ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN ÉCALLE

# Singularités non abordables par la géométrie

*Annales de l'institut Fourier*, tome 42, nº 1-2 (1992), p. 73-164
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1992__42_1-2_73_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**42**, 1-2 (1992), 73-164

# SINGULARITÉS NON ABORDABLES PAR LA GÉOMÉTRIE

par Jean ECALLE

---

**1.** Préambule. "Géométrie" et "résurgence".

**2.** Objets locaux : champs et difféos. Résonance, quasirésonance, nihilence.

**3.** Rappels sur les moules et comoules. Arborification et coarborification. Exemples.

**4.** Objets non résonnants. Petits diviseurs diophantiens et petits diviseurs liouvilliens. Théorème de linéarisation.

**5.** Généralités sur les objets résonnants. Formes normales et réseaux de résurgence.

**6.** Rappels sur la résurgence. Monômes résurgents et moules associés.

**7.** Objets résonnants. Le normalisateur $\Theta$ et ses propriétés.

**8.** Objets résonnants de réseau intérieur discret. Equation du pont et invariants holomorphes.

**9.** Objets résonnants de réseau intérieur non discret. Equation du pont et invariants holomorphes.

**10.** Résurgence généralisée. Remarque sur les fonctions **R**-cohésives et **C**-cohésives.

**11.** Critères d'analycité pour les structures invariantes associées.

**12.** Passage aux objets locaux les plus généraux. Conclusion.

**13.** Formulaire.

Bibliographie.

---

*Mots-clés* : Singularités analytiques - Invariants analytiques - Résurgence - Equation du pont.
*Classification A.M.S.* : 30B99 - 30D60 - 30E15 - 40C99 - 40H05 - 53B99 - 58F99.

## 1. Préambule. "Géométrie" et "résurgence".

Cet article , écrit en mémoire de notre regretté collègue et ami Jean MARTINET, est consacré aux "objets locaux", c'est-à-dire aux champs et difféomorphismes locaux de $\mathbf{C}^{\nu}$. Il s'ordonne autour de trois thèmes :

### I. Interaction de la résonance et des petits diviseurs.

Les principales difficultés dans l'étude des objets locaux viennent de la *résonance* et des petits diviseurs, ceux-ci pouvant être "bons" (diophantiens) ou "mauvais" (liouvilliens) : dans ce dernier cas on parle de *quasirésonance*. Résonance et quasirésonance provoquent chacune de la divergence, mais de type très différent.

La divergence due à la *résonance* est surmontable; de type résurgent; et elle "porte" des invariants holomorphes. Sous-jacente à cette divergence, il existe une structure très particulière, la "résurgence", dominée par la notion de dérivation étrangère.

La divergence due à la *quasirésonance* est tout autre. Elle ne porte pas d'invariants holomorphes et n'est pas surmontable dans le cadre des séries entières, mais seulement dans celui de séries mixtes, alliant puissances entières et irrationnelles de la variable. Sous-jacente à ce type de divergence, il existe aussi une structure propre, mais liée à une nouvelle notion – la *compensation* – et faisant intervenir une nouvelle classe d'endomorphismes.

Ce deuxième type de divergence, ainsi que la structure qui va avec, sera étudié dans [E8]. *La présente étude est entièrement centrée sur le premier type de divergence, due à la résonance et génératrice de résurgence.* Mais elle envisage aussi les petits diviseurs diophantiens. A eux seuls, ceux-ci ne causent pas de divergence (résultats classiques de Siegel, Bryuno, Rüssmann) mais ils peuvent venir se superposer à la résonance et la "compliquer". Une section spéciale leur est donc consacrée, où est introduite la très générale technique d'*arborification*, qui permet d'en venir à bout partout où ils se présentent.

### II. Comparaison de la "géométrie" et de la "résurgence".

Pour aborder les objets locaux résonnants, on a le choix entre deux méthodes principales, que pour faire bref nous appellerons "géométrie" et "résurgence". Toutes deux ont ceci de commun qu'elles envisagent une ou

des séries formelles $\widetilde{\varphi}(z)$attachées à l'objet (ce peuvent être les composantes de l'intégrale formelle (8.51), (8.52) ou de divers changements de variables normalisants) et cherchent à leur attacher des sommes ${}^{\theta}\varphi(z)$ , définies et régulières dans des voisinages sectoriels $\mathcal{D}^{\theta}$ de 0 ou plutôt de $\infty$ (car techniquement il est plus commode de prendre $z$ infiniment grand) et d'ouverture maximale.

$$\begin{tikzcd}
{}^{\theta}\varphi(z) \text{ (modèles géométriques)} & {}^{\theta}\varphi(z) \arrow[dr, leftrightarrow, "\mathcal{L}"] & \\
\widetilde{\varphi}(z) \text{ (modèle formel)} \arrow[u] & \widetilde{\varphi}(z) \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow, "\widetilde{\mathcal{B}}"'] & \widehat{\varphi}(\zeta) \text{ (modèle convolutif)}
\end{tikzcd}$$

"GÉOMÉTRIE" "RÉSURGENCE"

L'approche "géométrique" cherche à caractériser les germes ${}^{\theta}\varphi(z)$ directement à partir de leur développement asymptotique $\widetilde{\varphi}(z)$ et à tirer tous les renseignements désirés (invariants de l'objet etc...) du comportement des ${}^{\theta}\varphi(z)$ à la limite de leurs secteurs de définition, ou de leur comparaison sur les parties communes $\mathcal{D}^{\theta} \cap \mathcal{D}^{\theta'}$ de ces secteurs.

L'approche "résurgente" au contraire intercale un "modèle convolutif" $\widehat{\varphi}(\zeta)$ entre le "modèle formel" $\widetilde{\varphi}(z)$ et les modèles géométriques ${}^{\theta}\varphi(z)$. On passe de $\widetilde{\varphi}(z)$ à $\widehat{\varphi}(\zeta)$ par la transformation de Borel formelle $\widetilde{\mathcal{B}}$ (terme à terme) et de $\widehat{\varphi}(\zeta)$ à ${}^{\theta}\varphi(z)$ par la transformation de Laplace $\mathcal{L}$ de direction $\theta$. La fonction $\widehat{\varphi}(\zeta)$ affiche un comportement typiquement "résurgent": elle a tendance à se "reproduire" en ses singularités. Ce sont d'ailleurs ces singularités qui sont responsables de la divergence de $\widetilde{\varphi}$ et les paramètres ("résidus" généralisés) qui les caractérisent se trouvent être des invariants de l'objet.

L'approche "géométrique" a pour elle d'être très naturelle puisque, traitant d'un problème qui a son origine et sa fin dans la géométrie, elle colle au plus près à cet aspect des choses. Toutefois, sa portée est limitée, car la série $\widetilde{\varphi}(z)$ ne caractérise le germe ${}^{\theta}\varphi(z)$ que si celui-ci est défini dans un secteur d'ouverture assez large, ce qui suppose que les points singuliers $\omega$ de $\widehat{\varphi}(\zeta)$ admettent dans le plan des $\zeta$ une répartition angulaire discrète. Or cette condition, automatiquement réalisée dans les problèmes linéaires et quelques autres cas particuliers importants, n'en fait pas moins figure d'exception. La méthode "résurgente", au contraire, s'applique indifféremment à tous les cas.

Chronologiquement, c'est l'approche géométrique qui est venue en premier et qui a inspiré l'autre méthode. Plus précisément, j'avais étudié

les difféomorphismes résonnants de $\mathbf{C}$ par la géométrie dans [E0], *puis* par la résurgence dans [E2]. De leur côté, Jean Martinet et Jean-Pierre Ramis, dans deux articles fondamentaux [MR1].[MR2], étudièrent par la géométrie les champs résonnants de $\mathbf{C}^2$ , ce qui m'incita, à leur propos, à répéter le passage géométrie $\rightarrow$ résurgence. La méthode *résurgente*, ainsi rodée, put ensuite sans trop d'efforts être appliquée aux objets locaux les plus généraux, en toute dimension [3], avec le secours de l'*accélération* [E5] [E6] [E7] [E10] dans les cas les plus compliqués.

Il ne faut d'ailleurs pas se dissimuler ce que ces deux désignations – "géométrie" et "résurgence" – comportent de conventionnel. La "géométrie" utilise les séries formelles $\widetilde{\varphi}$ et fait, elle aussi, un certain usage de Borel-Laplace et du plan des $\zeta$. De son côté, la "résurgence" utilise beaucoup de géométrie, mais pas la même : l'attention, au lieu de se fixer sur le comportement des germes ${}^{\theta}\varphi(z)$ à la frontière de leurs secteurs de définition, se porte sur une fonction globale, à savoir $\widehat{\varphi}(\zeta)$, définie sur une surface de Riemann fortement ramifiée. Et tandis que la "géométrie en $z$" était dominée par les opérations *multiplicatives* $(\times, 0, \partial)$, la "géométrie en $\zeta$" est toute entière placée sous le signe des opérations *convolutives* $(*, \hat{0}, \hat{\partial})$ et des dérivations étrangères.

## III. Introduction à l'équation du pont.

Cet article à un troisième objectif : présenter d'une façon claire et accessible l'*équation du pont* (qui relie *les dérivées étrangères* et *ordinaires* de l'intégrale formelle de tout objet résonnant) et quelques-unes de ses applications (calcul des invariants holomorphes; critères d'analycité pour les structures invariantes associées à l'objet, etc...). Un livre entier, [E3], a déjà été consacré à l'équation du pont, mais ce livre est long, d'abord difficile, et n'a reçu qu'une diffusion limitée. La présente rédaction, au contraire, est très allégée. Elle se limite aux objets résonnants qui ne présentent qu'un seul degré de résonance, car ce cas permet de saisir les principales difficultés d'analyse propres à ces questions. Les objets généraux sont traités dans [E3] ou dans [E7] pour les cas "de criticité $r$", qui nécessitent un recours à l'*accélération* et forcent à passer non par un seul, mais par $r$ modèles convolutifs successifs.

Ceci dit, le présent article n'est ni un condensé de [E3] ni une simple introduction à [E3]. On y construit des développements explicites pour l'intégrale formelle et pour les invariants holomorphes $\mathbf{A}_\omega$, tant dans le cas des champs que dans celui des difféos. On y étudie l'interaction de la

résonance-résurgence avec les petits diviseurs diophantiens. On y introduit la technique d'arborification, dont on fait un usage systématique. On y traite aussi le cas "extrême" (simplement signalé dans [E3]) où les fonctions résurgentes (généralisées) $\widehat{\varphi}(\zeta)$ possèdent *une configuration non discrète* (voire partout dense) de *singularités*, ce qui correspond aux objets de "réseau interne" $\Omega^{\text{int}}$ non discret (voire dense). Dans cette situation limite, les $\widehat{\varphi}(\zeta)$ présentent d'ailleurs des propriétés spéciales de quasianalycité – *la* **C**-*cohésivité* – qui rappellent les propriétés de **R**-*cohésivité* qu'on rencontre en théorie de l'*accélération*. L'apparition inopinée de ces deux formes de quasianalycité (dans une étude dont le point de départ et le point d'arrivée sont foncièrement analytiques) ainsi évidemment que l'émergence de structures spécifiques (résurgence; calcul étranger; équation du pont) dans un contexte apparemment aussi "amorphe" que celui de la "divergence", sont assurément à compter parmi les principaux attraits de ces théories de resommation.

## 2. Objets locaux : champs et difféos. Résonance, quasirésonance, nihilence.

Par *objets locaux* nous entendrons ici soit des *champs de vecteurs locaux*, c'est-à-dire des germes de champs de vecteurs sur $\mathbf{C}^\nu$, singuliers en l'origine :

$$(2.1) \qquad X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x)\partial_{x_i} \quad (X_i(x) \in \mathbf{C}\{x\}; X_i(0) = 0; \partial_{x_i} = \partial/\partial x_i)$$

soit des *difféomorphismes locaux*, c'est-à-dire des germes de difféomorphismes de $\mathbf{C}^\nu$, admettant l'origine pour point fixe :

$$(2.2) \quad f : (x_1, \ldots, x_\nu) \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_\nu(x)) \quad (f_i(x) \in \mathbf{C}\{x\}; f_i(0) = 0) \ .$$

Pour faire bref, nous dirons simplement : *champ et difféo*. A chaque difféo $f$ il sera commode d'associer un automorphisme $F$ de $\mathbf{C}\{x\}$ :

$$(2.3) \quad F : \varphi(x) \longmapsto F \cdot \varphi(x) = \varphi \circ f(x) = \varphi(f_1(x), \ldots, f_\nu(x)), \ (\forall \varphi \in \mathbf{C}\{x\}).$$

Les *multiplicateurs* d'un objet local sont les valeurs propres de sa partie linéaire. Pour un champ, les multiplicateurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ sont donc les valeurs propres de la matrice $[\alpha_{ij}] = [\partial_{x_j} X_i(0)]$. Pour un difféo, les multiplicateurs $\ell_1, \ldots, \ell_\nu$ sont les valeurs propres de la matrice $[a_{ij}] = [\partial_{x_j} f_i(0)]$.

L'étude d'un objet local n'offre de difficulté (et d'intérêt) qu'en présence d'une (au moins) des trois complications suivantes : *résonance, quasirésonance, nihilence.*

On dit qu'un champ ou difféo est *résonnant* si certaines combinaisons entières de ses multiplicateurs, de la forme :

$$\langle m, \lambda \rangle - \lambda_j = (\sum_{i=1}^{\nu} m_i \lambda_i) - \lambda_j \quad (m_i \in \mathbf{N}) \tag{2.4}$$

$$\ell^m - \ell_j = (\prod \ell_i^{m_i}) - \ell_j \quad (m_i \in \mathbf{N}) \tag{2.5}$$

sont nulles.

On dit qu'un champ ou difféo est *quasirésonnant* si les combinaisons (2.4) ou (2.5) peuvent approximer 0 "anormalement vite". Plus précisément, pour tout entier $k$, on note $\varpi(k)$ l'infimum (pour $0 \leq m_i \leq k$ et $1 \leq j \leq \nu$) des valeurs absolues des combinaisons (2.4) ou (2.5) qui ne s'*annulent pas* et on dit que l'objet (champ ou difféo) a un spectre *diophantien* si les conditions suivantes sont réalisées :

$$S = \sum k^{-2} \log(1/\varpi(k)) < +\infty \tag{2.6}$$

$$S^* = \sum 2^{-k} \log(1/\varpi(2^k)) < +\infty \ . \tag{2.7}$$

Ces conditions (introduites par Bryuno pour les champs puis reprises par Rüssmann pour les difféos) sont manifestement équivalentes puisque $1/2 \leq S^*/S \leq 2$. Elles sont vérifiées pour Lebesgue presque tout spectre et notamment pour tous les spectres algébriques. Lorsqu'elles ne sont pas vérifiées, on dit que le spectre est *liouvillien* et que l'objet considéré est *quasirésonnant.*

Enfin, la *nihilence* (qui suppose la résonance) équivaut à l'existence d'une intégrale première formelle *entière*, c'est-à-dire d'une série $\widetilde{\varphi}(x) \in \mathbf{C}[[x]]$ telle que $X \cdot \widetilde{\varphi} \equiv 0$ ou $F \cdot \widetilde{\varphi} \equiv \widetilde{\varphi}$.

Indiquons à grands traits quelle incidence ont ces trois complications.

*En leur absence* (ni résonance, ni quasirésonance, ni nihilence) tout objet local et analytiquement linéarisable et n'a pas d'autres invariants que son spectre. Du point de vue local, il n'y a rien d'autre à dire.

En présence de *résonance pure*, on se heurte à des "diviseurs nuls" quand on cherche à linéariser. La forme normale de l'objet n'est généralement pas linéaire et les applications normalisantes sont génériquement divergentes-résurgentes, avec une résurgence entièrement décrite par l'équation du pont. La résonance augmente la quantité d'invariants formels et

suscite une infinité d'invariants *analytiques* et *holomorphes* (*) qui tous se lisent et se calculent sur l'équation du pont.

En présence de *quasirésonance pure*, on se heurte aux "petits diviseurs liouvilliens". Le nombre d'invariants formels n'augmente pas et l'objet reste formellement linéarisable, mais pas analytiquement en général. Il existe donc des classes analytiques et des invariants analytiques non triviaux, mais pas d'invariants holomorphes.

En présence de *nihilence*, on peut se heurter à des "petits diviseurs" du type de ceux qu'on rencontre en mécanique (sans qu'intervienne aucune condition arithmétique). De nombreux invariants formels surgissent. Il apparaît des classes analytiques non triviales; des invariants analytiques aussi; mais pas d'invariants holomorphes.

Les trois phénomènes peuvent se superposer et on peut aussi (en grande dimension) rencontrer de la résonance, quasirésonance ou nihilence de "deuxième génération", "troisième génération" etc... Voir [E3].

L'objet de cet article est l'étude de la résonance, de ses effets et de son interaction avec les petits diviseurs (§§7,8,9,11), spécialement dans les cas qui sont inaccessibles à la méthode "géométrique". Mais il nous faut commencer par étudier les petits diviseurs à l'état pur. Ce sera l'objet du §3, où nous introduisons la notion de moule et la technique d'arborification, puis du §4, où nous retrouvons les classiques théorèmes de linéarisation, mais d'une manière succincte, conceptuelle et d'avance adaptée aux généralisations ultérieures.

## 3. Rappels sur les moules et comoules. Arborification et coarborification. Exemples.

### Séquences et séquences arborescentes.

Fixons un semi-groupe additif $\Omega$. Une *séquence* sur $\Omega$ est une suite totalement ordonnée $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ d'éléments $\omega_i \in \Omega$, avec répétitions possibles. On note :

(3.1) $\quad r(\boldsymbol{\omega}) = r =$ longueur de $\boldsymbol{\omega}$; $\|\boldsymbol{\omega}\| = \omega_1 + \cdots + \omega_r =$ somme de $\boldsymbol{\omega}$.

(*) invariant *analytique* signifie invariant relativement aux changements de carte analytiques; et *holomorphe* signifie fonction holomorphe de l'objet, *cf.* §8.

On note aussi $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' \bullet \boldsymbol{\omega}''$ la séquence formée des éléments de $\boldsymbol{\omega}'$ *puis* des éléments de $\boldsymbol{\omega}''$.

Une *séquence arborescente* sur $\Omega$ est une suite $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}} = (\omega_1, \ldots, \omega_r)^<$ d'éléments de $\Omega$ avec sur les indices $\{1, \ldots, r\}$ un *ordre arborescent* : autrement dit, chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$ possède au plus un antécédent, noté $i_-$. On définit encore $r(\overset{<}{\boldsymbol{\omega}})$ et $\| \overset{<}{\boldsymbol{\omega}} \|$ comme en (3.1). On note $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}} = \overset{<}{\boldsymbol{\omega}}' \oplus \overset{<}{\boldsymbol{\omega}}''$ l'union disjointe de $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}'$ et $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}''$ avec *conservation* des ordres partiels de $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}'$ et $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}''$ et *incomparabilité* des éléments de $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}'$ avec ceux de $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}''$. $\emptyset$ désigne la séquence vide. Un $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}$ est dit *irréductible* s'il ne possède pas de décomposition $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}' \oplus \overset{<}{\boldsymbol{\omega}}''$ non triviale; autrement dit, s'il possède *un* plus petit élément.

**Algèbre des moules (ordinaires; symétrals; symétrels).**

Un *moule* $A^\bullet = \{A^{\boldsymbol{\omega}}\}$ sur $\Omega$ et à valeurs dans une algèbre commutative $\mathcal{A}$ est une famille d'éléments $A^{\boldsymbol{\omega}}$ de $\mathcal{A}$ indexée par les séquences $\boldsymbol{\omega}$ sur $\Omega$. Les moules s'additionnent terme à terme et se multiplient selon la formule :

$$A^\bullet = B^\bullet \times C^\bullet \Longleftrightarrow A^{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{\boldsymbol{\omega}^1 \bullet \boldsymbol{\omega}^2 = \boldsymbol{\omega}} B^{\boldsymbol{\omega}^1} C^{\boldsymbol{\omega}^2}, \ (r(\boldsymbol{\omega}^i) \geq 0) \ . \tag{3.2}$$

Par exemple

$$A^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} = B^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} C^{\emptyset} + B^{\omega_1, \omega_2} C^{\omega_3} + B^{\omega_1} C^{\omega_2, \omega_3} + B^{\emptyset} C^{\omega_1, \omega_2, \omega_3} \ . \tag{3.2 bis}$$

L'unité pour la multiplication est le moule $1^\bullet$ défini par $1^\emptyset = 1$ et $1^{\boldsymbol{\omega}} = 0$ si $r(\boldsymbol{\omega}) \geq 1$.

Notons $\mathrm{sh}\binom{\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}''}{\boldsymbol{\omega}}$ le nombre de manières dont on peut obtenir la séquence $\boldsymbol{\omega}$ par *battage (shuffling)* des séquences $\boldsymbol{\omega}'$ et $\boldsymbol{\omega}''$ avec préservation de l'ordre interne de chacune. Notons $\mathrm{ctsh}\binom{\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}''}{\boldsymbol{\omega}}$ le nombre de manières dont on peut obtenir la séquence $\boldsymbol{\omega}$ par *battage contractant (contracting shuffling)* des séquences $\boldsymbol{\omega}'$ et $\boldsymbol{\omega}''$, c'est-à-dire par battage ordinaire $\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}'' \mapsto \boldsymbol{\omega}^*$ suivi de la contraction éventuelle $(\omega'_i, \omega''_j) \mapsto \omega'_i + \omega''_j$ d'une ou plusieurs paires $(\omega'_i, \omega''_j)$ d'éléments consécutifs $\boldsymbol{\omega}^*$ de provenant de $\boldsymbol{\omega}'$ et $\boldsymbol{\omega}''$.

Un moule$A^\bullet$ est dit *symétral* ou *symétrel* si $A^\emptyset = 1$ et si, pour toute paire $(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}'')$ on a :

$$A^{\boldsymbol{\omega}'} A^{\boldsymbol{\omega}''} = \sum \mathrm{sh}\binom{\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}''}{\boldsymbol{\omega}} A^{\boldsymbol{\omega}} \quad (A^\bullet \text{ symétral}) \tag{3.3}$$

$$A^{\boldsymbol{\omega}'} A^{\boldsymbol{\omega}''} = \sum \mathrm{ctsh}\binom{\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}''}{\boldsymbol{\omega}} A^{\boldsymbol{\omega}} \quad (A^\bullet \text{ symétrel}). \tag{3.4}$$

Par exemple, pour une moule symétral on aura :

$$A^{\omega_1}A^{\omega_2,\omega_3} = A^{\omega_1,\omega_2,\omega_3} + A^{\omega_2,\omega_1,\omega_3} + A^{\omega_2,\omega_3,\omega_1} \tag{3.5}$$

et pour un moule symétrel :

$$A^{\omega_1}A^{\omega_2,\omega_3} = A^{\omega_1,\omega_2,\omega_3} + A^{\omega_2,\omega_1,\omega_3} + A^{\omega_2,\omega_3,\omega_1} + A^{\omega_1+\omega_2,\omega_3} + A^{\omega_2,\omega_1+\omega_3} . \tag{3.6}$$

Un moule $A^\bullet$ est dit *alternal* ou *alternel* si $A^\emptyset = 0$ et si, pour toute paire $\omega', \omega''$ de séquences non vides ($\omega' \neq \emptyset$, $\omega'' \neq \emptyset$) on a :

$$0 = \sum \operatorname{sh}\binom{\omega',\omega''}{\omega} A^\omega \quad (A^\bullet \text{ alternal}) \tag{3.7}$$

$$0 = \sum \operatorname{ctsh}\binom{\omega',\omega''}{\omega} A^\omega \quad (A^\bullet \text{ alternel}). \tag{3.8}$$

L'inverse multiplicatif $B^\bullet$ d'un moule général $A^\bullet$ existe dès que $A^\emptyset$ est inversible et il vaut :

$$B^\omega = \sum_{s=1}^{r(\omega)} (-1)^s (A^\emptyset)^{-1-s} \sum_{\omega'\bullet\bullet\bullet\omega^s=\omega} A^{\omega'}\cdots A^{\omega^s} . \tag{3.9}$$

Cette formule se simplifie pour un moule symétral :

$$B^\omega = (-1)^{r(\omega)} A^{\tilde{\omega}} \quad i.e. \quad B^{\omega_1,\dots,\omega_r} = (-1)^r A^{\omega_r,\dots,\omega_1} \tag{3.10}$$

et pour un moule symétrel

$$B^\omega = (-1)^{r(\omega)} \sum_{\omega^1\bullet\bullet\bullet\omega^s=\omega} A^{\|\omega^s\|,\dots,\|\omega^1\|} \quad (1 \leq s \leq r(\omega); \omega^i \neq \emptyset). \tag{3.11}$$

**Algèbre des moules arborescents.**

Un moule arborescent $A^{\overleftarrow{\bullet}} = \{A^{\overleftarrow{\omega}}\}$ sur $\Omega$ et à valeurs dans $\mathcal{A}$ est une famille d'éléments $A^{\overleftarrow{\omega}}$ de $\mathcal{A}$ indexée par les séquences arborescentes $\overleftarrow{\omega}$ sur $\Omega$. Les moules arborescents s'additionnent terme à terme et se multiplient selon la formule :

$$A^{\overleftarrow{\bullet}} = B^{\overleftarrow{\bullet}} \times C^{\overleftarrow{\bullet}} \Longleftrightarrow A^{\overleftarrow{\omega}} = \sum B^{\overleftarrow{\omega}'} C^{\overleftarrow{\omega}''} \quad (r(\overleftarrow{\omega}') \text{ et } r(\overleftarrow{\omega}'') \geq 0) \tag{3.12}$$

avec une somme étendue à toutes les *partitions monotones* de $\overleftarrow{\omega}$ en $\overleftarrow{\omega}'$ et $\overleftarrow{\omega}''$, c'est-à-dire à toutes les partitions telles qu'aucun élément de $\overleftarrow{\omega}'$ ne soit antérieur (dans $\overleftarrow{\omega}$) à aucun élément de $\overleftarrow{\omega}''$. Bien sûr, $\overleftarrow{\omega}'$ et $\overleftarrow{\omega}''$ possèdent l'ordre interne hérité de $\overleftarrow{\omega}$. Ainsi, pour $\overleftarrow{\omega} = \omega_1\bullet(\omega_2 \oplus \omega_3) = \omega_1$ suivi de $\omega_2$ et $\omega_3$ , avec $\omega_2$ et $\omega_3$ incomparables, on aura :

$$A^{\overleftarrow{\omega}} = B^{\overleftarrow{\omega}} C^\emptyset + B^\emptyset C^{\overleftarrow{\omega}} + B^{\omega_1} C^{\omega_2\oplus\omega_3} + B^{\omega_1\bullet\omega_2} C^{\omega_3} + B^{\omega_1\bullet\omega_3} C^{\omega_2} . \tag{3.13}$$

Un moule arborescent $A^{\overset{<}{\bullet}}$ est dit *séparatif* si :

$$A^{\emptyset} = 1 \text{ et } A^{\overset{<}{\omega}' \oplus \overset{<}{\omega}''} \equiv A^{\overset{<}{\omega}'} A^{\overset{<}{\omega}''} \quad (\forall \overset{<}{\omega}', \overset{<}{\omega}'') \ . \tag{3.14}$$

Pareillement, $A^{\overset{<}{\bullet}}$ est dit *antiséparatif* si :

$$A^{\emptyset} = 0 \text{ et } A^{\overset{<}{\omega}' \oplus \overset{<}{\omega}''} \equiv 0 \quad (\forall \overset{<}{\omega}' \neq \emptyset,\ \forall \overset{<}{\omega}'' \neq \emptyset) \ . \tag{3.15}$$

Les moules séparatifs sont stables par multiplication. L'inverse multiplicatif $B^{\overset{<}{\bullet}}$ d'un moule arborescent $A^{\overset{<}{\bullet}}$ se calcule selon la formule :

$$B^{\overset{<}{\omega}} = \sum (-1)^s (A^{\emptyset})^{-1-s} \sum A^{\overset{<}{\omega}^1} \cdots A^{\overset{<}{\omega}^s} \quad (1 \leq s \leq r(\overset{<}{\omega}\,)) \tag{3.16}$$

avec une somme étendue à toutes les partitions monotones $\overset{<}{\omega}^1, \ldots, \overset{<}{\omega}^s$ de $\overset{<}{\omega}$ et en comptant séparément même des partitions qui ne diffèrent que par l'ordre des $\overset{<}{\omega}^i$. Dans le cas où $A^{\overset{<}{\bullet}}$ et donc $B^{\overset{<}{\bullet}}$ sont séparatifs, cette formule se simplifie :

$$B^{\overset{<}{\omega}} = \sum (-1)^s \sum A^{\overset{<}{\omega}^1} \cdots A^{\overset{<}{\omega}^s} \quad (\overset{<}{\omega}, \overset{<}{\omega}^1, \ldots, \overset{<}{\omega}^s \text{ irréductibles}) \tag{3.17}$$

car ici la somme est étendue aux seules partitions monotones de $\overset{<}{\omega}$ de parties $\overset{<}{\omega}^i$ *irréductibles* et, qui plus est, les partitions qui ne diffèrent que par l'ordre des $\overset{<}{\omega}^i$ ne doivent être comptées qu'une fois.

LEMME 3.1. — *L'inversion multiplicative conserve les majorations du type :*

$$|A^{\omega}| < c_o c^{r(\omega)} \quad (\forall \omega;\ c_o \text{ et } c \text{ const}) \tag{3.18}$$

$$|A^{\overset{<}{\omega}}| < c_o c^{r(\omega)} \quad (\forall\, \overset{<}{\omega}\,;\ c_o \text{ et } c \text{ const}) \tag{3.19}$$

*pour tous les moules (généraux, symétrals, symétrels) mais seulement pour les moules-arborescents séparatifs (et non pas généraux).*

*Preuve.* — La formule d'inversion multiplicative comporte en son second membre un nombre de termes égal $2^{r(\omega)-1}$ à pour (3.9); à 1 pour (3.10), à $2^{r(\omega)-1}$ pour (3.11) et aussi pour (3.17). Pour (3.16) au contraire, le nombre de termes au second membre peut excéder $r(\omega)!$, par exemple pour la séquence arborescente $\overset{<}{\omega} = \omega_1 \bullet (\omega_2 \oplus \cdots \oplus \omega_r)$.

## Comoules et comoules arborescents.

Soit $\mathcal{B}$ une bigèbre d'opérateurs différentiels, munie de la multiplication ordinaire (composition des opérateurs) et de la coloi $\mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ :

$$\mathbf{B} \longmapsto \mathrm{col}(\mathbf{B}) = \sum \mathbf{B}_i \otimes \mathbf{B}_j \quad (\mathbf{B}, \mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j \in \mathcal{B}) \tag{3.20}$$

qui traduit les "identités de Leibniz" :

$$\mathbf{B}(\varphi \cdot \psi) = \sum (\mathbf{B}_i\varphi)(\mathbf{B}_j\psi) \tag{3.21}$$

valables pour toute paire $\varphi, \psi$ de fonctions d'épreuve.

Un *comoule* $\mathbf{B}_\bullet = \{\mathbf{B}_\omega\}$ sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbf{B}$ est dit cosymétral (resp. cosymétrel) si $\mathbf{B}_\emptyset = 1$ et si l'on a respectivement :

$$\mathrm{col}(\mathbf{B}_\omega) = \sum \mathrm{sh}\binom{\omega', \omega''}{\omega} \mathbf{B}_{\omega'} \otimes \mathbf{B}_{\omega''} \qquad (\mathbf{B}_\bullet \text{ cosymétral}) \tag{3.22}$$

$$\mathrm{col}(\mathbf{B}_\omega) = \sum \mathrm{ctsh}\binom{\omega', \omega''}{\omega} \mathbf{B}_{\omega'} \otimes \mathbf{B}_{\omega''} \qquad (\mathbf{B}_\bullet \text{ cosymétrel}). \tag{3.23}$$

Pareillement, un comoule-arborescent $\mathbf{B}_{\overset{<}{\bullet}} = \{\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}}\}$ est dit coséparatif si $\mathbf{B}_\emptyset = 1$ et si :

$$\mathrm{col}(\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}}) = \sum \mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}'} \otimes \mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}''} \qquad (\overset{<}{\omega}' \oplus \overset{<}{\omega}'' = \overset{<}{\omega}) \tag{3.24}$$

avec une somme étendue à tous les $\overset{<}{\omega}'$ et $\overset{<}{\omega}''$ (même vides) de réunion $\overset{<}{\omega}$.

La contraction d'un moule $A^\bullet$ symétral (resp. symétrel) avec un comoule $B_\bullet$ cosymétral (resp. cosymétrel) :

$$\mathbf{B} = \sum_{r(\omega)\geq 0} A^\omega \mathbf{B}_\omega = 1 + \sum_{r(\omega)\geq 1} A^\omega \mathbf{B}_\omega \tag{3.25}$$

ainsi que la contraction d'un moule-arborescent séparatif avec un comoule-coarborescent coséparatif :

$$\mathbf{B} = \sum_{r(\omega)\geq 0} A^{\overset{<}{\omega}} \mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}} = 1 + \sum_{r(\omega)\geq 1} A^{\overset{<}{\omega}} \mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}} \tag{3.26}$$

donnent (sous réserve de convergence) un opérateur $\mathbf{B}$ qui est un *automorphisme formel*, puisqu'il vérifie :

$$\mathrm{col}(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \quad i.e. \quad \mathbf{B}(\varphi\psi) \equiv (\mathbf{B}\varphi)(\mathbf{B}\psi)\ . \tag{3.27}$$

**Arborification et coarborification.**

Soit une séquence arborescente $\overset{<}{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r)^<$ et une séquence totalement ordonnée $\omega' = (\omega'_1, \ldots, \omega'_{r'})$. On note $\mathrm{proj}\binom{\overset{<}{\omega}}{\omega'}$ le nombre de *projections monotones* de $\overset{<}{\omega}$ sur $\omega'$, c'est-à-dire le nombre de bijections $\sigma$ de $\{1, \ldots, r\}$ dans $\{1, \ldots, r'\}$ (évidemment nul si $r \neq r'$) telles que :

$$(i_1 < i_2 \text{ dans } \overset{<}{\omega}) \Longrightarrow (\sigma(i_1) < \sigma(i_2) \text{ dans } \omega') \quad \text{(ordre strict)} \tag{3.28}$$

$$\omega'_j = \omega_i \quad \text{si} \quad j = \sigma(i)\ . \tag{3.29}$$

Pareillement, on note cont $\binom{\overset{<}{\omega}}{\omega'}$ le nombre de *contractions monotones* de $\overset{<}{\omega}$ sur $\omega'$, c'est-à-dire le nombre de *surjections* $\sigma$ de $\{1,\dots,r\}$ dans $\{1,\dots,r'\}$ qui satisfont encore (3.28) mais qui au lieu de (3.29) vérifient :

$$\omega'_j = \sum_{\sigma(i)=j} \omega_i \ . \tag{3.30}$$

On vérifie que les relations :

$$A^{\overset{<}{\omega}} = \sum \operatorname{proj} \binom{\overset{<}{\omega}}{\omega'} A^{\omega'} \qquad \text{(arborification)} \tag{3.31}$$

$$A^{\overset{<}{\omega}} = \sum \operatorname{cont} \binom{\overset{<}{\omega}}{\omega'} A^{\omega'} \qquad \text{(arborification contractante)} \tag{3.32}$$

définissent deux homomorphismes de l'algèbres des *moules* dans l'algèbre des *moules-arborescents*. De plus, à tout moule $A^\bullet$ symétral (resp. symétrel) l'*arborification* (resp. l'*arborification contractante*) associe un moule-arborescent $A^{\overset{<}{\bullet}}$ qui est *séparatif*.

Enfin, quand sont vérifiées les relations duales de (3.31) et (3.32) :

$$\mathbf{B}_{\omega'} = \sum \operatorname{proj} \binom{\overset{<}{\omega}}{\omega'} \mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}} \qquad \text{(coarborification)} \tag{3.33}$$

$$\mathbf{B}_{\omega'} = \sum \operatorname{cont} \binom{\overset{<}{\omega}}{\omega'} \mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}} \qquad \text{(coarborification contractante)} \tag{3.34}$$

on dit que le comoule $\mathbf{B}_{\overset{<}{\bullet}}$ est le coarborifié de $\mathbf{B}_\bullet$. Bien sûr, $\mathbf{B}_{\overset{<}{\bullet}}$ n'est pas (sauf conditions subsidiaires) uniquement déterminé par $\mathbf{B}_\bullet$. Autre différence avec l'arborification : si $\omega$ désigne une séquence totalement ordonnée et $\overset{<}{\omega}$ la même séquence, avec le même ordre, mais considérée comme arbre, on a $A^{\omega} = A^{\overset{<}{\omega}}$ évidemment mais en général $\mathbf{B}_{\omega} \neq \mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}}$.

