ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

RABAH SOUAM

Exemples d'applications holomorphes d'indice un

Annales de l'institut Fourier, tome 43, nº 2 (1993), p. 369-381

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_2_369_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 2 (1993), 369-381

EXEMPLES D'APPLICATIONS HOLOMORPHES D'INDICE UN

par Rabah SOUAM

0. Introduction.

A une fonction méromorphe non constante ϕ définie sur une surface de Riemann compacte est canoniquement associé un entier naturel non nul, son indice. Cet entier est égal au nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicité) qui sont inférieures à deux du laplacien Δ_ϕ associé à la métrique (singulière) "pull-back" par ϕ de la métrique standard sur la sphère unité. Cette notion d'indice intervient surtout dans l'étude de la stabilité des surfaces minimales dans l'espace euclidien et dans l'étude de la fonctionnelle déterminant du laplacien sur les surfaces.

S. Montiel et A. Ros [MR] ont prouvé qu'en genre supérieur ou égal à deux, une structure complexe générique ne possède pas de fonction méromorphe d'indice un (en genre zéro ou un l'indice est toujours différent de un sauf le cas trivial d'une transformation de Möbius sur la sphère de Riemann). Ils ont conjecturé l'existence de surfaces de Riemann de genre non nul ayant des fonctions méromorphes d'indice un. Dans cet article nous construisons une famille de surfaces de Riemann hyperelliptiques munies de fonctions méromorphes d'indice un, ce qui apporte une réponse positive à cette conjecture.

Je remercie le professeur H. Rosenberg pour ses conseils et ses encouragements, le professeur S. Gallot pour l'aide qu'il m'a apportée et le referee pour ses remarques.

Mots-clés : Déterminant du laplacien – Indice d'une surface minimale – Première valeur propre du laplacien – Problème de Neumann/Dirichlet.
Classification A.M.S. : 30F99 – 53A10 – 58C40.

1. Préliminaires.

Soient Σ une surface de Riemann compacte et $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{S}^2$ une application holomorphe non constante sur Σ à valeurs dans la sphère de Riemann. Considérons une métrique conforme quelconque ds^2 sur Σ. On désigne respectivement par Δ, ∇ et dA, le laplacien, le gradient et l'élément d'aire associés à ds^2. On désigne également par Δ_0, ∇_0 et dA_0 respectivement le laplacien, le gradient et l'élément d'aire associés à la métrique canonique ds_0^2 de la sphère unité $\mathbb{S}^2$.

A l'application ϕ on associe l'opérateur de Schrödinger :

$$L = \Delta + \mid \nabla\phi \mid^2 .$$

Appelons Q_ϕ la forme quadratique associée à cet opérateur :

$$Q_\phi(u,u) = -\int_\Sigma (Lu)u\, dA = \int_\Sigma \{\mid \nabla u \mid^2 - \mid \nabla\phi \mid^2 u^2\}\, dA,$$

pour toute fonction u de l'espace de Sobolev $H^1(\Sigma)$.

L'invariance conforme de l'intégrale de Dirichlet entraîne que l'indice de Morse de Q_ϕ, qui est par définition la dimension du sous-espace maximal de $H^1(\Sigma)$ ou de $C^\infty(\Sigma)$ sur lequel Q_ϕ est définie négative, ne dépend que de ϕ. On appelle ce nombre l'indice de ϕ et on le note $\mathrm{Ind}(\phi)$.

On peut en particulier considérer la métrique conforme singulière ds_ϕ^2 sur Σ induite par ϕ de la métrique canonique ds_0^2 de $\mathbb{S}^2$:

$$ds_\phi^2 = \phi^* ds_0^2 = \frac{\mid \nabla\phi \mid^2}{2}\, ds^2.$$

Cette métrique est singulière aux points de branchements de ϕ et l'opérateur de Schrödinger correspondant est :

$$L_\phi = \Delta_\phi + 2$$

où Δ_ϕ, ∇_ϕ et dA_ϕ désignent respectivement le laplacien, le gradient et l'élément d'aire associés à ds_ϕ^2.

