c(\mathfrak{g})$, alors le complexe*

$$C_*(U_c(\mathfrak{g}, f), U_c(\mathfrak{g}, f)^{\mathrm{e}}) = \big(U_c(\mathfrak{g}, f) \otimes \Lambda_c^*(\mathfrak{g}) \otimes U_c(\mathfrak{g}, f),\ d\big)$$

est une résolution libre de $U_c(\mathfrak{g}, f)$ par des $U_c(\mathfrak{g}, f)$-bimodules.

Démonstration. — Le complexe est libre par construction. Considérons la filtration canonique de U. Elle induit une filtration sur le complexe $C_*(U, U^{\mathrm{e}})$. Comme $\mathrm{gr}(U) = S$, le terme E^0 de la suite spectrale est donné par

$$(E^0, d^0) = (S \otimes \Lambda^* \otimes S\,, d_b) = K_*(S, S^{\mathrm{e}})_b\,.$$

Ce dernier complexe est acyclique d'après le point (c) de la proposition 4.1. Par conséquent, $C(U, U^{\mathrm{e}})$ est acyclique. □

Appliquons le foncteur $U_c(\mathfrak{g}, f) \otimes_{U_c(\mathfrak{g}, f)^{\mathrm{e}}}$— à cette résolution. Il en résulte le

COROLLAIRE 10.4. — *Sous les hypothèses de la proposition 10.3, l'homologie de Hochschild de $U_c(\mathfrak{g}, f)$ est donnée par*

$$HH_*(U_c(\mathfrak{g}, f)) = H_*\left(C_*(U_c(\mathfrak{g}, f), U_c(\mathfrak{g}, f))\right)\,.$$

11. Une algèbre d'opérateurs différentiels sur l'espace affine quantique multiparamétré.

Plaçons-nous sur un corps k de caractéristique nulle. Soit V un k-espace vectoriel de dimension N muni d'une symétrie simple Q de marque q et de rang N. Nous supposons la symétrie Q définie par la famille de scalaires $(q_{ij})_{i,j=1\ldots N}$. Introduisons une famille $(p_i)_{i=1\ldots N}$ de scalaires non nuls. Soit $W = V \oplus V$ un espace vectoriel de dimension $2N$ et de base $\{x_1, \ldots, x_N, \partial_1, \ldots, \partial_N\}$. Les formules suivantes définissent une symétrie

simple Q' de marque q et de rang $2N$ sur W.

$$\begin{aligned}
Q'(x_i \otimes x_j) &= q_{ij} x_j \otimes x_i && \text{pour } i \leq j \\
Q'(x_i \otimes x_j) &= q_{ij} x_j \otimes x_i + (1-q) x_i \otimes x_j && \text{pour } i > j \\
Q'(\partial_i \otimes \partial_j) &= q_{ij} \partial_j \otimes \partial_i && \text{pour } i \leq j \\
Q'(\partial_i \otimes \partial_j) &= q_{ij} \partial_j \otimes \partial_i + (1-q) \partial_i \otimes \partial_j && \text{pour } i > j \\
Q'(x_i \otimes \partial_j) &= q_{ji} \partial_j \otimes x_i && \text{pour } i \neq j \\
Q'(\partial_i \otimes x_j) &= q_{ji} x_j \otimes \partial_i + (1-q) \partial_i \otimes x_j && \text{pour } i \neq j \\
Q'(x_i \otimes \partial_i) &= p_i^{-1} \partial_i \otimes x_i && \text{pour tout } i \\
Q'(\partial_i \otimes x_i) &= q p_i x_i \otimes \partial_i + (1-q) x_i \otimes \partial_i && \text{pour tout } i.
\end{aligned}$$

Nous munissons W du crochet de Lie trivial $[.,.] = 0$ et de la forme bilinéaire f nulle sur tout couple d'éléments de la base sauf sur les couples (x_i, ∂_i) et (∂_i, x_i) pour lesquels on a :

$$f(x_i, \partial_i) = -p_i^{-1} \quad \text{et} \quad f(\partial_i, x_i) = q\,.$$

On vérifie aisément que la forme f est un 2-cocycle de l'algèbre de Lie quantique $(W, Q', [.,.] = 0)$. Nous formons alors l'algèbre enveloppante généralisée $U_{Q'}(W, f)$. Cette algèbre est isomorphe à une algèbre «d'opérateurs différentiels» sur le plan affine quantique multiparamétré $S_Q(V)$ au sens suivant.