**Exemples de moules.**

Dès la section suivante, nous aurons besoin de quatre moules élémentaires $S^\bullet$, $\mathcal{S}^\bullet$, $\mathcal{S}^\bullet$, $\mathcal{S}^\bullet$ définis par :

$$S^\emptyset = \mathcal{S}^\emptyset = \mathcal{S}^\emptyset = \mathcal{S}^\emptyset = 1 \tag{3.35}$$

$$S^{\omega_1,\dots,\omega_r} = (-1)^r(\check{\omega}_1\check{\omega}_2\cdots\check{\omega}_r)^{-1} \qquad \text{avec } \check{\omega}_i = \omega_1+\cdots+\omega_i \tag{3.36}$$

$$\mathcal{S}^{\omega_1,\dots,\omega_r} = (\hat{\omega}_1\hat{\omega}_2\cdots\hat{\omega}_r)^{-1} \qquad \text{avec } \hat{\omega}_i = \omega_i+\cdots+\omega_r \tag{3.37}$$

$$\mathcal{S}^{\omega_1,\dots,\omega_r} = (-1)^r e^{\|\omega\|}(1-e^{-\check{\omega}_1})^{-1}\cdots(1-e^{-\check{\omega}_r})^{-1} \tag{3.38}$$

$$\mathcal{S}^{\omega_1,\dots,\omega_r} = (e^{\hat{\omega}_1}-1)^{-1}\cdots(e^{\hat{\omega}_r}-1)^{-1} \ . \tag{3.39}$$

LEMME 3.2. — *Les moules $S^\bullet$ et $\mathcal{S}^\bullet$ sont symétrals et mutuellement inverses; les moules $\mathcal{S}^\bullet$ et $\mathcal{S}^\bullet$ sont symétrels et mutuellement inverses.*

*Preuve.* — Introduisons sur l'algèbre des moules la *dérivation* $\nabla$ et l'*automorphisme* $e^\nabla$ définis par :

$$(B^\bullet = \nabla A^\bullet) \Longrightarrow (B^\omega = \|\omega\| \cdot A^\omega) \tag{3.40}$$

$$(C^\bullet = e^\nabla A^\bullet) \Longrightarrow (C^\omega = e^{\|\omega\|} \cdot A^\omega) \tag{3.41}$$

et le moule alternal $I^\bullet$ défini par (*) :

$$I^\emptyset = 0 \ ; \ \ I^{\omega_1} = 1 \ (\forall \omega_1) \ ; \ \ I^{\omega_1,\dots,\omega_r} = 0 \ \ (\forall r \geq 2) \ . \tag{3.42}$$

Alors les relations (3.35–39) équivalent aux relations :

$$\nabla S^\bullet = -S^\bullet \times I^\bullet \tag{3.43}$$

$$\nabla \mathcal{S}^\bullet = I^\bullet \times \mathcal{S}^\bullet \tag{3.44}$$

$$e^\nabla \mathcal{S}^\bullet = \mathcal{S}^\bullet \times (1^\bullet + I^\bullet)^{-1} \tag{3.45}$$

$$e^\nabla \mathcal{S}^\bullet = (1^\bullet + I^\bullet) \times \mathcal{S}^\bullet \tag{3.46}$$

d'où découlent facilement la symétralité de $S^\bullet$ et $\mathcal{S}^\bullet$, la symétrélité de $\mathcal{S}^\bullet$ et $\mathcal{S}^\bullet$ , ainsi que

$$S^\bullet \times \mathcal{S}^\bullet = 1^\bullet; \ \ \mathcal{S}^\bullet \times \mathcal{S}^\bullet = 1^\bullet \ . \tag{3.47}$$

Comme exemple élémentaire de moule alternal, citons le moule $T^\bullet$ :

$$T^\emptyset = 0 \ ; \ \ T^{\omega_1} = 0 \ (\forall \omega_1) \ ; \tag{3.48}$$
$$T^{\omega_1,\dots,\omega_r} = (\omega_1 - \omega_2)^{-1}(\omega_2 - \omega_3)^{-1} \cdots (\omega_{r-1} - \omega_r)^{-1} \ (\text{si } r \geq 2)$$

et comme exemple élémentaire de moule alternel, citons le moule de Bernouilli $\mathcal{B}^\bullet$ défini par :

$$\mathcal{B}^\bullet = (\nabla \mathcal{S}^\bullet) \times \mathcal{S}^\bullet \tag{3.49}$$

et qui vérifie les relations de parité :

$$\mathcal{B}^{-\omega_1} - \mathcal{B}^{\omega_1} = \omega_1 \tag{3.50}$$

$$\mathcal{B}^{-\omega_r,\dots,-\omega_1} + \mathcal{B}^{-\omega_{r-1},\dots,-\omega_1} = \mathcal{B}^{\omega_1,\dots,\omega_r} + \mathcal{B}^{\omega_2,\dots,\omega_r} \ (r \geq 2) \ . \tag{3.50 bis}$$

On vérifie aussi (par récurrence sur $r$) que $\mathcal{B}^\omega$ (contrairement à $\mathcal{S}^\omega$ et $\mathcal{S}^\omega$) est une fonction entière de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$. L'alternalité de $T^\bullet$ se vérifie par récurrence sur $r$. L'alternélité de $\mathcal{B}^\bullet$ se déduit des relations :

$$\mathcal{B}^\bullet = (\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B}^\bullet_t)_{t=0} \text{ avec } \mathcal{B}^\bullet_t = (e^{t\nabla}\mathcal{S}^\bullet) \times \mathcal{S}^\bullet = \text{ moule symétrel} \ . \tag{3.51}$$

(*) Ce moule $I^\bullet$ est l'unité d'une troisième opération, la *composition* des moules $A^\bullet, B^\bullet \mapsto A^\bullet \circ B^\bullet$, que nous n'introduirons pas ici, car nous n'en aurons pas besoin.

En arborifiant les relations (3.44) et (3.46) on trouve deux moules-arborescents séparatifs :

$$\mathcal{S}^{\overset{<}{\omega}} = \sum \operatorname{sh}\binom{\overset{<}{\omega}}{\omega'}\mathcal{S}^{\omega'} = \prod(\hat{\omega}_i)^{-1} \tag{3.52}$$

$$\mathcal{S}^{\overset{<}{\omega}} = \sum \operatorname{ctsh}\binom{\overset{<}{\omega}}{\omega'}\mathcal{S}^{\omega'} = \prod(e^{\hat{\omega}_i} - 1)^{-1} \tag{3.53}$$

mais avec cette fois des sommes $\hat{\omega}_i = \sum \omega_j$ étendues à tous les $j$ qui sont $\geq i$ *pour l'ordre arborescent* de $\overset{<}{\omega}$. Pareillement, l'arborification de $T^\bullet$ donne :

$$T^{\overset{<}{\omega}} = 0 \text{ si } r(\overset{<}{\omega}) = 0 \text{ ou } 1 \text{ ou si } \overset{<}{\omega} = \overset{<}{\omega}' \oplus \overset{<}{\omega}'' \tag{3.54}$$

$$T^{\overset{<}{\omega}} = \sum \operatorname{sh}\binom{\overset{<}{\omega}}{\omega'}T^{\omega'} = \prod_{i=j_-}(\omega_i - \omega_j)^{-1} \quad (\text{pour } \overset{<}{\omega} \text{ irréductible}) \tag{3.55}$$

avec un produit étendu à toutes les paires $(i, j)$ d'éléments consécutifs pour l'ordre arborescent de $\overset{<}{\omega}$.

Les arborifiés $S^{\overset{<}{\bullet}}$, $\mathcal{S}^{\overset{<}{\bullet}}$ et $\mathcal{B}^{\overset{<}{\bullet}}$ ne possèdent pas d'expression fermée simple, mais ils sont facilement calculables et majorables à partir de $S^{\overset{<}{\bullet}}$ de $\mathcal{S}^{\overset{<}{\bullet}}$.

Les moules qui précèdent, élémentaires et à valeurs scalaires, nous serviront dès le §4, pour l'évaluation des petits diviseurs. Au §5 nous en introduirons de nouveaux, à valeurs dans l'algèbre des fonctions résurgentes, et qui nous serviront dans l'étude des objets résonnants (§§6,7,8,9).

**Exemples de comoules.**

Nous introduirons aussi plusieurs comoules aux §§4 et 6, puis nous les contracterons avec divers moules et nous verrons l'avantage qu'il y a à arborifier.

## 4. Objets non résonnants. Petits diviseurs diophantiens et petits diviseurs liouvilliens. Théorème de linéarisation.

En fait d'objets locaux *non résonnants*, nous considérerons des champs locaux $X = \sum X_i(x)\partial_{x_i}$ comme en (2.1) et des difféomorphismes locaux $f : x_i \mapsto f_i(x)$ comme en (2.2). A ces derniers, nous associerons les automorphismes de substitution $F : \varphi \mapsto \varphi \circ f$ comme en (2.3).

L'absence de résonances fait que $X$ et $F$ sont formellement conjugués à leur partie linéaire. Il existe donc une *carte normale* $y = (y_1, \ldots, y_\nu)$ dans laquelle ils revêtent la forme :

$$X^{\text{lin}} = X^{\text{norm}} = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i y_i \partial_{y_i} \tag{4.1}$$

$$F^{\text{lin}} = F^{\text{norm}} \text{ avec } F^{\text{norm}}\varphi(y_1, \ldots, y_\nu) \equiv \varphi(\ell_1 y_1, \ldots, \ell_\nu y_\nu) \ . \tag{4.2}$$

Pour un difféo donné de multiplicateurs $\ell_i$, on fixe une fois pour toutes une détermination $\lambda_i$ des logarithmes $\log \ell_i$.

Aux changements de carte formels normalisants $y = \widetilde{h}(x)$ et $x = \widetilde{k}(y)$, on associe les automorphismes $\Theta$ et $\Theta^{-1}$ de $\mathbf{C}[[x]]$ :

$$\Theta = \widetilde{\varphi}(x) \mapsto \Theta\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{h}(x) \quad (\Theta = \text{normalisateur direct}) \tag{4.3}$$

$$\Theta^{-1} = \widetilde{\varphi}(x) \mapsto \Theta^{-1}\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{k}(x) \quad (\Theta^{-1} = \text{normalisateur inverse}) \tag{4.4}$$

qui sont directement caractérisés par les relations de commutation :

$$X\Theta = \Theta X^{\text{norm}} \qquad (4.5 \text{ bis}) \qquad \Theta^{-1}X = X^{\text{norm}}\Theta^{-1} \tag{4.5}$$

$$F\Theta = \Theta F^{\text{norm}} \qquad (4.6 \text{ bis}) \qquad \Theta^{-1}F = F^{\text{norm}}\Theta^{-1} \ . \tag{4.6}$$

Pour étudier les normalisateurs, il est commode d'envisager les objets $X$ et $F$ dans une carte analytique où ils se présentent sous forme *préparée*, somme de la *forme normale* et d'une *perturbation* $B$, puis de décomposer cette dernière en opérateurs homogènes $\mathbf{B}_\omega$ :

$$X = X^{\text{norm}} + B = X^{\text{norm}} + \sum \mathbf{B}_\omega \tag{4.7}$$

$$F = (1 + B)F^{\text{norm}} = (1 + \sum \mathbf{B}_\omega)F^{\text{norm}} \ . \tag{4.8}$$

Dans les deux cas, $\omega$ parcourt l'*ensemble* $\Omega$ *des* $\omega$ *de la forme* $\omega = \sum n_i\lambda_i$ *avec* $\sum n_i \geq 1$ *et avec des* $n_i \geq 0$ *(sauf au plus un, qui peut valoir* $-1$*)*. Quant aux opérateurs $\mathbf{B}_\omega$, ils s'obtiennent en décomposant $B$ en parties homogènes $\mathbf{B}^n$ de degré $n = (n_1, \ldots, n_\nu)$ :

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}^n \text{ et } \mathbf{B}^n \cdot x^{n'} = \beta_{n,n'} x^{n+n'} \quad (\beta_{n,n'} \in \mathbf{C}; \forall n, n') \tag{4.9}$$

puis en posant $\mathbf{B}^n = \mathbf{B}_\omega$ avec $\omega = \sum n_i\lambda_i$.

Pour un champ on a bien sûr :

$$\text{col}(\mathbf{B}_\omega) = \mathbf{B}_\omega \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{B}_\omega \tag{4.10}$$

$$[X^{\text{norm}}, \mathbf{B}_\omega] = \omega \cdot \mathbf{B}_\omega \tag{4.11}$$

mais pour un difféo la coloi des $\mathbf{B}_\omega$ est moins simple :

$$\text{col}(\mathbf{B}_\omega) = \mathbf{B}_\omega \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{B}_\omega + \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \mathbf{B}_{\omega_1} \otimes \mathbf{B}_{\omega_2} \tag{4.12}$$

$$[F^{\text{norm}}, \mathbf{B}_\omega] = (e^\omega - 1)\mathbf{B}_\omega \ . \tag{4.13}$$

Du fait de (4.10) et (4.12) le comoule $\mathbf{B}_\omega$ défini par :

$$\mathbf{B}_\emptyset = 1 \ \text{ et } \ \mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{B}_{\omega_1,\ldots,\omega_r} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}_{\omega_r} \cdots \mathbf{B}_{\omega_1} \tag{4.14}$$

est cosymétral dans le cas d'un champ et cosymétrel dans le cas d'un difféo.

PROPOSITION 4.1. Séries mouliennes pour $\Theta$ et $\Theta^{-1}$. — *Les normalisateurs d'un champ non résonnant s'obtiennent formellement en contractant les moules symétrals $S^\bullet$ ou $\mathcal{S}^\bullet$ avec le comoule cosymétral $\mathbf{B}_\bullet$ :*

$$\Theta \ = 1 + \sum S^{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}} \tag{4.15}$$

$$\Theta^{-1} = 1 + \sum \mathcal{S}^{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}} \tag{4.16}$$

*et les normalisateurs d'un difféo non résonnant s'obtiennent formellement en contractant les moules symétrels $\mathcal{S}^\bullet$ ou $\mathcal{S}^\bullet$ avec le comoule cosymétrel $\mathbf{B}_\bullet$ :*

$$\Theta \ = 1 + \sum \mathcal{S}^{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}} \tag{4.17}$$

$$\Theta^{-1} = 1 + \sum \mathcal{S}^{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}} \ . \tag{4.18}$$

*Preuve.* — On cherche $\Theta$ et $\Theta^{-1}$ sous la forme ci-dessus, avec le comoule $\mathbf{B}_\bullet$ défini comme en (4.14) mais avec des moules $S^\bullet$, $\mathcal{S}^\bullet$, $\mathcal{S}^\bullet$, $\mathcal{S}^\bullet$ inconnus. Portant les séries (4.15), (4.16) dans les relations (4.5) ou (4.6), on trouve pour les moules inconnus des relations de récurrence sur $r = r(\boldsymbol{\omega})$ qui coïncident exactement avec (3.43–46).

Pour l'instant, ces séries mouliennes sont formelles; plus exactement, elles définissent des automorphismes $\Theta^{\pm 1}$ de $\mathbf{C}[[x]]$ mais peut-être pas de $\mathbf{C}\{x\}$. Afin de discuter leur convergence, introduisons des semi-normes sur les germes $\varphi$ de $\mathbf{C}\{x\}$ et sur les opérateurs $P$ de $\mathbf{C}\{x\}$ dans lui-même :

$$\|\varphi\|_U \ = \sup_x |\varphi(x)| \qquad \text{pour } x \in U \tag{4.19}$$

$$\|P\|_{U,V} \ = \sup_\varphi \|P \cdot \varphi\|_V \qquad \text{pour } \|\varphi\|_U \leq 1 \ . \tag{4.20}$$

Ici, $U$ et $V$ désignent deux voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^\nu$. Une série d'opérateurs $\sum P_n$ sera dite normalement convergente si la série $\sum \|P\|_{U,V}$ converge pour une paire $(U, V)$ au moins.

PROPOSITION 4.2. Cas de convergence des séries mouliennes. — *En présence de petits diviseurs (i.e. quand $\Omega$ accumule 0 pour un champ et quand $\exp(\Omega)$ accumule 1 pour un difféo) les séries mouliennes de $\Theta$ et $\Theta^{-1}$ ne sont pas, en général, normalement convergentes. En l'absence de petits diviseurs et pourvu qu'on parte d'un objet mis sous forme*

*bien préparée (voir ci-dessous), les séries de $\Theta$ et $\Theta^{-1}$ convergent normalement pour un champ; la série de $\Theta$ converge normalement pour un difféo contractant ($|\ell_i| < 1$) et la série de $\Theta^{-1}$ converge normalement pour un difféo dilatant ($|\ell_i| > 1$).*

*Preuve.* — Chacune de ces quatre séries se présente sous la forme $1 + \sum A^{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}}$. Pour prouver sa *divergence générique* en présence de petits diviseurs, il suffit de considérer une infinité de séquences $\boldsymbol{\omega}^r = (\omega_1^r, \ldots, \omega_r^r)$ dont les composantes $\omega_i^r$ sont prises dans un ensemble $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ fixe et dont les sommes $\|\boldsymbol{\omega}^r\|$restent bornées. On aura alors pour tout $r$ et tous $U, V$ :

$$(4.21) \qquad |A^{\boldsymbol{\omega}^r}| \geq Q^r \qquad (Q = \text{const} > 0)$$

$$(4.22) \qquad \|\mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}^r}\|_{U,V} \geq r!(Q_{U,V})^r \qquad (Q_{U,V} = \text{const} > 0)$$

dès que $\mathbf{B}_{\omega_1} \neq 0$, $\mathbf{B}_{\omega_2} \neq 0$, $\mathbf{B}_{\omega_3} \neq 0$. D'où la divergence de $\sum_r |A^{\boldsymbol{\omega}^r}| \cdot \|\mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}^r}\|_{U,V}$.

Pour prouver maintenant la *convergence* de $1 + \sum A^{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}}$ en l'absence de petits diviseurs (et avec la clause "contractant" ou "dilatant" pour les difféos), on commence par observer que, pour un champ, l'absence de petits diviseurs oblige les $\lambda_j$ à être tous situés dans un même demi-plan ouvert $P_\theta = \{\lambda; \mathrm{Re}(\lambda e^{i\theta}) > 0\}$. Pour un difféo, elle oblige les $\ell_j = \exp \lambda_j$ à être tous situés soit à l'intérieur soit à l'extérieur du cercle unité (exclu) : le difféo est donc contractant ou dilatant.

Cette circonstance, à son tour, fait (dans le cas d'un champ) que tous les $\omega$ de $\Omega$ sont dans $P_\theta$, sauf au plus un nombre fini (de la forme $\omega = \sum n_i \lambda_i$ avec l'*un* des $n_i$ égal à $-1$). On peut donc, au prix d'un changement de variables analytique (et même polynomial) faire en sorte que la forme préparée (4.7) du champ $X$ ne comporte plus que des opérateurs $\mathbf{B}_\omega$ d'indice $\omega$ dans $\Omega^* = \Omega \cap P_\theta$.

Pareillement, pour un difféo dilatant (resp. contractant) on peut se ramener à une forme préparée (4.8) ne comportant que des termes $\mathbf{B}_\omega$ d'indice $\omega$ dans $\Omega^* = \Omega \cap P_+$ (resp. $\Omega \cap P_-$) où $P_+$ (resp. $P_-$) désigne le demi-plan Re $\omega > 0$ (resp. Re $\omega < 0$). Une telle forme (4.7) ou (4.8) sera dite *bien préparée.*

Partons donc d'une forme bien *préparée* et montrons la convergence de $1 + \sum A^{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}}$ en utilisant les quatre inégalités suivantes, où $\boldsymbol{\omega}$ désigne une séquence quelconque sur $\Omega^*$ de longueur $r(\boldsymbol{\omega})$, de somme $\|\boldsymbol{\omega}\|$ et de

poids $N(\boldsymbol{\omega})$ défini par :

$$N(\boldsymbol{\omega}) = n_1(\omega) + \cdots + n_\nu(\omega) \tag{4.23}$$

avec $\|\boldsymbol{\omega}\| = \omega_1 + \cdots + \omega_r = n_1(\omega)\lambda_1 + \cdots + n_\nu(\omega)\lambda_\nu$ et où enfin $c(N)$ désigne le nombre de séquences $\boldsymbol{\omega}$ de poids $N$.

$$|A^{\boldsymbol{\omega}}| \leq \tfrac{1}{r(\boldsymbol{\omega})!} C_1^{N(\boldsymbol{\omega})} \qquad (C_1 \text{ const } > 0) \tag{4.24}$$

$$\|\mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}}\|_{U,V} = r(\boldsymbol{\omega})! \|\mathbf{B}_{\omega_1}\|_{U,V} \cdots \|\mathbf{B}_{\omega_r}\|_{U,V} C_2^{N(\boldsymbol{\omega})} \quad (C_2 \text{ const } > 0) \tag{4.25}$$

$$\|\mathbf{B}_\omega\|_{U,V} \leq (C_{U,V})^{N(\omega)} \qquad (\omega \in \Omega^*; C_{U,V} \text{ const } > 0) \tag{4.26}$$

$$c(N) \leq (C_3)^N \qquad (C_3 \text{ const } > 0, \text{ fonction de } V). \tag{4.27}$$

Pour un bon choix de $(U, V)$ on peut rendre $C_{U,V}$ aussi petit qu'on veut et on a alors :

$$1 + \sum_{\boldsymbol{\omega}} |A^{\boldsymbol{\omega}}| \, \|\mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}}\|_{U,V} = 1 + \sum_{N \geq 1} (C_1 C_2 C_3 C_{U,V})^N < +\infty \, . \tag{4.28}$$

PROPOSITION 4.3. Coarborification de $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}}$. — *Soit $\{\mathbf{B}_\omega, \omega \in \Omega\}$ une famille quelconque d'opérateurs différentiels en les variables $x_1, \ldots, x_\nu$. Il existe alors un unique comoule-arborescent $\mathbf{B}_{\overset{<}{\bullet}}$ qui possède les trois propriétés suivantes :*

(i) *$\mathbf{B}_{\overset{<}{\bullet}}$ est coséparatif, c'est-à-dire vérifie (3.24)*

(ii) *Si $\deg(\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}) = d$, $\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}}$ est homogène en $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_\nu}$ de degré total $d$. Autrement dit, si la séquence $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}$ possède exactement $d$ éléments minimaux et si par conséquent :*

$$\overset{<}{\boldsymbol{\omega}} = \overset{<}{\boldsymbol{\omega}}{}^1 \oplus \overset{<}{\boldsymbol{\omega}}{}^2 \oplus \cdots \oplus \overset{<}{\boldsymbol{\omega}}{}^d \quad (\text{avec } \overset{<}{\boldsymbol{\omega}}{}^i \text{ irréductible et } \neq \emptyset) \tag{4.29}$$

*l'opérateur $\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}}$ est de la forme :*

$$\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} = \sum b_\delta(x)(\partial_x)^\delta \quad (\text{avec } \delta = (\delta_1, \ldots, \delta_\nu) \text{ et } \sum \delta_i = d). \tag{4.30}$$

(iii) *Si $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}} = \omega_1 \bullet \overset{<}{\boldsymbol{\omega}}{}_*$ (autrement dit si $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}$ possède un plus petit élément $\omega_1$ suivi d'une séquence arborescente $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}{}_*$) on a la factorisation :*

$$\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} x_i \equiv \mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}{}_*} \mathbf{B}_{\omega_1} x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu) \, . \tag{4.31}$$

*D'autre part, si les $\mathbf{B}_\omega$ vérifient (4.10), le comoule cosymétral $\mathbf{B}_\bullet$ défini par (4.14) admet $\mathbf{B}_{\overset{<}{\bullet}}$ pour coarborifié (au sens de (3.33)). Pareillement, si les $\mathbf{B}_\omega$ vérifient (4.12), le comoule cosymétrel $\mathbf{B}_\bullet$ défini par (4.14) admet $\mathbf{B}_{\overset{<}{\bullet}}$*

*pour coarborifié contractant (au sens de (3.34)). Dans les deux cas, on dit que* $\mathbf{B}_{\overset{<}{\bullet}}$ *est* **le** *coarborifé de* $\mathbf{B}_{\overset{<}{\bullet}}$ *homogène en* $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_\nu}$.

*Preuve.* — Il faut d'abord vérifier, par récurrence sur $r = r(\overset{<}{\omega})$, que les conditions (i), (ii), (iii) déterminent entièrement $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}}$. Pour $r = 0$ , la coséparativité impose $\mathbf{B}_\emptyset = 1$. Pour $r = 1$, la relation (4.31) avec $\overset{<}{\omega}_* = \emptyset$ donne $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}_1} \cdot x_i \equiv \mathbf{B}_{\omega_1} \cdot x_i$. D'où, compte tenu de l'homogénéité de degré $d = 1$ :

$$\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}_1} = \sum_{i=1}^{\nu} (\mathbf{B}_{\omega_1} x_i) \partial_{x_i} \qquad (\partial_{x_i} = \partial/\partial_{x_i}) \ . \tag{4.32}$$

Pour $r \geq 2$, deux cas peuvent se présenter. Ou bien $\overset{<}{\omega}$ est irréductible et donc de la forme $\overset{<}{\omega} = \omega_1 \bullet \overset{<}{\omega}_*$ et de degré $d = 1$. Par suite :

$$\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}} = \sum_i (\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}_*} \mathbf{B}_{\omega_1} x_i) \partial_{x_i} \ . \tag{4.33}$$

Ou bien $\overset{<}{\omega}$ est réductible de degré $d \geq 2$ et donc de la forme (4.29). En ce cas, l'homogénéité de degré $d$ jointe à l'exigence de coséparativité (3.24) imposent à $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}}$ la forme :

$$\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}} = \frac{1}{d_1! \cdots d_s!} \sum_{\binom{i_1,\dots,i_d}{j_1,\dots,j_d}} (\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}^{j_1}} \cdot x_{i_1}) \cdots (\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}^{j_d}} \cdot x_{i_d}) \partial_{x_{i_1}} \cdots \partial_{x_{i_d}} \tag{4.34}$$

où $d_1, d_2, \dots, d_s$ désignent les nombres de séquences arborescentes $\overset{<}{\omega}^j$ *identiques* dans la décomposition (4.29), avec bien sûr $\sum d_i = d$. Mais comme les $\overset{<}{\omega}^j$ sont irréductibles, on peut les calculer par (4.33). Finalement, dans un cas comme dans l'autre, l'opérateur $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}}$ se déduit des opérateurs $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}'}$ avec $r(\overset{<}{\omega}') < r(\overset{<}{\omega})$ et le comoule-arborescent $\mathbf{B}_{\overset{<}{\bullet}}$ est donc entièrement déterminé par la donnée des opérateurs $\mathbf{B}_\omega$ pour $\omega \in \Omega$.

Reste à montrer que, pour des $\mathbf{B}_\omega$ associés à un champ (resp. à un difféo), c'est-à-dire vérifiant (4.10) (resp. (4.12)), $\mathbf{B}_{\overset{<}{\bullet}}$ est effectivement coarborifié (resp. coarborifié contractant) de $\mathbf{B}_\bullet$. Commençons par un champ. Fixons une séquence totalement ordonnée $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ et considérons l'opérateur $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}}$ défini par la factorisation (4.14). Puis considérons une séquence arborescente $\overset{<}{\omega}$ formée avec les mêmes $\omega_i$ et l'opérateur $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}}$ que nous venons juste de construire. On s'aperçoit alors qu'appliquer l'opérateur $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}}$ à une fonction d'épreuve $\varphi(x)$ revient à lui appliquer l'opérateur

$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}}$, mais en faisant agir le facteur $\mathbf{B}_{\omega_j}$ *uniquement sur* $\varphi(x)$ lorsque $j$ est minimal (pour l'ordre de $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}$) et *uniquement sur les coefficients de l'opérateur* $\mathbf{B}_{\omega_i}$ lorsque $i$ et $j$ sont consécutifs (*i.e.* $i = j_-$ pour l'ordre de $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}$). D'où l'identité (3.33).

On raisonne de la même manière pour un difféo en observant au préalable que pour tout $\omega_0$ de $\Omega$ :

$$\mathbf{B}_{\omega_0} = \sum \operatorname{cont}\begin{pmatrix}\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}\\ \omega_0\end{pmatrix}\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} \qquad \left(\operatorname{cont}\begin{pmatrix}\bullet\\ \bullet\end{pmatrix} \text{ comme en (3.34) }\right) \tag{4.35}$$

avec une somme étendue aux seuls $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}$ d'éléments incomparables et de somme $\|\boldsymbol{\omega}\| = \omega_0$, c'est-à-dire de la forme :

$$\overset{<}{\boldsymbol{\omega}} = (\omega_1 \oplus \omega_2 \oplus \cdots \oplus \omega_r) \text{ avec } \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_r = \omega_0 \ . \tag{4.35 bis}$$

Notons que la relation de coarborification (3.33) est un cas particulier de la relation :

$$\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}^2}\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}^1} = \sum \operatorname{proj}\begin{pmatrix}\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}\\ \overset{<}{\boldsymbol{\omega}}^1 \bullet \overset{<}{\boldsymbol{\omega}}^2\end{pmatrix}\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} \tag{4.36}$$

où $\operatorname{proj}\left(\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\ \bullet\end{smallmatrix}\right)$ désigne bien sûr le nombre d'injections monotones de $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}$ dans la séquence $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}^1 \bullet \overset{<}{\boldsymbol{\omega}}^2$ (lire : $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}^1$ *puis* $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}^2$) avec son ordre naturel (qui en général n'est pas arborescent). Plus simplement, $\operatorname{proj}\left(\begin{smallmatrix}\bullet\\ \bullet\ \bullet\end{smallmatrix}\right)$ s'interprète comme le nombre de façons dont $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}^1, \overset{<}{\boldsymbol{\omega}}^2$ peut être obtenu comme partition monotone de $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}$. Notons aussi que, tant pour la caractérisation du coarborifié $\mathbf{B}_{\overset{<}{\bullet}}$ que pour sa construction, la loi (4.36) pourrait remplacer la règle (4.31).

PROPOSITION 4.4. Convergence des séries arborifiées. — *En l'absence de quasirésonance, c'est-à-dire sous la condition diophantienne (2.6), les séries arborifiées donnant les normalisateurs :*

$$\Theta = 1 + \sum \mathcal{S}^{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}}\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} \qquad \textit{(pour un champ)} \tag{4.37}$$

$$\Theta^{-1} = 1 + \sum \mathcal{S}^{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}}\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} \qquad \textit{(pour un champ)} \tag{4.38}$$

$$\Theta = 1 + \sum \mathcal{S}^{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}}\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} \qquad \textit{(pour un difféo)} \tag{4.39}$$

$$\Theta^{-1} = 1 + \sum \mathcal{S}^{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}}\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} \qquad \textit{(pour un difféo)} \tag{4.40}$$

*convergent en norme vers des opérateurs* $\Theta$ *et* $\Theta^{-1}$ *qui sont des automorphismes de* $\mathbf{C}\{x\}$.

*Preuve.* — L'équivalence formelle des séries $\sum A^{\overset{<}{\omega}}\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}}$ de la proposition ci-dessus et des séries $\sum A^{\omega}\mathbf{B}_{\omega}$ de la proposition 4.1 tient, très banalement, à la dualité des opérations d'arborification (3.31) (3.32) et de coarborification (3.33) (3.34). Mais l'arborification ne se réduit pas à un simple transvasement de termes. Elle modifie très sensiblement la nature des séries : elle supprime les *résonances fictives* et surtout elle assure la *convergence normale*, même en présence de petits diviseurs diophantiens.

Le premier effet résulte du lemme suivant, relatif au comoule $\mathbf{B}_{\overset{<}{\bullet}}$ construit à partir des composantes homogènes $\mathbf{B}_{\omega}$ de la forme préparée (4.7) ou (4.8) d'un champ ou d'un difféo.

LEMME 4.5. — *Si une séquence $\overset{<}{\omega}$ arborescente sur $\Omega$ est irréductible et de somme $\| \overset{<}{\omega} \| \notin \Omega$, alors $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}} = 0$. La conclusion reste vraie si $\overset{<}{\omega}$ possède ne fût-ce qu'une partition monotone $\overset{<}{\omega}^1, \overset{<}{\omega}^2, \ldots, \overset{<}{\omega}^s$ avec une partie $\overset{<}{\omega}^i$ irréductible et de somme $\| \overset{<}{\omega}^i \| \notin \Omega$.*

On montre le premier point en observant que si $\overset{<}{\omega}$ a une somme $\| \overset{<}{\omega} \| = \omega_0 = \sum n_i \lambda_i$ extérieure à $\Omega$, les $n_i$ *négatifs* figurant dans cette décomposition possèdent une somme $\sum^* n_i \leq -2$. Si de plus $\overset{<}{\omega}$ est irréductible, on a $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}} = x^{n(\omega_0)} \sum b_j x_j \partial_{x_j}$ avec des $b_j$ scalaires et des monômes $x_j x^{n(\omega_0)} = x_j \prod x_i^{n_i}$ dont chacun comporte au moins une puissance négative. Mais le mode de construction des $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}}$ par induction sur $r(\overset{<}{\omega})$ ne peut conduire qu'à des puissances positives. D'où $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}} = 0$ pour un tel $\overset{<}{\omega}$.

Le cas d'un $\overset{<}{\omega}$ admettant une partie $\overset{<}{\omega}^i$ irréductible avec $\| \overset{<}{\omega}^i \| \notin \Omega$ s'y ramène. En effet, d'après les règles (4.31) et (4.34) la nullité d'un $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}^i}$ pour $\overset{<}{\omega}^i$ irréductible, entraîne celle de tout $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}}$ dont l'indice $\overset{<}{\omega}$ possède $\overset{<}{\omega}^i$ pour partie *commençante* ou *finissante* et *donc* aussi de tout $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}}$ dont l'indice $\overset{<}{\omega}$ possède $\overset{<}{\omega}^i$ comme partie *intermédiaire* (d'une partition monotone).

Ceci acquis, on note que $S^{\overset{<}{\omega}}$ (resp. $\mathcal{S}^{\overset{<}{\omega}}$ ) est défini et fini si $\overset{<}{\omega}$ ne possède aucune partie irréductible *commençante* (resp. *finissante*) $\overset{<}{\omega}_*$ de somme $\|\overset{<}{\omega}_*\| = 0$. Pareillement $\mathcal{S}^{\overset{<}{\omega}}$ (resp. $\mathcal{S}^{\overset{<}{\omega}}$) est défini et fini si $\overset{<}{\omega}$ ne possède aucune partie irréductible *commençante* (resp. *finissante*) de

somme $\|\overleftarrow{\omega}_*\| = 0 \bmod 2\pi$.

On voit par là que l'arborification supprime les résonances fictives et les singularités apparentes. Soit par exemple un champ $X$ sur $\mathbf{C}^3$ de spectre non résonnant $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et soient deux indices $\omega_1 = -\lambda_1 + p\lambda_3$ et $\omega_2 = -\lambda_2 + q\lambda_3$ dans $\Omega$. Comme ici $\omega_1 + \omega_2 \notin \Omega$, on peut avoir une résonance fictive $\omega_1 + \omega_2 = 0$, auquel cas la série moulienne de $\Theta$ contient deux termes :

$$S^{\omega_1,\omega_2}\mathbf{B}_{\omega_1,\omega_2} + S^{\omega_2,\omega_1}\mathbf{B}_{\omega_2,\omega_1}$$

dont aucun, pris séparément, n'est défini. Dans le développement arborifié, cette somme est remplacée par un terme unique, à savoir $S^{\overleftarrow{\omega}}\mathbf{B}_{\overleftarrow{\omega}}$ pour $\overleftarrow{\omega} = (\omega_1 \oplus \omega_2)^<$, qui est bien défini.

Montrons maintenant que, contrairement aux séries mouliennes de la proposition 4.1, qui divergeaient en présence de petits diviseurs (même diophantiens), leurs homologues arborifiées convergent toujours (en l'absence de quasirésonance). Cette convergence résulte des trois majorations suivantes, valables pour toute séquence arborescente $\overleftarrow{\omega}$ (ne contenant aucune partie $\overleftarrow{\omega}$ irréductible et de somme nulle) :

$$\begin{array}{llll}
(4.41) & |A^{\overleftarrow{\omega}}| & \leq Q_1^{N(\overleftarrow{\omega})} & (Q_1 \text{ const} > 0) \\
(4.42) & \|\mathbf{B}_{\overleftarrow{\omega}}\|_{U,V} & \leq \|\mathbf{B}_{\omega_1}\|_{U,V} \cdots \|\mathbf{B}_{\omega_r}\|_{U,V} Q_2^{N(\overleftarrow{\omega})} & (Q_2 \text{ const} > 0) \\
(4.43) & q(N) & \leq Q_3^N & (Q_3 \text{ const} > 0)
\end{array}$$

où $q(N)$ désigne le nombre de $\overleftarrow{\omega}$ de poids $N(\overleftarrow{\omega})$ égal à $N$. Comme (4.26) reste en vigueur, on a pour $(U, V)$ bien choisi la convergence normale :

$$(4.44) \qquad 1 + \sum |A^{\overleftarrow{\omega}}| \cdot \|\mathbf{B}_{\overleftarrow{\omega}}\|_{U,V} \leq 1 + \sum_{N \geq 1} (Q_1 Q_2 Q_3 C_{U,V})^N < +\infty \ .$$

Reste à justifier les majorations (4.41) (4.42) (4.43).

Pour (4.41), cela résulte essentiellement des majorations diophantiennes qu'a effectuées Bryuno dans [Br] pp. 207–224, sans parler de moules ni d'arbres, mais à propos du même problème. Plus exactement, les majorations de Bryuno entrainent (4.41) pour $A^{\overleftarrow{\bullet}} = S^{\overleftarrow{\bullet}}$ ou $\mathcal{S}^{\overleftarrow{\bullet}}$ compte tenu des formules (3.52) et (3.53). Puis le lemme 3.1 permet d'étendre ces majorations aux inverses multiplicatifs $S^{\overleftarrow{\bullet}}$ et $\mathcal{S}^{\overleftarrow{\bullet}}$.