L'ensemble singulier de ds_ϕ^2 étant formé d'un nombre fini de points, les valeurs propres et les fonctions propres de Δ_ϕ peuvent être définies par le procédé variationnel classique (cf [Ty] ou [Gu]). Ainsi les valeurs propres de Δ_ϕ forment une suite de réels tendant vers $+\infty$:

$$0 = \lambda_0(\phi) < \lambda_1(\phi) \leq \lambda_2(\phi) \leq \ldots \leq \lambda_n(\phi) \leq \ldots \tag{1}$$

avec :

$$\lambda_k(\phi) = \inf_{V_k} \sup \{R_\phi(u) \ | \ u \in V_k, u \neq 0\}, \tag{2}$$

où V_k parcourt les sous-espaces de dimension $k+1$ de $H^1(\Sigma)$; et pour une fonction $u \neq 0$ définie sur un domaine Ω de Σ, $R_\phi(u)$ désigne son quotient de Rayleigh par rapport à la métrique ds^2_ϕ :

$$R_\phi(u) = \int_\Omega | \nabla_\phi u |^2 \, dA_\phi \Big/ \int_\Omega u^2 dA_\phi \, .$$

De plus si λ est valeur propre le sous-espace propre correspondant est donné par :

$$V_\lambda(\phi) = \{u \in H^1(\Sigma) \ | \ \int_\Sigma \nabla_\phi u . \nabla_\phi v \, dA_\phi = \lambda \int_\Sigma uv \, dA_\phi, \ \forall v \in H^1(\Sigma)\}.$$

Par régularité elliptique $V_\lambda(\phi) \subset C^\infty(\Sigma)$. Notons que $\mathrm{Ind}(\phi)$ est aussi égal au nombre de valeurs propres de Δ_ϕ, comptées avec multiplicité, qui sont inférieures strictement à deux.

L'étude de tels indices est motivée surtout par l'étude de l'indice de Morse des surfaces minimales complètes orientables et de courbure totale finie dans $\mathbb{R}^3$. En effet, par un résultat d'Osserman [O], une telle surface M est conformément équivalente à une surface de Riemann compacte Σ privée d'un nombre fini de points. De plus, l'application de Gauss de M s'étend en une application holomorphe $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dont l'indice au sens défini plus haut est égal à l'indice de Morse de M, qui est le supremum des indices de Morse de tous les sous-domaines compacts de M. L'indice de Morse d'une surface minimale compacte à bord et orientable étant le nombre de valeurs propres négatives de l'opérateur de variation seconde de l'aire (cf [FC]).

Un second intérêt de cette notion d'indice concerne l'étude de la fonctionnelle déterminant du laplacien sur les surfaces compactes. Etant donné une surface de Riemann compacte Σ, cette fonctionnelle est définie sur l'espace de toutes les métriques conformes sur Σ. A toute telle métrique ds^2, elle associe le produit $\prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ de toutes les valeurs propres non nulles de son laplacien ; produit auquel on peut donner un sens moyennant un peu d'analyse complexe à une variable (voir [La] ou [OsPhSa]). Pour des raisons provenant de la physique théorique (théorie des cordes), il y a intérêt à considérer des métriques singulières (voir [MR] pour plus de détails). On peut montrer que, pour toute application holomorphe $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{S}^2$, la métrique ds^2_ϕ est un point critique de cette fonctionnelle dans la classe C_ϕ de toutes les métriques conformes sur Σ ayant les mêmes singularités et la même aire que ds^2_ϕ et, lorsque $\mathrm{Ind}(\phi) = 1$, ds^2_ϕ est un maximum local pour cette fonctionnelle dans la classe C_ϕ (cf [MR]).