Sur $S_Q(V)$, nous définissons la division d'un monôme $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$ par la variable x_i en posant :

$$\frac{x^\alpha}{x_i} = \left(\prod_{k=1}^{i-1} q_{ki}^{\alpha_k} \right) x_1^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_i - 1} \dots x_N^{\alpha_N}$$

lorsque $\alpha_i \geq 1$. Définissons, pour tout $i = 1, \dots, N$, une «dérivée partielle» $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ en posant :

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{P(x_1, \dots, p_i x_i, \dots, x_N) - P(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)}{(p_i - 1) x_i}$$

où P est un élément de $S_Q(V)$ vu comme un polynôme en les variables ordonnées $x_1, \dots, x_N$. Sur un élément homogène x^α, on aura donc :

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x_i} = (p_i)_{\alpha_i} \left(\prod_{s=1}^{i-1} q_{si}^{\alpha_s} \right) x_1^{\alpha_1} \dots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i - 1} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots x_N^{\alpha_N}$$

si $\alpha_i \geq 1$ et $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x_i} = 0$ si $\alpha_i = 0$. Si l'on note encore x_i la multiplication à *gauche* par x_i, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i} x_i - p_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 1 && \text{pour tout } i \\ &\frac{\partial}{\partial x_i} x_j - q_{ji} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} = 0 && \text{pour tout } i \neq j \\ &\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - q_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = 0 && \text{pour tout } i \leq j\,. \end{aligned} \tag{11.1}$$

L'algèbre des opérateurs différentiels ainsi définie est engendrée par $x_1, \ldots, x_N$, $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_N}$, les relations (11.1) et la relation $x_i x_j = q_{ij} x_j x_i$. Elle est isomorphe à $U_{Q'}(W, f)$ d'une manière naturelle.

Les relations (11.1) et le lemme suivant nous permettent d'affirmer que l'algèbre graduée associée à $U_{Q'}(W, f)$ est isomorphe à $S_{Q'}(W)$.

LEMME 11.1. — *La famille*

$$\mathcal{F} = \{x_1^{\alpha_1} \ldots x_N^{\alpha_N} \partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_N^{\beta_N}\}_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^N}$$

est une base de l'algèbre $U_{Q'}(W, f)$.

Démonstration. — Il est clair que la famille $\mathcal{F}$ engendre l'algèbre. En effet, les relations de commutation (11.1) permettent d'écrire un élément quelconque sous la forme d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$. Montrons qu'elle est libre.

Pour tout multi-entier $v \in \mathbb{N}^N$, notons $|v|$ la somme $|v| = v_1 + \cdots + v_N$. L'algèbre $U_{Q'}(W, f)$ étant isomorphe à une algèbre d'endomorphismes de $S_Q(V)$ nous pouvons appliquer un élément

$$z = \sum_{\substack{|\alpha| < p \\ |\beta| < q}} \lambda_{\alpha,\beta} x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N} \partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_N^{\beta_N}\,,$$

où p et q sont deux entiers et $\lambda_{\alpha,\beta} \in k$, à un élément $x^v = x_1^{v_1} \cdots x_N^{v_N}$.

Posons $\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_N^{\beta_N}$. Si $|\beta| > |v|$ alors $\partial^\beta(x^v) = 0$ et si $|\beta| = |v|$ alors on a $\partial^\beta(x^v) \neq 0$ si et seulement si $\beta = v$. Or la famille $\{x_1^{\alpha_1}, \cdots, x_N^{\alpha_n}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^N}$ est une base de $S_Q(V)$, elle est donc libre sur k. Ainsi il suffit d'appliquer successivement z à tous les monômes x^v tels que $|v| = 0$,

$|v| = 1,\ldots,|v| = q$ pour qu'un raisonnement par récurrence nous donne que, pour tous α et β, $\lambda_{\alpha,\beta} = 0$ si $z = 0$. □

On a le

LEMME 11.2. — *Lorsque $q = 1$, la forme f vérifie la condition $\tilde{f}' = 0$ sur l'algèbre de Lie $(W, Q', [.,.] = 0)$.*