La majoration (4.42) résulte facilement de la construction des $\mathbf{B}_{\overleftarrow{\omega}}$

par (4.33) et (4.34). Comme constante $Q_2$ on peut prendre :

$$(4.45) \qquad Q_2 = \sup_{\sum N_i = N} (N_1 N_2 \cdots N_s)^{1/N} = \exp(1/e) \quad (s \geq 1; N_i \geq 1) .$$

Enfin la majoration (4.43) résulte essentiellement des estimations du nombre $a_r$ (resp. $\alpha_r$) de séquences arborescentes $\overset{<}{\omega}$ générales (resp. à plus petit élément) de termes identiques ($\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_r$). On a la récurrence immédiate :

$$(4.46) \qquad \alpha_{r+1} = a_r \text{ et } a_r \leq \sum_{r_1 + \cdots + r_s = r} \alpha_{r_1} \cdots \alpha_{r_s} .$$

Il s'ensuit que les fonctions génératrices $\alpha(x) = \sum \alpha_r x^r$ et $a(x) = \sum a_r x^r$, ($r \geq 1$) sont liées par :

$$(4.47) \qquad x \cdot (1 + a(x)) = \alpha(x) \text{ et } a(x) \lll \alpha(x) \cdot (1 - \alpha(x))^{-1}$$

où $\lll$ signale la majoration terme à terme des coefficients. De (4.47) on tire que $a(x) \lll b(x)$ avec $b(x)$ solution de :

$$(4.48) \qquad x \cdot (1 + b(x))^2 = b(x) \text{ et } b(x) = b_1 x + \cdots .$$

D'où $b(x) = (1-2x)(2x)^{-1} - (1-4x)^{1/2}(2x)^{-1}$ et $a_r \leq b_r \leq \text{const}\, 4^n$. D'où finalement la majoration (4.43) avec par exemple $Q_3 = 4 \cdot 2^\nu$.

Comme corollaire de la proposition 4.4 on retrouve ce résultat, dû à Bryuno pour les champs et à Rüsmann pour les difféos :

COROLLAIRE. — *En l'absence de résonance et de quasirésonance, tout champ local sur* $\mathbf{C}^\nu$ *ou tout difféo local sur* $\mathbf{C}^\nu$ *est analytiquement linéarisable.*

*Première remarque.* — Il faut bien comprendre pourquoi l'*arborification*, dans ce problème et dans beaucoup d'autres, permet de rétablir la *convergence*. Au premier abord, l'arborification se présente comme une simple redistribution des termes en présence : chaque $A^{\overset{<}{\omega}}$ regroupe *plus* de termes que les $A^\omega$ subordonnés; tandis que chaque $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}}$ regroupe *moins* de termes que les $\mathbf{B}_\omega$ subordonnés. Ce second point, très banal, explique la petitesse de $\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}}$ par rapport à $\mathbf{B}_\omega$, ce qui se traduit ici par la disparition dans (4.42) du facteur $r(\omega)!$ qui figurait dans (4.25). Mais le point important et non trivial est qu'il n'y a pas accroissement concommittant de $A^{\overset{<}{\omega}}$ par rapport à $A^\omega$. Ici par exemple, bien que $A^{\overset{<}{\omega}}$ regroupe un grand nombre de termes $A^\omega$ (ce nombre est voisin de $r(\omega)!$

en moyenne), la majoration (4.41), qui est valable pour les séquences arborescentes $\overset{<}{\omega}$ et donc aussi pour les $\omega$ totalement ordonnés, montre que $A^{\overset{<}{\omega}}$ et $A^{\omega}$ sont du même ordre de grandeur. (*)

*Deuxième remarque.* — Dans ce cas précis, l'arborification ajoute peu (en dehors des formules explicites qu'elle livre) aux démonstrations classiques (Bryuno et Rüssmann) de la linéarisabilité analytique des objets sans résonance ni quasirésonance. Mais cette méthode à l'avantage de s'étendre à de nombreux autres problèmes et elle permet presque toujours d'effectuer d'une façon automatique tous les *regroupements significatifs* (c'est-à-dire ceux qui conduisent aux majorations permettant de conclure à la convergence) et *eux seuls* (ce qui n'est pas moins important, car des regroupements plus amples brouilleraient tout et pourraient empêcher de conclure). L'arborification s'applique en particulier aux trois problèmes suivants :

(i) la superposition de résonance et de petits diviseurs : voir les §§8,9 ci-après.

(ii) la linéarisation non-entière des champs de vecteurs locaux quasi-résonnants au moyen de séries de "compensateurs" : voir [E6] §2.4, §3.2 et [E8].

(iii) les équations ou systèmes de composition du type :

$$f^{\circ n_1} \circ g_1 \circ f^{\circ n_2} \circ g_2 \circ \cdots \circ f^{\circ n_r} \circ g_r \equiv \mathrm{id} \tag{4.42}$$

($f$ inconnue; $g_i$ données; $n_i \in \mathbf{Z}$).

## 5. Généralités sur les objets résonnants. Formes normales et réseaux de résurgence.

Un champ local $X$ ou un difféo local $f$ est dit *résonnant* si certaines des combinaisons entières (2.4) ou (2.5) s'annulent. Lorsque seules un nombre fini de telles combinaisons s'annulent, elles sont nécessairement du type :

$$\Big(\sum_{i\neq j} m_i\lambda_i\Big) - \lambda_j \quad \text{ou} \quad \Big(\prod_{i\neq j} \ell_i^{m_i}\Big) - \ell_j \quad (m_i \in \mathbf{N}) \tag{5.1}$$

et on parle alors de *semirésonance* ou de *résonance de degré* $\mu = 0$. Ce cas est très spécial et de faible intérêt (**).

(*) Un autre aspect de l'arborification, déjà signalé, est l'élimination des *résonances* et des *singularités* fictives.

(**) La semirésonance peut engendrer des invariants analytiques (*cf.* [B] p. 234, exemple 2) mais pas d'invariants holomorphes.

Lorsqu'au contraire il existe une infinité de relations de résonance, on note $\mu$ le nombre maximum de relations *indépendantes* du type :

$$\sum m_i\lambda_i = 0 \quad \text{ou} \quad \prod \ell_i^{m_i} = 1 \quad (m_i \in \mathbf{N}) \tag{5.2}$$

et on dit que l'objet présente $\mu$ *degrés de résonance* ("vraie" ou "positive"). Les $m = (m_1, \ldots, m_\nu)$ de composantes $m_i$ premières entre elles sont les *résonnateurs* de l'objet.

Pour les difféos, une complication supplémentaire vient de la *torsion*. La torsion est le plus grand entier $\tau \geq 1$ tel qu'on ait l'inclusion :

$$(\lambda_0/\tau)\mathbf{Z} \subset \lambda_0\mathbf{Z} + \lambda_1\mathbf{Z} + \cdots + \lambda_\nu\mathbf{Z} = \Omega^{\text{ext}} \tag{5.3}$$

avec $\lambda_0 = 2\pi i$; $\lambda_1 = \log \ell_1, \ldots, \lambda_\nu = \log \ell_\nu$. (Le groupe $\Omega^{\text{ext}}$ ne dépend pas des déterminations choisies). L'itérée d'ordre $\tau$ d'un difféo de torsion $\tau$ est "sans torsion" (*i.e.* sa torsion vaut 1), ce qui permet en pratique de se limiter aux difféos "sans torsion". C'est ce que nous ferons. Pour un difféo "sans torsion", il existe une détermination *cohérente* des logarithmes $\lambda_j = \log \ell_j$, c'est-à-dire une détermination qui respecte les relations de résonance :

$$\left\{\prod \ell_i^{m_i} = \ell_j\right\} \Longrightarrow \left\{\sum n_i\lambda_i = \lambda_j\right\}. \tag{5.4}$$

On passe d'une détermination cohérente à une autre par les relations :

$$\lambda_j \longmapsto \lambda_j^* = \lambda_j + q_j\lambda_0, \quad (\lambda_0 = 2\pi i \text{ et } q = (q_1, \ldots, q_\nu) \in \mathbf{Z}^\nu) \tag{5.5}$$

pour des $q$ orthogonaux à tous les résonnateurs : $\sum m_i q_i = 0$.

**Formes normales.**

Un objet résonnant n'est généralement pas linéarisable, même formellement; mais il possède des *formes prénormales*, qui ne contiennent que des monômes résonnants, et parmi celles-ci des *formes normales*, qui contiennent le "moins possible" de monômes résonnants. Les changements de variables normalisants sont généralement divergents. Plus précisément, ils sont résurgents (*cf.* §6) en une certaine variable $z$ liée au(x) monôme(s) résonnant(s). Il en va de même de l'*intégrale formelle* $\tilde{x}(z, u)$ associée à l'objet (voir (8.51) (8.52)). Elle aussi est résurgente en $z$ et la description de sa résurgence commande toute l'étude de l'objet local : ses invariants; ses normalisateurs; ses itérés; ses structures invariantes associées; etc... Mais la nature de cette résurgence dépend beaucoup des "réseaux" engendrés par les multiplicateurs et dont voici la définition.

**Réseaux de résurgence $\Omega$, $\Omega^+$, $\Omega^{\text{int}}$, $\Omega^{\text{ext}}$.**

Pour un champ ils sont définis comme suit :

(5.6) $\Omega^+ \quad = \lambda_1\mathbf{N} + \lambda_2\mathbf{N} + \cdots + \lambda_\nu\mathbf{N}$

(5.7) $\Omega \quad = \{\omega; \omega = \sum n_i\lambda_i - \lambda_j$ avec $n_i \in \mathbf{N}$ et $1 \leq j \leq \nu\}$

(5.8) $\Omega^{\text{int}} \quad = (\Omega) \cap (-\Omega) =$ plus grand sous-groupe de $\Omega$

(5.9) $\Omega^{\text{ext}} \quad = \lambda_1\mathbf{Z} + \lambda_2\mathbf{Z} + \cdots + \lambda_\nu\mathbf{Z} =$ plus petit sur-groupe de $\Omega$ .

Pour un difféo (sans torsion) on ajoute à chacun des réseaux précédents le "réseau universel " $\Omega^0 = \lambda_0\mathbf{Z}$ engendré par le "multiplicateur imaginaire" $\lambda_0 = 2\pi i$. Les réseaux obtenus ne dépendent pas des déterminations $\lambda_j = \log \ell_j$, pourvu que celles-ci soient cohérentes.

Voici pour un objet local (champ ou difféo) l'interprétation des divers réseaux.

Le réseau $\Omega$ indexe les dérivations étrangères (*cf.* §6) *agissantes*, c'est-à-dire susceptibles d'agir non-trivialement sur l'intégrale formelle. Quand $\Omega$ n'est pas discret, des petits diviseurs (diophantiens ou liouvilliens) viennent se greffer sur la résurgence et on est contraint d'*arborifier* (*cf.* §§3,4,8,9).

Le réseau positif $\Omega^+$ indexe les composantes de l'intégrale formelle et permet aussi de décrire l'emplacement de leurs singularités (dans le plan de Borel).

Le réseau extérieur $\Omega^{\text{ext}}$ indexe les composantes $\Theta^{\omega\pm}$ des normalisateurs et il rassemble les projections (sur $\mathbf{C}$) de *toutes* les singularités de *toutes* les composantes de l'intégrale formelle (dans le plan de Borel).

Le réseau intérieur $\Omega^{\text{int}}$ indexe les dérivations étrangères susceptibles d'agir sur chaque composante de l'intégrale formelle. De sa forme dépend crucialement la nature de la résurgence. Comme $\Omega^{\text{int}}$ est un sous-groupe de $\mathbf{C}$, six cas seulement sont possibles :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Cas 1 : | $\Omega^{\text{int}}$ | $= \{0\}$ | (ce n'est possible que pour un champ) |
| Cas 2 : | $\Omega^{\text{int}}$ | $= \alpha\mathbf{Z}$ | $(\alpha \in \mathbf{C}^*)$ |
| Cas 3 : | $\Omega^{\text{int}}$ | $= \alpha\mathbf{Z} + \beta\mathbf{Z}$ | $(\alpha, \beta \in \mathbf{C}^*;\ \alpha/\beta \notin \mathbf{R})$ |
| Cas 4 : | $c\ell(\Omega^{\text{int}})$ | $= \alpha\mathbf{R}$ | $(\alpha \in \mathbf{C}^*;\ \lvert\alpha\rvert = 1)$ |
| Cas 5 : | $c\ell(\Omega^{\text{int}})$ | $= \alpha\mathbf{R} + \beta\mathbf{Z}$ | $(\alpha, \beta \in \mathbf{C}^*;\ \lvert\alpha\rvert = 1;\ \alpha/ \notin \mathbf{R})$ |
| Cas 6 : | $c\ell(\Omega^{\text{int}})$ | $= \mathbf{C}$ . | |

Bien sûr, $c\ell(\Omega^{\text{int}})$ désigne la clôture ou fermeture de $\Omega^{\text{int}}$ dans $\mathbf{C}$. Seuls les cas 1 et 2 se prêtent à une étude purement "géométrique" (*cf.* §1 et §13) mais tous peuvent être traités par la résurgence. Quand $\Omega^{\text{int}}$ est discret (cas 1,2,3) la résurgence ordinaire suffit. Sinon (cas 4,5,6) il faut recourir à la *résurgence cohésive* (*cf.* §§9, 10).

Nous nous limiterons dans cet article au cas d'un seul degré de résonance ($\mu = 1$). Pour un champ, cela signifie que les multiplicateurs vérifient une seule relation *irréductible* du type :

$$m_1\lambda_1 + \cdots + m_\nu\lambda_\nu = 0 \tag{5.10}$$

avec $m_i \in \mathbf{N}$ et $m_1, \ldots, m_\nu$ premiers entre eux. Pour un difféo sans torsion, cela signifie que les multiplicateurs sont de la forme $\ell_j = \exp \lambda_j$ avec des $\lambda_j$ comme ci-dessus.

De tels objets à un degré de résonance possèdent $1+\nu+p\nu$ invariants formels, dont deux (en dehors du spectre) sont essentiels : le *niveau* $p$ (qui est un entier $\geq 1$ et $\leq +\infty$) et le *résidu* $\rho$, qui est un nombre complexe. Pour un champ $X$ , $p$ et $\rho$ sont caractérisés par l'existence d'une série formelle $\widetilde{\varphi} \in \mathbf{C}[[x]]$ telle que :

$$X \cdot \widetilde{\varphi} = (1/p) \cdot (\widetilde{\varphi})^{1+p} \cdot (1 + \rho(\widetilde{\varphi})^p)^{-1} \quad (ou \ = 0 \ si \ p = \infty) \ . \tag{5.11}$$

Quant aux difféos sans torsion, on dit qu'ils ont pour invariants $p$ et $\rho$ s'ils sont l'exponentielle d'un champ formel $\widetilde{X}$ d'invariants $p$ et $\rho$.

Nous traiterons dans la suite le cas-type, c'est-à-dire le cas $(p, \rho) = (1, 0)$, car il manifeste à lui seul toutes les difficultés d'analyse propres à ces questions. Le cas général ($p, \rho$ quelconques) est très analogue et sera évoqué au §13, ainsi que les cas à plusieurs degrés de résonance ($\mu \geq 2$).

## 6. Rappels sur la résurgence. Monômes résurgents et moules associés.

Commençons par un bref rappel sur les fonctions résurgentes et les dérivations étrangères, destiné à fixer les notations et normalisations utilisées ici.

### a) L'algèbre des fonctions résurgentes et ses trois modèles.

$\dot{\mathbf{C}}$ désigne la surface de Riemann du logarithme, avec ses deux points de ramification $\dot{O}$ et $\dot{\infty}$, sa multiplication naturelle et sa projection $\omega \mapsto \dot{\omega}$ sur $\mathbf{C}$. L'algèbre $\dot{\mathrm{RES}}$ des fonctions résurgentes possède trois modèles : *formel, géométrique(s), convolutif.*

Le *modèle formel* $\widetilde{\mathrm{RES}}$ a pour éléments des séries formelles en $z^{-1}$ :

$$\widetilde{\varphi}(z) = \sum a_n z^{-n} \qquad (n \in \mathbf{N}) \tag{6.1}$$

ou d'un type plus général :

$$\tilde{\varphi}(z) = \sum a_n \varepsilon_n(z) \qquad (\varepsilon_n \text{ décroissant en } n) \tag{6.2}$$

pour une indexation finie ou transfinie et avec des $\varepsilon_n(z)$ définies, holomorphes, à croissance subexponentielle au voisinage de $\underset{\bullet}{\infty} \in \underset{\bullet}{\mathbf{C}}$. Le produit est la multiplication des séries formelles.

Les *modèles géométriques* ${}^{\theta}$RES de direction $\theta \in \mathbf{R}$ ont pour éléments des germes $\varphi(z) = {}^{\theta}\varphi(z)$ définis, holomorphes et à croissance subexponentielle sur des domaines $\mathrm{Re}(ze^{i\theta}) \geq c(\varphi)$. Le produit est la multiplication ponctuelle des germes.

Le modèle convolutif $\overset{\mathbf{v}}{\mathrm{RES}}$ a pour éléments des paires $\overset{\mathbf{v}}{\varphi} = (\check{\varphi}, \hat{\varphi})$ de *majeurs* $\check{\varphi}$ (définis modulo l'espace REG des germes réguliers en $\underset{\bullet}{O}$) et de *mineurs* $\hat{\varphi}$ (définis exactement) liés par $\hat{\varphi}(\zeta) = \check{\varphi}(\zeta) - \check{\varphi}(\zeta e^{-2\pi i})$ pour $\zeta$ voisin de $\underset{\bullet}{O}$. Les majeurs $\check{\varphi}(\zeta)$ sont des germes *holomorphes* en $\underset{\bullet}{O}$, *prolongeables partout sans coupure* au-dessus de $\underset{\bullet}{\mathbf{C}}$ (*i.e.* le long de toute ligne brisée tracée sur $\underset{\bullet}{\mathbf{C}}$ et en contournant éventuellement, à droite comme à gauche, un nombre fini de points). Se donner $\overset{\mathbf{v}}{\varphi}$ équivaut donc à se donner <u>une classe</u> de majeurs modulo REG et cette donnée détermine <u>le</u> mineur $\hat{\varphi}$. L'inverse est évidemment faux : sauf dans des sous-algèbres spéciales, la donnée d'un mineur ne suffit pas. D'ailleurs, le défaut d'information dans un mineur est exactement égal à l'excès d'information dans un majeur.

Le produit dans le modèle convolutif est la convolution des classes $\overset{\mathbf{v}}{\varphi}_1 * \overset{\mathbf{v}}{\varphi}_2$ induite par la convolution des majeurs :

$$\check{\varphi}_1 *_u \check{\varphi}_2(\zeta) = \int_u^{\zeta - u} \check{\varphi}_1(\zeta_1)\check{\varphi}_2(\zeta - \zeta_1)\, d\zeta_1 = \check{\varphi}_{3,u}(\zeta) \tag{6.3}$$

où $u$ est un point auxiliaire arbitraire mais proche de $\underset{\bullet}{O}$. Le majeur $\check{\varphi}_{3,u}$ dépend de $u$, mais sa classe $\overset{\mathbf{v}}{\varphi}_3$ ne dépend ni de $u$ ni du choix des majeurs $\check{\varphi}_1, \check{\varphi}_2$ dans leur classe. Dans le cas spécial où les classes sont déterminées par la donnée du seul mineur :

$$\zeta\check{\varphi}(\zeta) \to 0 \text{ pour } \zeta \to \underset{\bullet}{O} \text{ et } \int_0^u |\hat{\varphi}(\zeta)|\, |d\zeta| < +\infty \quad (u \sim \underset{\bullet}{O}) \qquad (*) \tag{6.4}$$

la convolution des classes $\overset{\mathbf{v}}{\varphi}$ équivaut à la convolution des mineurs $\hat{\varphi}$ :

$$\hat{\varphi}_1 * \hat{\varphi}_2(\zeta) = \int_0^{\zeta} \hat{\varphi}_1(\zeta_1)\hat{\varphi}_2(\zeta - \zeta_1)\, d\zeta_1 \qquad (\zeta \sim \underset{\bullet}{O})\,. \tag{6.5}$$

(*) on suppose donc que le mineur est absolument intégrable en $\underset{\bullet}{O}$ le long de tout rayon.

**b) Passages d'un modèle à un autre.**

$$
\begin{tikzcd}
{}^{\theta}\mathrm{RES} \arrow[dr, leftrightarrows, "\mathcal{B}"'] & & \\
& \overset{\mathbf{v}}{\mathrm{RES}} \arrow[ul, leftrightarrows, "\mathcal{L} = {}^{\theta}\mathcal{L}"'] & \\
\widetilde{\mathrm{RES}} \arrow[ur, leftrightarrows, "\widetilde{\mathcal{B}}"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l}
(\mathcal{L} = \text{ Laplace}) \\[2ex] \\[2ex] (\mathcal{B} = \text{ Borel})
\end{array}
\tag{6.6}
$$

On passe du *modèle convolutif* au *modèle géométrique* par la transformation de Laplace de direction $\theta$ :

$$\mathcal{L} = {}^{\theta}\mathcal{L} \ : \ \overset{\mathbf{v}}{\mathrm{RES}} \longrightarrow {}^{\theta}\mathrm{RES} \ ; \ \overset{\mathbf{v}}{\varphi} = (\check{\varphi}, \hat{\varphi}) \longmapsto {}^{\theta}\varphi \tag{6.7}$$

$$ {}^{\theta}\varphi(z) = \int_{u'}^{u} \check{\varphi}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta + \int_{u}^{\infty_{\bullet}} \hat{\varphi}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta \tag{6.7 bis}$$

(pour $u, u' \sim_{\underset{\bullet}{O}}$; $u' = ue^{-2\pi i}$) la deuxième intégrale étant prise sur un axe $\arg\zeta = \theta$ où le mineur ne possède pas de singularité. S'il en possède, il faut les contourner toutes du même côté, droit ou gauche, ce qui conduit à deux déterminations ${}^{\theta\pm}\varphi(z)$. Dans le cas spécial (6.4), où les mineurs déterminent les classes, l'intégrale de Laplace peut s'écrire :

$$ {}^{\theta}\varphi(z) = \int_{\underset{\bullet}{O}}^{\infty_{\bullet}} \hat{\varphi}(\zeta) e^{-z\zeta}\, d\zeta \qquad (\arg\zeta = \theta)\ . \tag{6.7 ter}$$

Les germes ${}^{\theta}\varphi(z)$ sont définis *exactement* lorsque $\hat{\varphi}$ possède une croissance exponentielle le long de l'axe $\arg\zeta = \theta$. Sinon, ils sont définis modulo l'idéal des fonctions à *décroissance surexponentielle* sur tout secteur *intérieur* à $|\theta + \arg z| < \pi/2$.

On passe d'un *modèle géométrique* au *modèle convolutif* par la transformation de Borel $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{B} : \ {}^{\theta}\mathrm{RES} \longrightarrow \overset{\mathbf{v}}{\mathrm{RES}} \ ; \ {}^{\theta}\varphi \longmapsto \overset{\mathbf{v}}{\varphi} = (\check{\varphi}, \hat{\varphi}) \tag{6.8}$$

$$2\pi i \check{\varphi}(\zeta) = \int_{u}^{\infty} \varphi(z) e^{z\zeta}\, dz \quad (\text{pour } z, \zeta \text{ bien situés}) \tag{6.8 bis}$$

$$2\pi i \hat{\varphi}(\zeta) = \int_{\infty_1}^{\infty_2} \varphi(z) e^{z\zeta}\, dz \quad (\text{intégrer sur } \mathrm{Re}(ze^{i\theta}) = c). \tag{6.8 ter}$$

On passe du *modèle formel* au *modèle convolutif* par la transformation de Borel formelle $\widetilde{\mathcal{B}}$, c'est-à-dire en appliquant Borel $\mathcal{B}$ *séparément* à chacun des termes $z^{-n}$ ou $\varepsilon_n(z)$ des séries $\widetilde{\varphi}$ données en (6.1-2). Dans le sens inverse, on passe des modèles géométriques au modèle formel par

l'opération "prise du développement asymptotique" : la série $\widetilde{\varphi}(z)$ décrit le comportement asymptotique (ou transasymptotique, voir [E5] [E6]) du germe ${}^{\theta}\varphi(z)$ lorsque $z \to \infty$ selon une direction $\theta'$ proche de $\theta$ (*i.e.* $|\theta' - \theta| < \pi/2$).

Enfin, le passage ${}^{\theta}\varphi \mapsto {}^{\theta'}\varphi$ d'un *modèle géométrique à un autre* correspond dans le *modèle convolutif* (tensorisé par les $\delta_\omega$; voir ci-après) à un automorphisme $P^{\theta,\theta'}$ :

$$ {}^{\theta'}\mathcal{L} \cdot P^{\theta',\theta} = {}^{\theta}\mathcal{L} \tag{6.9}$$

$$P^{\theta',\theta} = 1 + \sum E^{\omega_1,\dots,\omega_r}_{\theta,\theta'} \overset{\bullet}{\Delta}_{\omega_r} \cdots \overset{\bullet}{\Delta}_{\omega_1} \qquad ((\theta,\theta') \text{ puis } (\theta',\theta)) \tag{6.10}$$

où les $\overset{\bullet}{\Delta}_{\omega_i}$ désignent les dérivations étrangères (pointées) introduites ci-dessous et où $E^{\bullet}_{\theta,\theta'}$ désigne le moule symétral défini par :

$$E^{\omega_1,\dots,\omega_r}_{\theta,\theta'} = \frac{1}{r_1! \cdots r_s!} \qquad (\text{resp. } 0) \tag{6.11}$$

si

$$\theta \leq \arg \omega_1 \leq \cdots \leq \arg \omega_r \leq \theta' \tag{6.12}$$

avec des séquences de $r_1, r_2, \dots, r_s$ valeurs égales de $\arg \omega_i$, $(r_i \geq 1)$.

### c) Dérivation naturelle et dérivations étrangères.

Les dérivations (continues) de l'algèbre RES des fonctions résurgentes sont toutes engendrables à partir de la dérivation naturelle $\partial$ et des dérivations étrangères $\Delta_\omega$. Dans les modèles multiplicatifs (*i.e.* formel ou géométriques) la *dérivation naturelle* $\partial$ est la dérivation ordinaire en $z$; dans le modèle convolutif, elle devient $\widehat{\partial}$ et équivaut à la multiplication (au sens ordinaire) par $-\zeta$ des majeurs et des mineurs.

Les *dérivations étrangères* $\Delta_\omega$ sont indexées par les points $\omega$ de $\overset{\bullet}{\mathbf{C}}$. Leur action n'est directement définissable que dans le modèle convolutif, au moyen des relations :

$$\Delta_\omega : \overset{\bullet}{\varphi} = (\check{\varphi}, \hat{\varphi}) \longmapsto \overset{\bullet}{\varphi}_\omega = (\check{\varphi}_\omega, \hat{\varphi}_\omega) \tag{6.13}$$

avec

$$\check{\varphi}_\omega(\zeta) = \sum_{\varepsilon_i = \pm} \frac{p!q!}{r!} \hat{\varphi}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{r-1},+}_{\omega_1,\dots,\omega_{r-1},\omega_r}(\zeta + \omega) \tag{6.14}$$

$$\hat{\varphi}_\omega(\zeta) = \sum_{\varepsilon_i = \pm} \frac{p!q!}{r!} \big(\hat{\varphi}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{r-1},+}_{\omega_1,\dots,\omega_{r-1},\omega_r}(\zeta + \omega) - \hat{\varphi}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{r-1},-}_{\omega_1,\dots,\omega_{r-1},\omega_r}(\zeta + \omega)\big) \tag{6.15}$$

valables pour $\zeta$ proche de $\overset{\bullet}{O}$ sur le segment $]\overset{\bullet}{O},\omega]$ et étendues par prolongement analytique partout ailleurs. Ici, les $\varepsilon_i$ désignent des signes $\pm$; les $\omega_i$ désignent les singularités du mineur $\hat{\varphi}$ que l'on rencontre en allant de $\overset{\bullet}{O}$ vers $\omega$ (avec $\omega = \omega_r$) et $\hat{\varphi}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r}_{\omega_1,\dots,\omega_r}(\zeta+\omega)$ désigne la détermination obtenue en longeant $[\overset{\bullet}{O},\omega]$ et en contournant chaque $\omega_i$ à droite (resp. à gauche) si $\varepsilon_i = +$ (resp. $-$). On voit donc que $\Delta_\omega \overset{\mathbf{v}}{\varphi}$ mesure les singularités du mineur $\hat{\varphi}$ au-dessus du point $\omega$ (et s'annule en l'absence de telles singularités).

Comme aucune ambiguïté n'est à craindre, on utilise le même symbole $\Delta_\omega$ pour noter les transmutés des opérateurs de dérivation étrangère dans les modèles multiplicatifs (*i.e.* formel et géométriques). Les dérivations étrangères engendrent une algèbre de Lie libre, mais elles sont liées à la *dérivation naturelle* $\partial$ et à la *composition* (ou produit de substitution) 0 par les relations :

(6.16) $\quad [\partial, \Delta_\omega] = \overset{\bullet}{\omega}\, \Delta_\omega$

(6.17) $\quad \Delta_\omega(f\circ g) = e^{-\overset{\bullet}{\omega}(g(z)-z)}(\Delta_\omega f)\circ g + (\partial f)\circ g \cdot \Delta_\omega g$

$$\text{si } g(z) = z + o(z)$$

écrites ici dans les modèles multiplicatifs, et qui se simplifient :

(6.16 bis) $\quad [\partial, \overset{\bullet}{\Delta}_\omega] = 0$

(6.17 bis) $\quad \overset{\bullet}{\Delta}_\omega\,(f\circ g) = (\overset{\bullet}{\Delta}_\omega\, f)\circ g + (\partial f)\circ g\cdot \overset{\bullet}{\Delta}_\omega\, g$

quand on introduit les dérivations étrangères pointées :

(6.18) $\quad \overset{\bullet}{\Delta}_\omega = e^{-\omega z}\Delta_\omega$ (modèles multiplicatifs)

(6.18 bis) $\quad \overset{\bullet}{\Delta}_\omega = \delta_\omega * \Delta_\omega$ (modèle convolutif)

qui agissent dans les algèbres de résurgence "tensorisées avec les exponentielles", c'est-à-dire, dans les modèles multiplicatifs, tensorisées avec les symboles $e_\omega = e^{\omega z}$ et, dans le modèle convolutif, tensorisée avec les symboles $\overset{\mathbf{v}}{e}_\omega$ assimilables aux diracs $\delta_\omega$ de masse 1 concentrée en $\omega$.

Les fonctions résurgentes les plus simples sont les *monômes ordinaires*, qui dans les modèles multiplicatifs s'écrivent :

(6.19) $\quad \widetilde{\varphi}_\sigma(z) = {}^\theta\varphi_\sigma(z) = z^\sigma \qquad (\sigma \in \mathbf{C})$

et qui dans le modèle convolutif deviennent $\overset{\mathbf{v}}{\varphi}_\sigma = (\check{\varphi}_\sigma, \hat{\varphi}_\sigma)$ avec :

(6.19 bis) $\quad \hat{\varphi}_\sigma(\zeta) = \zeta^{-\sigma-1}/\Gamma(-\sigma) \qquad (\sigma \in \mathbf{C})$

(6.19 ter) $\quad \check{\varphi}_\sigma(\zeta) = \zeta^{-\sigma-1}\Gamma(-\sigma-1)\cdot \frac{e^{-i\pi\sigma}}{2\pi i} \quad$ si $-\sigma \in \mathbf{C} \dot{-} \mathbf{N}^*$

(6.19 quarto) $\quad \check{\varphi}_\sigma(\zeta) = \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\log\zeta}{2\pi i} \quad$ si $-\sigma = n \in \mathbf{N}^*$ .

Ces monômes ordinaires sont des "constantes de résurgence" en ce sens que leurs mineurs ne présentent pas de singularités sur $\underset{\bullet}{\mathbf{C}}$ et que, par conséquent, toutes leurs dérivées étrangères sont nulles. Cependant ils vont nous permettre de construire les *monômes résurgents*, qui sont déjà de "vraies" fonctions résurgentes.

### d) Monômes résurgents.

Ce sont des fonctions résurgentes élémentaires qui permettent de "synthétiser" toutes les autres, ou peut s'en faut. Ces monômes sont très maniables : simples à multiplier et simples à dériver étrangèrement. En somme, les monômes résurgents sont aux dérivations étrangères ce que les monômes ordinaires sont à la dérivation naturelle.

Dans toute la suite, la lettre maigre $\eta$ désignera une paire $\binom{\omega}{\sigma}$ avec $\omega \in \Omega$ et $\sigma \in \mathbf{C}$ et les séquences $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_r)$ désigneront des paires de séquence $\binom{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\sigma}} = \binom{\omega_1,\ldots,\omega_r}{\sigma_1,\ldots,\sigma_r}$. Nous poserons.

(6.20) $^*\theta(\boldsymbol{\omega}) = {}^*\theta(\omega_1, \ldots, \omega_r) =$ nombre de $i$ tels que $\omega_1 + \cdots + \omega_i = 0$

(6.21) $\theta^*(\boldsymbol{\omega}) = \theta^*(\omega_1, \ldots, \omega_r) =$ nombre de $i$ tels que $\omega_i + \cdots + \omega_r = 0$ .

Si $\|\boldsymbol{\omega}\| = 0$ on a bien sûr $^*\theta(\boldsymbol{\omega}) = \theta^*(\boldsymbol{\omega}) = \theta(\boldsymbol{\omega})$. Nous dirons qu'une séquence est *licite* si aucune sous-séquence $\boldsymbol{\eta}' = (\eta_i, \ldots, \eta_j)$ de $\boldsymbol{\eta}$ ne vérifie simultanément les deux conditions :

$$\|\boldsymbol{\omega}'\| = 0 \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{\sigma}'\| + \theta(\boldsymbol{\omega}') \in \mathbf{N} \tag{6.22}$$

avec bien sûr $\|\boldsymbol{\omega}'\| = \omega_i + \cdots + \omega_j$ et $\|\boldsymbol{\sigma}'\| = \sigma_i + \cdots + \sigma_j$.

Enfin, pour tout $\eta = \binom{\omega}{\sigma}$ nous introduirons les fonctions uniformes sur $\mathbf{C}$ :

$$\underset{\bullet}{b}^{\eta}(z) = e^{\omega z} z^{\sigma} \quad \text{et} \quad b^{\eta}(z) = z^{\sigma} \qquad (z \in \underset{\bullet}{\mathbf{C}}) . \tag{6.23}$$

PROPOSITION 6.1. Construction des monômes résurgents. — *Pour les séquences licites $\boldsymbol{\eta}$ les relations suivantes (où $\partial = \partial_z$) :*

$$\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\emptyset} = \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\emptyset} = \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\emptyset} = \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\emptyset} = 1 \tag{6.24}$$

$$\partial \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1,\ldots,\eta_r} = - \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1,\ldots,\eta_{r-1}} \underset{\bullet}{b}^{\eta_r} \tag{6.25}$$

$$\partial \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1,\ldots,\eta_r} = + \underset{\bullet}{b}^{\eta_1} \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_2,\ldots,\eta_r} \tag{6.26}$$

$$(6.27)\qquad (e^{\partial}-1)\,\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\eta_1,\dots,\eta_r} = -(e^{\partial}\,\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\eta_1,\dots,\eta_{r-1}})\,\underset{\bullet}{b}^{\eta_r}$$

$$(6.28)\qquad (e^{\partial}-1)\,\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\eta_1,\dots,\eta_r} = +\,\underset{\bullet}{b}^{\eta_1}\cdot\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\eta_2,\dots,\eta_r}$$

*définissent sans ambiguïté quatre familles de séries formelles* $\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{A}}}^{\eta}=e^{\|\omega\|z}\widetilde{\mathcal{A}}^{\eta}$ *qui, après division par le facteur exponentiel, se présentent comme des séries* $\widetilde{\mathcal{A}}^{\eta}$ *de puissances décroissantes de* $z$ *:*

$$(6.29)\qquad \widetilde{\mathcal{V}}^{\eta} \text{ et } \widetilde{\mathcal{W}}^{\eta} \in z^{\|\sigma\|+{}^*\theta(\omega)}\mathbf{C}[[z^{-1}]]$$

$$(6.30)\qquad \widetilde{\mathcal{V}}^{\eta} \text{ et } \widetilde{\mathcal{W}}^{\eta} \in z^{\|\sigma\|+\theta^*(\omega)}\mathbf{C}[[z^{-1}]]\ .$$

*De plus, toutes ces séries formelles appartiennent à* $\widetilde{\mathrm{RES}}$, *le modèle formel de l'algèbre des* fonctions résurgentes. *Les* $\widetilde{\mathcal{V}}^{\eta}$, $\widetilde{\mathcal{V}}^{\eta}$, $\widetilde{\mathcal{W}}^{\eta}$, $\widetilde{\mathcal{W}}^{\eta}$ *avec ou sans leur facteur exponentiel (signalé par le point souscrit) sont dit* monômes résurgents.

*Preuve.* — Voir en fin de section.