Dans [MR], S. Montiel et A. Ros montrent que, pour une structure complexe générique de genre supérieur ou égal à deux, $\mathrm{Ind}(\phi) \geq 2$ et qu'en genre inférieur $\mathrm{Ind}(\phi) = 1$ si et seulement si Σ est de genre zéro et ϕ est un difféomorphisme. Ils montrent également que, dans tous les cas, $\mathrm{Ind}(\phi) = 1$ entraîne que $\deg \phi \leq 1 + \left[\dfrac{g+1}{2}\right]$, où g est le genre de Σ. Ceci joint à une inégalité d'Osserman permet de montrer que la caténoïde et la surface d'Enneper sont les seules surfaces minimales complètes orientables d'indice un dans $\mathbb{R}^3$ (théorème de J. Lopez et A. Ros, [LR]). Cependant, eu égard à la fonctionnelle déterminant du laplacien, il restait à savoir si des applications holomorphes d'indice un existent en genre différent de zéro. S. Montiel et A. Ros [MR] ont conjecturé l'existence de telles applications et de façon précise que, pour une surface de Riemann hyperelliptique, l'application de 2-revêtement (ramifié) d'une telle surface à valeurs dans la sphère est d'indice un si les images de ses points de ramification sont bien réparties sur la sphère. Dans ce qui suit nous apportons une réponse positive à cette conjecture.

2. Description des exemples.

Rappelons la définition suivante :

DÉFINITION. — *Une surface de Riemann compacte Σ est dite hyperelliptique s'il existe un revêtement ramifié de degré deux $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{S}^2$. L'application ϕ est alors unique à transformation conforme près de $\mathbb{S}^2$ dès que le genre de la surface est plus grand que un, [FK].*

L'application $\theta : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ qui échange les points des deux feuillets de ϕ est appelée l'automorphisme hyperelliptique. Les points fixes de θ sont les points de ramification de ϕ et sont appelés points hyperelliptiques, leurs images par ϕ sont appelées valeurs hyperelliptiques.

On a le résultat suivant :

2.1. THÉORÈME. — *Soient* ϵ *un réel strictement positif et* $x_1, x_2, \ldots, x_{n(\epsilon)}$ *les centres de boules ouvertes formant un système maximal de boules ouvertes disjointes de rayon* ϵ *sur la sphère unité* $\mathbb{S}^2$.

Soit $\Sigma(\epsilon)$ *une surface de Riemann hyperelliptique telle que les valeurs hyperelliptiques du revêtement ramifié de degré deux* $\phi(\epsilon) : \Sigma(\epsilon) \longrightarrow \mathbb{S}^2$ *soient précisément les points* $x_1, x_2, \ldots, x_{n(\epsilon)}$.

Alors, pour tout ϵ *assez petit :* $\mathrm{Ind}(\phi(\epsilon)) = 1$.

2.2. Remarques.

2.2.1 La surface $\Sigma(\epsilon)$ existe (et est unique à difféomorphisme conforme près) si et seulement si $n(\epsilon)$ est pair ([FK]), ce que l'on peut toujours réaliser (il suffit par exemple de relever à $\mathbb{S}^2$ un système maximal de boules disjointes de rayon ϵ sur l'espace projectif $P^2\mathbb{R}$ muni de sa métrique canonique).

2.2.2 Le théorème ne donne pas d'exemples de bas genre. La preuve ne marche, en effet, que si le nombre $n(\epsilon)$ des valeurs hyperelliptiques est suffisant (ce qui correspond à ϵ assez petit). Ceci impose une borne inférieure au genre $g(\epsilon)$ de $\Sigma(\epsilon)$ grâce à la formule de Riemann-Hurwitz (cf [FK]) : $g(\epsilon) = \dfrac{n(\epsilon)}{2} - 1$. Après avoir fini ce travail, l'auteur a eu connaissance du travail de M.Ross, [R], où il est prouvé que la surface minimale triplement périodique P de Schwarz est stable pour les variations périodiques préservant le volume. En désignant par Λ le réseau des périodes de P, ceci signifie que la surface minimale compacte P/Λ dans le tore de dimension 3 : $\mathbb{R}^3/\Lambda$ est stable en tant que surface à courbure moyenne constante, [R]. Cette surface n'étant pas stable en tant que surface minimale (cf [R]), ceci entraîne (voir par exemple [LR]) que son indice de Morse en tant que surface minimale est un et donc que son application de Gauss (qui est holomorphe) est d'indice un. Cette surface est de genre 3 et son application de Gauss est de degré 2.