Démonstration. — Nous montrons que $f' = 0$ sur les éléments homogènes de la forme

$$\zeta = x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{i_n} \otimes \partial_{j_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{j_m}$$

où $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ et $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$. Comme ces éléments sont les représentants dans $W^{\otimes(m+n)}$ d'éléments qui engendrent linéairement $\Lambda^{m+n}_{Q'}(W)$, cela démontrera le lemme. On a :

$$\begin{aligned} f'(\zeta) = \sum_{\substack{k=1\\ i_k \in j_*}}^{n} (-1)^{j(s)+1} \Bigg(& \prod_{s=1}^{k-1} q_{i_s i_k} \prod_{s=1}^{j(k)-1} q_{j_s i_k} \prod_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{n} q_{i_k i_s} \\ & - \prod_{s=j(k)+1}^{m} q_{i_k j_s} \prod_{s=k+1}^{n} q_{i_k i_s} \prod_{\substack{s=1\\ s\neq j(k)}}^{m} q_{j_s i_k} \Bigg) x_{i_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{x_{i_k}} \otimes \cdots \otimes \widehat{\partial_{i_k}} \otimes \cdots \otimes \partial_{j_m} \\ = \sum_{\substack{k=1\\ i_k \in j_*}}^{n} (-1)^{j(s)+1} & \left(q^{k-1} - q^{m-j(k)}\right) \left(\prod_{s=k+1}^{n} q_{i_k i_s} \prod_{s=1}^{j(k)-1} q_{j_s i_k} \right) \\ & \times x_{i_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{x_{i_k}} \otimes \cdots \otimes \widehat{\partial_{i_k}} \otimes \cdots \otimes \partial_{j_m} \end{aligned}$$

où $j(k)$ désigne l'entier tel que $j_{j(k)} = i_k$. Puisque $q = 1$, la somme est nulle et la propriété $f' = 0$ est bien vérifiée. □

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, nous nous plaçons dans le cas où $q = 1$. D'après les lemmes 10.1 et 11.2, nous pouvons former le complexe

$$C_*(U_{Q'}(W,f), U_{Q'}(W,f)) = \left(U_{Q'}(W,f) \otimes \Lambda^*_{Q'}(W)\,, \tilde{d}\right)$$

dont l'homologie est l'homologie de Hochschild de $U_{Q'}(W,f)$ d'après le corollaire 10.3.

Par exemple, si nous supposons que, pour tous i et j, $q_{ij} = 1$ et $p_i = p$, alors la différentielle $\tilde{d}$ s'exprime de la façon suivante. Pour $a \in U$, on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(a) &= 0 \\
\tilde{d}(a \otimes \partial_i) &= a\partial_i - \partial_i a \\
\tilde{d}(a \otimes x_i) &= ax_i - x_i a \\
\tilde{d}(a \otimes \partial_i \wedge x_i) &= (a\partial_i - p\partial_i a) \otimes x_i - (pax_i - x_i a) \otimes \partial_i \,.
\end{aligned}$$

Soit u_i un élément de $\Lambda_{Q'}(W)$ égal soit à x_i, soit à ∂_i, soit à $\partial_i \wedge x_i$. La différentielle $\tilde{d}$ opère comme une dérivation sur ces éléments; on a la formule :

$$\tilde{d}(a \otimes u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_n}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{|u_1| + \cdots |u_{i_{k-1}}|} \tilde{d}(a \otimes u_{i_k}) \wedge u_{i_1} \wedge \cdots \widehat{u_{i_k}} \wedge \cdots u_{i_n}$$

où $\{i_1 < \cdots < i_n\}$ est une partie ordonnée de $[1, \ldots, N]$.

Dans ce cas particulier, l'algèbre $U_{Q'}(W, f)$ a également été définie et la résolution $C_*(U_{Q'}(W, f), U_{Q'}(W, f)^{\mathrm{e}})$ construite dans [K2] pour $N = 1$ et dans [SR] pour N quelconque.

Appendice :

Structure d'algèbre de Lie quantique sur l'espace quantique multiparamétré de dimension inférieure ou égale à 3.

Soit k un corps de caractéristique nulle. Nous allons déterminer toutes les structures d'algèbre de Lie quantique sur V relativement à une symétrie simple involutive $Q = c$ lorsque la dimension N de V vaut 2 ou 3.