*Remarque.* — Les séquences $\eta$ licites nous suffiront dans la suite (§§7,8,9) mais on pourrait faire la même construction pour des séquences $\eta$ non licites. Rien ne changerait, à deux détails près. *Premièrement*, chaque étape de la récurrence sur $r = r(\eta)$ correspondant à une séquence $\eta$ pour laquelle $\|\omega\| = 0$ et $\|\sigma\| + \theta(\omega) \in \mathbf{N}$ introduirait une constante additive arbitraire dans la définition des séries $\widetilde{\mathcal{A}}^{\eta}$. *Deuxièmement*, ces séries comporteraient des termes logarithmiques provenant de l'intégration de $z^{-1}, z^{-1}\log z$ *etc.* , si bien que dans (6.29) et (6.30) il faudrait remplacer $\mathbf{C}[[z]]$ par $\mathbf{C}[[z^{-1}, z^{-1}\log z]]$.

PROPOSITION 6.2. Dérivation étrangère des monômes résurgents. *Les seules dérivations étrangères susceptibles d'agir (sous-entendu :* non trivialement, *i.e. sans les annuler) sur les monômes résurgents sont les* $\Delta_{\omega_0}$ *d'indice* $\omega_0 \in \underset{\bullet}{\mathbf{C}}$ *de la forme :*

$$(6.31)\qquad \underset{\bullet}{\omega}_0 = w_1+\cdots+\omega_i \qquad \textit{pour } \widetilde{\mathcal{V}}^{\eta}\ (1\le i\le r(\eta))$$

$$(6.32)\qquad \underset{\bullet}{\omega}_0 = w_i+\cdots+\omega_r \qquad \textit{pour } \widetilde{\mathcal{V}}^{\eta}\ (1\le i\le r(\eta))$$

$$(6.33)\qquad \underset{\bullet}{\omega}_0 = w_1+\cdots+\omega_i+n_0\lambda_0 \qquad \textit{pour } \widetilde{\mathcal{W}}^{\eta}\ (1\le i\le r(\eta); n_0\in\mathbf{Z})$$

$$(6.34)\qquad \underset{\bullet}{\omega}_0 = w_i+\cdots+\omega_r+n_0\lambda_0 \qquad \textit{pour } \widetilde{\mathcal{W}}^{\eta}\ (1\le i\le r(\eta); n_0\in\mathbf{Z})$$

*et elles donnent lieu aux équations de résurgence suivantes :*

$$(6.35)\qquad \Delta_{\omega_0}\widetilde{\mathcal{V}}^{\eta_1,\dots,\eta_r} = \sum_{\omega_1+\cdots+\omega_i=\underset{\bullet}{\omega}_0} V_{\omega_0}^{\eta_1,\dots,\eta_i}\widetilde{\mathcal{V}}^{\eta_{i+1},\dots,\eta_r}$$

$$(6.36)\qquad \Delta_{\omega_0}\widetilde{\mathcal{V}}^{\eta_1,\dots,\eta_r} = \sum_{\omega_i+\dots+\omega_r=\overset{\bullet}{\omega}_0} \widetilde{\mathcal{V}}^{\eta_1,\dots,\eta_{i-1}}\mathcal{V}^{\eta_i,\dots,\eta_r}_{\omega_0}$$

$$(6.37)\qquad \Delta_{\omega_0}\widetilde{\mathcal{W}}^{\eta_1,\dots,\eta_r} = \sum_{\omega_1+\dots+\omega_i+n_0\lambda_0=\overset{\bullet}{\omega}_0} W^{\eta_1,\dots,\eta_i}_{\omega_0}\widetilde{\mathcal{W}}^{\eta_{i+1},\dots,\eta_r}$$

$$(6.38)\qquad \Delta_{\omega_0}\widetilde{\mathcal{W}}^{\eta_1,\dots,\eta_r} = \sum_{\omega_i+\dots+\omega_r+n_0\lambda_0=\overset{\bullet}{\omega}_0} \widetilde{\mathcal{W}}^{\eta_1,\dots,\eta_{i-1}}\mathcal{W}^{\eta_i,\dots,\eta_r}_{\omega_0}$$

*pour des* $V^{\boldsymbol{\eta}}_{\omega_0}$, $\mathcal{V}^{\boldsymbol{\eta}}_{\omega_0}$ *(resp.* $W^{\boldsymbol{\eta}}_{\omega_0}$, $\mathcal{W}^{\boldsymbol{\eta}}_{\omega_0}$ *) scalaires qui sont toujours nuls si* $\overset{\bullet}{\omega}_0 \neq \|\boldsymbol{\omega}\|$ *(resp.* $\overset{\bullet}{\omega}_0 \neq \|\boldsymbol{\omega}\| \bmod \lambda_0$*).*

*Preuve.* — Voir en fin de section.

PROPOSITION 6.3. Multiplication des monômes résurgents. — *Les moules* $\widetilde{\mathcal{V}}^{\bullet}$ *et* $\widetilde{\mathcal{V}}^{\bullet}$ *sont symétrals et mutuellement inverses. Les moules* $\widetilde{\mathcal{W}}^{\bullet}$ *et* $\widetilde{\mathcal{W}}^{\bullet}$ *sont symétrels et mutuellement inverses. Pour tout* $\omega_0$ *les moules* $V^{\bullet}_{\omega_0}$ *et* $\mathcal{V}^{\bullet}_{\omega_0}$ *(resp.* $W^{\bullet}_{\omega_0}$ *et* $\mathcal{W}^{\bullet}_{\omega_0}$*) sont alternals (resp. alternels).*

On déduit de là la règle de multiplication des monômes résurgents. Par exemple :

$$(6.39)\qquad \widetilde{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}'}\widetilde{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}''} = \sum \operatorname{sh}\binom{\boldsymbol{\eta}',\boldsymbol{\eta}''}{\boldsymbol{\eta}}\widetilde{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}} \qquad \text{(sh comme en (3.3))}$$

$$(6.40)\qquad \widetilde{\mathcal{W}}^{\boldsymbol{\eta}'}\widetilde{\mathcal{W}}^{\boldsymbol{\eta}''} = \sum \operatorname{ctsh}\binom{\boldsymbol{\eta}',\boldsymbol{\eta}''}{\boldsymbol{\eta}}\widetilde{\mathcal{W}}^{\boldsymbol{\eta}} \qquad \text{(ctsh comme en (3.4)).}$$

Etant symétrals et mutuellement inverses, les moules $\widetilde{\mathcal{V}}^{\bullet}$ et $\widetilde{\mathcal{V}}^{\bullet}$ se correspondent selon la formule (3.10). Par suite, les moules $V^{\bullet}$ et $\mathcal{V}^{\bullet}$, bien qu'alternals, se correspondent aussi selon (3.10). Pareillement, étant symétrels et mutuellement inverses, les moules $\widetilde{\mathcal{W}}^{\bullet}$ et $\widetilde{\mathcal{W}}^{\bullet}$ se correspondent selon la formule (3.11) et *donc* aussi les moules $W^{\bullet}$ et $\mathcal{W}^{\bullet}$.

*Preuve des trois propositions précédentes.* — Introduisons le moule alternal $b^{\bullet}$ défini par :

$$(6.41)\qquad b^{\emptyset} = 0\ ;\ b^{\eta_1} = z^{\sigma_1}\ ;\ b^{\eta_1,\dots,\eta_r} = 0 \quad \text{si } r \geq 2 \quad (z \in \underset{\bullet}{\mathbf{C}})$$

et reprenons la dérivation $\nabla$ de l'algèbre des moules introduite au §3, mais en ne la faisant agir que sur la partie $\boldsymbol{\omega}$ des $\boldsymbol{\eta}$. Autrement dit :

$$(6.42)\qquad (\nabla\mathcal{A})^{\boldsymbol{\eta}} = \|\boldsymbol{\omega}\|\mathcal{A}^{\boldsymbol{\eta}} \ \text{ et } \ (e^{\nabla}\mathcal{A})^{\boldsymbol{\eta}} = e^{\|\boldsymbol{\omega}\|}\mathcal{A}^{\boldsymbol{\eta}} \quad \left(\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\right).$$

Moyennant quoi, les relations (6.25-28) qui définissent les monômes résurgents peuvent, après division par le facteur exponentiel $e^{\|\boldsymbol{\omega}\|z}$ et suppression

du point souscrit, s'écrire sous la forme compacte :

$$(\partial+\nabla)\widetilde{\mathcal{V}}^{\bullet} = -\widetilde{\mathcal{V}}^{\bullet}\times b^{\bullet} \tag{6.43}$$

$$(\partial+\nabla)\widetilde{\mathcal{V}}^{\bullet} = +b^{\bullet}\times\widetilde{\mathcal{V}}^{\bullet} \tag{6.44}$$

$$(e^{\partial+\nabla}-1)\widetilde{\mathcal{W}}^{\bullet} = -(e^{\partial+\nabla}\widetilde{\mathcal{W}}^{\bullet})\times b^{\bullet} \tag{6.45}$$

$$(e^{\partial+\nabla}-1)\widetilde{\mathcal{W}}^{\bullet} = +b^{\bullet}\times\widetilde{\mathcal{W}}^{\bullet}\ . \tag{6.46}$$

Si on applique à ces relations, par exemple à (6.43) et (6.45), la transformation de Borel, on trouve :

$$(-\zeta+\omega_1+\cdots+\omega_r)\ \overset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\eta_1,\ldots,\eta_r} = -\overset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\eta_1,\ldots,\eta_{r-1}} * \overset{\bullet}{b}^{\eta_r} \tag{6.43 bis}$$

$$(e^{-\zeta+\omega_1+\cdots+\omega_r}-1)\ \overset{\bullet}{\mathcal{W}}^{\eta_1,\ldots,\eta_r} = -(e^{-\zeta+\omega_1+\cdots+\omega_r}\ \overset{\bullet}{\mathcal{W}}^{\eta_1,\ldots,\eta_{r-1}})*\overset{\bullet}{b}^{\eta_r}\ . \tag{6.45 bis}$$

On voit par là que dans le modèle convolutif on passe d'une séquence $\boldsymbol{\eta}'$ de longueur $r-1$ à une séquence $\boldsymbol{\eta}$ de longueur $r$ par deux opérations tout à fait élémentaires, à savoir la *convolution* par la fonction $\overset{\bullet}{b}^{\eta_r}$ dont le mineur $\hat{b}^{\eta_r}$ ne possède aucune singularité en dehors de $O$ , puis la *multiplication* (au sens ordinaire) par $(-\zeta+\|\boldsymbol{\omega}\|)^{-1}$ ou $(e^{-\zeta+\|\boldsymbol{\omega}\|}-1)^{-1}$. La première opération ne fait pas sortir de l'algèbre RES; la seconde non plus, mais elle introduit dans le plan des $\zeta$ des singularités au-dessus du point $\|\boldsymbol{\omega}\|$ ou des points $\|\boldsymbol{\omega}\|+n_0\lambda_0$ avec $n_0\in\mathbf{Z}$ et $\lambda_0=2\pi i$. Il est donc clair que les quatre monômes $\widetilde{\mathcal{A}}^{\boldsymbol{\eta}}=e^{\|\boldsymbol{\omega}\|z}\widetilde{\mathcal{A}}^{\boldsymbol{\eta}}$ qui ont été définis (sans ambiguïté pour des séquences $\overset{\bullet}{\boldsymbol{\eta}}$ licites) à la proposition 6.1, sont bien *résurgents* et que, dans le modèle convolutif, leurs mineurs $\widehat{\mathcal{A}}^{\boldsymbol{\eta}}(\zeta)$ ne peuvent avoir de singularités qu'au-dessus des points $\overset{\bullet}{\omega}$ énumérés à la proposition 6.2. Seules agiront donc (non trivialement) sur eux les dérivations étrangères $\Delta_{\omega_0}$ correspondant à ces indices-là. Appliquant alors une telle $\Delta_{\omega_0}$ aux relations de récurrence (6.43 bis), (6.45 bis) etc... et utilisant la règle (6.16) ainsi que la nullité de toutes les dérivées étrangères des $b^{\eta_i}$ , on vérifie que les dérivées étrangères des monômes résurgents possèdent nécessairement la forme (6.35–38) avec des constantes $V^{\boldsymbol{\eta}}_{\omega_0}$, $\mathcal{V}^{\boldsymbol{\eta}}_{\omega_0}$, $W^{\boldsymbol{\eta}}_{\omega_0}$, $\mathcal{W}^{\boldsymbol{\eta}}_{\omega_0}$ parfaitement déterminées par récurrence sur $r(\boldsymbol{\eta})$. Les équations de résurgence admettent d'ailleurs la transcription compacte suivante (sans les tildes, pour alléger) :

$$\Delta_{\omega_0}\mathcal{V}^{\bullet} = V^{\bullet}_{\omega_0}\times\mathcal{V}^{\bullet} \tag{6.47}$$

$$\Delta_{\omega_0}\mathcal{V}^{\bullet} = \mathcal{V}^{\bullet}\times\mathcal{V}^{\bullet}_{\omega_0} \tag{6.48}$$

$$\Delta_{\omega_0}\mathcal{W}^{\bullet} = W^{\bullet}_{\omega_0}\times\mathcal{W}^{\bullet} \tag{6.49}$$

$$\Delta_{\omega_0}\mathcal{W}^{\bullet} = \mathcal{W}^{\bullet}\times\mathcal{W}^{\bullet}_{\omega_0}\ . \tag{6.50}$$

Le caractère symétral (resp. symétrel) et mutuellement inverse de $\mathcal{V}^{\bullet}$ et $\mathcal{V}^{\bullet}$ (resp. $\mathcal{W}^{\bullet}$ et $\mathcal{W}^{\bullet}$) se montre à partir de (6.43) et (6.44) (resp. (6.45)

et (6.46)) de la même manière exactement que pour les moules $S^\bullet$ et $\mathcal{S}^\bullet$ (resp. $\mathcal{S}^\bullet$ et $\mathcal{S}^\bullet$) à partir de (3.43) et (3.44) (resp. (3.45) et (3.46)).

Enfin, le caractère alternal (resp. alternel) des moules $V^\bullet_{\omega_0}$ et $\mathcal{V}^\bullet_{\omega_0}$ (resp. $W^\bullet_{\omega_0}$ et $\mathcal{W}^\bullet_{\omega_0}$) s'obtient en appliquant l'opérateur $\Delta_{\omega_0}$ aux deux membres des relations (6.39) (resp. (6.40)) donnant la règle de multiplication des monômes résurgents, ou aux relations analogues relatives aux $\mathcal{V}^\eta$ (resp. $\mathcal{W}^\eta$).

## 7. Objets résonnants. Le normalisateur $\Theta$ et ses propriétés.

### Formes normales.

Pour les raisons indiquées au §5, nous allons considérer des objets locaux sur $\mathbf{C}^\nu$ possédant un seul degré de résonance positive ($\mu = 1$) et nous allons nous limiter au cas-type $(p, \rho) = (1, 0)$ avec absence de torsion pour les difféos. De tels objets ne sont pas linéarisables, même formellement, mais ils possèdent des formes normales très simples, obtenues en corrigeant la partie linéaire par le monôme résonnant $y^m = y_1^{m_1} \cdots y_\nu^{m_\nu}$. Pour un champ, cette forme normale s'écrit :

$$X^{\text{norm}} = \sum_{i=1}^{\nu} (\lambda_i + \tau_i y^m) y_i \partial_{y_i} \quad (\text{avec } \partial_{y_i} = \partial/\partial y_i) \tag{7.1}$$

avec

$$\langle m, \lambda \rangle = m_1\lambda_1 + \cdots + m_\nu \lambda_\nu = 0 \tag{7.2}$$

(les $m_i$ sont $\geq 0$ et premiers entre eux)

$$\langle m, \tau \rangle = m_1\tau_1 + \cdots + m_\nu \tau_\nu = -1 \ . \tag{7.3}$$

Pour un difféo sans torsion, la forme normale s'écrit :

$$f^{\text{norm}} : y_i \longmapsto f_i^{\text{norm}}(y) = \ell_i y_i (1 + y^m)^{\tau_i} \tag{7.4}$$

avec $\ell_1^{m_1} \cdots \ell_\nu^{m_\nu} = 1$ et avec existence garantie d'une détermination *cohérente* des logarithmes $\lambda_i = \log \ell_i$, c'est-à-dire d'une détermination vérifiant (7.2). Fixons une fois pour toutes une telle détermination. L'opérateur de substitution $F^{\text{norm}}$ associé à $f^{\text{norm}}$ est alors l'exponentiel de $X^{\text{norm}}$ :

$$F^{\text{norm}} = \exp(X^{\text{norm}}) : \varphi(y) \longmapsto \varphi \circ f^{\text{norm}}(y) \quad (\forall \varphi(y) \in \mathbf{C}\{y\}) \ . \tag{7.5}$$

Les coefficients de résonance $m_i$ sont $\geq 0$ et on numérote les variables $y_i$ de manière à ce que les $m_i$ nuls (s'il y en a) viennent en premier :

(7.6) $m_1 = \cdots = m_s = 0;\ m_{s+1} \geq 1, \ldots, m_r \geq 1$ ($m_r$ est toujours $\geq 1$).

**Normalisateur direct $\Theta$ et normalisateur inverse $\Theta^{-1}$. Formes préparées.**

Notons $\tilde{h}$ et $\tilde{k}$ les changements de variables formels, généralement divergents (et donc tildés) qui font passer de la carte donnée $x = (x_1, \ldots, x_\nu)$ à la carte normale $y = (y_1, \ldots, y_\nu)$ et réciproquement.

(7.7) $$\tilde{h} : x_i \longmapsto y_i = \tilde{h}_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, \nu)$$

(7.7 bis) $$\tilde{k} : y_i \longmapsto x_i = \tilde{k}_i(y) \qquad (i = 1, \ldots, \nu)$$

et notons $\Theta$ et $\Theta^{-1}$ les opérateurs de substitution qui leur correspondent :

(7.8) $$\Theta\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{h} \qquad (\Theta = \text{normalisateur direct})$$

(7.9) $$\Theta^{-1}\tilde{\psi} = \tilde{\psi} \circ \tilde{k} \qquad (\Theta^{-1} = \text{normalisateur inverse})$$

et qui sont caractérisés (à une homothétie près) par :

(7.10) $X\Theta = \Theta X^{\text{norm}}$ (7.10 bis) $\Theta^{-1}X = X^{\text{norm}}\Theta^{-1}$

(7.11) $F\Theta = \Theta F^{\text{norm}}$ (7.11 bis) $\Theta^{-1}F = F^{\text{norm}}\Theta^{-1}$ .

Comme dans le cas sans résonance (*cf.* §4) on peut toujours (car cela revient à annuler un nombre fini de coefficients) choisir une carte analytique qui mette $X$ ou $F$ sous *forme préparée* :

(7.12) $$X = X^{\text{norm}} + B = X^{\text{norm}} + \sum \mathbf{B}^n = X^{\text{norm}} + \sum \underset{\bullet}{b}^\eta\, \mathbf{B}_\eta$$

(7.13) $$F = (1 + B)F^{\text{norm}} = (1 + \sum \mathbf{B}^n)F^{\text{norm}} = (1 + \sum \underset{\bullet}{b}^\eta\, \mathbf{B}_\eta)F^{\text{norm}}$$

avec des opérateurs $\mathbf{B}^n$ *homogènes* (*cf.* (4.9)) de degré $n = (n_1, \ldots, n_\nu)$ assez grand :

(7.14) $$n_1 + \cdots + n_\nu > 2(m_1 + \cdots + m_\nu) \qquad (m = \text{résonnateur})$$

ce qui a pour effet d'*isoler* la partie normale avec ses monômes résonnants et d'assurer *automatiquement* la conjugabilité formelle de $X$ à $X^{\text{norm}}$ ou de $F$ à $F^{\text{norm}}$.

**Passage aux variables trivialisantes.**

Pour analyser la divergence des applications normalisantes, il est utile de passer de la *carte normale* $y = (y_1, \ldots, y_\nu)$ à la *carte trivialisante* $(z, u) = (z, u_1, \ldots, u_{\nu-1})$ définie par :

(7.15) $$y_i = \text{triv}_i(z, u) = u_i e^{\lambda_i z} z^{\tau_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

avec $u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ indépendants et $u_\nu$ lié à eux par :

$$u_1^{m_1} \cdots u_{\nu-1}^{m_{\nu-1}} u_\nu^{m_\nu} = 1 \qquad (m_\nu \geq 1)\ . \tag{7.15 bis}$$

Dans cette carte $(z, u)$, le monôme résonnant, le champ normal et le difféo normal se simplifient au maximum :

$$y^m = y_1^{m_1} \cdots y_\nu^{m_\nu} = z^{-1} \tag{7.16}$$

$$X^{\text{norm}} = \partial = \partial_z \tag{7.17}$$

$$F^{\text{norm}} = \exp(\partial) = \text{ translation de pas 1.} \tag{7.18}$$

Nous aurons aussi à soumettre les *coordonnées données* $x = (x_1, \ldots, x_\nu)$ au même changement :

$$x_i = \text{triv}_i(z, u) = u_i e^{\lambda_i z} z^{\tau_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)\ . \tag{7.19}$$

Ce dernier changement de variable permet d'isoler le facteur "résonnant", fonction de $z$ seul, dans les opérateurs homogènes. On trouve ainsi pour un champ $X$ :

$$\mathbf{B}^n \quad (\text{carte } x) \ = \underset{\bullet}{b}^\eta\,(z)\mathbf{B}'_\eta + \underset{\bullet}{b}^{\eta^*}(z)\mathbf{B}''_{\eta^*} \quad (\text{carte } (z, u)) \tag{7.20}$$

avec une correspondance $n = (n_1, \ldots, n_\nu) \mapsto \eta = \binom{\omega}{\sigma}$ et $\eta^* = \binom{\omega}{\sigma+1}$ définie par :

$$\omega = \langle n, \lambda \rangle = n_1\lambda_1 + \cdots + n_\nu\lambda_\nu \text{ et } \sigma = \langle n, \tau \rangle = n_1\tau_1 + \cdots + n_\nu\tau_\nu \tag{7.21}$$

et avec $\underset{\bullet}{b}^\eta\,(z) = e^{\omega z} z^\sigma$ comme d'habitude et enfin avec des opérateurs $\mathbf{B}'_\eta$ et $\mathbf{B}''_\eta$ de la forme :

$$\mathbf{B}_\eta = u^{n(\omega)} \Big\{ B_\eta^0 \partial_z + \sum_{i=1}^{\nu-1} B_\eta^i u_i \partial_{u_i} \Big\} \quad (B_\eta^i \in \mathbf{C},\ \partial_{u_i} = \partial/\partial u_i) \tag{7.22}$$

$$u^{n(\omega)} = u_1^{n_1} \cdots u_\nu^{n_\nu} = u_1^{n'_1} \cdots u_{\nu-1}^{n'_{\nu-1}} \quad (\text{compte tenu de (7.15 bis)})\ . \tag{7.23}$$

Les nouveaux opérateurs $\mathbf{B}_\eta$ ont sur les $\mathbf{B}^n$ l'avantage de commuter avec $X^{\text{norm}} = \partial$ et avec $F^{\text{norm}} = e^\partial$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ posons (avec les notations (7.21)) :

$$\sigma^*(\omega) = 1 + \text{"sup réel"}_{\langle n, \lambda \rangle = \omega} \langle n, \tau \rangle \tag{7.24}$$

où le "sup réel" est pris par rapport à tous les $n$ pouvant figurer dans la forme préparée (7.12) ou (7.13), c'est-à-dire vérifiant (7.14). Ici "sup réel" signifie que l'on prend celui des nombres $\langle n, \tau \rangle$ qui a la plus grande partie réelle, ce qui a un sens, puisqu'ils sont tous de la forme $\sigma(\omega) - n$ $(n \in \mathbf{N})$.

On déduit de là que toute séquence $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_r)$ est *automatiquement licite* au sens de (6.22) si ses composantes $\eta_i$ proviennent de la décomposition (7.20) d'un opérateur $\mathbf{B}^n$ présent dans la forme préparée (7.12) ou (7.13), autrement dit si elles sont de la forme :

$$\eta_i = \begin{pmatrix} \omega_i \\ \sigma_i \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma_i = \sigma^*(\omega_i) - n_i \quad (n_i \in \mathbf{N}) \,. \tag{7.25}$$

PROPOSITION 7.1. Définition et propriétés du comoule $\mathbf{B}_\bullet$. — *Si à partir des opérateurs $\mathbf{B}_\eta$ associés à $X$ ou $f$ on définit les opérateurs*

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{B}_{\eta_1, \ldots, \eta_r}$$

*au moyen de la relation :*

$$B^* = B \cdot (1 - B)^{-1} \tag{7.26}$$

*entre les fonctions génératrices suivantes :*

$$B = \sum_{\eta_1} \underset{\bullet}{b}^{\eta_1} \, \mathbf{B}_{\eta_1} \tag{7.27}$$

$$B^* = \sum_{r \geq 1} \sum_{\eta_i} \underset{\bullet}{b}^{\eta_r} \cdots \underset{\bullet}{b}^{\eta_1} \, \mathbf{B}_{\eta_1, \ldots, \eta_r} \tag{7.28}$$

*interprétées dans l'algèbre différentielle $\underset{\bullet}{b}^{\text{noncom}}$ engendrée par les $\underset{\bullet}{b}^{\eta}$ mais considérée comme non commutative, autrement dit soumise aux relations (7.29) mais pas aux relations (7.30) :*

$$\partial \underset{\bullet}{b}^{\eta} = \omega \underset{\bullet}{b}^{\eta} + \sigma \underset{\bullet}{b}^{*\eta} \quad \text{avec } \eta = \begin{pmatrix} \omega \\ \sigma \end{pmatrix} \text{ et } {}^*\eta = \begin{pmatrix} \omega \\ \sigma - 1 \end{pmatrix} \tag{7.29}$$

$$\underset{\bullet}{b}^{\eta_1} \underset{\bullet}{b}^{\eta_r} = \underset{\bullet}{b}^{\eta_2} \underset{\bullet}{b}^{\eta_1} = \underset{\bullet}{b}^{\eta_1 + \eta_2} \tag{7.30}$$

*alors le comoule $\mathbf{B}_\bullet$ ainsi associé au champ $X$ (resp. au difféo $f$) est cosymétral (resp. cosymétrel), à condition bien sûr de poser :*

$$\mathbf{B}_\emptyset = 1 \qquad (\emptyset = \textit{séquence vide}) \,. \tag{7.31}$$

*Remarque.* — Les notations utilisées sont cohérentes car pour $r = 1$ le $\mathbf{B}_{\eta_1}$ de (7.28) coïncide bien avec le $\mathbf{B}_{\eta_1}$ de (7.27). On observe aussi que dans le cas *transvexal*, c'est-à-dire lorsque :

$$X \cdot z \equiv 1 \quad \text{et donc} \quad \mathbf{B}_\eta \cdot z \equiv 0 \quad (\forall \eta) \tag{7.32}$$

$$F \cdot z \equiv z + 1 \quad \text{et donc} \quad \mathbf{B}_\eta \cdot z \equiv 0 \quad (\forall \eta) \tag{7.33}$$

le comoule $\mathbf{B}_\bullet$ se factorise :

$$\mathbf{B}_{\eta_1, \ldots, \eta_r} = \mathbf{B}_{\eta_r} \cdots \mathbf{B}_{\eta_1} \tag{7.34}$$

ce qui assure aussitôt sa cosymétralité pour un champ (resp. sa cosymétrélité pour un difféo). Voir à ce sujet (4.14) pour une situation analogue. Dans le cas général, la cosymétralité/élité peut s'établir directement, mais nous l'obtiendrons sans calculs, comme corollaire de la proposition suivante.

PROPOSITION 7.2. Séries mouliennes pour les normalisateurs $\Theta$ et $\Theta^{-1}$. — *Les normalisateurs d'un champ résonnant $X$ admettent les développements formels :*

$$\Theta = 1 + \sum \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta} \mathbf{B}_{\eta} \qquad (r(\eta) \geq 1) \tag{7.35}$$

$$\Theta^{-1} = 1 + \sum \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta} \mathbf{B}_{\eta} \qquad (r(\eta) \geq 1) \tag{7.36}$$

*et ceux d'un difféo admettent les développements formels :*

$$\Theta = 1 + \sum \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\eta} \mathbf{B}_{\eta} \qquad (r(\eta) \geq 1) \tag{7.37}$$

$$\Theta^{-1} = 1 + \sum \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\eta} \mathbf{B}_{\eta} \qquad (r(\eta) \geq 1)\,. \tag{7.38}$$

*Preuve.* — Commençons par rappeler (*cf.* (7.24) (7.25)) que toutes les séquences $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_r)$ qui figurent ici sont *licites*, si bien que les monômes résurgents qui leur correspondent sont définis sans ambiguïté. Cela étant, si on porte les quatre séries ci-dessus dans les identités (7.10) (7.10 bis) (7.11) (7.11 bis) qui caractérisent $\Theta$ et $\Theta^{-1}$; si on utilise la commutation des opérateurs $\mathbf{B}_{\eta}$ avec $\partial$ et $e^{\partial}$; et enfin si on utilise les relations (6.35–38) qui définissent par récurrence les monômes résurgents, on trouve que les quatre identités de la proposition 7.2 équivalent aux quatre identités suivantes :

$$\Big(\sum_{\eta_0} \underset{\bullet}{b}^{\eta_0} \mathbf{B}_{\eta_0}\Big)\Big(\sum_{\eta} \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta} \mathbf{B}_{\eta}\Big) = \sum_{\eta,\eta_0} \underset{\bullet}{b}^{\eta_0} \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta} \mathbf{B}_{\eta\eta_0} \tag{7.39}$$

$$\Big(\sum_{\eta} \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta} \mathbf{B}_{\eta}\Big)\Big(\sum_{\eta_0} \underset{\bullet}{b}^{\eta_0} \mathbf{B}_{\eta_0}\Big) = \sum_{\eta_0,\eta} \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta} \underset{\bullet}{b}^{\eta_0} \mathbf{B}_{\eta_0\eta} \tag{7.40}$$

$$\Big(\sum_{\eta_0} \underset{\bullet}{b}^{\eta_0} \mathbf{B}_{\eta_0}\Big)\Big(\sum_{\eta} \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\eta} \mathbf{B}_{\eta}\Big) = \sum_{\eta,\eta_0} \underset{\bullet}{b}^{\eta_0} (e^{\partial} \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\eta}) \mathbf{B}_{\eta\eta_0} \tag{7.41}$$

$$\Big(\sum_{\eta} \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\eta} \mathbf{B}_{\eta}\Big)\Big(\sum_{\eta_0} \underset{\bullet}{b}^{\eta_0} \mathbf{B}_{\eta_0}\Big) = \sum_{\eta_0,\eta} \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\eta} \underset{\bullet}{b}^{\eta_0} \mathbf{B}_{\eta_0\eta} \tag{7.42}$$

où les sommes sont étendues à tous les $\eta_0$ et à toutes les séquences $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_r)$ sans oublier la séquence vide $\eta = \emptyset$ pour laquelle on a

(7.31). Bien sûr $\eta\eta_0$ et $\eta_0\eta$ désignent la séquence $\eta$ suivie ou précédée de $\eta_0$ . Cela étant, (7.26) équivaut aux relations :

$$B \cdot (1 + B^*) = B^* \quad \text{et} \quad (1 + B^*)B = B^* \tag{7.43}$$

qui se traduisent respectivement par les identités suivantes dans l'algèbre $\underset{\bullet}{b}^{\text{noncom}}$ :

$$\begin{aligned}(7.44)\quad &\big(\sum \underset{\bullet}{b}^{\eta_0}\, \mathbf{B}_{\eta_0}\big)\big(1 + \sum \underset{\bullet}{b}^{\eta_r} \cdots \underset{\bullet}{b}^{\eta_1}\, \mathbf{B}_{\eta_1,\ldots,\eta_r}\big) \\ &\qquad = \sum \underset{\bullet}{b}^{\eta_0} \underset{\bullet}{b}^{\eta_r} \cdots \underset{\bullet}{b}^{\eta_1}\, \mathbf{B}_{\eta_1,\ldots,\eta_r,\eta_0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(7.45)\quad &\big(1 + \sum \underset{\bullet}{b}^{\eta_r} \cdots \underset{\bullet}{b}^{\eta_1}\, \mathbf{B}_{\eta_1,\ldots,\eta_r}\big)\big(\sum \underset{\bullet}{b}^{\eta_0}\, \mathbf{B}_{\eta_0}\big) \\ &\qquad = \sum \underset{\bullet}{b}^{\eta_r} \cdots \underset{\bullet}{b}^{\eta_1} \underset{\bullet}{b}^{\eta_0}\, \mathbf{B}_{\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_r}.\end{aligned}$$

Compte tenu de la *linéarité* en $\underset{\bullet}{b}^{\eta_1}, \ldots, \underset{\bullet}{b}^{\eta_r}$ de chacun des quatre monômes résurgents $\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{A}}}^{\eta_1,\ldots,\eta_r}$ il est clair que (7.44) implique (7.39) et (7.41) et que (7.45) implique (7.40) et (7.42). Ceci établit donc la proposition 7.2. Reste la proposition 7.1, c'est-à-dire la cosymétralité (ou cosymétrélité) de $\mathbf{B}_\bullet$.

Pour un difféo $f$, cela se voit sans calcul. En effet, l'algèbre engendrée par les monômes $\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\eta}$ (resp. $\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\eta}$) est "libre" en ce sens que ses éléments ne vérifient pas d'autres relations que leur table de multiplication symétrèle (3.4). D'autre part, du fait même de leur définition, les normalisateurs $\Theta$ et $\Theta^{-1}$ sont des automorphismes formels :

$$\operatorname{col}(\Theta^{\pm 1}) = \Theta^{\pm 1} \otimes \Theta^{\pm 1} \quad \textit{i.e.} \quad \Theta^{\pm 1}(\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi}) \equiv (\Theta^{\pm 1}\widetilde{\varphi})(\Theta^{\pm 1}\widetilde{\psi})\ . \tag{7.46}$$

Or, pour qu'un opérateur obtenu par contraction d'un moule symétrel (ici $\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\bullet}$ ou $\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{W}}}^{\bullet}$) et "libre" (au sens qu'on vient d'indiquer) avec un comoule (ici $\mathbf{B}_\bullet$) soit un automorphisme formel, il faut et il suffit que ce comoule soit cosymétrel.

Pour un champ, il faut prendre plus de précautions, car l'algèbre engendrée par les monômes $\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta}$ ou $\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta}$ (et qui d'ailleurs est la même) n'est pas "libre", c'est-à-dire liée par la seule table de multiplication symétrale (3.3). Elle est aussi sujette aux relations :

$$\prod_i (-\mathcal{V}^{\eta_i'}) = \prod_j (-\mathcal{V}^{\eta_j'}) \tag{7.47}$$

avec $\sum \eta_i = \sum \eta_j$ et $\mathcal{V}^{\eta_1'}$ comme en (9.39);

$$-\mathcal{V}^{\eta_1',\eta_2} = \mathcal{V}^{\eta_1,\eta_2'} = \mathcal{V}^{\eta_1+\eta_2} \tag{7.48}$$

avec $\mathcal{V}^{\cdots,\eta'_i,\cdots}$ comme en (9.39);

et plus généralement à toutes les relations engendrables à partir de (9.39)-(9.40). Toutefois on peut observer que ces relations ne sont pas intervenues dans la démonstration de la proposition 7.2, c'est-à-dire pour l'obtention de (7.39) et (7.40). Par suite les séries (7.35) et (7.36) *continuent* de définir deux automorphismes formels $\Theta$ et $\Theta^{-1}$ même dans l'algèbre "libre" tendue par les $\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\boldsymbol{\eta}}$ ou $\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\boldsymbol{\eta}}$ et soumise à la seule loi de multiplication symétrale (3.3), mais sans les relations (7.47) (7.48) etc... Ceci implique la cosymétralité du comoule $\mathbf{B}_\bullet$, qui, contracté avec les moules symétrals et considérés comme "libres" $\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}$ ou $\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}$, donne $\Theta$ et $\Theta^{-1}$.

PROPOSITION 7.3. Expression alternative de $\Theta$ pour un champ. *Pour un champ $X$ le normalisateur direct admet également le développement formel :*

$$\Theta = 1 + \sum \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} \tag{7.49}$$

*avec le comoule cosymétral et factorisable $\mathbf{D}_\bullet$ défini par :*

$$\mathbf{D}_\emptyset = 1 \quad \textit{et} \quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{D}_{\eta_1,\ldots,\eta_r} = \mathbf{D}_{\eta_r} \cdots \mathbf{D}_{\eta_1} \tag{7.50}$$

*à partir des opérateurs différentiels d'ordre 1 (dérivations) $\mathbf{D}_{\eta_1}$ eux-mêmes définis par la relation :*

$$D = (1 + B \cdot z)^{-1} B \tag{7.51}$$

*entre les fonctions génératrices) :*

$$B = \sum \underset{\bullet}{b}^{\eta_1} \mathbf{B}_{\eta_1} \tag{7.52}$$

$$D = \sum \underset{\bullet}{b}^{\eta_1} \mathbf{D}_{\eta_1} \ . \tag{7.53}$$

*Preuve.* — Portant la série (7.49) dans la relation (7.10) qui caractérise $\Theta$, on trouve :

$$\sum (\partial \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\boldsymbol{\eta}}) \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} + \sum (\partial \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\boldsymbol{\eta}})(B \cdot z) \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} + \sum_{\boldsymbol{\eta},\eta_0} \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\boldsymbol{\eta}} \underset{\bullet}{b}^{\eta_0} \mathbf{B}_{\eta_0} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} = 0 \ . \tag{7.54}$$

En changeant les deux premières séquences $\boldsymbol{\eta}$ en $\boldsymbol{\eta}\eta_0$ et en tenant compte de la relation $\partial \underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}\eta_0} = - \underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}} \underset{\bullet}{b}^{\eta_0}$, (7.54) s'écrit :

$$\sum_{\boldsymbol{\eta},\eta_0} (- \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\boldsymbol{\eta}})(1 + B \cdot z) \underset{\bullet}{b}^{\eta_0} \mathbf{D}_{\eta_0} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} + \sum_{\boldsymbol{\eta},\eta_0} \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\boldsymbol{\eta}} \underset{\bullet}{b}^{\eta_0} \mathbf{B}_{\eta_0} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} = 0 \ . \tag{7.55}$$

Or si l'on définit les $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}}$ comme en (7.51-53) on a $(1 + B \cdot z)\mathbf{D}_{\eta_0} \equiv \mathbf{B}_{\eta_0}$ et l'identité (7.55) est manifestement vérifiée.