3. Preuve du théorème 2.1.

3.1. PROPOSITION. — *Soit* Σ *une surface de Riemann hyperelliptique,* $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{S}^2$ *le revêtement ramifié de degré deux associé.*

Supposons $\mathrm{Ind}(\phi) \geq 2$ *alors il existe sur la sphère unité* $\mathbb{S}^2$ *un ouvert connexe* Ω *dont la première valeur propre pour le laplacien sphérique avec* *condition de Dirichlet au bord $\lambda_1^D(\Omega)$ est inférieure à deux et dont le complémentaire l sur la sphère est une réunion finie d'arcs telle que toute valeur hyperelliptique de ϕ est reliée à au moins une autre qui lui est distincte par un arc simple de classe C^2 de l.*

Preuve. — L'hypothèse $\mathrm{Ind}(\phi) \geq 2$ est équivalente (en tenant compte de nos notations dans (1)) à $\lambda_1(\phi) < 2$. Soit u une fonction propre associée à $\lambda_1(\phi)$. Notons que θ est une isométrie de Σ pour la métrique ds^2_ϕ, par conséquent les fonctions $u \circ \theta$ et $v := u + u \circ \theta$ sont également des fonctions propres associées à $\lambda_1(\phi)$. Or la fonction v est invariante par l'action de θ, elle est donc la relevée par ϕ d'une fonction $\tilde{v}$ sur la sphère qui y satisfait l'équation $\Delta_0 \tilde{v} + \lambda_1(\phi)\,\tilde{v} = 0$. La première valeur propre non nulle de Δ_0 sur $\mathbb{S}^2$ étant égale à deux, la fonction $\tilde{v}$ est nécessairement nulle et par conséquent la fonction u est anti-invariante par l'action de θ :

$$u \circ \theta = -u. \tag{3}$$

Un domaine nodal de la fonction u est une composante connexe de l'ensemble : $\{p \in \Sigma \mid u(p) \neq 0\}$. Le théorème des domaines nodaux de Courant (voir [C]) montre que :

Le nombre de domaines nodaux de la i-ème fonction propre est $\leq i + 1$.

D'autre part toute fonction propre associée à une valeur propre non nulle change de signe dans Σ (en effet, elles sont toutes orthogonales aux constantes qui sont les fonctions propres associées à la valeur propre nulle). Il en résulte que u possède exactement deux domaines nodaux Σ_+ et Σ_- avec $\Sigma_+ = \{p \in \Sigma \mid u(p) > 0\}$ et $\Sigma_- = \{p \in \Sigma \mid u(p) < 0\}$. Appelons, par ailleurs, Σ_0 l'ensemble nodal de u : $\Sigma_0 = \{\, p \in \Sigma \mid u(p) = 0\}$.

La relation (3) et le fait que $\deg \phi = 2$ entraînent les conséquences suivantes :

(i) Σ_+ et Σ_- ont pour image par ϕ un même ouvert de la sphère, que l'on notera Ω et que celui-ci a pour complémentaire dans la sphère l'image par ϕ de Σ_0 que l'on notera l.

(ii) Σ_0 passe par tous les points de ramification de ϕ, par conséquent l passe par toutes les valeurs hyperelliptiques de ϕ.

(iii) Σ_+ est difféomorphe à Ω par ϕ.