Lorsque V est de dimension 3, nous notons $\{x, y, z\}$ une base. L'espace vectoriel V est une algèbre de Lie quantique lorsqu'on le munit de l'un des trois crochets de Lie définis

(i) par $[x, y] = \alpha z$ où $\alpha \in k$ et $[x, z] = [y, z] = 0$ si c est la symétrie involutive définie par

$$\begin{cases}
c(x \otimes y) = qy \otimes x \\
c(y \otimes z) = q^{-1} z \otimes y \\
c(x \otimes z) = qz \otimes x \,,
\end{cases}$$

(ii) par $[x,y]=\gamma z$, $[x,z]=\beta y$, $[y,z]=\alpha x$ où $\alpha,\beta,\gamma\in k$ si c est la symétrie précédente avec $q=-1$

(iii) et par $[x,y]=\alpha x$, $[y,z]=\gamma z$ et $[x,z]=0$ pour $\alpha,\beta\in k$ si c est la symétrie involutive donnée par :

$$\begin{cases} c(x\otimes y)= y \otimes x \\ c(y\otimes z)= z \otimes x \\ c(x\otimes z)= qz\otimes x\,. \end{cases}$$

Il est aisé de voir chaque fois que l'identité de Jacobi est réalisée. Ecrivons-la sous la forme : $[.,.][.,.]_1(I_3+c_1c_2+c_2c_1)$. On vérifie que dans les trois cas

$$[.,.][.,.]_1(x\otimes y\otimes z)=[.,.][.,.]_1(y\otimes z\otimes x)=[.,.][.,.]_1(z\otimes x\otimes y)=0\,.$$

La permutation circulaire par c n'est autre, à la multiplication par un scalaire près, que la permutation circulaire ordinaire. L'identité de Jacobi est donc vérifiée. La c-antisymétrie est implicitement exprimée dans la définition des crochets. Nous laissons le lecteur vérifier l'identité : $c[.,.]_1=[.,.]_2c_1c_2$.

PROPOSITION A1. — *En dimensions 2 et 3, les seules structures d'algèbre de Lie quantique relativement à une symétrie simple involutive sont les trois définies ci-dessus, les structures d'algèbres de Lie usuelles relativement à la volte et les structures dont le crochet de Lie est identiquement nul.*

Démonstration. — Nous exclurons de cette démonstration le cas où la symétrie est la volte. La classification des algèbres de Lie de dimension inférieure ou égale à 3 est classique (cf. [J]). Comme c est involutive, le crochet de Lie doit vérifier les trois axiomes suivants :

$$\begin{aligned} &(1)\quad [.,.]c=-[.,.]\,,\\ &(2)\quad [.,.][.,.]_2=[.,.][.,.]_1(\mathrm{id}_{\mathfrak{g}^{\otimes 3}}-c_2)\,,\\ &(3)\quad c[.,.]_1=[.,.]_2c_1c_2\,. \end{aligned}$$

Si nous exprimons les trois axiomes en fonction de constantes de structure, nous obtenons le

LEMME A.2. — *L'application bilinéaire sur V donnée pour tous i et j :*

$$[x_i, x_j] = \sum_{s=1}^{N} C_{ij}^s x_s$$

où $C_{ij}^s \in k$ pour tous i, j et s, est un crochet d'une algèbre de Lie quantique relativement à c si et seulement si pour tous les entiers i, j, k et s variant de 1 à N on a :

$$\begin{aligned}
&(1) \quad C_{ij}^s = -q_{ij} C_{ji}^s\,, \\
&(2) \quad \sum_{r=1}^{N} C_{jk}^r C_{ir}^s = \sum_{r=1}^{N} \left(C_{ij}^r C_{rk}^s - q_{jk} C_{kj}^r C_{ir}^s \right), \\
&(3) \quad q_{ik} q_{jk} C_{ij}^k = q_{rk} C_{ij}^r\,.
\end{aligned}$$

A l'aide de ce lemme, nous montrons dans un premier temps, qu'il n'y a pas, en dimension 2, de structure non triviale d'algèbre de Lie quantique relativement à c. Sur la base $\{x, y\}$, la symétrie c est donnée par :

$$c(x \otimes x) = x \otimes x \qquad c(x \otimes y) = qy \otimes x \qquad \text{et} \quad c(y \otimes y) = y \otimes y\,.$$

Nous cherchons un crochet qui satisfasse aux conditions :

$$[x, x] = [y, y] = 0 \qquad \text{et} \quad [x, y] = C_{12}^1 x + C_{12}^2 y\,.$$