*Remarque 1.* — Contrairement à l'identité (7.26) qui devait s'interpréter dans l'algèbre non-commutative $\overset{\bullet}{b}^{\text{noncom}}$, l'identité (7.51) doit s'interpréter dans l'algèbre commutative $\overset{\bullet}{b}^{\text{com}}$ engendrée par les $\overset{\bullet}{b}^{\eta}$ soumis à (7.29) *et* (7.30). Bien entendu, dans le cas *transvexal* on a $B \cdot z = 0$ et donc $D = B$ ainsi que :

$$\mathbf{D}_{\eta_1,\ldots,\eta_r} \equiv \mathbf{B}_{\eta_1,\ldots,\eta_r} \equiv \mathbf{B}_{\eta_r} \cdots \mathbf{B}_{\eta_1} \ . \tag{7.56}$$

*Remarque 2.* — On montre qu'en général (*i.e.* sans l'hypothèse de transvexalité) le normalisateur inverse $\Theta^{-1}$ d'un champ ainsi que les normalisateurs directs et inverses $\theta^{\pm 1}$ d'un difféo ne possèdent pas de série moulienne du type $1+\sum \overset{\bullet}{\tilde{\mathcal{A}}}^{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{C}_{\boldsymbol{\eta}}$ analogue à (7.49), c'est-à-dire obtenue par contraction des monômes résurgents $\overset{\bullet}{\tilde{\mathcal{A}}}^{\bullet}$ avec un comoule $\mathbf{C}_{\bullet}$ *factorisable* :

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{C}_{\eta_1,\ldots,\eta_r} = \mathbf{C}_{\eta_r} \cdots \mathbf{C}_{\eta_1} \ . \tag{7.57}$$

C'est précisément l'existence de relations du type (7.47) (7.48) entre les $\overset{\bullet}{\tilde{\mathcal{V}}}^{\boldsymbol{\eta}}$ qui explique, pour le normalisateur direct d'un champ, l'existence simultanée des deux développements (7.35) et (7.49). Le développement (7.49) a l'avantage de faire intervenir des $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}}$ factorisables et très simplement définis. Mais le développement (7.35) a l'avantage de s'inverser sous la forme (7.36) avec les mêmes $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}}$; d'apparaître comme la "limite" du développement analogue relatif à un difféo; et enfin de conduire à des $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}}$ qui, en présence d'une structure additionnelle (symplectique ou autre) respectent cette structure (*).

PROPOSITION 7.4. Equation du pont formelle. — *Les normalisateurs sont résurgents en $z$ et vérifient les équations de résurgence suivantes* (**) *:*

$$[\overset{\bullet}{\Delta}_{\omega}, \Theta] \quad = -\Theta \mathbf{A}_{\omega} \quad (\forall\, \overset{\bullet}{\omega} \in \Omega) \tag{7.58}$$

$$[\overset{\bullet}{\Delta}_{\omega}, \Theta^{-1}] = +\mathbf{A}_{\omega} \Theta^{-1} \quad (\forall\, \overset{\bullet}{\omega} \in \Omega) \tag{7.59}$$

*pour des $\mathbf{A}_{\omega}$ opérateurs différentiels ordinaires (dérivation d'ordre 1) qui pour un champ revêtent la forme :*

$$\mathbf{A}_{\omega} = u^{n(\omega)} \Big( A^0_{\omega} \partial_z + \sum_{i=1}^{\nu-1} A^i_{\omega} u_i \partial_{u_i} \Big) \tag{7.60}$$

(*) contrairement aux $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}}$ : *cf.* [E3], §8.4.
(**) dites *équation du pont opérationnelle.*

*avec* $\overset{\bullet}{\omega}= \sum n_i\lambda_i$ *et* $u^{n(\omega)} = u_1^{n_1}\cdots u_\nu^{n_\nu} = u_1^{n'_1}\cdots u_{\nu-1}^{n'_{\nu-1}}$ *; et qui pour un difféo revêtent la forme :*

$$\mathbf{A}_\omega = e^{-n_0\lambda_0 z}u^{n(\omega)}\Big(A_\omega^0\partial_z + \sum_{i=1}^{\nu-1} A_\omega^i u_i\partial_{u_i}\Big) \tag{7.61}$$

*avec* $\overset{\bullet}{\omega}= n_0\lambda_0 + \sum n_i\lambda_i$ $(i \geq 1)$ *et* $u^{n(\omega)}$ *comme ci-dessus.*

*De plus, ces opérateurs admettent des développements mouliens, qui dans le cas d'un champ s'écrivent :*

$$\mathbf{A}_\omega = -\sum_{\boldsymbol{\eta}} V_\omega^{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}} = \sum_{\boldsymbol{\eta}} V_\omega^{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} \tag{7.62}$$

*et dans le cas d'un difféo :*

$$e^{n_0\lambda_0 z}\mathbf{A}_\omega = -\sum_{\boldsymbol{\eta}} W_\omega^{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}} = \sum_{\boldsymbol{\eta}} W_\omega^{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}}\,. \tag{7.63}$$

*Remarque 1.* — Les relations (6.29) (6.30), transcrites dans le modèle convolutif, montrent qu'à un facteur multiplicatif près de la forme $\zeta^{-\sigma^*(\omega)}$ (avec $\boldsymbol{\eta} = \binom{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\sigma}}$ ; $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$ ; $\sigma^*$ comme en (7.24)) les germes $\underset{\bullet}{\widehat{\mathcal{V}}}^{\boldsymbol{\eta}}$, $\underset{\bullet}{\widehat{\mathcal{V}}}^{\boldsymbol{\eta}}$, $\underset{\bullet}{\widehat{\mathcal{W}}}^{\boldsymbol{\eta}}$, $\underset{\bullet}{\widehat{\mathcal{W}}}^{\boldsymbol{\eta}}$ sont analytiques réguliers en $\underset{\bullet}{O}$. Ceci montre que les scalaires $\underset{\bullet}{V}^{\boldsymbol{\eta}}$, $\underset{\bullet}{V}^{\boldsymbol{\eta}}$, $\underset{\bullet}{W}^{\boldsymbol{\eta}}$, $\underset{\bullet}{W}^{\boldsymbol{\eta}}$ de (7.62) (7.63) et par suite aussi les opérateurs $\mathbf{A}_\omega$ sont multipliés par un facteur $\exp(-2\pi i k\sigma^*(\omega))$ quand $\omega$ est multiplié par $\exp(2\pi i k)$. En d'autres termes, si $\omega_1$ et $\omega_2$ ont même projection $\omega$ sur $\Omega$, les invariants seront en correspondance élémentaire :

$$\mathbf{A}_{\omega_2} = (\omega_1/\omega_2)^{\sigma^*(\omega)}\mathbf{A}_{\omega_1} \qquad (\overset{\bullet}{\omega}_1=\overset{\bullet}{\omega}_2= \omega \in \Omega)\,. \tag{7.64}$$

Il suffit donc de connaître les $\mathbf{A}_\omega$ pour les indices $\omega$ parcourant un seul "feuillet" au-dessus du réseau $\Omega$.

*Remarque 2.* — La convergence effective de ces développements ne sera étudiée qu'aux §§8 et 9. Pour l'instant, il ne s'agit que de développements formels. Plus exactement, les séries exprimant les normalisateurs $\Theta^{\pm 1}$ convergent terme à terme vers des opérateurs formels qui sont des automorphismes de $\mathbf{C}[[x]] = \mathbf{C}[[\mathrm{triv}(z,u)]]$, mais pour les séries ci-dessus exprimant les opérateurs $\mathbf{A}_\omega$, nous n'avons pour l'instant qu'une interprétation comme *identité* relativement à l'ensemble des $\mathbf{B}_\eta$ considérés comme variables libres. On peut aussi affecter chaque $\mathbf{B}_\eta$ (carte $x$) d'un coefficient $\varepsilon^{n_1+\cdots+n_\nu}$ et tout interpréter, les $\Theta^{\pm 1}$ et les $\mathbf{A}_\omega$, comme séries formelles en $\varepsilon$.

*Remarque 3.* — Les opérateurs $\mathbf{A}_\omega$ sont des *dérivations ordinaires* (d'ordre 1) car ils s'obtiennent par contraction de moules alternals avec des comoules cosymétrals (resp. de moules alternels avec des comoules cosymétrels). Toutefois, pris isolément, les différents termes des développements (7.62) ou (7.63) *ne sont pas* des dérivations (d'ordre 1). Si l'on veut des séries ne comportant que de telles dérivations, on peut utiliser l'identité :

$$(7.65)\quad d = \sum a_{12} d_2 d_1 + \sum a_{123} d_3 d_2 d_1 + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\sum a_{12}[d_2, d_1] + \frac{1}{3}\sum a_{123}[d_3[d_2, d_1]]$$

valable pour tout élément $d$ appartenant à la fois à l'algèbre *associative* et à l'*algèbre de Lie* engendrée par $d_1, d_1, d_3, \ldots$ On déduit ainsi des premier et dernier membres de (7.62) l'identité :

$$(7.66)\qquad \mathbf{A}_\omega = \sum \frac{1}{r(\boldsymbol{\eta})} V_\omega^{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{D}_{[\boldsymbol{\eta}]}$$

avec $\mathbf{D}_{[\boldsymbol{\eta}]} = \mathbf{D}_{[\eta_1,\ldots,\eta_r]} = [\mathbf{D}_{\eta_r} \cdots [\mathbf{D}_{\eta_2}, \mathbf{D}_{\eta_1}]]$.

*Preuve de la Proposition 7.4.* — Dans le *cas transvexal*, le comoule $\mathbf{B}_\bullet$ se factorise selon (7.34). Il suffit alors de porter dans les développements (7.35–38) de $\Theta^{\pm 1}$ les relations (6.35–38) de dérivation étrangère des monômes résurgents pour déduire directement l'équation du pont ainsi que la forme des $\mathbf{A}_\omega$. Dans le *cas général*, on a toujours pour *un champ* le développement (7.49) avec la factorisation (7.50), ce qui permet encore de raisonner de la même manière. Pour les autres formules, on peut conclure en utilisant les relations a priori sur les moules $V_\omega^\bullet$ et $\mathcal{V}_\omega^\bullet$ indiquées aux sections suivantes. Mais il ne vaut pas la peine d'insister là-dessus, puisque nous verrons au §8 une méthode directe et sans calcul pour établir la forme (7.58–59) des équations de résurgence et que, cette forme obtenue, l'application de $\overset{\bullet}{\Delta}_\omega$ aux séries mouliennes de $\Theta^{\pm 1}$ *ne peut que* donner pour $\mathbf{A}_\omega$ les séries (7.62) et (7.63).

## 8. Objets résonnants de réseau intérieur discret. Equation du pont et invariants holomorphes.

Il va s'agir dans cette section et la suivante de donner un sens effectif aux développements formels de la section précédente. Deux situations se présenteront : ou bien les *développements mouliens* tels quels seront

convergents (relativement aux semi-normes naturelles des opérateurs) ou bien la convergence ne pourra être rétablie qu'au prix des regroupements (finis) qui correspondent au procédé d'*arborification*. Bien entendu, dans un cas comme dans l'autre, les *regroupements multilinéaires* qui consistent à regrouper toutes les séquences $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_r)$ ou toutes les séquences arborescentes $\overset{<}{\boldsymbol{\eta}} = (\eta_1, \ldots, \eta_r)^<$ qui ne diffèrent que par l'ordre des $\eta_i$, *rétablissent a fortiori la converge* et ce sont ces regroupements-là qu'on aura intérêt à utiliser dans les calculs pratiques. Mais pour les besoins des démonstrations, les regroupements multilinéaires sont "trop larges" et c'est bien sur les développements mouliens, éventuellement arborifiés, qu'il faut raisonner.

*Tout au long de cette section le réseau intérieur* $\Omega^{\text{int}}$ *sera supposé discret*, ce qui correspond aux cas 1,2,3 énumérés au début du §5. Chacun de ces cas se subdivise en deux sous-cas, selon que le réseau de résurgence $\Omega$ est *discret* (cas 1',2',3' : pas de petits diviseurs) ou que $\Omega$ est *non discret* (cas 1", 2",3" : il y a des petits diviseurs, qui sont dits diophantiens si la condition (2.6) est réalisée et liouvilliens sinon). Voici des exemples de spectre $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)$ illustrant ces six possibilités; les $\lambda_i$ effectivement impliqués dans l'unique relation de résonance (*i.e.* $m_i \geq 1$) suivent le point-virgule.

| | | |
|---|---|---|
| *Cas 1'* | $(\sqrt{2}, 1; 0)$ | $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, 1; 0)$ |
| *Cas 1"* | $(-\sqrt{2}, 1; 0)$ | $(-\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, 1; 0)$ |
| *Cas 2'* | $(i; -2, 1)$ | $(i\sqrt{5}, i\sqrt{7}; -2, 1)$ |
| *Cas 2"* | $(i, -i\sqrt{5}; -2, 1)$ | $(i, -i\sqrt{5}; -1 - \sqrt{2}, -1, 1)$ |
| *Cas 3'* | $(1, i, -1 - i)$ | |
| *Cas 3"* | $(\sqrt{5}; 1, i, -1 - i)$ | $(\sqrt{5}, i\sqrt{2}; 1, i, -1 - i)$. |

D'autre part, comme nous verrons, en l'absence de petits diviseurs liouvilliens *toute la divergence* est portée par le monôme résonnant, c'est-à-dire, dans la carte trivialisante $(z, u)$, par la variable $z$. On a donc intérêt à isoler cette variable, autrement dit à décomposer les applications normalisantes $\tilde{h}$ et $\tilde{k}$ ainsi que les opérateurs normalisants $\Theta$ et $\Theta^{-1}$ en *composantes de fréquence* $\omega$. Chacune de ces composantes se présentera comme une série, généralement divergente mais toujours résurgente, de puissances décroissantes de $z$; et elle sera flanquée d'un facteur exponentiel $e^{\omega z}$ multiplié par un monôme élémentaire $u^{n(\omega)}$ défini comme en (7.23). Nous poserons donc en reprenant les notations des §§4 et 7 :

$$y_i = \tilde{h}_i(x) = \tilde{h}_i \circ \operatorname{triv}(z, u) = \tilde{h}_i[z, u] = \sum_{\omega} u^{n(\omega)} e^{\omega z} \tilde{h}_i^{\omega}(z) \tag{8.1}$$

$$x_i = \tilde{k}_i(y) = \tilde{k}_i \circ \mathrm{triv}(z,u) = \tilde{k}_i[z,u] = \sum_{\omega} u^{n(\omega)} e^{\omega z} \tilde{k}_i^{\omega}(z) \tag{8.2}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, \nu$ et $\omega$ parcourant le réseau positif $\Omega^+$ défini par (5.6) pour un champ *comme* pour un difféo (pas d'adjonction de $\lambda_0$). Nous poserons aussi

$$\Theta = 1 + \sum_{\omega} u^{n(\omega)} e^{\omega z} \Theta^{\omega+} \tag{8.3}$$

$$\Theta^{-1} = 1 + \sum_{\omega} u^{n(\omega)} e^{\omega z} \Theta^{\omega-} \tag{8.4}$$

où $\omega$ parcourt non plus $\Omega^+$ mais $\Omega^{\mathrm{ext}}$ défini par (5.9) pour un champ *comme* pour un difféo (pas de $\lambda_0$).

En vertu de la définition (7.24) de $\sigma^*(\omega)$ on a pour tout $\omega$ et tout $i$ :

$$\tilde{h}_i^{\omega}(z) \text{ et } \tilde{k}_i^{\omega}(z) \in z^{\sigma^*(\omega)}\mathbf{C}[[z^{-1}]] \text{ avec } \sigma^*(\omega) \notin \mathbf{N}. \tag{8.5}$$

Les $\Theta^{\omega\pm}$ sont des opérateurs différentiels ordinaires en $\partial_z, \partial_{u_1}, \ldots, \partial_{u_{\nu-1}}$ de degré total $d(\omega)$ fini et les composantes $\tilde{h}_i^{\omega}$ et $\tilde{k}_i^{\omega}$ leur sont liées par :

$$\tilde{h}_i^{\omega}(z) = \Theta^{(\omega-\lambda_i)_+}.u_i e^{\lambda_i z} z^{\tau_i} \qquad (1 \le i \le \nu;\ \omega \in \Omega^+) \tag{8.6}$$

$$\tilde{k}_i^{\omega}(z) = \Theta^{(\omega-\lambda_i)_-}.u_i e^{\lambda_i z} z^{\tau_i} \qquad (1 \le i \le \nu;\ \omega \in \Omega^+). \tag{8.7}$$

Commençons par énoncer les principaux résultats de cette section, qui encore une fois sont tous relatifs au cas $\Omega^{\mathrm{int}}$ discret. Les preuves sont reléguées après la proposition 8.4.

PROPOSITION 8.1. Composantes de fréquence $\omega$. Convergence des séries arborifiées. — *Chaque composante $\Theta^{\omega\pm}$ et par suite chaque composante $\tilde{h}_i^{\omega}$ ou $\tilde{k}_i^{\omega}$ de fréquence $\omega$ possède une série arborifiée* (*)

$$u^{n(\omega)}\Theta^{\omega+} = \sum_{\|\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}\|=\omega} \mathcal{V}^{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}} \mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}} = \sum_{\|\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}\|=\omega} \mathcal{V}^{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}} \mathbf{D}_{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}} \quad \textit{(champ)} \tag{8.8}$$

$$u^{n(\omega)}\Theta^{\omega-} = \sum_{\|\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}\|=\omega} \mathcal{Y}^{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}} \mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}} \quad \textit{(champ)} \tag{8.9}$$

$$u^{n(\omega)}\Theta^{\omega+} = \sum_{\|\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}\|=\omega} \mathcal{W}^{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}} \mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}} \quad \textit{(difféo)} \tag{8.10}$$

$$u^{n(\omega)}\Theta^{\omega-} = \sum_{\|\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}\|=\omega} \mathcal{Z}^{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}} \mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}} \quad \textit{(difféo)} \tag{8.11}$$

(*) Les monômes résurgents des séries (8.8-11) sont *non pointés*, car on a supprimé le facteur exponentiel, et *non tildés*, car ils renvoient non pas au modèle formel des fonctions résurgentes, mais aux modèles géométriques ou convolutif.

*qui est toujours convergente tant dans le modèle convolutif (plan des $\zeta$) que dans chaque modèle géométrique (plan des $z$). En revanche, les séries mouliennes sous-jacentes sont généralement divergentes.*

PROPOSITION 8.2. Opérateurs $\mathbf{A}_\omega$. Convergence des séries arborifiées. — *Pour chaque $\overset{\bullet}{\omega} \in \Omega$, les séries (7.62) (7.63) possèdent des arborifiées* (*) *:*

$$\mathbf{A}_\omega = -\sum V_\omega^{\overset{<}{\eta}} \mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}} = \sum V_\omega^{\overset{<}{\eta}} \mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}} = \sum V_\omega^{\overset{<}{\eta}} \mathbf{D}_{\overset{<}{\eta}} \tag{8.12}$$

$$e^{n_0\lambda_0 z}\mathbf{A}_\omega = -\sum W_\omega^{\overset{<}{\eta}} \mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}} = \sum W_\omega^{\overset{<}{\eta}} \mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}} \tag{8.13}$$

*où la sommation peut être restreinte aux seules séquences $\overset{<}{\eta}$ irréductibles et telles que $\| \overset{<}{\omega} \| = \omega$. Ces séries sont toujours convergentes et leur somme définit un opérateur différentiel ordinaire en $\partial_z, \partial_{u_1}, \ldots, \partial_{u_{\nu-1}}$ de la forme (7.60) ou (7.61).*

Pour $\overset{<}{\eta}$ irréductible, les $\mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}}$ sont des opérateurs de la forme

$$u^{n(\omega)}\{b_0\partial_z + \sum b_i u_i \partial_{u_i}\}$$

et peuvent donc être mis en correspondance avec des points de $\mathbf{C}^\nu$, si bien que la convergence de (8.12) et (8.13) doit s'entendre au sens de la convergence ordinaire dans $\mathbf{C}^\nu$.

Passons maintenant des composantes de fréquence $\omega$ aux normalisateurs globaux. Autrement dit, passons de la dépendance en $z$ seul à la dépendance en $(z, u)$. Les résultats vont dépendre crucialement d'un paramètre réel $\tau^{\text{ext}}$ qui est défini par (8.14) pour un champ et par (8.14 bis) pour un difféo :

$$\begin{aligned} &\tau^{\text{ext}} = \sup_\alpha \operatorname{Re}\langle \alpha, \tau\rangle \\ &\text{pour } \langle \alpha, \lambda\rangle = 0\ ;\ \ \alpha_i > 0\ ;\ \ \sum \alpha_i = 1 \qquad \text{(champ)} \end{aligned} \tag{8.14}$$

$$\begin{aligned} &\tau^{\text{ext}} = \sup_\alpha \operatorname{Re}\langle \alpha, \tau\rangle \\ &\text{pour } \operatorname{Re}\langle \alpha, \lambda\rangle = 0\ ;\ \ \alpha_i > 0\ ;\ \ \sum \alpha_i = 1 \quad \text{(difféo)} \end{aligned} \tag{8.14 bis}$$

avec bien sûr $\langle \alpha, \tau\rangle = \sum \alpha_i \tau_i$ et $\langle \alpha, \lambda\rangle = \sum \alpha_i \lambda_i$ $(1 \le i \le \nu)$.

Les "sup" sont pris par rapport à tous les $\alpha_i$ réels positifs. On note que le $\tau^{\text{ext}}$ associé à un champ $X$ ne change pas si on prémultiplie $X$ par

(*) La construction exacte des coarborifiés $\mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}}$ et $\mathbf{D}_{\overset{<}{\eta}}$ est précisée au début de la démonstration des propositions 8.1, 8.2, 8.3, 8.4.

une unité analytique; et que le $\tau^{\text{ext}}$ associé à un difféo $f$ ne dépend pas de la *détermination cohérente* $\lambda_i = \log \ell_i$ qu'on a choisie pour les multiplicateurs.

PROPOSITION 8.3. Les normalisateurs. Cas de convergence des séries arborifiées. — *Les séries arborifiées* (*) *des normalisateurs*

$$\Theta = 1 + \sum \underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\overset{<}{\eta}} \mathbf{B}_{\underset{\eta}{<}} = 1 + \sum \underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\overset{<}{\eta}} \mathbf{D}_{\underset{\eta}{<}} \quad \textit{(champ)} \tag{8.15}$$

$$\Theta^{-1} = 1 + \sum \underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\overset{<}{\eta}} \mathbf{B}_{\underset{\eta}{<}} \quad \textit{(champ)} \tag{8.16}$$

$$\Theta = 1 + \sum \underset{\bullet}{\mathcal{W}}^{\overset{<}{\eta}} \mathbf{B}_{\underset{\eta}{<}} \quad \textit{(difféo)} \tag{8.17}$$

$$\Theta^{-1} = 1 + \sum \underset{\bullet}{\mathcal{W}}^{\overset{<}{\eta}} \mathbf{B}_{\underset{\eta}{<}} \quad \textit{(difféo)} \tag{8.18}$$

*sont convergentes dans chaque modèle géométrique (de direction $\theta$) même quand $\Omega$ cesse d'être discret, pourvu que $\tau^{\text{ext}} < 0$ et que les petits diviseurs qui s'introduisent soient diophantiens (c'est-à-dire que (2.6) soit vérifiée). Si au contraire l'une de ces conditions est enfreinte, on a génériquement, dans chaque modèle géométrique, une divergence insurmontable en les paramètres $u = (u_i)$* (**).

Pour interpréter commodément ces résultats, introduisons dans l'espace $\mathbf{C}^\nu$ des voisinages sectoriels de l'origine :

$$\mathcal{D}^{\theta,\varepsilon} = \{x = (x_i); |x_1| < \varepsilon; \ldots; |x_\nu| < \varepsilon; |\operatorname{Arg}(x^m e^{-i\theta})| < \varepsilon\} \tag{8.19}$$

ainsi que leurs préimages connexes dans l'espace $\underset{\bullet}{\mathbf{C}} \times \mathbf{C}^{\nu-1}$ des $(z, u)$ :

$$D^{\theta,\varepsilon} = \{(z,u); |\operatorname{triv}_i(z,u)| < \varepsilon \ (\forall i)\,;\ |\arg(ze^{i\theta})| < \varepsilon\} \tag{8.19'}$$

$$\mathcal{D}^{\theta,\varepsilon} = \operatorname{triv}(D^{\theta,\varepsilon}). \tag{8.19''}$$

(Lorsque $m_\nu \geq 2$, il faut en fait ramifier $m_\nu$ fois les $\mathbf{C}$ où vivent les $u_i$). Pour deux réels $\theta \leq \theta'$, posons $\theta \sim \theta'$ si le secteur $\theta \leq \arg\zeta \leq \theta'$ de $\underset{\bullet}{\mathbf{C}}$, projeté sur $\mathbf{C}$, ne contient aucun élément de $\Omega$. Puis posons :

$$\underline{\mathcal{D}}^{\theta,\varepsilon} = \bigcup_{\theta' \sim \theta} \mathcal{D}^{\theta',\varepsilon}\ ; \qquad \underline{D}^{\theta,\varepsilon} = \bigcup_{\theta' \sim \theta} D^{\theta',\varepsilon}. \tag{8.19'''}$$

---

(*) Pour la construction des $\mathbf{B}_{\underset{\eta}{<}}$ et $\mathbf{D}_{\underset{\eta}{<}}$, voir le début de la preuve après la proposition 8.4.

(**) Toutefois, comme on verra, il y a une grande différence entre ces deux cas, en ce sens que l'apparition des *petits diviseurs liouvilliens* introduit de nouveaux invariants analytiques (non holomorphes) alors que le non-respect de la seule condition $\tau^{\text{ext}} < 0$ n'entraîne rien de tel : dans ce dernier cas, les $\mathbf{A}_\omega$ constituent toujours un système complet d'invariants analytiques (*cf.* Prop. 8.6).

PROPOSITION 8.4. Normalisation sectorielle. — *En l'absence de quasirésonance et sous la condition* $\tau^{\text{ext}} < 0$, *pour chaque valeur de* $\theta$ *dans* $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ *qui ne rencontre pas* $\operatorname{Arg}\Omega$, *les applications normalisantes* ${}^{\theta}h$ *et* ${}^{\theta}k$ *sont définies, holomorphes, "intérieures", régulières sur les voisinages sectoriels* $\underline{\mathcal{D}}^{\theta}$ *de l'origine 0 de* $\mathbf{C}^{\nu}$.

*Interprétation de la proposition 8.4.* — La proposition 8.3, interprétée dans le modèle géométrique $\theta$, définit les normalisateurs $\Theta$ et $\Theta^{-1}$ comme opérateurs de substitution sur l'espace des fonctions analytiques sur $\underline{\mathcal{D}}^{\theta}$. Via l'application trivialisante triv, ceci induit des fonctions ${}^{\theta}h$ et ${}^{\theta}k$ sur les voisinages sectoriels de $\underline{\mathcal{D}}^{\theta}$ de $0 \in \mathbf{C}^{\nu}$. La proposition ci-dessus affirme que les applications normalisantes ${}^{\theta}h$ et ${}^{\theta}k$ sont *définies holomorphes* sur $\underline{\mathcal{D}}^{\theta}$, c'est-à-dire sur tout $\underline{\mathcal{D}}^{\theta,\varepsilon}$ pour $\varepsilon$ assez petit; qu'elles sont *intérieures*, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon$ assez petit il existe $\varepsilon'$ et $\varepsilon''$ petits tels que :

$$ {}^{\theta}h : \underline{\mathcal{D}}^{\theta,\varepsilon} \to \underline{\mathcal{D}}^{\theta,\varepsilon'} \ ; \quad {}^{\theta}k : \underline{\mathcal{D}}^{\theta,\varepsilon} \to \underline{\mathcal{D}}^{\theta,\varepsilon''} $$

et enfin qu'elles sont *régulières*, c'est-à-dire qu'elles ont un comportement asymptotique décrit par les séries formelles $\widetilde{h}$ et $\widetilde{k}$ (et donc *indépendant* de $\theta$) quand $x$ tend vers 0 selon une direction intérieure à $\underline{\mathcal{D}}^{\theta}$.

*Preuve des propositions 8.1, 8.2, 8.3, 8.4.* — Il faut commencer par définir les coarborifiés $\mathbf{D}_{\overset{<}{\eta}}$ et $\mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}}$. Pour les $\mathbf{D}_{\overset{<}{\eta}}$ (qui ne sont définis que dans le cas d'un champ) ou suit exactement la même démarche qu'à la proposition 4.3 avec $\overset{<}{\eta}$ à la place de $\overset{<}{\omega}$ et en exigeant l'homogénéité en $\partial_z, \partial_{u_1}, \ldots, \partial_{u_{\nu-1}}$ à la place de l'homogénéité en $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_\nu}$. Pour les $\mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}}$ (qui sont définis pour les champs et pour les difféos) on applique encore la même construction, mais en remplaçant l'induction (4.30) par celle-ci :

$$ \mathbf{B}_{\eta_1 \bullet \overset{<}{\eta}} = \sum_{\eta_0} \mathbf{B}^{\eta_0}_{\ \eta_1 \bullet \overset{<}{\eta}} \qquad \text{(somme finie)} \tag{8.20} $$

où les opérateurs (à coefficients constants en $z$) du second membre sont caractérisés par les identités suivantes :

$$ (\mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}})\big(\underset{\bullet}{b}^{\eta_0}\, \mathbf{B}_{\eta_0}\big) \cdot \varphi \equiv \sum_{\eta_1} \big(\underset{\bullet}{b}^{\eta_1}\, \mathbf{B}^{\eta_0}_{\ \eta_1 \bullet \overset{<}{\eta}}\big) \cdot \varphi \qquad \text{(somme finie)} \tag{8.20 bis} $$

valable pour $\varphi \equiv z$ et pour $\varphi \equiv u_i$ $(i = 1, \ldots, \nu - 1)$. Bien entendu, si $\eta_0 = \binom{\omega_0}{\sigma_0}$ on n'aura que des $\eta_1 = \binom{\omega_1}{\sigma_1}$ avec $\omega_0 = \omega_1$, $\sigma_0 - \sigma_1 \in \mathbf{N}$ et $\sigma_0 - \sigma_1 \leq \deg(\overset{<}{\eta})$.

On vérifie aisément que $\mathbf{B}_{\underset{\bullet}{<}}$ et $\mathbf{D}_{\underset{\bullet}{<}}$ sont les coarborifiés des comoules $\mathbf{B}_\bullet$ et $\mathbf{D}_\bullet$ définis aux propositions 7.2 et 7.3, en ce sens qu'ils vérifient les relations (3.33) pour un champ et (3.34) pour un difféo.

Une manière plus élégante de construire les comoules $\mathbf{B}_\bullet$ et $\mathbf{B}_{\underset{\bullet}{<}}$ consiste à introduire une dérivation $\partial^* = \nabla + \nabla^*$ sur les moules et la dérivation transposée $\partial_* = \nabla + \nabla_*$ sur les comoules, au moyen des relations :

$$\partial^* M^{\eta_1,\dots,\eta_r} = (\omega_1 + \cdots \omega_r) M^{\eta_1,\dots,\eta_r} + \sum_{i=1}^{r} \sigma_i M^{\eta_1,\dots,{}^*\eta_i,\dots,\eta_r} \tag{8.21}$$

$$\partial_* M_{\eta_1,\dots,\eta_r} = (\omega_1 + \cdots \omega_r) M_{\eta_1,\dots,\eta_r} + \sum_{i=1}^{r} (1+\sigma_i) M_{\eta_1,\dots,\eta_i^*,\dots,\eta_r} \tag{8.21 bis}$$

avec comme d'habitude :

$$\eta_i = \begin{pmatrix} \omega_i \\ \sigma_i \end{pmatrix} ; \quad {}^*\eta_i = \begin{pmatrix} \omega_i \\ \sigma_i - 1 \end{pmatrix} ; \quad \eta_i^* = \begin{pmatrix} \omega_i \\ \sigma_i + 1 \end{pmatrix}. \tag{8.22}$$

La loi $\partial^*$ ne fait qu'étendre la dérivation ordinaire (7.29) des $\underset{\bullet}{b}^{\boldsymbol{\eta}}$ par multilinéarité. Par suite, si $\underset{\bullet}{\mathcal{A}}^{\boldsymbol{\eta}}$ désigne l'un quelconque des monômes résurgents $\underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}}, \underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\boldsymbol{\eta}}, \underset{\bullet}{\mathcal{W}}^{\boldsymbol{\eta}}, \underset{\bullet}{\mathcal{W}}^{\boldsymbol{\eta}}$, on aura :

$$\partial_z \underset{\bullet}{\mathcal{A}}^{\boldsymbol{\eta}}(z) \equiv \partial^* \underset{\bullet}{\mathcal{A}}^{\boldsymbol{\eta}}(z). \tag{8.23}$$

Si maintenant, pour tout opérateur différentiel $\mathbf{B}$ en

$$\partial = \partial_z, \partial_{u_1}, \dots, \partial_{u_{\nu-1}}$$

on note $\overline{\mathbf{B}}$ l'opérateur obtenu en remplaçant $\partial$ par $\partial + \partial_*$, le comoule $\mathbf{B}_\bullet$ est directement définissable par :

$$\mathbf{B}_{\eta_1,\dots,\eta_r} = \overline{\mathbf{B}}_{\eta_r} \dots \overline{\mathbf{B}}_{\eta_2} \mathbf{B}_{\eta_1} \tag{8.24}$$

et le comoule coarborifié $\mathbf{B}_{\underset{\bullet}{<}}$ est définissable, par induction sur $r = r(\overset{<}{\boldsymbol{\eta}})$, à partir de la loi multiplicative suivante :

$$\overline{\mathbf{B}}_{\underset{\boldsymbol{\eta}}{<}2} \mathbf{B}_{\underset{\boldsymbol{\eta}}{<}1} = \sum \operatorname{proj}\left(\begin{matrix} & \overset{<}{\boldsymbol{\eta}} & \\ \underset{\boldsymbol{\eta}}{<}1 & \bullet & \underset{\boldsymbol{\eta}}{<}2 \end{matrix}\right) \mathbf{B}_{\underset{\boldsymbol{\eta}}{<}} \tag{8.25}$$

qui est l'analogue de (4.36) et qu'il suffit d'utiliser pour des $\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}^1 = \overset{<}{\eta}_1$ de longueur 1, en faisant démarrer l'induction par :

$$\mathbf{B}_{\underset{\eta_1}{<}} = (\mathbf{B}_{\eta_1} \bullet z)\partial_z + \sum_i (\mathbf{B}_{\eta_1} \bullet u_i)\partial_{u_i} \tag{8.26}$$

et en utilisant bien sûr la coséparativité de $\mathbf{B}_{\underset{\bullet}{<}}$ et l'homogénéité de $\mathbf{B}_{\underset{\eta}{<}}$ de degré $\deg(\overset{<}{\eta})$ en $\partial_z, \partial_{u_1}, \ldots, \partial_{u_{\nu-1}}$. (*)

Cela étant, la correspondance triv : $x = (x_i) \leftrightarrow (z, u)$ introduite en (7.19) permet de considérer les $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}}$ et les $\mathbf{B}_{\underset{\boldsymbol{\eta}}{<}}$ comme des opérateurs différentiels entiers en $x_1, \ldots, x_\nu$ (et commutant avec $X^{\text{norm}}$). On peut donc envisager les mêmes semi-normes $\|\bullet\|_{U,V}$ qu'en (4.20) et relativement à ces semi-normes on a des majorations (où $\eta = \|\boldsymbol{\eta}\|$)

$$\| \underset{\bullet}{b}^{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}}\|_{U,V} \leq r(\boldsymbol{\eta})! \| \underset{\bullet}{b}^{\eta_1} \mathbf{B}_{\eta_1}\|_{U,V} \cdots \| \underset{\bullet}{b}^{\eta_r} \mathbf{B}_{\eta_r}\|_{U,V} C_2^{N(\boldsymbol{\eta})} \tag{8.27}$$

$$\| \underset{\bullet}{b}^{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{B}_{\underset{\boldsymbol{\eta}}{<}}\|_{U,V} \leq \| \underset{\bullet}{b}^{\eta_1} \mathbf{B}_{\eta_1}\|_{U,V} \cdots \| \underset{\bullet}{b}^{\eta_r} \mathbf{B}_{\eta_r}\|_{U,V} Q_2^{N(\overset{<}{\boldsymbol{\eta}})} \tag{8.28}$$

$$\| \underset{\bullet}{b}^{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}}\|_{U,V} \leq (C_{U,V})^{N(\eta)} \tag{8.29}$$

qui comportent des entiers $N(\boldsymbol{\eta}), N(\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}), N(\eta)$ définis comme $N(\boldsymbol{\omega})$, $N(\overset{<}{\boldsymbol{\omega}})$, $N(\omega)$ et qui sont en tout point analogues à (4.25), (4.42), (4.26). Et on note qu'ici encore la coarborification (8.27) $\rightarrow$ (8.28) provoque la disparition du facteur $r(\boldsymbol{\eta})!$

Pour discuter la convergence des séries mouliennes et de leurs arborifiées, ce n'est donc pas le comoule $\mathbf{B}_\bullet$ qui fait problème, mais bien plutôt le moule $\mathcal{A}^\bullet$, qui comme d'habitude représente $\mathcal{V}^\bullet, \mathcal{V}^\bullet, \mathcal{W}^\bullet, \mathcal{W}^\bullet$ et qui est ici (dans le cas résonnant) l'homologue du moule $A^\bullet$ qui représentait (dans le cas non-résonnant) $S^\bullet, \mathcal{S}^\bullet, \mathcal{S}^\bullet, \mathcal{S}^\bullet$.