Ainsi les spectres du laplacien avec condition de Dirichlet au bord de (Ω, ds_0^2) et de (Σ_+, ds_ϕ^2) sont identiques. Ce dernier ouvert étant un domaine nodal de la fonction propre u, la première valeur du spectre de son laplacien avec condition de Dirichlet au bord est égale à $\lambda_1(\phi)$. Notons d'autre part que la fonction u vérifie l'équation :

$$\Delta u + \lambda_1(\phi) \frac{|\nabla\phi|^2}{2} u = 0$$

pour une métrique conforme régulière quelconque sur Σ. Les résultats de S.Y. Cheng [C] (théorème 2.5 et lemme 3.1) montrent alors que l'ensemble nodal Σ_0 de u est formé d'un nombre fini de cercles C^2-immergés dans Σ et donc l est constitué d'arcs C^2-immergés dans S^2 sauf peut-être aux valeurs hyperelliptiques de ϕ. De ceci et de la connexité de Ω on déduit que toute valeur hyperelliptique de ϕ est reliée à au moins une autre qui lui est distincte sur la sphère par un arc simple de l.

3.2. *Remarque.* — La proposition 3.1 montre que l'indice de l'application considérée sera égal à un dès qu'il n'y a pas de domaine sur la sphère vérifiant les conclusions de cette proposition. Il n'est pas difficile de se convaincre intuitivement que c'est le cas si les valeurs hyperelliptiques de ϕ sont bien réparties sur la sphère :

On a en effet la minoration de J. Cheeger (voir [Ga2]) :

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \frac{1}{4} h^2(\Omega),$$

où $h(\Omega)$ désigne la constante isopérimétrique suivante :

$$h(\Omega) = \inf_D \frac{L(\partial D)}{A(D)}$$

sur tous les domaines réguliers D tels que $\overline{D} \subset \Omega$ et où $L(\partial D)$ et $A(D)$ sont respectivement la longueur du bord de D et son aire. Pour des domaines D de petite aire, l'inégalité isopérimétrique sur la sphère $L^2(\partial D) \geq 4\pi A(D) - A(D)^2$ montre que le rapport $\dfrac{L(\partial D)}{A(D)}$ est assez grand. Par ailleurs, le bord de D étant astreint à éviter tous les arcs constituant l, sa longueur devient très grande quand l'aire de D grandit dès que les valeurs hyperelliptiques de ϕ "remplissent" assez bien la sphère ; ce qui fait que la constante $h(\Omega)$ est assez grande et donc aussi $\lambda_1^D(\Omega)$ par l'inégalité de Cheeger. Il semble cependant difficile d'estimer la constante $h(\Omega)$ et la preuve du théorème 2.1 utilise un argument différent.

Revenons à la preuve du théorème 2.1, soient donc $\epsilon > 0$ et $B_1, B_2, \ldots, B_{n(\epsilon)}$ des boules ouvertes de rayon ϵ sur $\mathbb{S}^2$, de centres respectifs $x_1, x_2, \ldots, x_{n(\epsilon)}$ formant un système maximal de boules disjointes de rayon ϵ sur $\mathbb{S}^2$; les boules ouvertes $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \ldots, \tilde{B}_{n(\epsilon)}$ centrées en ces points et de rayon $2\,\epsilon$ recouvrent donc $\mathbb{S}^2$. Notons $m(\epsilon)$ la multiplicité de ce recouvrement : c'est le nombre maximal parmi ces boules qui sont d'intersection non vide. On voit aisément que :

$$m(\epsilon) \leq \frac{A(3\epsilon)}{A(\epsilon)},$$

où $A(r) = 2\pi\,(1 - \cos r)$ est l'aire d'une boule de rayon r sur S^2, on en déduit que :

$$m(\epsilon) \leq 9 \quad \text{au voisinage de } 0. \tag{4}$$

Pour une fonction $u \neq 0$ définie sur un domaine Ω de la sphère on note $R(u)$ son quotient de Rayleigh pour la métrique sphérique :

$$R(u) = \int_\Omega \mid \nabla_0 u \mid^2 \, dA_0 \Big/ \int_\Omega u^2 dA_0.$$

Considérons l'hémisphère nord U de la sphère $\mathbb{S}^2$ et γ une C^2-courbe simple dans U joignant le pôle de U à un point du bord ∂U. Notons par $\lambda_1(\gamma)$ la première valeur propre de Δ_0 sur U avec condition de Neumann sur ∂U et condition de Dirichlet sur γ, on a :

$$\lambda_1(\gamma) = \inf\{R(u),\ u \in W(\gamma), u \neq 0\}$$

où $W(\gamma)$ est l'ensemble des fonctions de $H^1(U)$ qui s'annulent sur γ. Posons

$$\alpha(U) = \inf_\gamma \lambda_1(\gamma)$$

où γ parcourt toutes les C^2-courbes simples joignant le pôle de U à un point de ∂U. On montrera plus loin (lemme 3.4) que cet infimum est non nul et est atteint quand γ est un arc de grand cercle.