La relation (3) impose que, pour $k = 1$ ou $k = 2$, on ait

$$q_{1k} q_{2k} C_{12}^1 = q_{1k} C_{12}^1 \quad \text{et} \quad q_{1k} q_{2k} C_{12}^2 = q_{2k} C_{12}^2$$

et donc que

$$\begin{cases} q_{2k} = 1 \text{ pour } k = 1, 2 \\ \text{ou} \\ C_{12}^1 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} q_{1k} = 1 \text{ pour } k = 1, 2 \\ \text{ou} \\ C_{12}^2 = 0. \end{cases}$$

Comme c n'est pas la volte, on a nécessairement $q_{12} \neq 1$ et donc les constantes de structure C_{12}^1 et C_{12}^2 sont toutes deux nulles.

Dans un second temps, nous montrons qu'en dimension 3, les seules structures possibles sont celle décrites précédemment. Le raisonnement repose sur le

LEMME A.3. — *Soient i, j et k trois entiers distincts deux à deux,*

(α) *si* $C^i_{ij} \neq 0$, *alors pour tout s on a* $q_{js} = 1$,

(β) *si* $C^j_{ij} \neq 0$, *alors pour tout s on a* $q_{is} = 1$,

(γ) *si* $C^k_{ij} \neq 0$, *alors on a* $\begin{cases} q_{ji} = q_{ki} \\ q_{ij} = q_{kj} \\ q_{ik} = q_{kj}\,. \end{cases}$

Ce lemme se déduit immédiatement de la relation (3). Dans le cas de la dimension 3, i, j et k sont pris dans l'ensemble $\{1,2,3\}$. Or on constate que si deux au moins des conditions (α), (β) et (γ) du lemme sont réalisées, alors tous les scalaires q_{ij} sont égaux à 1 et nous nous trouvons dans le cas de la volte que nous avions exclu. Nous allons successivement examiner les trois situations (α), (β) et (γ). Posons $i = 1$ et $j = 2$.

(α) Supposons que $C^1_{12} \neq 0$ alors pour $s = 1,2,3$ on a : $q_{2s} = 1$, c'est à dire c est donnée par :

$$c(x \otimes y) = y \otimes x \qquad c(y \otimes z) = z \otimes y \qquad \text{et} \quad c(x \otimes z) = q_{13} z \otimes x$$

où $q_{13} = q \neq 1$. D'après (α), (β) et (γ), il apparaît alors que les seules constantes de structure non nulles sont C^1_{12}, C^1_{21}, C^3_{23} et C^3_{32}. Nous avons ainsi obtenu la troisième algèbre de Lie quantique annoncée dans la proposition A.1.

(β) Le cas où $C^2_{12} \neq 0$ est le même que le précédent : il suffit d'échanger x et y.

(γ) Il nous reste à examiner le cas où $C^3_{12} \neq 0$. On peut supposer que pour tous i et j, les constantes C^i_{ij} et C^j_{ij} sont nulles, faute de quoi, on se retrouverait dans les situations précédentes.

Supposons que $C^1_{23} = C^2_{13} = 0$. La condition $C^3_{12} \neq 0$ impose

$$q_{21} = q_{31}\,, \quad q_{12} = q_{32} \quad \text{et} \quad q_{13} = q_{32}\,.$$

Nous sommes dans le cas où la symétrie et le crochet sont les suivants :

$$\begin{cases} c(x \otimes y) = qy \otimes x \\ c(y \otimes z) = q^{-1} z \otimes y \\ c(x \otimes z) = qz \otimes x \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} [x,y] = C^3_{12} z \\ [y,z] = 0 \\ [x,z] = 0\,. \end{cases}$$

C'est l'exemple (i).

Supposons maintenant que $C^1_{23} \neq 0$. La condition (γ) pour C^3_{12} et C^1_{23} impose

$$q_{23} = q_{32} \quad \text{et} \quad q_{12} = q_{13}\,, \qquad q_{12} = q_{32}\,, \quad \text{et} \quad q_{13} = q_{32}\,,$$

c'est-à-dire tous les scalaires sont égaux à 1 ou -1. Comme la symétrie est différente de la volte, nous avons $q_{ij} = -1$ quand i et j sont distincts. Nous sommes dans le cas de l'exemple (ii). □

BIBLIOGRAPHIE

[BGS] A. BEILINSON, V. GINZBURG, W. SOERGEL, Koszul Duality Patterns in Representation Theory, preprint.