Donnons tout de suite les estimations dont nous avons besoin, en nous limitant pour simplifier à des séquences $\boldsymbol{\eta}$ ou $\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}$ sans parties $\boldsymbol{\eta}'$ ou $\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}'$ de somme $\|\boldsymbol{\omega}'\|$ ou $\|\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}'\|$ nulle. On dira pour faire bref que ces $\boldsymbol{\eta}$ ou $\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}$ sont non dégénérées.

$$|z^{-\sigma}\mathcal{A}^{\boldsymbol{\eta}}(z)| \leq |A^{\boldsymbol{\omega}}|.(C(D))^{N(\boldsymbol{\eta})} \tag{8.30}$$

$$|z^{-\sigma}\mathcal{A}^{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}}(z)| \leq |A^{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}}|.(C(D))^{N(\overset{<}{\boldsymbol{\eta}})} \tag{8.31}$$

$$|z^{-\sigma_n}\mathcal{A}^{\eta_n}(z)| \;\#\; e^{-\omega_n z}|\omega_n|^{-1-\sigma'_n}\Gamma(1+\sigma'_n) \quad (\sigma'_n = \operatorname{Re}\sigma_n) \tag{8.32}$$

$$|z^{-\sigma}\mathcal{A}^{\boldsymbol{\eta}}(z)| \leq ((C(D,\omega))^{N(\boldsymbol{\eta})} \tag{8.33}$$

$$|z^{-\sigma}\mathcal{A}^{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}}(z)| \leq (C(D,\omega))^{N(\overset{<}{\boldsymbol{\eta}})} \tag{8.34}$$

$$|\widehat{\mathcal{A}}^{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}}(\zeta)| \leq (C(D,\omega,\zeta))^{N(\overset{<}{\boldsymbol{\eta}})}(1/q!) \quad \text{pour } q = \sigma^*(\omega) - \sigma \tag{8.35}$$

(*) Si on veut respecter la symétrie des *multiplicateurs résonnants*, on peut coarborifier en prenant $\mathbf{B}_{\underset{\boldsymbol{\eta}}{<}}$ homogène en $\partial_z$ ; $u_i\partial_{u_i}$ (pour $m_i \neq 0$) et $\partial u_j$ (pour $m_j = 0$). Mais en aucun cas on ne doit prendre $u_j\partial u_j$ pour $m_j = 0$. .

avec les conventions usuelles : $\boldsymbol{\eta} = \binom{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\sigma}}$ ; $\eta = \|\boldsymbol{\eta}\|$ ; $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$ ; $\sigma = \|\boldsymbol{\sigma}\|$.

Toutes ces inégalités, sauf la dernière, sont relatives à un modèle géométrique de direction $\theta$ et valent uniformément sur tout secteur de la forme :

$$D = \left\{ |\arg(ze^{i\theta}) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon;\ |z| > R \right\} \quad (0 < \varepsilon \text{ petit } ;\ 0 < R \text{ grand}).$$

Les inégalités (8.30) et (8.31) sont vraies uniformément pour toutes les séquences non dégénérées $\boldsymbol{\eta}$ ou $\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}$ relatives à un objet donné, sous la condition $\tau^{\text{ext}} < 0$. *Sans cette condition, elles deviennent fausses*, même pour $r(\boldsymbol{\eta}) = 1$, comme l'indique la relation (8.32), relative à une suite $\eta_n = \binom{\omega_n}{\sigma_n}$ avec $\omega_n \to 0$ et $\sigma'_n = \operatorname{Re}\sigma_n \to +\infty$ et où le signe # signifie qu'on a équivalence (au sens usuel, pour $n \to \infty$) entre les logarithmes des deux membres.

Les inégalités (8.33)-(8.34), elles-aussi relatives à des séquences non dégénérées, *ne sont plus sujettes à la condition* $\tau^{\text{ext}} < 0$, mais elles ne valent que pour les $\overset{<}{\boldsymbol{\eta}} = \binom{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\sigma}}^{<}$ tels que $\| \overset{<}{\boldsymbol{\omega}} \| = \omega$ *fixe* et tels que toute section $\boldsymbol{\omega}'$ de $\boldsymbol{\omega}$ soit de somme $\|\boldsymbol{\omega}'\| \in \Omega$ (resp. que toute partie irréductible $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}'$ de $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}$ soit de somme $\|\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}'\| \in \Omega$). On notera (*cf.* Lemme 5.4) que cette seconde condition est automatiquement impliquée par $\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}} \neq 0$ (alors que la première ne découle pas de $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}} \neq 0$).

Enfin, l'inégalité (8.35) est relative au modèle convolutif et à un point $\zeta$ fixé sur la surface de Riemann minimale $\mathcal{S}_\omega$ (*i.e.* la moins ramifiée possible) qui uniformise tous les $\widehat{\mathcal{A}}^{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}}(\zeta)$ de somme $\| \overset{<}{\boldsymbol{\omega}} \| = \omega$.

Comme dans le cas non-résonnant, on voit qu'ici encore la coarborification fait disparaître un facteur $r!$ mais que l'arborification n'en fait pas apparaître, ce qui explique la réussite du procédé.

Appariant (8.28) et (8.31) on obtient (*) la convergence des séries arborifiées associées à $\Theta^{\pm 1}$ *sous* la condition diophantienne usuelle et *sous* la condition $\tau^{\text{ext}} < 0$ et la relation (8.32) montre que cette dernière condition est essentielle.

Appariant (8.28) et (8.34) on obtient (*) la convergence des séries arborifiées pour chaque composante de fréquence $\omega$, *sans* aucune hypothèse sur $\tau^{\text{ext}}$. La divergence générique des séries mouliennes (*i.e.* non arborifiées)

(*) Les séquences $\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}$ dégénérées ne posent pas de problème, car elles n'introduisent que des facteurs $z^{\theta^*(\boldsymbol{\omega})}$ ou $z^{{}^*\theta(\boldsymbol{\omega})}$ avec ${}^*\theta$ et $\theta^*$ comme en (6.20) et (6.21).

sous-jacentes se voit en considérant des sous-séries $\sum \mathcal{A}^{\boldsymbol{\eta}^n}_{\bullet} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}^n}$ relatives à des séquences $\boldsymbol{\eta}^n = \binom{\boldsymbol{\omega}^n}{\boldsymbol{\sigma}^n}$ pour lesquelles $|A^{\boldsymbol{\omega}^n}| \cdot \|\mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}^n}\|_{U,V} \to +\infty$ et par suite $|\mathcal{A}^{\boldsymbol{\eta}^n}| \cdot \|\mathbf{B}_{\boldsymbol{\eta}^n}\|_{U,V} \to +\infty$.

Enfin, l'estimation (8.35) montre la convergence des séries arborifiées de $\widehat{h}^{\omega}(\zeta)$ et $\widehat{k}^{\omega}(\zeta)$ en tout point $\zeta$ de la surface de Riemann $\mathcal{S}_{\omega}$ et *donc* aussi celle des séries arborifiées donnant les opérateurs $\mathbf{A}_{\omega}$.

*Interprétation des équations de résurgence.* — Les résultats qui viennent d'être établis quant à la convergence des séries mouliennes, vont permettre d'interpréter l'*équation du pont* formelle (7.58) (7.59) comme une véritable équation de résurgence, portant sur de véritables fonctions résurgentes, et aussi de montrer, sans calcul, l'*invariance* des opérateurs $\mathbf{A}_{\omega}$. Il est d'ailleurs commode d'exprimer ces opérateurs $\mathbf{A}_{\omega}$ non seulement dans la carte trivialisante $(z, u)$, où ils revêtent la forme (7.60-61), mais aussi dans la carte normale $y = (y_i)$ au moyen du changement de variables (7.15). On trouve :

$$\mathbf{A}_{\omega} = I^{\omega} \cdot \{A^0_{\omega} X^{\text{norm}} + \sum_{i=1}^{\nu} A^i_{\omega} y_i \partial_{y_i}\} \tag{8.36}$$

avec $\partial_{y_i} = \partial/\partial y_i$; avec $X^{\text{norm}}$ comme en (7.1) même si on a affaire à un difféo; avec les mêmes scalaires $A^0_{\omega}, \ldots, A^{\nu-1}_{\omega}$ qu'en (7.60-61); avec un dernier coefficient déduisible des précédents par :

$$m_1 A^1_{\omega} + \cdots m_{\nu} A^{\nu}_{\omega} = 0 \qquad (m_{\nu} \neq 0) \tag{8.37}$$

et avec pour facteur $I^{\omega}$ :

$$I^{\omega} = y^{\sigma(\omega)} \cdot \exp(-\omega \cdot y^{-m}) \tag{8.38}$$

avec bien sûr $y^{-m} = \prod_i y_i^{-m_i}$ et $y^{\sigma(\omega)} = \prod_i y_i^{\sigma_i(\omega)}$ pour des scalaires :

$$\sigma_i(\omega) = n_i(\omega) + \alpha(\omega) m_i \qquad (i = 1, \ldots, \nu) \tag{8.39}$$

où $\alpha(\omega) = \sum_{i=1}^{\nu} \tau_i n_i(\omega)$ si $\overset{\bullet}{\omega} = n_0(\omega)\lambda_0 + \sum_{i=1}^{\nu} n_i(\omega)\lambda_i$ $(\lambda_0 = 2\pi i)$.

On voit que les $\sigma_i(\omega)$, contrairement aux $n_i(\omega)$, sont uniquement déterminés par $\omega$. On note aussi que $I^{\omega}$ est une intégrale formelle (non entière) de l'objet normal :

$$X^{\text{norm}}.I^{\omega} = 0 \quad \text{et} \quad F^{\text{norm}}.I^{\omega} = I^{\omega} \tag{8.40}$$

si bien que $\mathbf{A}_{\omega}$ commute avec l'objet normal :

(8.41)

$[\partial, \mathbf{A}_{\omega}] = 0$ dans la carte $(z, u)$ et $[X^{\text{norm}}, \mathbf{A}_{\omega}] = 0$ dans la carte $y = (y_i)$

(8.42)
$[e^{\partial}, \mathbf{A}_\omega] = 0$ dans la carte $(z, u)$ et $[F^{\mathrm{norm}}, \mathbf{A}_\omega] = 0$ dans la carte $y = (y_i)$.

Enonçons maintenant deux propositions qui sont de simples corollaires des propositions 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 mais qui rendent les plus grands services en pratique (*).

PROPOSITION 8.5. Equation du pont directe. — *Pour tout $\varphi(x)$ analytique locale en les variables données $x = (x_i)$, la série formelle $\widetilde{\psi}(y) = \varphi \circ \widetilde{k}(y)$ des variables normales $y = (y_i)$ s'écrit après le passage $y_i = u_i e^{\lambda_i z} z^{\tau_i}$ :*

$$\widetilde{\psi}[z, u] = \widetilde{\psi} \circ \mathrm{triv}(z, u) = \sum_{\omega \in \Omega^+} u^{n(\omega)} e^{\omega z} \widetilde{\psi}^\omega(z). \tag{8.43}$$

*Alors les composantes $\widetilde{\psi}^\omega(z)$ appartiennent à $z^{\sigma^*(\omega)}\mathbf{C}[[z^{-1}]]$, sont résurgentes en $z$ et vérifient l'équation du pont :*

$$\dot{\Delta}_\omega\, \widetilde{\psi}[z, u] = \mathbf{A}_\omega \widetilde{\psi}[z, u]. \tag{8.44}$$

PROPOSITION 8.6. Equation du pont réciproque. — *Pour tout $\psi(y)$ analytique locale en les variables normales $y = (y_i)$, la série formelle $\widetilde{\varphi}(x) = \psi \circ \widetilde{h}(x)$ des variables données $x = (x_i)$ s'écrit après le passage $x_i = u_i e^{\lambda_i z} z^{\tau_i}$ :*

$$\widetilde{\varphi}[z, u] = \widetilde{\varphi} \circ \mathrm{triv}(z, u) = \sum_{\omega \in \Omega^+} u^{n(\omega)} e^{\omega z} \widetilde{\varphi}^\omega(z). \tag{8.45}$$

*Alors les composantes $\widetilde{\varphi}^\omega(z)$ appartiennent à $z^{\sigma^*(\omega)}\mathbf{C}[[z^{-1}]]$, sont résurgentes en $z$ et vérifient l'équation du pont réciproque :*

$$\dot{\Delta}_\omega\, \widetilde{\varphi}[z, u] = -(\Theta^{-1}\mathbf{A}_\omega\Theta)\widetilde{\varphi}[z, u] = -(\mathbf{A}_\omega \psi_{(y)})_{y = \widetilde{h} \circ \mathrm{triv}(z,u)}. \tag{8.46}$$

*Remarque 1.* — Le troisième membre de (8.46) doit s'interpréter de la manière suivante : on prend l'opérateur différentiel $\mathbf{A}_\omega$ dans la carte normale, c'est-à-dire sous la forme (8.36) ; puis on l'applique à $\psi(y)$ et enfin on effectue le changement de variable $y = \widetilde{h} \circ \mathrm{triv}(z, u)$.

*Remarque 2.* Dérivations étrangères agissantes. — Les équations de résurgence (8.44) (8.46) doivent s'interpréter composante par composante, en identifiant dans les deux membres les termes de même fréquence $\omega$ et en

(*) Voir par exemple les critères d'analycité du §11.

se souvenant que la dérivation étrangère pointée $\overset{\bullet}{\Delta}_\omega$ comporte un facteur $e^{-\omega z}$. Par exemple l'équation du pont directe livre :

(8.47)

$$\overset{\bullet}{\Delta}_{\omega_1}\left(u^{n(\omega)}e^{\omega z}\widetilde{\psi}^{\omega}\right) = \begin{cases} \mathbf{A}_{\omega_1}(u^{n(\omega-\omega_1)}e^{(\omega-\omega_1)z}\widetilde{\psi}^{\omega-\omega_1} & \text{si } \overset{\bullet}{\omega}-\overset{\bullet}{\omega}_1\in\Omega^+ \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Après élimination des facteurs triviaux il vient :

$$(8.48)\qquad \overset{\bullet}{\Delta}_{\omega_1}\widetilde{\psi}^{\omega} = \begin{cases} A^0_{\omega_1}\partial\widetilde{\psi}^{\omega-\omega_1} + A^*_{\omega_1}\widetilde{\psi}^{\omega-\omega_1} & \text{si } \overset{\bullet}{\omega}-\overset{\bullet}{\omega}_1\in\Omega^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\partial = \partial_z$ et $A^*_{\omega_1} = \sum_{i=1}^{\nu} n_i(\omega-\omega_1)A^i_{\omega_1}$.

On voit par là que les seules dérivations étrangères composées $\Delta_{\omega_r}\ldots\Delta_{\omega_1}$ susceptibles d'agir (sans l'annuler) sur une composante de fréquence $\omega$ (qu'il s'agisse de l'équation du pont directe ou réciproque) correspondent à des séquences $(\omega_1,\ldots,\omega_r)$ telles que :

$$(8.49)\qquad \omega-\overset{\bullet}{\omega}_1\in\Omega^+\,;\ \omega-\overset{\bullet}{\omega}_1-\overset{\bullet}{\omega}_2\in\Omega^+;\ldots;\omega-\overset{\bullet}{\omega}_1-\overset{\bullet}{\omega}_2\ldots-\overset{\bullet}{\omega}_r\in\Omega^+.$$

*Remarque 3.* Intégrale formelle et équation du pont classique. — La proposition 8.5 s'applique en particulier pour $\varphi_i(x)\equiv x_i$. On a alors $\widetilde{\psi}_i[z,u] = \widetilde{h}_i\circ\mathrm{triv}(z,u) = \widetilde{x}_i(z,u)$ et on retrouve l'équation du pont sous sa forme classique :

$$(8.50)\qquad \overset{\bullet}{\Delta}_\omega\,\widetilde{x}(z,u) = \mathbf{A}_\omega\widetilde{x}(z,u)$$

où $\widetilde{x}(z,u) = (\widetilde{x}_1(z,u),\ldots,\widetilde{x}_\nu(z,u))$ n'est autre que l'*intégrale formelle* de l'objet considéré, c'est-à-dire pour un champ la solution formelle "saturée en paramètres" du système différentiel :

$$(8.51)\qquad \partial_z\widetilde{x}_i(z,u) = X_i(\widetilde{x}(z,u)) \qquad (i=1,\ldots,\nu)$$

et pour un difféo la solution formelle du système aux différences :

$$(8.52)\qquad \widetilde{x}_i(z+1,u) = f_i(\widetilde{x}(z,u)) \qquad (i=1,\ldots,\nu).$$

*Remarque 4.* Déduction directe de l'équation du pont. — En appliquant à (8.51) et (8.52) la dérivation étrangère $\overset{\bullet}{\Delta}_\omega$ et en utilisant la commutation de celle-ci avec $\partial_z$ et $\exp(\partial_z)$, on obtient :

$$(8.51\text{ bis})\qquad \partial_z(\overset{\bullet}{\Delta}_\omega\,\widetilde{x}_i(z,u)) = \sum_j X_{ij}(\widetilde{x}(z,u)).\,\overset{\bullet}{\Delta}_\omega\,\widetilde{x}_j(z,u)$$

$$\text{avec}\quad X_{ij} = \partial_{x_j}X_i$$

$$(8.52 \text{ bis}) \quad \dot{\Delta}_\omega\, \widetilde{x}_i(z+1,u) = \sum_j f_{ij}(\widetilde{x}(z,u)).\, \dot{\Delta}_\omega\, \widetilde{x}_j(z,u) \quad \text{avec} \quad f_{ij} = \partial_{x_j} f_i$$

et il se trouve que la *solution générale* de ces systèmes linéaires homogènes est précisément de la forme (8.50) pour un opérateur différentiel $\mathbf{A}_\omega$ arbitraire mais de la forme indiquée en (7.60) ou (7.61). Ceci permet de déduire l'équation du pont *directement* de la seule résurgence en $z$ de $\widetilde{x}(z,u)$, sans utiliser les développements explicites en séries mouliennes.

PROPOSITION 8.6. Les opérateurs $\mathbf{A}_\omega$ comme invariants analytiques et holomorphes. — *Les $\mathbf{A}_\omega$ sont des invariants analytiques et holomorphes de l'objet $X$ ou $f$. En l'absence de petits diviseurs liouvilliens, ils constituent un système complet d'invariants analytiques et un système complet d'invariants holomorphes de l'objet. En présence de petits diviseurs liouvilliens, ils ne constituent plus qu'un système complet d'invariants holomorphes.*

*Preuve.* — Rappelons qu'un invariant $I$ est dit *analytique* s'il est invariant par rapport aux changements de variables analytiques; et qu'il est dit *holomorphe* s'il dépend holomorphiquement de l'objet (c'est-à-dire des coefficients de Taylor de sa forme préparée). Un système $\mathcal{I} = \{I\}$ d'*invariants analytiques* (resp. *holomorphes*) est dit complet si pour toute paire d'objets $\mathrm{Ob}_1$ et $\mathrm{Ob}_2$ formellement conjugués la relation :

$$(8.53) \qquad I(\mathrm{Ob}_1) = I(\mathrm{Ob}_2) \quad \text{pour tout } I \in \mathcal{I}$$

entraîne respectivement :

(8.54) $\mathrm{Ob}_1$ et $\mathrm{Ob}_2$ sont analytiquement conjugués

(8.55) $J(\mathrm{Ob}_1) = J(\mathrm{Ob}_2)$ pour tout invariant holomorphe $J \notin \mathcal{I}$.

Le fait que les $\mathbf{A}_\omega$ soient des invariants *analytiques* résulte directement de l'équation du pont, prise sous n'importe quelle forme. Prenons par exemple la forme "classique" (8.50). Il est clair d'une part que (8.50) détermine les $\mathbf{A}_\omega$ et d'autre part qu'elle ne dépend pas de la carte donnée $x = (x_i)$. D'où le résultat.

Le fait que les $\mathbf{A}_\omega$ soient des invariants *holomorphes* résulte de leur expression (7.62) (7.63) comme séries mouliennes en fonction des constantes universelles $V_\omega^\eta$ ou $W_\omega^\eta$ et des opérateurs $\mathbf{B}_\eta$, ces derniers ne faisant que "coder" les coefficients de Taylor de l'objet.

Reste à montrer qu'en l'absence de petits diviseurs liouvilliens les $\mathbf{A}_\omega$ forment un *système complet d'invariants analytiques*. Traitons le cas

$\tau^{\text{ext}} < 0$. Soient deux objets locaux, deux champs $X$ et $\underline{X}$ par exemple, qui sont formellement conjugués (*i.e.* ils ont même forme normale $X^{\text{norm}}$ et donc même réseau $\Omega$), qui ont pour normalisateurs $\Theta$ et $\underline{\Theta}$ respectivement et pour invariants $\mathbf{A}_\omega$ et $\underline{\mathbf{A}_\omega}$. On a la conjugaison explicite :

$$X.\Theta\underline{\Theta}^{-1} = \Theta\underline{\Theta}^{-1}\underline{X} \tag{8.56}$$

avec, dans la carte donnée $x = (x_i)$ et dans la carte $(z, u)$ qui lui est liée par (7.19), les équations de résurgence suivantes :

$$\begin{aligned}[\dot{\Delta}_\omega, \Theta\underline{\Theta}^{-1}] &= [\dot{\Delta}_\omega, \Theta]\underline{\Theta}^{-1} + \Theta[\dot{\Delta}_\omega, \underline{\Theta}^{-1}] \\ &= -\Theta\mathbf{A}_\omega\underline{\Theta}^{-1} + \Theta\underline{\mathbf{A}_\omega}\underline{\Theta}^{-1} = 0 \quad \text{ssi } \mathbf{A}_\omega = \underline{\mathbf{A}_\omega}.\end{aligned} \tag{8.57}$$

Ici $\dot{\omega}$ désigne n'importe quel élément du réseau commun $\Omega$ et $\dot{\Delta}_\omega$ désigne la dérivation étrangère pointée relativement à $z = x^{-m}$. Or on a montré (proposition 8.4) qu'en l'absence de petits diviseurs liouvilliens, les normalisateurs $\Theta$ et $\Theta^{-1}$ correspondaient à des germes d'applications normalisantes ${}^\theta h$ et ${}^\theta k$ définies *régulières* (*i.e.* analytiques avec comportement asymptotique régulier) sur chacun des voisinages sectoriels $\underline{\mathcal{D}}^\theta$ de l'origine 0 de $\mathbf{C}^\nu$ (*cf.* (8.19)). Il en va donc de même ici de $\Theta\underline{\Theta}^{-1}$ qui correspond à une application *régulière* ${}^\theta g = {}^\theta\underline{k} \circ {}^\theta h$ définie sur chaque $\underline{\mathcal{D}}^\theta$. Mais lorsque $\mathbf{A}_\omega = \underline{\mathbf{A}_\omega}$ toutes les dérivées étrangères de $\widetilde{g} = \widetilde{k} \circ \widetilde{h}$ *s'annulent* d'après (8.57), si bien que les différents "modèles géométriques" coïncident :

$${}^\theta g = {}^{\theta'} g \quad \text{sur} \quad \underline{\mathcal{D}}^\theta \cap \underline{\mathcal{D}}^{\theta'} \quad (\neq \emptyset \text{ si } |\theta - \theta'| < \pi). \tag{8.58}$$

Par suite, les différents ${}^\theta g$ se recollent pour former une fonction g unique, définie uniforme analytique sur $U \dot{-} \{0\}$, où $U$ désigne un voisinage complet de l'origine 0 de $\mathbf{C}^\nu$. D'autre part l'existence dans les domaines $\underline{\mathcal{D}}^\theta$ (qui, ensemble, recouvrent $U \dot{-} \{0\}$) de développements asymptotiques réguliers en 0 fait que $g$ est bornée au voisinage de 0 et *donc* analytique en 0 . Ceci prouve bien qu'en l'absence de petits diviseurs liouvilliens, les $\mathbf{A}_\omega$ constituent un système complet d'invariants analytiques et donc a fortiori (puisqu'individuellement ils sont holomorphes) un système complet d'invariants holomorphes.

Nous laisserons de côté le cas $\tau^{\text{ext}} \geq 0$, qui exige une approche légèrement différente : il faut considérer directement la conjugante ${}^\theta g$ qui (en cas d'équiinvariance $\mathbf{A}_\omega \equiv \underline{\mathbf{A}_\omega}$) continue d'être définie régulière sur les $\underline{\mathcal{D}}^\theta$, bien que ce ne soit plus vrai en général pour ses deux facteurs ${}^\theta\underline{k}$ et ${}^\theta h$.

Lorsqu'enfin apparaissent des petits diviseurs liouvilliens, ceux-ci provoquent (tout comme dans le cas non-résonnant) la divergence en $u$

de $\Theta\underline{\Theta}^{-1}$ et les invariants analytiques $\mathbf{A}_\omega$, quoique toujours définis, ne suffisent plus à caractériser les classes analytiques. Toutefois, ils constituent toujours un système complet d'*invariants holomorphes* : ce dernier point est d'ailleurs secondaire et nous l'admettrons ici (*cf.* [E3] chap.9).

**Retour sur l'interprétation des équations de résurgence.**

*A) Répartition des points singuliers et interprétation des réseaux de résurgence.* — Les énoncés ci-dessus permettent de mieux cerner la signification des différents réseaux de résurgence. Les $\omega \in \mathbf{C}$ de projection $\dot{\omega} \in \Omega$ (avec la composante $\lambda_0\mathbf{Z}$ pour un difféo) indexent les dérivations étrangères agissantes. Le réseau $\Omega^+$ (mais *sans* la composante $\lambda_0\mathbf{Z}$ même pour un difféo) indexe les composantes $\widetilde{h}^\omega$ et $\widetilde{k}^\omega$ des applications normalisantes. Pour une fréquence $\omega$ fixe, les transformées de Borel $\widehat{h}^\omega(\zeta)$ et $\widehat{k}^\omega(\zeta)$ ont des points singuliers en des $\zeta$ qui, projetés sur $\mathbf{C}$, décrivent un ensemble qui est toujours contenu dans $\omega - \Omega^+$ et qui génériquement coïncide avec lui (ici, $\Omega^+$ *comporte* la composante $\lambda_0\mathbf{Z}$ pour un difféo). Cet ensemble peut très bien être dense, même lorsque (comme nous le supposons tout au long de cette section) $\Omega^{\text{int}}$ est discret. Toutefois (toujours pour $\Omega^{\text{int}}$ discret), pour tout $\zeta$ fixé sur la surface de Riemann de $\widehat{h}^\omega(\zeta)$ ou $\widehat{k}^\omega(\zeta)$, l'ensemble des points singuliers *vus* ou *entrevus* (*cf.* début du §6) à partir de $\zeta$, projeté sur $\mathbf{C}$, est un ensemble $\text{sing}(\zeta)$ contenant toujours $\Omega^{\text{int}}$ ; toujours discret ; mais d'autant plus vaste que $\zeta$ est plus éloigné de l'origine. Si par exemple on prend pour $\zeta$ l'origine absolue $\dot{O}$ de ces surfaces de Riemann (c'est-à-dire le point, situé au-dessus de 0, à partir duquel on a effectué le prolongement analytique du germe $\widehat{h}^\omega$ ou $\widehat{k}^\omega$ fourni par la transformation de Borel formelle ; *cf.* début du §6) alors l'ensemble $\text{sing}(\dot{O})$ est minimal ; est contenu dans l'ensemble :

$$\omega - \Omega^+ \tag{8.59}$$

et coïncide génériquement avec lui.

On notera que tous ces renseignements sont directement déduisibles de l'équation du pont, qui d'une façon générale condense une quantité énorme d'information, puisqu'elle décrit entièrement le comportement de *toutes les* $\widehat{h}^\omega(\zeta)$ et de *toutes* les $\widehat{k}^\omega(\zeta)$ sur *tous* les feuillets de leurs surfaces de Riemann.

*B) Invariants transvexaux et invariants vexaux.* — Les invariants holomorphes $\mathbf{A}_\omega$ sont somme d'une partie *vexale* (le terme en $\partial_z$) et d'une

partie *transvexale* (les termes en $\partial_{u_1}, \ldots, \partial_{u_{\nu-1}}$)

$$\mathbf{A}_\omega = \mathbf{A}_\omega^{\text{vex}} + \mathbf{A}_\omega^{\text{transvex}} \quad \text{avec } \mathbf{A}_\omega^{\text{vex}}.u_i \equiv \mathbf{A}_\omega^{\text{transvex}}.z \equiv 0. \tag{8.60}$$

La nullité des $\mathbf{A}_\omega^{\text{vex}}$ est une condition *nécessaire* (et, en l'absence de petits diviseurs liouvilliens, *suffisante*) pour qu'existe une carte analytique préparée $x = (x_i)$ dans laquelle l'objet considéré $X$ ou $f$ soit une *transvexion*, c'est-à-dire vérifie :

$$X.x^{-m} = 1 \quad \text{ou} \quad F.x^{-m} = 1 + x^{-m}. \tag{8.61}$$

Les $\mathbf{A}_\omega^{\text{vex}}$ fournissent aussi des critères d'analycité de l'anneau résonnant invariant $\mathcal{A}_{\text{res}}$ (*cf.* §11).

Enfin, la prémultiplication d'un champ X par une unité analytique $\varphi$ :

$$X \mapsto \underline{X} = \varphi.X \quad \text{avec } \varphi(x) \in \mathbf{C}\{x\} \text{ et } \varphi(0) \neq 0 \tag{8.62}$$

laisse les *invariants transvexaux* inchangés, mais elle modifie les *invariants vexaux* : c'est pourquoi ces derniers sont aussi dits *précaires*.

*C) Les invariants cruciaux et leur interprétation.* — Ce sont les invariants $\mathbf{A}_\omega$ dont l'indice $\omega$ a une projection $\overset{\bullet}{\omega}$ de la forme :

$$\overset{\bullet}{\omega} = -\lambda_i \qquad \text{avec } m_i = 0 \qquad \text{(pour un champ)} \tag{8.63}$$

$$\overset{\bullet}{\omega} = -\lambda_i (\operatorname{mod} \lambda_0) \qquad \text{avec } m_i = 0 \qquad \text{(pour un difféo).} \tag{8.64}$$

Ils correspondent donc à des multiplicateurs $\lambda_i$ qui ne sont pas impliqués dans l'unique relation de résonance (5.2). Ces invariants sont très particuliers à plusieurs égards. Premièrement, ils ont une forme spéciale, car seule leur composante en $\partial_{u_i}$ peut être $\neq 0$.

$$\mathbf{A}_\omega = A_\omega^i \partial_{u_i} \qquad \text{si } \overset{\bullet}{\omega} = -\lambda_i \qquad \text{(pour un champ)} \tag{8.65}$$

$$\mathbf{A}_\omega = e^{-n_0\lambda_0 z} A_\omega^i \partial_{u_i} \qquad \text{si } \overset{\bullet}{\omega} = n_0\lambda_0 - \lambda_i \qquad \text{(pour un difféo)} \tag{8.66}$$

si bien qu'ils commutent tous entre eux. Deuxièmement, les dérivations $\overset{\bullet}{\Delta}_\omega$ qui leur corespondent (tout comme celles d'indice $\overset{\bullet}{\omega} \in \Omega^{\text{int}}$) peuvent agir (non trivialement) sur toutes les composantes $\widetilde{\psi}^{\omega'}$ ou $\widetilde{\varphi}^{\omega'}$ de $\widetilde{\psi}$ et $\widetilde{\varphi}$ (*cf.* (8.43) (8.45)). Troisièmement, et c'est là l'essentiel, ils gouvernent la "*solidarité*" de ces composantes $\widetilde{\psi}^\omega$ ou $\widetilde{\varphi}^\omega$. Expliquons de quoi il s'agit, en raisonnant sur un champ $X$ et sur l'équation du pont directe, qui implique $\widetilde{\psi}$ et ses composantes (*cf.* (8.43)). Lorsque tous les invariants cruciaux de $X$ sont $\neq 0$ pour un champ (ou, pour un difféo, lorsqu'*un* invariant crucial au moins est $\neq 0$ pour chaque $i$) la connaissance d'une seule composante $\widetilde{\psi}^\omega$, par exemple la "première", *i.e.* $\widetilde{\psi}^0$, permet de *reconstituer toutes les autres* par dérivation étrangère. En effet, de l'équation (8.44) ; de la commutation

des $\overset{\bullet}{\Delta}_\omega$ avec les $\mathbf{A}_{\omega'}$ et de la commutation des $\mathbf{A}_\omega$ cruciaux entre eux, on déduit, après élimination des facteurs exponentiels :

$$(8.67)\quad \Delta_{\omega_r}\dots\Delta_{\omega_1}\prod_{m_i=0}(\Delta_{\alpha_i})^{n_i}\widetilde{\psi}^\omega = u^{-n(\omega)}\prod_{m_i=0}(\mathbf{A}_{\alpha_i})^{n_i}\mathbf{A}_{\omega_1}\dots\mathbf{A}_{\omega_r}\widetilde{\psi}^0$$

pour tous entiers $n_i \geq 0$ et tous $\omega_j$ et $\alpha_i$ de $\overset{\bullet}{\mathbf{C}}$ tels que :

$$(8.68)\qquad \omega = \sum_{m_i=0} n_i\,\overset{\bullet}{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{r}\overset{\bullet}{\omega}_j \qquad (\overset{\bullet}{\alpha}_i = -\lambda_i\,;\ \overset{\bullet}{\omega}_j \in \Omega).$$

Au contraire, lorsque *certains des invariants cruciaux* (resp. *tous les invariants cruciaux*) sont nuls, la connaissance d'une seule $\widetilde{\psi}^{\omega_0}$ ne permet plus de reconstituer qu'une *partie infinie* (resp. *finie*) de l'ensemble des composantes $\widetilde{\psi}^\omega$. Dans le cas extrême où tous les $\mathbf{A}_\omega$, cruciaux ou non, sont nuls (ce qui, en l'absence de petits diviseurs liouvilliens, correspond au cas d'un champ analytiquement normalisable) les composantes $\widetilde{\psi}^\omega$ sont *convergentes* et *totalement indépendantes.*

En résumé, dans le cas divergent-résurgent, les diverses composantes $\widetilde{\psi}^\omega$ présentent une *extraordinaire solidarité*, qu'elles perdent dans le cas convergent. Une analogie (pertinente, car renvoyant à un autre exemple d'extension) aidera à comprendre ce phénomène : *un polynôme irréductible* (resp. *réductible) sur* $\mathbf{Q}$ *peut* (resp. *ne peut pas) être reconstitué à partir de l'une quelconque de ses racines.*

*D) Changements de modèle géométrique. Automorphismes* ${}^{\theta',\theta}\mathbf{A}_\omega$. Si on applique la formule (6.9-10) de passage d'un modèle géométrique $\theta$ à un modèle géométrique $\theta'$ à l'intégrale formelle $\widetilde{x}(z,u)$ on trouve, par application répétée de l'équation du pont classique (8.50) et compte tenu de la commutation de chaque $\overset{\bullet}{\Delta}_\omega$ avec chaque $\mathbf{A}_{\omega'}$ :

$$(8.69)\qquad {}^{\theta}x(z,u) = {}^{\theta,\theta'}\mathbf{A}_\omega.{}^{\theta'}x(z,u) \qquad (\theta,\theta')\in\mathbf{R}\,;\ |\theta-\theta'|<\pi)$$

où ${}^{\theta}x(z,u)$ et ${}^{\theta'}x(z,u)$ désignent les modèles géométriques d'angle $\theta$ et $\theta'$ et où ${}^{\theta,\theta'}\mathbf{A}$ désigne l'automorphisme de substitution :

$$(8.70)\qquad {}^{\theta,\theta'}\mathbf{A} = 1 + \sum_{r\geq 1}\sum_{\omega_i} E^{\omega_1,\dots,\omega_r}_{\theta,\theta'}\mathbf{A}_{\omega_1}\dots\mathbf{A}_{\omega_r}$$

obtenu en contractant le moule symétral $E^{\bullet}_{\theta,\theta'}$ introduit en (6.11) avec les opérateurs $\mathbf{A}_{\omega_i}$, mais rangés dans l'ordre inverse de celui des $\overset{\bullet}{\Delta}_{\omega_i}$ de (6.10).