Considérons une famille finie l d'arcs sur $\mathbb{S}^2$ tels que chaque point parmi les points x_i, $i = 1, \ldots, n(\epsilon)$ soit joint à au moins un autre point $x_j, j \neq i$, par un C^2-arc simple de cette famille. Notons Ω l'ouvert complémentaire de l dans $\mathbb{S}^2$.

3.3. LEMME. — *Avec la même notation de la proposition 3.1, on a pour* $0 < \epsilon < \frac{\pi}{4}$:

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \frac{1}{m(\epsilon)\sin^2 2\epsilon}\,\alpha(U).$$

Preuve. — On a :

$$\lambda_1^D(\Omega) = \inf\{R(u) \mid u \in H_0^1(\Omega),\ u \neq 0\}.$$

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, notons u_i sa restriction à $\tilde{B}_i$ pour $i = 1, ..., n(\epsilon)$. On a :

$$\sum_{i=1}^{n(\epsilon)} \int_{\tilde{B}_i} |\nabla_0 u_i|^2\, dA_0 \leq m(\epsilon). \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2\, dA_0 = m(\epsilon). \int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dA_0$$

et

$$\sum_{i=1}^{n(\epsilon)} \int_{\tilde{B}_i} u_i^2 dA_0 \geq \int_{S^2} u^2 dA_0 = \int_{\Omega} u^2 dA_0.$$

On en déduit que :

$$R(u) \geq \frac{1}{m(\epsilon)}. \min_{1\leq i\leq n(\epsilon)} R(u_i).$$

Par hypothèse, pour tout $i = 1, \ldots, n(\epsilon)$, il y a au moins un C^2-arc simple γ_i qui joint x_i à un point de $\partial\tilde{B}_i$. Notons $\lambda_1(\gamma_i)$ la première valeur propre de Δ_0 sur $\tilde{B}_i \setminus \gamma_i$ avec condition de Neumann sur $\partial\tilde{B}_i$ et condition de Dirichlet sur γ_i ; on a alors

$$R(u_i) \geq \lambda_1(\gamma_i).$$

Comparons maintenant $\lambda_1(\gamma_i)$ à $\alpha(U)$: en se ramenant à l'hémisphère U (rappelons que les boules $\tilde{B}_i$ sont de rayon 2ϵ) et en prenant les coordonnées sphériques, cela revient à comparer pour une fonction f de classe C^1 sur U ses quotients de Rayleigh, $R(f)$ et $R_\epsilon(f)$, relatifs respectivement aux métriques $d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$ et $\left(\frac{4\epsilon}{\pi}\right)^2 d\theta^2 + \sin^2\left(\frac{4\epsilon}{\pi}\theta\right) d\phi^2$ sur $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{S}^1$.

On a :

$$R(f) = \int_{(0,\frac{\pi}{2})\times S^1} \left(f_\theta^2 + \frac{f_\phi^2}{\sin^2\theta}\right) \sin\theta\, d\theta\, d\phi \Bigg/ \int_{(0,\frac{\pi}{2})\times S^1} f^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

et

$$R_\epsilon(f) = \int_{(0,\frac{\pi}{2})\times S^1} \left(\left(\frac{\pi}{4\epsilon}\right)^2 f_\theta^2 + \frac{f_\phi^2}{\sin^2(\frac{4\epsilon}{\pi})\,\theta} \right) \sin\left(\frac{4\epsilon}{\pi}\theta\right) \, d\theta \, d\phi \Bigg/ \int_{(0,\frac{\pi}{2})\times S^1} f^2 \sin\left(\frac{4\epsilon}{\pi}\theta\right) \, d\theta \, d\phi.$$