[vdB] M. VAN DEN BERGH, Non-Commutative Homology of Some Three-Dimensional Quantum Spaces, preprint Université Louis Pasteur, Strasbourg.

[B] N. BOURBAKI, Eléments de Mathématique, Algèbre, Chapitre X : Algèbre homologique, Paris, Masson, 1980.

[CE] H. CARTAN, S. EILENBERG, Homological Algebra, Princeton, Princeton University Press, 1956.

[Co] A. CONNES, Non-Commutative Differential Geometry, Publ. I.H.E.S., 62 (1985), 41-144.

[Cu] Chr. CUVIER, Homologie des algèbres de Leibniz, C.R. Acad. Sci. Paris, 313 (1991), 569-572.

[FT] P. FENG, B. TSYGAN, Hochschild and Cyclic Homology of Quantum Groups, Comm. Math. Phys., 140 (1991) 481-521.

[GG] J.A. GUCCIONE, J.J. GUCCIONE, Hochschild and Cyclic Homology of Ore's extensions, preprint Université de Buenos Aires.

[G] D.I. GUREVICH, *Algebraic Aspects of Quantum Yang-Baxter Equation*, Algebra i Analiz, 2 (1990), 119-148; traduction anglaise : Leningrad Math. J., 2 (1991), 801-829.

[HKR] G. HOCHSCHILD, B. KOSTANT, A. ROSENBERG, Differential Forms on Regular Affine Algebras, Trans. A.M.S., 102 (1962), 383-408.

[J] N. JACOBSON, Lie Algebras, New York, Dover Publication Inc., 1979.

[JS] A. JOYAL, R. STREET, The Geometry of Tensor Calculus (I), Adv. in Math., 88 (1991), 55-112.

[K1] Chr. KASSEL, L'homologie cyclique des algèbres enveloppantes, Invent. Math., 91 (1989), 221-251.

[K2] Chr. KASSEL, Cyclic Homology of Differential Operators, the Virasoro Algebra and a q-Analogue, Commun. Math. Phys., 146 (1992), 343-356.

[K3] Chr. KASSEL, Quantum Groups, (en préparation).

[KT] Chr. KASSEL, V. TURAEV, Double Construction for Monoidal Categories, preprint I.R.M.A., Strasbourg, (1992).

[LQ] J.-L. LODAY, D. QUILLEN, Cyclic Homology and the Lie Algebra Homology of Matrices, Comment. Math. Helvetici, 59 (1984), 565-591.

[L] V.V. LYUBASHENKO, Hopf Algebra and Vector Symmetries, Uspekhi Mat. Nauk, 41,5 (1986), 185-186; traduction anglaise : Russian Math. Surveys, 41,5 (1986), 153-154.

[M] Yu.I. MANIN, Quantum Groups and Non-Commutative Geometry, C.R.M., Université de Montréal, 1988.

[RT] N. YU RESHETIKHIN, V.G. TURAEV, Ribbon Graphs and their Invariants Derived from Quantum Groups, Commun. Math. Phys., 127 (1990), 1-26.

[R] M. ROSSO, Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif., Duke Math. J., 61 (1990), 1-26.

[SR] A. SOLOTAR, M. REDONDO, Hochschild Homology of q-Differential Operators, (preprint).

[Sr] R. SRIDHARAN, Filtered Algebras and Representations, Trans. Am. Math. Soc., 100 (1961), 530-550.

[T] L.A. TAKHTADJIAN, *Noncommutative Homology of Quantum Tori*, Funkt. Anal. Pril., 24,2 (1989), 75-76; traduction anglaise : Funct. Anal. Appl., 23 (1989), 147-149.

[Wa] M. WAMBST, Complexes de Koszul quantiques et homologie cyclique, C.R. Acad. Sci. Paris, 314 (1992), 977-982.

[Wo] S.L. WORONOWICZ, Differential Calculus on Compact Matrix Pseudo-Groups, Commun. Math. Phys., 122 (1989), 125-170.

Manuscrit reçu le 21 juillet 1992,
révisé le 14 mai 1993.

Marc WAMBST,
I.R.M.A.
Université Louis Pasteur
et C.N.R.S.
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex (France).