Relativement aux normalisateurs le passage $\theta \to \theta'$ s'écrit :

$$(8.71)\qquad {}^{\theta'}\Theta = {}^{\theta}\Theta.{}^{\theta,\theta'}\mathbf{A} \quad\text{et}\quad {}^{\theta'}\Theta^{-1} = {}^{\theta',\theta}\mathbf{A}\,{}^{\theta}\Theta^{-1}\,.$$

Pour un champ $X$ (resp. pour un difféo $f$) les opérateurs ${}^{\theta,\theta'}\mathbf{A}$, tout comme les $\mathbf{A}_\omega$ dont ils sont constitués, commutent avec $\partial$ (resp. $e^{\partial}$) si bien qu'on a, pour toute direction $\theta$, les relations attendues :

$$(8.72)\quad {}^{\theta}\Theta\ X^{\text{norm}}\ {}^{\theta}\Theta^{-1} = X \quad \text{(champ)}$$
$$(8.73)\quad {}^{\theta}\Theta\ F^{\text{norm}}\ {}^{\theta}\Theta^{-1} = F \quad \text{(difféo)}.$$

En l'absence de petits diviseurs liouvilliens, ces relations s'interprétent globalement, dans les domaines $\mathcal{D}^{\theta} \cap \mathcal{D}^{\theta'}$ de l'espace $(z, u)$ ou $x = (x_i)$ et si l'on pose :

$$(8.74)\qquad {}^{\theta,\theta'}\mathbf{A} = 1 + \sum_{\omega} {}^{\theta,\theta'}\mathbf{A}_\omega \ \text{ avec } \theta \leq \arg\omega \leq \theta' \text{ et } \overset{\bullet}{\omega} \in \Omega$$

$$(8.75)\qquad {}^{\theta,\theta'}\mathbf{A}_\omega = \sum_{r\geq 1} \sum_{\overset{\bullet}{\omega}_1+\cdots\overset{\bullet}{\omega}_r=\omega} E^{\omega_1,\ldots,\omega_r}_{\theta,\theta'} \mathbf{A}_{\omega_1}\ldots\mathbf{A}_{\omega_r} = \text{ somme finie}$$

cela entraîne pour les opérateurs ${}^{\theta,\theta'}\mathbf{A}_\omega$ des majorations :

$$(8.76)\qquad \|{}^{\theta,\theta'}\mathbf{A}_\omega\|_{U,V} \leq c_1 e^{c_2|\omega|} \qquad (c_1, c_2 \text{ const } > 0)$$

relatives à des semi-normes $\|\bullet\|_{U,V}$ analogues à (4.20) mais adaptées à $\mathcal{D}^{\theta} \cap \mathcal{D}^{\theta'}$. Ces majorations sont optimales et plus fortes que les majorations optimales des $\mathbf{A}_\omega$ :

$$(8.77)\qquad \|\mathbf{A}_\omega\|_{U,V} \leq c_3 e^{c_4|\omega|\log|\omega|} \qquad (\textit{cf.}\ [\text{E3}]\ \text{pp. 519-520}).$$

Notons enfin que, même en présence de petits diviseurs liouvilliens, les relations (8.70) et (8.71) conservent un sens *effectif* ("*géométrique*") en $z$ mais deviennent *formelles* en $u = (u_i)$.

## 9. Objets résonnants de réseau intérieur non discret. Equation du pont et invariants holomorphes.

Cette section est entièrement consacrée aux objets résonnants de réseau intérieur $\Omega^{\text{int}}$ *non discret* (cas 4,5,6 du §7). Trois nouveautés vont apparaître, concernant tant les séries formelles résurgentes $\widetilde{g}(z)$ attachées à l'objet que les invariants holomorphes $\mathbf{A}_\omega$.

i) Les $\widetilde{g}(z)$ ne seront plus Gevrey d'ordre 1, mais d'ordre supérieur en général.

ii) Leurs transformées de Borel ne seront plus toujours définissables. Lorsqu'elles le seront, elles présenteront génériquement des singularités

denses (sur des droites ou sur $\mathbf{C}$) mais seront encore résurgentes (en un sens généralisé) et continueront de vérifier l'équation du pont.

iii) Les opérateurs $\mathbf{A}_\omega$ aussi ne seront plus définis que pour des objets particuliers, dits *corrigibles*. Dans certaines classes formelles, tous les objets seront automatiquement corrigibles; dans d'autres, ils ne le seront qu'exceptionnellement. Mais pour peu qu'ils soient définis, les opérateurs $\mathbf{A}_\omega$ garderont leur caractère d'invariants analytiques et holomorphes.

Commençons par introduire quelques notations utiles. Notons $d$ le nombre de générateurs indépendants de $\Omega^{\text{int}}$ et définissons $\delta$ comme suit :

$$\begin{array}{lll} \textit{cas 4 :} & \mathrm{cl}(\Omega^{\text{int}}) & = \alpha\mathbf{R} \qquad\quad \delta = d-1 \\ \textit{cas 5 :} & \mathrm{cl}(\Omega^{\text{int}}) & = \alpha\mathbf{R}+\beta\mathbf{Z} \quad \delta = d-2 \\ \textit{cas 6 :} & \mathrm{cl}(\Omega^{\text{int}}) & = \mathbf{C} \qquad\qquad\quad \delta = (d-2)/2. \end{array}$$

Pour tout $\omega$ de $\Omega$ ou de $\Omega^{\text{int}}$, appelons *hauteur* de $\omega$ le plus petit entier $n_* = n_*(\omega)$ tel que $\omega$ puisse s'écrire :

$$\omega = \sum n_i\lambda_i \quad \text{ou} \quad \omega = (\sum n_i\lambda_i) - \lambda_j \quad \text{avec } 0 \le n_i \le n_* \tag{9.1}$$

(mod $2\pi i$ dans le cas d'un difféo).

Si $I$ désigne un intervalle fini (cas 4 et 5) ou un disque fini (cas 6) contenu dans $\mathrm{cl}(\Omega^{\text{int}})$ et si $n(I)$ désigne le nombre de $\omega \in \Omega^{\text{int}}$ de hauteur $\le n$ qui sont contenus dans $I$, on a évidemment :

$$n(I) \le \mathrm{const}(I).n^\delta. \tag{9.2}$$

De plus, si on pose :

$$\delta^{\text{int}} = \limsup_\omega \frac{\log|1/\omega|}{\log n_*(\omega)} \le +\infty \quad (\omega \in \Omega^{\text{int}}; n_*(\omega) = \text{ hauteur de } \omega) \tag{9.3}$$

on a toujours $\delta \le \delta^{\text{int}}$ et même $\delta = \delta^{\text{int}}$ pour presque tout spectre $\lambda = (\lambda_i)$.

Introduisons un autre paramètre utile :

$$\tau^{\text{int}} = \sup_\alpha \mathrm{Re}\langle\alpha,\tau\rangle \text{ pour } 0 \le \alpha_i \le m_i \text{ et } \langle\alpha,\lambda\rangle = 0 \qquad \text{(champ)} \tag{9.4}$$

$$\tau^{\text{int}} = \sup_\alpha \mathrm{Re}\langle\alpha,\tau\rangle \text{ pour } 0 \le \alpha_i \le m_i \text{ et } \mathrm{Re}\langle\alpha,\lambda\rangle = 0 \quad \text{(difféo).} \tag{9.4 bis}$$

Alors que le paramètre $\tau^{\text{ext}}$ de la section précédente dépendait de tous les multiplicateurs $\lambda_i$, le paramètre $\tau^{\text{int}}$ dépend des seuls multiplicateurs résonnants.

Notons que $\tau^{\text{int}}$ est invariant pour la prémultiplication d'un champ par une unité $\varphi$. En effet si $\underline{X} = \varphi X$ on a :

$$\underline{\tau_i} = \tau_i + \gamma\lambda_i \quad \text{avec } \gamma \in \mathbf{C} \quad \text{et donc } \underline{\tau^{\text{int}}} = \tau^{\text{int}}. \tag{9.5}$$

Trois situations peuvent se présenter

*Situation 1 :* $-\infty < \tau^{\text{int}} < 0$

*Situation 2 :* $0 \leq \tau^{\text{int}}\delta^{\text{int}} < 1$

*Situation 3 :* $1 \leq \tau^{\text{int}}\delta^{\text{int}} \leq +\infty$.

Adoptons quelques conventions commodes pour alléger les énoncés. Une *série formelle* $\widetilde{g}(z) = z^c \sum a_n z^{-n}$ sera dite Gevrey d'ordre $\delta$ si $|a_n| \leq c_1 c_2^n n^{\delta n}$. Une *fonction* $\widehat{g}(\zeta)$ sera dite Gevrey d'ordre $\delta$ en un point $\zeta$ si :

$$|\partial_\zeta^n \widehat{g}(\zeta)| \leq c_1 c_2^n n^{(1+\delta)n} \tag{9.6}$$

Gevrey d'ordre $\delta + 0$ voudra dire Gevrey d'ordre $\delta + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Par *série formelle* $\widetilde{g}(z)$ *associée à l'objet* nous entendrons indifféremment les composantes $\widetilde{\psi}^\omega$ ou $\widetilde{\varphi}^\omega$ des propositions 8.5 et 8.6; les composantes $\widetilde{h}^\omega$ ou $\widetilde{k}^\omega$ des applications normalisantes; ou les composantes $\Theta^{\omega\pm}$ des normalisateurs.

Les *fonctions* $\varphi(\zeta)$ *à singularités non isolées* sont définies continues sur presque toute ligne brisée $\Gamma$ issue de $\underset{\bullet}{O} \in \underset{\bullet}{\mathbf{C}}$. La notion sera précisée à la section suivante, ainsi que la différence entre les *singularités* (*i.e.* singularités *vraies* ou *ramifications*) d'une telle fonction et ses *pics* (*i.e.* discontinuités radiales).

Voici les énoncés relatifs aux $\widetilde{g}(z)$ et aux $\widehat{g}(\zeta)$, suivis de preuves succinctes; puis les énoncés relatifs aux $\mathbf{A}_\omega$, suivis de preuves détaillées. Ce sont en effet surtout les $\mathbf{A}_\omega$ et leur invariance qui nous importent ici et celle-ci (l'invariance) peut s'établir indépendamment des premiers résultats.

PROPOSITION 9.1. — *Les séries formelles $\widetilde{g}(z)$ associées à l'objet local $X$ ou $f$ sont toujours de classe Gevrey $1 + \delta^{\text{int}} + 0$ mais pas d'ordre inférieur en général.*

PROPOSITION 9.2. — *Si $\tau^{\text{int}} < 0$ (situation 1), les $\widetilde{g}(z)$ associées à l'objet ont des séries arborifiées $\sum c_{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}} \widetilde{\mathcal{A}}^{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}}(z)$ dont la transformée de Borel $\sum c_{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}} \widehat{\mathcal{A}}^{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}}(\zeta)$ converge vers une fonction $\widehat{g}(\zeta)$ résurgente généralisée. Les singularités de $\widehat{g}(\zeta)$ forment en général une configuration non discrète mais toujours dénombrable; tandis que les pics de $\widehat{g}(\zeta)$ forment toujours une configuration discrète. En presque tout point, $\widehat{g}(\zeta)$ est Gevrey d'ordre $\delta + 0 \leq \delta^{\text{int}} + 0$.*

PROPOSITION 9.3. — *Si* $0 \leq \tau^{\text{int}}\delta^{\text{int}} < 1$ *(situation 2), les* $\widetilde{g}(z)$ *associées à l'objet ont des séries arborifiées dont la transformée de Borel converge vers une fonction* $\widehat{g}(\zeta)$ *résurgente généralisée. Les singularités de* $\widehat{g}(\zeta)$ *forment en général une configuration non discrète, mais toujours dénombrable; tandis que les pics forment en général une configuration non dénombrable, mais toujours de mesure nulle. En presque tout point,* $\widehat{g}(\zeta)$ *est Gevrey d'ordre* $\delta + 0 \leq \delta^{\text{int}} + 0$.

PROPOSITION 9.4. — *Si* $1 \leq \tau^{\text{int}}\delta^{\text{int}} \leq +\infty$ *(situation 3), les* $\widetilde{g}(z)$ *associées à l'objet ont des séries arborifiées dont les transformées de Borel sont génériquement divergentes. Toutefois, pour certains objets exceptionnels ("objets corrigibles"; voir ci-dessous) elles continuent de converger vers une fonction* $\widehat{g}(\zeta)$ *ayant les mêmes propriétés qu'à la proposition précédente.*

*Preuves succintes des propositions précédentes.* — Nous raisonnerons pour simplifier sur le cas d'un champ. La "série associée" $\widetilde{g}$ que nous envisagerons sera supposée relative à une fréquence $\omega$. Sa transformée de Borel sera définie (partout ou presque partout) sur la "toile de Riemann" $\mathcal{S}_\omega$, qui est la moins ramifiée des toiles de Riemann (*cf.* §10) commune à tous les monômes $\widehat{\mathcal{A}}^{\overset{<}{\eta}}$. Les dérivations étrangères $\Delta_{\omega_s} \ldots \Delta_{\omega_1}$ agissantes (*i.e.* susceptibles d'agir non trivialement sur $\widehat{g}$) correspondent à des indices $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ vérifiant (8.49). Par suite, dans les situations 1,2,3 les singularités (vraies) ne peuvent se trouver qu'en extrémité de lignes brisées $\Gamma_{(\omega_1,\ldots,\omega_s)}$ vérifiant (8.49) (Voir §10).

*Dans la situation 1* ($\tau^{\text{int}} < 0$) les singularités vraies qui sont en même temps des *pics* (singularités radiales) ne peuvent se trouver qu'en extrémité de lignes brisées $\Gamma_{(\omega_1,\ldots,\omega_s)}$ vérifiant (8.45) et telles que :

$$\operatorname{Re}\sigma^*(\omega - \dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 \ldots - \dot{\omega}_s) \geq -1. \tag{9.7}$$

Pour $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ (et bien sûr $\omega$) fixés et pour tout $\varepsilon > 0$, l'hypothèse $\tau^{\text{int}} < 0$ fait qu'il n'y a au plus qu'un nombre fini de $\dot{\omega}_s$ tels que $|\dot{\omega}_s| < \varepsilon$ et tels que (9.7) soit vérifié. Ceci implique la discrétude (sur $\mathcal{S}_\omega$) de l'ensemble des pics. Quant à la convergence des séries mouliennes dans la situation 1, elle ne pose aucun problème, du fait de la persistance des estimations (8.35) (avec seulement une légère modification lorsque l'hypothèse diophantienne n'est pas vérifiée).

*Dans la situation 2* ($0 \leq \tau^{\text{int}}\delta^{\text{int}} < 1$ ) les singularités (vraies) qui sont en même temps des *pics* (singularités radiales) sont les mêmes que

ci-dessus, mais (tout au moins si $\tau^{\text{int}} > 0$ *strictement*) elles forment sur $\mathcal{S}_\omega$ une configuration *dénombrable non discrète*. Par suite, elles induisent nécessairement (toujours sur $\mathcal{S}_\omega$) une configuration *non dénombrable, quoique de mesure nulle, de pics purs* (*i.e.* de *pics* qui ne sont pas des singularités vraies).

Passons très vite sur la convergence des séries arborifiées développant $\widehat{g}$. Les termes $\sum \widehat{\mathcal{V}}^{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}} \mathbf{B}_{\underset{\boldsymbol{\eta}}{<}}$ pour $r(\boldsymbol{\eta}) = 1$ ne posent pas de problème. Pour $r(\boldsymbol{\eta}) = 2$, les "pires sous-séries" sont de la forme :

$$\sum_n \widehat{\mathcal{V}}_{(\zeta)}^{(\eta_n,\eta'_n)} \mathbf{B}_{(\eta_n,\eta'_n)} \qquad (\zeta \in \mathcal{S}_\omega) \tag{9.8}$$

avec des indices de la forme :

$$\eta_n = \begin{pmatrix} \omega_n \\ \sigma_n \end{pmatrix} \; ; \quad \eta'_n = \begin{pmatrix} \omega'_n \\ \sigma'_n \end{pmatrix} \tag{9.9}$$

$$\mathrm{Re}(\sigma_n) \sim \tau^{\text{int}} n \; ; \quad \mathrm{Re}(\sigma'_n) \sim -n(1+\tau^{\text{int}}) \qquad (n \to +\infty) \tag{9.10}$$

$$|\omega_n| \;\#\; n^{-\delta^{\text{int}} n} \tag{9.11}$$

ce qui, pour tout $\zeta$ de la toile de Riemann $\mathcal{S}_\omega$, donne lieu aux estimations :

$$|\widehat{\mathcal{V}}_{(\zeta)}^{(\eta_n,\eta'_n)}| \;\#\; n^{-Kn} \qquad (n \to +\infty) \tag{9.12}$$

avec

$$K = 1 - \delta^{\text{int}} \tau^{\text{int}} \qquad (\text{ici } K > 0). \tag{9.13}$$

Les symboles # dans (9.11) et (9.12) signifient qu'on obtient des équivalences au sens usuel en prenant $n^{-1} \log$ des deux membres. La convergence des sous-séries (9.8) et plus généralement celle de la sous-série formée de *tous* les termes pour qui $r(\boldsymbol{\eta}) = 2$, ne pose donc aucun problème (sauf sur une partie de mesure nulle de $\mathcal{S}_\omega$) et il ne reste plus qu'à s'assurer, moyennant l'arborification, que les termes généraux ($r(\boldsymbol{\eta}) \geq 3$) se traitent de la même manière.

*Situation 3* ($1 \leq \tau^{\text{int}} \delta^{\text{int}}$). Ici, on a les mêmes estimations (9.12) mais avec $K > 0$, tout au moins si $1 < \tau^{\text{int}} \delta^{\text{int}}$. Donc les sous-séries (9.8) divergent génériquement; et la série complète $\sum |\widehat{\mathcal{V}}_{\bullet}^{\overset{<}{\boldsymbol{\eta}}}| \|\mathbf{B}_{\underset{\boldsymbol{\eta}}{<}}\|_{U,V}$ a fortiori.

Les "objets corrigibles", pour lesquels cette série converge malgré tout, correspondent précisément à des $\mathbf{B}_{\underset{\boldsymbol{\eta}}{<}}$ qui décroissent assez vite quand

la partie réelle de $\|\boldsymbol{\sigma}\|$ croît. En particulier, un objet est automatiquement corrigible s'il possède une forme préparée (7.12) ou (7.13) où n'interviennent que des opérateurs $\mathbf{B}_\eta$ d'indice $\eta = \binom{\omega}{\sigma}$ avec $\operatorname{Re}\sigma < 0$.

PROPOSITION 9.5. Définition et invariance des opérateurs $\mathbf{A}_\omega$. — *Pour tout objet local (dans les situations 1 ou 2) et pour les seuls objets corrigibles (dans la situation 3), les séries mouliennes arborifiées associées aux $\mathbf{A}_\omega$ convergent absolument vers un opérateur différentiel ordinaire $\mathbf{A}_\omega$ de la forme habituelle (7.60) (7.61) et ces $\mathbf{A}_\omega$ sont des invariants analytiques et holomorphes de l'objet.*

*Cas de convergence et cas de divergence.*

La convergence des séries *arborifiées* qui développent les $\mathbf{A}_\omega$ (et a fortiori celle des séries obtenues en regroupant toutes les séquences $\boldsymbol{\eta}$ qui ne diffèrent que par l'ordre des $\eta_i$) découle directement de la convergence presque partout sur $\mathcal{S}_\omega$ des séries arborifiées qui développent les $\widehat{g}(\zeta)$. Comme on a vu, cette convergence est automatique dans les situations 1 et 2 alors que dans la situation 3 elle n'a lieu que pour des objets "corrigibles".

En revanche, l'imposibilité de définir les $\mathbf{A}_\omega$ pour les objets non corrigibles ne résulte pas directement de l'impossibilité de sommer sur $\mathcal{S}_\omega$ les séries de $\widehat{g}(\zeta)$, mais on l'établit en considérant les sous-séries :

$$\sum V^{\eta_n,\eta'_n}\mathbf{B}_{\eta_n,\eta'_n} \qquad (\eta_n, \eta'_n \text{ comme en (9.9), (9.10), (9.11)}) \tag{9.14}$$

homologues à (9.8) avec les estimations :

$$|V^{\eta_n,\eta'_n}| \# n^{-Kn} \qquad (\text{avec ici } K < 0) \tag{9.15}$$

homologues à (9.12).

Passons maintenant à l'essentiel, c'est-à-dire à la preuve de l'invariance analytique des $\mathbf{A}_\omega$.

*Première preuve de l'invariance : par l'équation du pont.*

Nous ne ferons qu'esquisser cette première preuve, car elle dépend trop de la théorie des fonctions à *singularités non isolées* (*cf.* §11). Elle consiste à observer que ces fonctions

(i) sont stables par convolution

(ii) qu'elles peuvent être soumises à la dérivation étrangère, moyennant un affinement de la définition des $\Delta_\omega$(*cf.* §11)

(iii) qu'elles continuent de vérifier l'équation du pont avec les $\mathbf{A}_\omega$ qu'on vient de définir.

L'*invariance* des $\mathbf{A}_\omega$ en résulte puisque d'une part l'équation du pont les *détermine* et que d'autre part sa forme est indépendante de la carte analytique.

Cette méthode a l'avantage de reproduire exactement la démarche déjà suivie à la section précédente ($\Omega^{\text{int}}$ discret) et surtout de montrer, grâce à l'équation (7.58) réinterprétée dans ce nouveau cadre, qu'en l'absence de petits diviseurs liouvilliens les $\mathbf{A}_\omega$ continuent de former un *système complet d'invariants holomorphes* (*cf.* §11). Mais on peut lui préferer les deux méthodes suivantes, plus élémentaires.

*Deuxième preuve de l'invariance : à partir du cas $\Omega^{\text{int}}$ discret.*

Cette deuxième preuve (ainsi d'ailleurs que la troisième) consiste à partir de la série moulienne exprimant $\mathbf{A}_\omega$ et à montrer qu'en cas d'absolue convergence, les séries associées à deux objets $\text{Ob}_0$ et $\text{Ob}_1$ analytiquement conjugués par un changement de variables analytique $x \mapsto x' = c(x)$, ont même somme $\mathbf{A}_\omega$. Il suffit en fait de prouver ce résultat pour des changements de variables analytiques infinitésimaux $x \mapsto x + \delta c(x)$. Si en effet $\text{Ob}_t$ désigne un objet analytiquement conjugué à $\text{Ob}_0$ et dépendant analytiquement d'un paramètre $t$, l'opérateur $\mathbf{A}_\omega(\text{Ob}_t)$, comme fonction analytique de $t$, sera constante *ssi* sa dérivée en $t$ est partout nulle. En résumé, et si pour fixer les idées on raisonne sur un champ $X$ en prenant pour $\mathbf{A}_\omega$ le développement :

$$\mathbf{A}_\omega = \sum V_\omega^{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} = \sum \tfrac{1}{r(\boldsymbol{\eta})} V_\omega^{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{D}_{[\boldsymbol{\eta}]} \quad (\textit{cf.}\ (7.62)\ (7.66)) \tag{9.20}$$

avec des $\mathbf{D}_{\eta_i}$ eux-mêmes fonctions des $\mathbf{B}_{\eta_i}$ (*cf.* (7.51-53)), il suffit de prouver la nullité de $J_\omega$ dans :

$$\mathbf{A}_\omega(X + \varepsilon X_1) - \mathbf{A}_\omega(X) = \varepsilon J_\omega(X, C) + o(\varepsilon) \tag{9.21}$$

pour toute variation infinitésimale de la forme :

$$\delta X = \varepsilon X_1 = \varepsilon[X, C] \quad (C = \textstyle\sum C_i(x)\partial_{x_i}) \tag{9.22}$$

pour un champ analytique local $C$ quelconque, qui après un changement de variables $x_i = u_i e^{\lambda_i z} z^{\tau_i}$ peut s'écrire :

$$C = \sum \underset{\bullet}{b^\eta}\, \mathbf{C}_\eta \tag{9.23}$$

avec des $\mathbf{C}_{\eta_i}$ de la même forme que les $\mathbf{B}_{\eta_i}$ (à cette seule différence près qu'un *nombre fini* d'indices $\eta = \binom{\omega}{\sigma}$ peuvent comporter un $\sigma \in \mathbf{N}$). En cas d'absolue convergence des séries mouliennes, la nullité de $J_\omega(X, C)$ pour tout $X$ et tout $C$ équivaut à une infinité d'indentités :

$$J_{\eta_0, \ldots, \eta_r} = 0 \qquad (\forall \eta_0, \ldots, \eta_r) \tag{9.24}$$

ou encore, ce qui revient au même vu le caractère involutif de la correspondance $B \to -D$ :

$$I_{\eta_0,\dots,\eta_r} = 0 \qquad (\forall \eta_0, \dots, \eta_r) \tag{9.25}$$

où $J_{\eta_0,\dots,\eta_r}$ (resp. $I_{\eta_0,\dots,\eta_r}$) désigne la totalité des termes de $J_\omega(X, C)$ qui sont multilinéaires en $\mathbf{C}_{\eta_0}, \mathbf{D}_{\eta_1}, \dots, \mathbf{D}_{\eta_r}$ (resp. $\mathbf{C}_{\eta_0}, \mathbf{B}_{\eta_1}, \dots, \mathbf{B}_{\eta_r}$) avec répétition éventuelle d'indices $\eta_i$. Or pour $\Omega^{\text{int}}$ discret, on a prouvé (au §8, grâce à l'équation du pont) que les $\mathbf{A}_\omega$ étaient bien des invariants analytiques. Dans ce cas, l'infinité des identités (9.24) et (9.25) est donc automatiquement vérifiée. Mais comme chacune ne regroupe qu'un nombre fini de termes, elles *restent nécessairement vraies* même quand $\Omega^{\text{int}}$ cesse d'être discret. D'où l'invariance analytique des $\mathbf{A}_\omega$ dans tous les cas.

Cette méthode a l'avantage de ne comporter aucun calcul; mais elle n'est pas autonome, car elle renvoie au cas $\Omega^{\text{int}}$ discret. Aussi est-il intéressant de vérifier l'invariance des $\mathbf{A}_\omega$ directement sur les séries mouliennes. Ce sera l'objet de la troisième preuve, qui est autonome et qui vaut dans tous les cas ($\Omega^{\text{int}}$ discret ou non).

*Troisième preuve de l'invariance : par vérification directe.*

Nous aurons besoin de deux lemmes :

LEMME 9.1. — *A une perturbation du champ $X$ de la forme :*

$$\delta X = \varepsilon[X, C] \qquad (C \text{ analytique}) \tag{9.26}$$

*avec $X$ comme en (7.12) et $C$ comme en (9.23) correspond dans le cas transvexal ($X.z = 1; C.z = 0$) une perturbation de $D$ de la forme :*

$$\delta D = [\partial, C] + [D, C] \qquad (\partial = \partial_z) \tag{9.27}$$

*et dans le cas général il lui correspond une perturbation de la forme :*

$$\delta D = [\partial, C^*] + \{D, C^*\} \tag{9.28}$$

*avec*

$$C^* = C - (C.z)D \tag{9.29}$$

*et avec un crochet de Lie $\{D, C^*\}$ portant sur les variables $u_i$ mais pas sur $z$. Autrement dit, en posant comme d'habitude $\partial = \partial_z$ on a :*

$$\{D, C^*\} = [D, C^*] - (D.z)[\partial, C^*] + (C^*.z)[\partial, D]. \tag{9.30}$$

*Preuve.* — La perturbation $\delta X = [X, C] = [\partial + B, C]$ induit sur $B$ une perturbation $\delta B = [\partial, C] + [B, C]$. Compte tenu de $D = (1 + B.z)^{-1}B$ cela correspond pour $D$ à une perturbation :

$$\delta D = \begin{cases} [D, C] - ([D, C].z)D - (CDz)D \\ \quad + (1 - Dz)[\partial, C] - ([D, C].z).D \end{cases} \tag{9.31}$$

dont on vérifie qu'elle est bien de la forme (9.28) + (9.29).

LEMME 9.2. — *Si pour chaque* $\eta_i = \binom{\omega_i}{\sigma_i}$ *on note* ${}^*\eta_i = \binom{\omega_i}{\sigma_i - 1}$ *et si pour toute séquence* $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_r)$ *on pose :*

$$V_\omega^{\eta_1,\ldots,\eta_i',\ldots,\eta_r} \overset{\text{def}}{=} \omega_i V_\omega^{\eta_1,\ldots,\eta_i,\ldots,\eta_r} + \sigma_i V_\omega^{\eta_1,\ldots,{}^*\eta_i,\ldots,\eta_r} \tag{9.32}$$

*on a les identités :*

$$V^{\eta_1,\ldots,\eta_i',\ldots,\eta_r} = V^{\eta_1,\ldots,\eta_{i-1}+\eta_i,\ldots,\eta_r} - V^{\eta_1,\ldots,\eta_i+\eta_{i+1},\ldots,\eta_r} \tag{9.33}$$

*qui pour i extrême prennent la forme :*

$$V^{\eta_1',\eta_2,\ldots,\eta_r} = -V^{\eta_1+\eta_2,\ldots,\eta_r} \quad (r \geq 2) \tag{9.34}$$

$$V^{\eta_1,\ldots,\eta_{r-1},\eta_r'} = +V^{\eta_1,\ldots,\eta_{r-1}+\eta_r} \quad (r \geq 2) \tag{9.35}$$

$$V^{\eta_1'} = 0 \quad (r = 1). \tag{9.37}$$

*Preuve.* — Prenons comme d'habitude $\underset{\bullet}{b}^\eta = e^{\omega z} z^\sigma$. La relation :

$$\underset{\bullet}{b}^{\eta'} \overset{\text{def}}{=} \partial \underset{\bullet}{b}^\eta = \omega \underset{\bullet}{b}^\eta + \sigma \underset{\bullet}{b}^{{}^*\eta} \quad \text{pour } \eta = \begin{pmatrix} \omega \\ \sigma \end{pmatrix} \text{ et } {}^*\eta = \begin{pmatrix} \omega \\ \sigma - 1 \end{pmatrix} \tag{9.38}$$

suggère de poser par linéarité :

$$\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1,\ldots,\eta_i',\ldots,\eta_r} \overset{\text{def}}{=} \omega_i \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1,\ldots,\eta_i,\ldots,\eta_r} + \sigma_i \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1,\ldots,{}^*\eta_i,\ldots,\eta_r}. \tag{9.39}$$

Avec ces notations et compte tenu des relations (6.25) qui définissent les $\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\boldsymbol{\eta}}$ par récurrence, on trouve les identités :

$$\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1,\ldots,\eta_i',\ldots,\eta_r} = \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1,\ldots,\eta_{i-1}+\eta_i,\ldots,\eta_r} - \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1,\ldots,\eta_i+\eta_{i+1},\ldots,\eta_r} \tag{9.40}$$

qui pour $i$ extrême prennent la forme :

$$\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1',\ldots,\eta_r} = -\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1+\eta_2,\ldots,\eta_r} \quad (r \geq 2) \tag{9.41}$$

$$\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1,\ldots,\eta_r'} = \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1,\ldots,\eta_{r-1}+\eta_r} - \underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1,\ldots,\eta_{r-1}} \underset{\bullet}{b}^{\eta_r} \quad (r \geq 2) \tag{9.42}$$

$$\underset{\bullet}{\widetilde{\mathcal{V}}}^{\eta_1} = -\underset{\bullet}{b}^{\eta_1} \quad (r = 1). \tag{9.43}$$

Appliquant à (9.40) et à ses variantes la dérivation étrangère $\underset{\bullet}{\Delta}_\omega$ d'indice $\underset{\bullet}{\omega} = \omega_1 + \cdots \omega_r$ en tenant compte de (6.35) on obtient facilement, par récurrence sur $r$, l'identité cherchée (9.33) et ses variantes.

Nous pouvons maintenant prouver les identités (9.24) en commençant par le cas d'un champ transvexal ($X.x^{-m} \equiv 1$) et d'un changement de variable infinitésimal qui respecte cette transvexalité ($C.x^{-m} = 0$). On a alors d'après (9.27)

$$
\begin{array}{lll}
(9.44) & \delta D & = \delta' D + \delta'' D \qquad\qquad \text{avec} \\
(9.45) & \delta' D & = \sum\limits_{\eta_0} (\partial \overset{\bullet}{b}{}^{\eta_0}) \mathbf{C}_{\eta_0} \qquad\qquad (\partial = \partial_z) \\
(9.46) & \delta'' D & = \sum\limits_{\eta_0, \eta_1} \overset{\bullet}{b}{}^{\eta_0+\eta_1} \left[\mathbf{D}_{\eta_1}, \mathbf{C}_{\eta_0}\right]
\end{array}
$$

puisque par transvexalité $\mathbf{D}_\eta . z = \mathbf{C}_\eta z = 0$. D'autre part d'après (9.20) $J_{\eta_0,\ldots,\eta_r}$ est la somme, étendue à toutes les permutations de la séquence $(\eta_1, \ldots, \eta_r)$ (en divisant éventuellement par un facteur de multiplicité) des termes $J^*_{\eta_0,\ldots,\eta_r}$ de la forme :

(9.47)

$$
J^*_{\eta_0,\ldots,\eta_r} = \begin{cases} + \displaystyle\sum_{i=0}^{r} V_\omega^{\eta_1,\ldots,\eta_i,\eta_0',\eta_{i+1},\ldots,\eta_r} \mathbf{D}_{\eta_r} \ldots \mathbf{D}_{\eta_{i+1}} \mathbf{C}_{\eta_0} \mathbf{D}_{\eta_i} \ldots \mathbf{D}_{\eta_1} \\ + \displaystyle\sum_{i=0}^{r} V_\omega^{\eta_1,\ldots,\eta_i+\eta_0,,\ldots,\eta_r} \mathbf{D}_{\eta_r} \ldots \mathbf{D}_{\eta_{i+1}} \left[\mathbf{D}_{\eta_i}, \mathbf{C}_{\eta_0}\right] \ldots \mathbf{D}_{\eta_1} \end{cases}
$$

où les termes du premier $\sum$ et du second $\sum$ proviennent des perturbations $\delta' D$ et $\delta'' D$ et respectivement. Appliquons maintenant l'identité (9.33) et faisons dans (6.47) le décompte des opérateurs qui apparaissent en facteur de chaque scalaire $V_\omega^{\eta_1,\ldots,\eta_i+\eta_0,\ldots,\eta_r}$. On trouve, provenant du premier $\sum$, les deux opérateurs :

$$
\begin{aligned}
&+ \mathbf{D}_{\eta_r} \ldots \mathbf{D}_{\eta_{i+1}} (\mathbf{C}_{\eta_0} \mathbf{D}_{\eta_i}) \mathbf{D}_{\eta_{i-1}} \ldots \mathbf{D}_{\eta_1} \\
&- \mathbf{D}_{\eta_r} \ldots \mathbf{D}_{\eta_{i+1}} (\mathbf{D}_{\eta_i} \mathbf{C}_{\eta_0}) \mathbf{D}_{\eta_{i-1}} \ldots \mathbf{D}_{\eta_1}
\end{aligned}
$$

et, provenant du second $\sum$, l'unique opérateur :

$$
+ \mathbf{D}_{\eta_r} \ldots \mathbf{D}_{\eta_{i+1}} \left[\mathbf{D}_{\eta_i}, \mathbf{C}_{\eta_0}\right] \mathbf{D}_{\eta_{i-1}} \ldots \mathbf{D}_{\eta_1}.
$$

D'où la nullité de $J^*_{\boldsymbol{\eta}}$, donc de $J_{\boldsymbol{\eta}}$ et de $\delta \mathbf{A}_\omega$ et finalement l'invariance des $\mathbf{A}_\omega$ dans le cas transvexal.

Le cas général (sans l'hypothèse de transvexalité) se traite de la même manière, grâce au lemme 9.1. En effet, comme le crochet de Lie $\{\ldots\}$ de (9.28) ne porte que sur les variables $u_i$ cette relation fournit pour $\delta D$ une décomposition entièrement analogue à (9.44-46) mais avec le champ $C^*$ et ses composantes $\mathbf{C}^*_{\eta_0}$ à la place du champ $C$ et de ses composantes $\mathbf{C}_{\eta_0}$. Ceci achève la vérification directe de l'invariance des $\mathbf{A}_\omega$.

## 10. Remarques sur les fonctions R-cohésives et C-cohésives.

Il s'agit dans cette section très informelle de signaler diverses classes de fonctions "cohésives" ("la connaissance d'une partie entraîne celle du

tout") définies sur **R** ou sur **C**, sans ramifications ou avec ramifications (éventuellement partout denses).