La fonction $\sin\left(\frac{4\epsilon}{\pi}\theta\right)/\sin\theta$ est croissante par rapport à θ, d'où pour tout $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\frac{4\epsilon}{\pi}\sin\theta \leq \sin\left(\frac{4\epsilon}{\pi}\theta\right) \leq \sin(2\epsilon)\,\sin\theta.$$

On vérifie de même que, pour $0 < \epsilon < \frac{\pi}{4}$:

$$\sin(2\epsilon) \geq \frac{4\epsilon}{\pi}.$$

Les deux inégalités précédentes entraînent que, pour $0 < \epsilon < \frac{\pi}{4}$:

$$R_\epsilon(f) \geq \frac{1}{\sin^2(2\epsilon)}\, R(f).$$

On en déduit l'inégalité :

$$\lambda_1(\gamma_i) \geq \frac{1}{\sin^2(2\epsilon)}\, \alpha(U).$$

3.4. LEMME. — *On a : $\alpha(U) = \frac{3}{4}$ et cet infimum est atteint lorsque γ est un arc de grand cercle.*

Preuve. — Considérons un C^2-arc simple quelconque joignant le pôle de U à un point de ∂U et soit $u \in W(\gamma), u \neq 0$, le prolongement $\tilde{u}$ de u à $\mathbb{S}^2$ par la réflexion σ par rapport à ∂U est une fonction de $H_0^1(\mathbb{S}^2 \setminus \tilde{\gamma})$ où $\tilde{\gamma} = \gamma \cup \sigma(\gamma)$, de plus :

$$R(\tilde{u}) = R(u)$$

il en résulte que :

$$\lambda_1(\gamma) \geq \lambda_1^D(\mathbb{S}^2 \setminus \tilde{\gamma}).$$

Munissons maintenant la sphère $\mathbb{S}^2$ de la métrique ds^2_φ où φ est, via projection stéréographique sur le plan complexe, l'application $\varphi : z \longrightarrow z^2$. Comme $\tilde{\gamma}$ joint les deux valeurs critiques de φ , $\varphi^{-1}(\mathbb{S}^2 \setminus \tilde{\gamma})$ est une réunion disjointe de deux domaines Ω_1 et Ω_2 de $\mathbb{S}^2$ qui sont difféomorphes à $\mathbb{S}^2 \setminus \tilde{\gamma}$ par φ. Ainsi la première valeur propre $\lambda_1^D(\Omega_i)$ de Δ_φ sur Ω_i avec condition de Dirichlet au bord est égale à $\lambda_1^D(\mathbb{S}^2 \setminus \tilde{\gamma})$ pour $i = 1, 2$. L'argument qui suit (cf [Ga1] corollaire 4.3) montre qu'en général :

$$\lambda_1(\varphi) \leq \max_{i=1,2} \lambda_1^D(\Omega_i). \tag{5}$$

En effet, si $\eta > 0$, il existe alors $u_i \in H_0^1(\Omega_i)$, pour $i = 1, 2$, telles que :

$$R(u_i) \leq \lambda_1^D(\Omega_i) + \eta \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Prolongeons u_i par 0 en une fonction $\tilde{u}_i$ de $H^1(\mathbb{S}^2)$, pour $i = 1, 2$. Ces deux fonctions sont linéairement indépendantes et on a pour tous réels α_1 et α_2 :

$$R(\alpha_1 \tilde{u}_1 + \alpha_2 \tilde{u}_2) \leq \left(\max_{i=1,2} \lambda_1^D(\Omega_i) \right) + \eta$$

d'où par (2) :

$$\lambda_1(\varphi) \leq \left(\max_{i=1,2} \lambda_1^D(\Omega_i) \right) + \eta,$$

pour tout $\eta > 0$, d'où (5). On a ainsi prouvé que :

$$\alpha(U) \geq \lambda_1(\varphi).$$

Dans [Na], S.Nayatani a calculé les $\lambda_k(\varphi)$. En particulier $\lambda_1(\varphi) = \dfrac{3}{4}$ et le sous-espace propre associé est constitué par les fonctions (écrites en coordonnées polaires sur le plan complexe via projection stéréographique à partir du pôle nord) de la forme :

$$f(r, \theta) = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{r^4 - 1}{r^4 + 1} \right)^2} . (a \cos \theta + b \sin \theta) \qquad a \text{ et } b \text{ étant réels.}$$

Et ces fonctions s'annulent chacune sur un grand cercle joignant les deux pôles et sont invariantes par réflexion par rapport à l'équateur sur la sphère.

Les lemmes 3.3, 3.4 et (4) montrent que pour ϵ assez petit aucun ouvert de la sphère ne vérifie les conclusions de la proposition 3.1, ce qui démontre le théorème 2.1.

3.5. *Remarque.* — Nous terminons en donnant un critère sur la répartition des valeurs hypereliptiques d'une application holomorphe de degré 2 qui assure que celle-ci est d'indice un. Les exemples du théorème 2.1 en sont un cas particulier; la preuve est identique.

3.6. THÉORÈME. — *Soient Σ une surface de Riemann hyperelliptique, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ les valeurs hyperelliptiques du revêtement ramifié de degré deux associé : $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{S}^2$ et B_1, B_2, $\ldots$, B_k des boules ouvertes de centres respectifs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ qui recouvrent $\mathbb{S}^2$ et telles que tout x_i n'appartient à aucune boule autre que B_i, $i = 1, \ldots, k$. Notons enfin par m la multiplicité de ce recouvrement et par r le plus grand des rayons de ces boules. Alors :*

$$\text{Si} \quad m.\sin^2 r \leq \frac{3}{8} \quad \text{on a} \quad \mathrm{Ind}(\phi) = 1.$$

BIBLIOGRAPHIE

[C] S.Y. CHENG, Eigenfunctions and nodal sets, Comment. Math. Helvetici, 51 (1976), 43-55.

[FC] D. FISCHER-COLBRIE, On complete minimal surfaces with finite Morse index in three manifolds, Invent. Math., 82 (1985), 121-132.

[FK] H.M. FARKAS and I. KRA, Riemann surfaces, Springer Verlag.

[Ga1] S. GALLOT, Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes, Astérisque, 163-164 (1988), 31-91.

[Ga2] S. GALLOT, Minorations sur le λ_1 des variétés riemanniennes, Lecture Notes in Math., 901 (1981).

[Gu] R. GULLIVER, Index and total curvature of complete minimal surfaces, Proc. Symp. Pure Math., 44 (1986), 207-211.

[La] G. LAFFAILLE, Déterminants de laplaciens, Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Université de Grenoble, (1986), 77-84.

[LR] J. LOPEZ and A. ROS, Complete minimal surfaces with index one and stable constant mean curvature surfaces, Comment. Math. Helv., 64 (1989), 34-43.

[MR] S. MONTIEL and A. ROS, Schrodinger operators associated to a holomorphic map, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 1481 (1990), 147-174.

[Na] S. NAYATANI, Lower bounds for the Morse index of complete minimal surfaces in euclidean 3-space, Osaka J. Math., 27 (1990), 453-464.

[OsPhSa] B. OSGOOD, R. PHILLIPS and P. SARNACK, Extremals of determinants of Laplacians, J. of Funct. An., 80 (1988), 148-211.

[O] R. OSSERMAN, A survey of minimal surfaces, Dover, New York, 1986.

[R] M. ROSS, Schwarz' P and D surfaces are stable, preprint (1991).

[Ty] J. TYSK, Eigenvalue estimates with applications to minimal surfaces, Pacific J. Math., 128 (1987), 361.

Manuscrit reçu le 22 juillet 1991,
révisé le 5 janvier 1993.

Rabah SOUAM,
Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques
2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05 (France).