### 10.a. Fonctions R-cohésives (uniformes ou multiformes).

Pour tout intervalle fermé $I \subset \mathbf{R}$, la classe de Carleman CAR($M_n$) regroupe toutes les fonctions $C^\infty$ sur $I$ telles que $|\varphi^{(n)}(\zeta)| < c^n M_n$ uniformément sur $I$. Pour $M_n = n^{(1+\theta)n}$ (avec $\theta > 0$), on a la classe de Gevrey GEV$^\theta$, qui *n'est pas du tout quasianalytique*. Pour $\alpha \in \mathbf{N}$ et $M_n = (1/L'_{1+\alpha}(n))^n = (nLnL_2n \ldots L_\alpha n)^n$ (avec $L = \log$, $L_2 = \log\log$, *etc.* ) on a la classe de Denjoy DEN$^\alpha$, qui *est quasianalytique* en ce double sens que $\varphi$ est reconstituable (constructivement) à partir de la suite de ses dérivées en un point, ou encore à partir de sa restriction à tout sous-intervalle. On peut aussi (*cf.* [E5] [E6] [E11]) définir les classes quasianalytiques DEN$^\alpha$ d'une manière intrinsèque pour tout ordinal transfini $\alpha < \omega^\omega$ et prendre leur union croissante :

$$\text{COHES} = \bigcup_{\alpha<\omega^\omega} \text{DEN}^\alpha \tag{10.1}$$

qui est la famille (quasianalytique) des fonctions *cohésives* ou plus précisément **R**-cohésives. On montre (*cf.* [E6] [E11]) que cette famille coïncide avec celle des "accélérées faibles", ce qui livre un procédé constructif de prolongement cohésif. Ces fonctions s'introduisent naturellement dans le processus d'*accéléro-sommation* (*cf.* §12) qui généralement livre des fonctions **R**-cohésives *multiformes*.

### 10.b. Fonctions C-cohésives uniformes.

D'après un théorème de Beurling (*cf.* [Be] p. 109-120) la classe BEU des $\varphi(\zeta)$ qui admettent sur **C** une représentation de la forme :

$$\varphi(\zeta) = \sum a_n(\zeta - \omega_n)^{-1} \qquad (\omega_n \neq \omega_m \text{ si } n \neq m) \tag{10.2}$$

$$|a_n| < ae^{-\alpha n} \qquad (a = a(\varphi) > 0\,;\ \alpha = \alpha(\varphi) > 0) \tag{10.2 bis}$$

est quasianalytique en ce sens que si $\varphi(\zeta) \equiv 0$ sur un ensemble de mesure positive, alors $a_n \equiv 0$ et $\varphi(\zeta) \equiv 0$ partout. Pourtant, si les $\omega_n$ sont (disons) uniformément répartis dans le disque unité $D$, $\varphi(\zeta)$ est définie presque partout sur $D$, p.p. continue *en mesure*, p.p. indéfiniment dérivable *en mesure* (donc *monogène*) et p.p. de classe Gevrey $\theta = 1/2$ mais pas de classe inférieure.

Pour d'autres énoncés du même genre, voir [Be]. On voit ainsi que le fait, pour une classe de fonctions, d'être définies monogènes p.p. sur **C**, permet d'obtenir la quasi-analycité au prix de conditions beaucoup plus

faibles (sur les dérivées successives) que pour les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ seul.

**10.c. Toiles de Riemann et fonctions C-cohésives multiformes.**

Soit $\mathcal{S}(\underset{\bullet}{\mathbf{C}})$ l'espace des germes analytiques en $\underset{\bullet}{O}\in\underset{\bullet}{\mathbf{C}}$ qui sont "prolongeables partout sans coupure", *i.e.* le long de toute ligne brisée finie, moyennant contournement d'un ensemble discret de singularités. $R$ désigne la notation d'un tour :

$$R\varphi(\zeta) \equiv \varphi(\zeta e^{2\pi i}) \qquad (\zeta \text{ voisin de } \underset{\bullet}{O}) \tag{10.3}$$

et pour tout $\varpi = \binom{\omega}{\varepsilon}$ avec $\omega \in \underset{\bullet}{\mathbf{C}}$ et $\varepsilon = \pm$, on note $T_\varpi$ la *translation latérale le long de* $\omega$ à droite si $\varepsilon = +$ (resp. à gauche si $\varepsilon = -$). Pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\underset{\bullet}{\mathbf{C}})$ :

$$T_\varpi\varphi(\zeta) \equiv \varphi(\underline{\omega+\zeta}) \qquad (\arg(\underline{\omega+\zeta}) \sim \arg\omega) \tag{10.4}$$

dans la région $\{\zeta \sim \underset{\bullet}{O};\ 0 < \varepsilon.(\arg\omega - \arg\zeta) < \pi/2\}$ et ailleurs par prolongement analytique. Pour toute séquence $\varpi = (\varpi_1, \ldots, \varpi_r)$ on note $T_\varpi = T_{\varpi_r} \ldots T_{\varpi_1}$ et on pose :

$$\varphi(\varpi) = \lim_{\zeta \to \underset{\bullet}{O}} T_\varpi(\zeta) \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\underset{\bullet}{\mathbf{C}})) \tag{10.5}$$

si cette limite existe uniformément dans tout secteur. On identifie les séquences $\varpi$ et $\varpi'$ pour lesquelles $T_\varpi = T_{\varpi'}$ et on choisit dans chaque classe de $\varpi$ le représentant *irréductible*. On dit que $\varpi^n$ tend vers $\varpi$ si $T_{\varpi^n}\varphi \to T_\varpi\varphi$ pour tout $\varphi$ de $\mathcal{S}(\underset{\bullet}{\mathbf{C}})$ au sens de la convergence naturelle de $\mathcal{S}(\underset{\bullet}{\mathbf{C}})$.

La notation $\varphi(\varpi)$ de (10.5) facilite le passage aux fonctions à singularités non discrètes. Ainsi les séries $\varphi(\zeta)$ du type (10.2) (10.2 bis); ou encore leurs dérivées ou primitives successives; ou encore les séries :

$$\varphi(\zeta) = \sum c_{\underset{\eta}{<}} \widehat{\mathcal{A}}^{\underset{\eta}{<}}(\zeta) \tag{10.6}$$

envisagées au §9 dans les "situations un et deux" (*i.e.* quand $\tau^{\text{int}} < 0$ ou $0 \leq \tau^{\text{int}}\delta^{\text{int}} < 1$) possèdent toutes la série de propriétés suivantes :

(P.1) Les séries correspondantes $\varphi(\varpi)$ convergent pour presque tout $\varpi$. On construit la "toile de Riemann" de la somme $\varphi$ en identifiant tous les $\varpi$ et $\varpi'$ irréductibles tels que $T_\varpi\varphi \equiv T_{\varpi'}\varphi$.

(P.2) La somme $\varphi$ est presque partout continue *en mesure*; p.p. indéfiniment différentiable en mesure; et p.p. dans une classe Gevrey fixe.

(P.3) La somme $\varphi$ a des *ramifications* (ce sont les $\varpi$ irréducibles tels que $RT_{\varpi}\varphi \neq T_{\varpi}\varphi$) au plus dénombrables.

(P.4) La somme $\varphi$ a des *pics* (ce sont les $\varpi$ irréductibles pour lesquels $T_{\varpi}\varphi(\zeta)$ ne possède pas de limite *en mesure* quand $\zeta \to \underset{\bullet}{O}$) qui forment un ensemble de mesure nulle, mais pas nécessairement dénombrable. A noter que la *dérivation* tend à diminuer le nombre des ramifications mais à augmenter celui des pics.

(P.5) Si $\varpi^n \to \varpi$ (au sens indiqué plus haut), alors $T_{\varpi^n}\varphi \to T_{\varpi}\varphi$ au sens de la convergence en mesure en $\underset{\bullet}{O}$.

(P.6) Pour *presque tout* irréductible, $\varphi(\varpi) = \varphi(\omega)$ ne dépend pas des coefficients de latéralité $\varepsilon_i$ des $\varpi_i$ et $\varphi(\zeta)$ est définie, $C^\infty$ et uniformément Gevrey sur *toute* la ligne brisée **délatéralisée** $\Gamma_{\omega} = \{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$.

(P.7) Pout tout $\varpi$ irréductible, $\varphi(\zeta)$ est définie et indéfiniment différentiable (Gevrey) *presque partout* sur la ligne brisée **latéralisée** $\Gamma_{\varpi} = \{\varpi_1, \ldots, \varpi_r\}$.

(P.8) $\varphi$ est *cohésive* en ce sens que s'il existe ne fût-ce qu'un seul $\varpi$ tel que $T_{\varpi}\varphi$ soit nulle presque partout sur un petit voisinage sectoriel de $\underset{\bullet}{O}$, alors $\varphi \equiv 0$ sur toute sa toile de Riemann.

Contrairement à la situation sur $\mathbf{R}$, où la notion de cohésivité rappelée en début de section couvre tous les besoins pratiques (*cf.* [E6] [E11]), il semble encore trop tôt pour définir "la" classe des fonctions $\mathbf{C}$-cohésives, surtout avec ramifications non discrètes.

## 11. Critères d'analycité pour les structures invariantes associées.

Pour illustrer l'usage qu'on peut faire des invariants holomorphes $\mathbf{A}_{\omega}$, nous allons en tirer des *critères d'analycité* pour les différentes structures invariantes associées à un objet local. Les principales structures invariantes asociées à un champ $X$ ou à un difféo $f$ sont :

a) *les q–trajectoires*, c'est-à-dire les variétés invariantes (sous-entendu : locales et entières) de dimension complexe $q$.

b) *les anneaux invariants*, c'est-à-dire les sous-anneaux de $\mathbf{C}\{x\}$ stables sous l'action de l'objet.

c) *les commutants*, c'est-à-dire l'ensemble des objets locaux (champs *et* difféos) qui commutent avec l'objet donné (champ *ou* difféo).

La démarche naturelle consiste :

i) à répertorier les structures invariantes *formelles* $\widetilde{\Gamma}$ associées à l'objet; ce qui est très facile dans la carte normale $y = (y_i)$.

ii) à chercher, pour chaque $\widetilde{\Gamma}$ *formelle*, les "obstructions holomorphes" à son *analycité* dans la carte donnée $x = (x_i)$. Cela s'avère facile grâce à l'équation du pont et ces obstructions revêtent presque toujours la forme d'opérateurs $\mathrm{coll}^{\widetilde{\Gamma}}\,\mathbf{A}_\omega$ obtenus en "collapsant" sur $\widetilde{\Gamma}$ certains des opérateurs $\mathbf{A}_\omega$, c'est-à-dire en ne retenant qu'une partie de leurs coefficients, selon une règle simple.

iii) à montrer qu'en l'absence de petits diviseurs liouvilliens, les seules *obstructions analytiques* sont précisément les *obstructions holomorphes*, si bien que dans ce cas $\widetilde{\Gamma}$ est analytique si et seulement si :

$$\mathrm{coll}^{\widetilde{\Gamma}}\,\mathbf{A}_\omega = 0 \qquad (\forall\, \overset{\bullet}{\omega} \in \Omega). \tag{11.1}$$

Fixons donc un objet local (champ $X$ ou difféo $f$) à un degré de résonance, comme aux §§5-9 et commençons par l'étude des $q$-trajectoires.

### A) Critères d'analycité pour les $q$-trajectoires.

Les $q$-trajectoires formelles $\widetilde{\Gamma}$ (sous entendu : *entières et strictes, i.e.* $q \neq 0$ et $\nu$) sont en correspondance avec les ideaux $\mathcal{I}_I$ de $\mathbf{C}[[y]]$. Il en existe exactement $2^\nu - 2$ et elles sont de la forme :

$$\widetilde{\Gamma}_I = \{y_j = 0 \text{ pour } j \notin I \text{ c'est-à-dire } j \in J\} \tag{11.2}$$

où $I$ et $J$ désignent deux parties complémentaires non vides de $\{1, \ldots, \nu\}$ avec $\mathrm{card}(I) = q$. Elles sont de deux sortes, selon que $I$ contient ou non l'ensemble $I_{\mathrm{res}}$ des indices $i$ tels que $m_i \neq 0$ (c'est-à-dire des $i$ indexant les $\nu_{\mathrm{res}}$ multiplicateurs résonnants). Il y a donc d'une part les $q$-trajectoires *résonnantes*, pour lesquelles $I_{\mathrm{res}} \subset I$. Leur nombre est $2^{\nu-\nu_{\mathrm{res}}} - 1$. Et il y a les $q$-trajectoires *non résonnantes*, pour lesquelles $I_{\mathrm{res}} \not\subset I$. Leur nombre est $2^\nu - 2^{\nu-\nu_{\mathrm{res}}} - 1$.

PROPOSITION 11.1. $q$-trajectoires non résonnantes. — *Il n'y a pas d'obstructions holomorphes à l'analycité des $q$-trajectoires $\widetilde{\Gamma} = \widetilde{\Gamma}_I$ non*

*résonnantes. En l'absence de petits diviseurs liouvilliens, chaque* $\widetilde{\Gamma}_I$ *est donc automatiquement analytique, avec pour paramétrage analytique :*

$$x_i = \widetilde{h}_i(y_I, 0) \qquad \text{où } y_I = (y_i; i \in I). \tag{11.3}$$

*Preuve.* — Après la proposition 11.2.

Introduisons maintenant une notation commode. Si $J \cap I_{\text{res}} \neq \emptyset$, notons $P^J$ le "projecteur" qui annule toutes les puissances $u_j^{n_j}$ entières positives ($j \in J; n_j \geq 1$) situées à sa droite et notons $P_J$ le projecteur qui annule les opérateurs $\partial_{u_j}$ ($j \in J$) situés à sa droite. Si $I \supset I_{\text{res}}$, on note $P_I$ le projecteur qui annule les $\partial_{u_i}$ ($i \in I$) *et* les $\partial_z$ situés à sa droite. Bien entendu, dans toute concaténation de symboles $P^J, P_J, u_i, \partial_{u_i}$, l'ordre des parenthèses est crucial.

PROPOSITION 11.2. $q$-trajectoires résonnantes. — *Pour une $q$-trajectoire résonnante* $\widetilde{\Gamma} = \widetilde{\Gamma}_I$ *les obstructions holomorphes à l'analycité sont toutes de la forme :*

$$\text{coll}^{\widetilde{\Gamma}} \mathbf{A}_\omega \stackrel{\text{def}}{=} P^J P_I \mathbf{A}_\omega. \tag{11.4}$$

*En l'absence de petits diviseurs liouvilliens,* $\widetilde{\Gamma}$ *est analytique si et seulement si :*

$$\text{coll}^{\widetilde{\Gamma}} \mathbf{A}_\omega = 0 \qquad (\forall \overset{\bullet}{\omega} \in \Omega). \tag{11.5}$$

*Quand cette condition est réalisée, la restriction* $\text{rest}^\Gamma X$ *ou* $\text{rest}^\Gamma f$ *de $X$ ou $f$ à $\Gamma$ admet pour système complet d'invariants analytiques et holomorphes les opérateurs :*

$$\text{rest}^\Gamma \mathbf{A}_\omega \stackrel{\text{def}}{=} P^J P_J \mathbf{A}_\omega. \tag{11.6}$$

*Remarque 1. Forme des invariants collapsés ou restreints.* — La plupart des opérateurs $\text{coll}^{\widetilde{\Gamma}} \mathbf{A}_\omega$ et $\text{rest}^\Gamma \mathbf{A}_\omega$ sont, par construction même, identiquement nuls. Ainsi, pour un champ $X$, $\text{coll}^{\widetilde{\Gamma}} \mathbf{A}_\omega \equiv 0$ sauf si $\omega$ est de la forme :

$$\overset{\bullet}{\omega} = -\lambda_j + \omega_I = -\lambda_j + \sum_{i \in I} n_i \lambda_i \qquad (j \in J; i \in I; n_i \geq 0) \tag{11.7}$$

auquel cas :

$$\text{coll}^{\widetilde{\Gamma}} = u^{n(\omega)} A_\omega^j u_j \partial_{u_j} = u^{n(\omega_I)} A_\omega^j \partial_{u_j} \quad \Big(u^{n(\omega_I)} = \prod_{i \in I} u_i^{n_i}\Big). \tag{11.8}$$

Pareillement, $\operatorname{res}^{\Gamma} \mathbf{A}_\omega \equiv 0$ sauf si $\omega$ est de la forme :

$$\overset{\bullet}{\omega} = \omega_I = \sum_{i \in I} n_i \lambda_i \qquad (i \in I; n_i \geq 0) \tag{11.9}$$

ou de la forme :

$$\overset{\bullet}{\omega} = -\lambda_{i_0} + \omega_I = -\lambda_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} n_i \lambda_i \quad (i \in I; i_0 \in I \dot{-} I_{\text{res}}; n_i \geq 0). \tag{11.10}$$

Dans le premier cas on a :

$$\operatorname{rest}^{\Gamma} \mathbf{A}_\omega = u^{n(\omega)} \{ A^0_\omega \partial_z + \sum_{i \in I} A^i_\omega u_i \partial_{u_i} \} (u^{n(\omega)} = \prod_{i \in I} u_i^{n_i}) \tag{11.11}$$

et dans le second cas :

$$\operatorname{rest}^{\Gamma} \mathbf{A}_\omega = u^{n(\omega_I)} A^{i_0}_\omega \partial_{u_{i_0}} (u^{n(\omega_I)} = \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} u_i^{n_i}). \tag{11.12}$$

Tout ceci vaut pour un difféo $f$ à condition d'ajouter $n_0 \lambda_0$ à $\overset{\bullet}{\omega}$ et de prémultiplier les opérateurs invariants par $\exp(-n_0 \lambda_0 z)$.

*Remarque 2. Cas particulier des 1-trajectoires.* — Les seules 1-trajectoires (trajectoires au sens usuel) sont de la forme :

$$\widetilde{\Gamma} = \widetilde{\Gamma}^i = \{ y_j = 0 \,;\ \forall j \neq i \}. \tag{11.13}$$

D'après les propositions 11.1 et 11.2, $\widetilde{\Gamma}^i$ est automatiquement analytique, sauf si elle est résonnante, ce qui (vu notre convention d'indexation selon laquelle $m_\nu \neq 0$) ne peut arriver que si $i = \nu$ et $\lambda_\nu = 0$. Le critère d'analycité de $\widetilde{\Gamma}^\nu$ est alors $\operatorname{coll}^{\widetilde{\Gamma}} \mathbf{A}_\omega = 0$, ce qui donne comme seules conditions non triviales, dans le cas d'un champ $X$ :

$$\operatorname{coll}^{\widetilde{\Gamma}} \mathbf{A}_\omega \overset{\text{def}}{=} A^j_\omega \partial_{u_j} = 0 \ \text{ pour } \ \overset{\bullet}{\omega} = -\lambda_j \ \text{ et } j = 1, 2, \ldots, \nu - 1 \tag{11.14}$$

et dans le cas d'un difféo $f$ :

(11.15)

$$\operatorname{coll}^{\widetilde{\Gamma}} \mathbf{A}_\omega \overset{\text{def}}{=} e^{-n_0 \lambda_0 z} A^j_\omega \partial_{u_j} = 0 \text{ pour } \overset{\bullet}{\omega} = n_0 \lambda_0 - \lambda_j \text{ et } j = 1, 2, \ldots, \nu - 1.$$

Pour un champ, tous les opérateurs $\operatorname{rest}^{\Gamma} \mathbf{A}_\omega$ sont automatiquement nuls et pour un difféo, les seuls opérateurs non triviaux sont de la forme :

$$\operatorname{rest}^{\Gamma} \mathbf{A}_\omega \overset{\text{def}}{=} e^{-n_0 \lambda_0 z} A^0_\omega \partial_z \qquad \text{pour } \overset{\bullet}{\omega} = n_0 \lambda_0. \tag{11.16}$$

Notons que pour $q \geq 2$, l'analycité d'une $q$-trajectoire résonnante suppose toujours (pour un champ et a fortiori pour un difféo) l'annulation d'une infinité d'invariants scalaires.

Bornons-nous à prouver la nécessité de la condition (11.5) de la proposition 11.2 en raisonnant, pour fixer les idées, sur un champ $X$. Indexons de manière à avoir $I = \{\nu - q + 1, \ldots, \nu\}$ et $J = \{1, \ldots, \nu - q\}$. Si la $q$-trajectoire $\widetilde{\Gamma} = \widetilde{\Gamma}^I$ envisagée est une variété analytique $\Gamma$, la restriction $X^*$ de $X$ à $\Gamma$ possède, d'après la théorie générale (*cf.* §§7,8,9) une intégrale formelle $\widetilde{x}^*$ essentiellement unique (à une homothétie près des $u_i$ et à une translation près de $z$), qui s'écrit :

(11.17)
$$\widetilde{x}^*(z, u^I) \in \mathbf{C}[[z^{-1}, u_i e^{\lambda_i z} z^{\tau_i}\ (i \in I)]] \quad (u^I = (u_{\nu-q+1}, \ldots, u_{\nu-1}))$$

et qui vérifie l'équation du pont avec des invariants de la forme :

$$\mathbf{A}^*_\omega = u^{n(\omega)} \Big\{ A^{*0}_\omega \partial_z + \sum_{i \in I} A^{*i}_\omega u_i \partial_{u_i} \Big\} \ (\overset{\bullet}{\omega} \in \Omega^*) \tag{11.18}$$

pour des $\overset{\bullet}{\omega}$ parcourant un réseau $\Omega^*$ engendré de la manière habituelle à partir des multiplicateurs $\lambda_i$ d'indice $i \in I$. Pour $\overset{\bullet}{\omega} \notin \Omega^*$ au contraire, les $\overset{\bullet}{\Delta}_\omega$ annulent $\widetilde{x}^*(z, u^I)$.

D'autre part il est clair que $X^*$ possède *aussi* pour intégrale formelle

$$\widetilde{x}^{**}(z, u^I) = P^J \widetilde{x}(z, u) = \widetilde{x}(z, u^I, 0) \tag{11.19}$$

qui, après ajustage du paramétrage, coïncide nécessairement avec $\widetilde{x}^*$ :

$$\widetilde{x}^{**}(z, u^I) = \widetilde{x}^*(z, u^I). \tag{11.20}$$

Mais comme par (11.19) $\widetilde{x}^{**}$ dérive de $\widetilde{x}$ qui de son côté vérifie sa propre équation du pont (8.50) avec ses propres opérateurs invariants $\mathbf{A}_\omega$ et son propre réseau $\Omega$, on a :

$$\overset{\bullet}{\Delta}_\omega\, \widetilde{x}^{**}(z, u^I) = \overset{\bullet}{\Delta}_\omega\, P^J \widetilde{x}(z, u) = P^J\, \overset{\bullet}{\Delta}_\omega\, \widetilde{x}(z, u) = P^J.(\mathbf{A}_\omega \widetilde{x}(z, u)). \tag{11.21}$$

D'où compte tenu de (11.18) et (11.20) et en prenant bien garde à la position des parenthèses :

$$P^J(\mathbf{A}_\omega \widetilde{x}(z, u)) = \mathbf{A}^*_\omega (P^J \widetilde{x}(z, u)) \quad (\forall \omega \in \overset{\bullet}{\mathbf{C}}). \tag{11.22}$$

Mais aucun multiplicateur $\lambda_j$ d'indice $j \in J$ n'est résonnant. Il s'ensuit que l'intégrale formelle $\widetilde{x}(z, u)$ ainsi que les coefficients de $\mathbf{A}_\omega$ ne peuvent comporter que des puissances *positives entières* des $u_j$ d'indice $j \in J$. Par suite, pour tout $\omega$ fixé, l'identité (11.22) n'est possible que si :

$$P^J P_I \mathbf{A}_\omega = 0 \qquad (\forall \omega) \tag{11.23}$$

$$P^J P_J \mathbf{A}_\omega = \mathbf{A}^*_\omega \qquad (\forall \omega) \tag{11.23 bis}$$

la condition (11.23) n'étant d'ailleurs "effective" (*i.e.* non automatiquement réalisée) que pour des $\omega$ de la forme (11.7).

### B) Critères d'analycité pour les anneaux invariants.

Soit $\widetilde{\mathcal{A}}^{\text{norm}} \subset \mathbf{C}[[y]]$ un sous-anneau de *séries formelles* en les variables normales $y = (y_i)$. On dit (léger abus de langage) que $\widetilde{\mathcal{A}}^{\text{norm}}$ est analytique s'il existe un sous-anneau $\mathcal{A} \subset \mathbf{C}\{x\}$ de séries analytiques en les variables données $x = (x_i)$ dont l'image dans les coordonnées normales (qui est constituée en général de séries divergentes) soit dense dans $\widetilde{\mathcal{A}}^{\text{norm}}$ pour la topologie de la convergence formelle (*i.e.* terme à terme).

Limitons-nous aux anneaux engendrés (pour cette topologie) par des monômes en $y$, c'est-à-dire aux anneaux de la forme :

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{\text{norm}} = \mathbf{C}\big[[y^{n^1}, \dots, y^{n^q}]\big] \text{ avec } n^i = (n_1^i, \dots, n_\nu^i) \text{ et } y^{n^i} = \prod y_j^{n_j^i}. \tag{11.24}$$

Les anneaux de cette forme qui sont invariants pour l'action de l'objet $X$ ou $f$ :

$$X^{\text{norm}}\widetilde{\mathcal{A}}^{\text{norm}} \subset \widetilde{\mathcal{A}}^{\text{norm}} \quad \text{ou} \quad F^{\text{norm}}\widetilde{\mathcal{A}}^{\text{norm}} \subset \widetilde{\mathcal{A}}^{\text{norm}} \tag{11.25}$$

rentrent (tout comme les variétés invariantes) dans deux classes bien distinctes : il y a d'une part les anneaux résonnants, qui contiennent une puissance entière $(y^m)^q$ du monôme résonnant $y^m = \prod y_i^{m_i}$ ; et d'autre part les anneaux non résonnants, qui ne contiennent pas de telles puissances.

Remarquons qu'il n'existe d'anneaux non résonnants que si les paramètres $\tau_i$ (invariants formels de l'objet) présentent de la résonance. Il est clair en effet, si on passe à la carte trivialisante (7.15), qu'un monôme $y^n = \prod y_i^{n_i}$ ne peut appartenir à un anneau invariant non résonnant que si :

$$\langle n, \tau \rangle \overset{\text{def}}{=} \sum n_i \tau_i = 0. \tag{11.26}$$

PROPOSITION 11.3. Obstructions holomorphes à l'analycité des anneaux invariants. — *Pour qu'un anneau invariant non résonnant (11.24) soit analytique, il est nécessaire que :*

$$\mathbf{A}_\omega y^{n^i} \equiv 0 \qquad (i = 1, \dots, q\,; \forall\, \overset{\bullet}{\omega} \in \Omega)\,. \tag{11.27}$$

*Pour qu'un anneau invariant résonnant (11.24) soit analytique, il est nécessaire que dans la carte trivialisante $(z, u)$ l'anneau :*

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{\text{norm}}[z, u] = \mathbf{C}\big[[y^{n^1}(z, u), \dots, y^{n^q}(z, u)]\big] \text{ avec } y^{n^i} = \prod_j (u_j e^{\lambda_j z} z^{\tau_j})^{n_j^i} \tag{11.28}$$

*soit stable pour l'action de tous les opérateurs invariants. Pour un champ, la condition s'écrit :*

$$\mathbf{A}_\omega \widetilde{\mathcal{A}}^{\text{norm}}[z, u] \subset \widetilde{\mathcal{A}}^{\text{norm}}[z, u] \qquad (\forall\, \overset{\bullet}{\omega} \in \Omega). \tag{11.29}$$

*Pour un difféo $f$, on a la même condition, mais il faut soit ajouter à $\widetilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{norm}}[z,u]$ le générateur $e^{\lambda_0 z}$ ($\lambda_0 = 2\pi_i$) soit multiplier à gauche chaque $\mathbf{A}_\omega$ d'indice $\overset{\bullet}{\omega}= n_0\lambda_0 + \sum n_i\lambda_i$ par le facteur $e^{n_0\lambda_0 z_0}$ (ce qui revient à supprimer ce même facteur dans (7.61)).*

*Remarque.* — Dans le cas très important de l'*anneau résonnant* $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{res}}$ :

$$\widetilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{norm}}_{\mathrm{res}} = \mathbf{C}[[y^m]] \tag{11.30}$$

"engendré" par le seul monôme résonnant, le critère d'analycité (11.30) équivaut pour un champ (resp. difféo) à l'annulation des $\mathbf{A}_\omega z$ pour tout $\overset{\bullet}{\omega}$ (resp. pour tout $\overset{\bullet}{\omega}$ non multiple de $\lambda_0$) c'est-à-dire en fin de compte à l'annulation des *invariants vexaux* $\mathbf{A}^{\mathrm{vex}}_\omega$ pour tout $\overset{\bullet}{\omega}$ (resp. tout $\overset{\bullet}{\omega}$ non multiple de $\lambda_0$).

*Preuve de la proposition 11.3.* — Partons d'un anneau analytique invariant $\mathcal{A}$. Commençons par le cas où $\mathcal{A}$ est *résonnant* et supposons que (11.28) ne soit pas vérifié, autrement dit qu'il existe $\widetilde{\psi}[z,u]$ dans $\widetilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{norm}}[z,u]$ tel que :

$$\mathbf{A}_\omega \widetilde{\psi}[z,u] \notin \widetilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{norm}}[z,u]. \tag{11.31}$$

Il existe alors des séries analytiques $\varphi_n \in \mathcal{A}$ telle que la suite :

$$\widetilde{\psi}_n[z,u] = \varphi_n \circ \widetilde{k} \circ \mathrm{triv}(z,u) \quad \big(\widetilde{\psi}_n[z,u] \in \widetilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{norm}}[z,u]\big) \tag{11.31 bis}$$

(avec $\widetilde{k}$ et triv comme à la proposition 8.5) converge faiblement (*i.e.* coefficient par coefficient) vers $\widetilde{\psi}[z,u]$. Il existe donc $n_0$ assez grand tel que :

$$\mathbf{A}_\omega \widetilde{\psi}_{n_0}[z,u] \notin \widetilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{norm}}[z,u]. \tag{11.31 ter}$$

D'autre part, d'après l'équation du pont directe (*cf.* prop. 8.5) et puisque $\varphi_{n_0}(x)$ est analytique en $x$, $\widetilde{\psi}_{n_0}(z,u)$ est *résurgente* en $z$ et vérifie :

$$\overset{\bullet}{\Delta}_\omega\, \widetilde{\psi}_{n_0}[z,u] = \mathbf{A}_\omega \widetilde{\psi}_{n_0}[z,u]. \tag{11.32}$$

D'après (11.31 ter) le second membre de (11.32) comporte au moins une série $u^n \widetilde{S}_n(z)$ affectée d'un facteur $u^n$ ne figurant ni dans $\widetilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{norm}}[z,u]$ ni a fortiori dans $\widetilde{\psi}_{n_0}[z,u]$. Mais c'est absurde, car la dérivation étrangère $\overset{\bullet}{\Delta}_\omega$ n'affecte que les séries en $z$ et ne peut pas faire apparaître au second membre de (11.32) un monôme $u^n$ qui ne figure pas au premier membre.

On voit par là que l'analycité de $\mathcal{A}$ *résonnant* entraîne l'inclusion (11.29). Reste le cas où l'anneau analytique invariant $\mathcal{A}$ est *non-résonnant*.

On raisonne de la même manière, mais cette fois-ci la série $\widetilde{\psi}_{n_0}[z,u]$ est de la forme :

$$\widetilde{\psi}_{n_0}[z,u] = \sum c_n u^n z^{\langle n,\tau\rangle} \qquad (c_n \in \mathbf{C}) \tag{11.33}$$

et toutes ses dérivées étrangères sont trivialement nulles. D'où la relation (11.27) à la place de l'inclusion (11.29). Ceci achève la preuve de la proposition 11.3. (Notons qu'ici encore, en l'absence de quasirésonance, les conditions *nécessaires* d'analycité (11.27) et (11.29) sont également *suffisantes*).

### C) Critères d'analycité pour les commutants.

Partant d'un objet analytique résonnant Ob d'invariants holomorphes $\mathbf{A}_\omega$, nous allons chercher des critères pour qu'un objet formel $\widetilde{\underline{\mathrm{Ob}}}$ commutant avec Ob soit analytique. Comme les commutants formels $\widetilde{\underline{\mathrm{Ob}}}$ sont faciles à décrire et à énumérer, ces critères nous diront aussitôt *si* Ob possède des commutants analytiques et *combien*.

Soit donc Ob un champ analytique résonnant $X$ de type (7.12) ou un difféo résonnant $F$ de type (7.13). Dans la carte normale $y = (y_i)$ de Ob, les commutants formels $\widetilde{\underline{\mathrm{Ob}}}$ sont les champs de la forme

$$\underline{X}^{\mathrm{norm}} = \alpha X^{\mathrm{norm}} + \underline{X}^{\mathrm{lin}} \quad (\alpha \in \mathbf{C}\,;\ \underline{X}^{\mathrm{lin}} \text{ linéaire}) \tag{11.34}$$

et les difféos de la forme :

$$\underline{F}^{\mathrm{norm}} = (F^{\mathrm{norm}})^\alpha \circ (\underline{F}^{\mathrm{lin}}) = (\underline{F}^{\mathrm{lin}}) \circ (F^{\mathrm{norm}})^\alpha = \exp(\underline{X}^{\mathrm{norm}}) \tag{11.35}$$

avec $X^{\mathrm{norm}}$ et $F^{\mathrm{norm}}$ comme en (7.1) (7.5) et avec pour $\underline{X}^{\mathrm{lin}}$ et $\underline{F}^{\mathrm{lin}}$ des objets linéaires :

$$\underline{X}^{\mathrm{lin}} = \sum_{i=1}^{\nu} \underline{\lambda}_i\, y_i\, \partial_{y_i} \tag{11.36}$$

$$\underline{F}^{\mathrm{lin}}\varphi(y_1,\ldots,y_\nu) \equiv \varphi(\underline{\ell}_1 y_1,\ldots,\underline{\ell}_\nu y_\nu) \tag{11.37}$$

qui vérifient nécessairement :

$$\underline{X}^{\mathrm{lin}} y^m = 0\,;\ \ \underline{F}^{\mathrm{lin}} y^m = y^m \qquad (y = \prod_i y_i^{m_i}) \tag{11.38}$$

où $y^m$ désigne le monôme résonnant de Ob. Autrement dit, le spectre $\underline{\lambda} = (\underline{\lambda}_i)$ ou $\underline{\ell} = (\underline{\ell}_i)$ de $\underline{X}^{\mathrm{lin}}$ ou $\underline{F}^{\mathrm{lin}}$ doit vérifier la même relation de résonance que le spectre $\lambda = (\lambda_i)$ ou $\ell = (\ell_i)$ de Ob. *Mais il peut éventuellement en vérifier d'autres*, contrairement à Ob, qui par hypothèse ne présente qu'un seul degré de résonance.

En appliquant l'équation du pont et en suivant le même mode de raisonnement que ci-avant pour les $q$-trajectoires et les anneaux invariants, on trouve :

PROPOSITION 1.4. Critères d'analycité pour les commutants. — *Soit un objet analytique résonnant* Ob. *Pour qu'un commutant formel* $\widetilde{\underline{\mathrm{Ob}}}$, *revêtant dans la carte normale* $y = (y_i)$ *la forme (11.34) ou (11.35), soit analytique (dans la carte donnée* $x = (x_i)$*), il faut que* $\widetilde{\underline{\mathrm{Ob}}}$ *commute également avec les invariants holomorphes* $\mathbf{A}_\omega$ *de* Ob *:*

$$[\mathbf{A}_\omega, \widetilde{\underline{\mathrm{Ob}}}] = 0 \qquad (\forall\, \overset{\bullet}{\omega} \in \Omega). \tag{11.39}$$

*Si* Ob *n'est pas quasirésonnant, cette condition nécessaire est aussi suffisante.*

*Interprétation* : Pour calculer le crochet (11.39), il faut exprimer $\mathbf{A}_\omega$ et $\widetilde{\underline{\mathrm{Ob}}}$ dans une même carte, par exemple la carte normale $y = (y_i)$, où $\widetilde{\underline{\mathrm{Ob}}}$ revêt la forme (11.34) ou (11.35) et où $\mathbf{A}_\omega$ s'écrit (8.36) avec un facteur $I^\omega$ de la forme (8.36). Voici explicitement ce que vaut le crochet dans les quatre configurations possibles :

(i) *champ résonnant* $X$ *commutant avec champ* $\underline{X}$ :

$$[\mathbf{A}_\omega, \underline{X}] = \gamma(\omega)\mathbf{A}_\omega \tag{11.40}$$

avec $\gamma(\omega)I^\omega = -\underline{X}^{\mathrm{norm}} I^\omega$ et $\underline{X}^{\mathrm{norm}}$ comme en (11.34). Par suite :

$$\gamma(\omega) = \sum_{i=1}^{\nu} n_i(\omega)\underline{\lambda}_i \quad \text{si } \overset{\bullet}{\omega} = \sum_{i=1}^{\nu} n_i(\omega)\lambda_i \tag{11.41}$$

(ii) *champ résonnant* $X$ *commutant avec difféo* $\underline{F}$ :

$$[\mathbf{A}_\omega, \underline{F}] = \Gamma(\omega)\mathbf{A}_\omega \tag{11.42}$$

avec $\Gamma(\omega)I^\omega = (1 - \underline{F}^{\mathrm{norm}})I^\omega$ et $\underline{F}^{\mathrm{norm}}$ comme en (11.35). Par suite :

$$\Gamma(\omega) = 1 - \prod_{i=1}^{\nu} (\underline{\ell_i})^{-n_i(\omega)} = 1 - e^{-\gamma(\omega)} \tag{11.43}$$

avec $\gamma(\omega)$ et $\overset{\bullet}{\omega}$ comme en (11.41).

(iii) *difféo résonnant* $F$ *commutant avec champ* $\underline{X}$.

$$[\mathbf{A}_\omega, \underline{X}] = \gamma(\omega)\mathbf{A}_\omega \tag{11.44}$$

avec $\gamma(\omega)I^\omega = -\underline{X}^{\mathrm{norm}} I^\omega$ et $\underline{X}^{\mathrm{norm}}$ comme en (11.34). Par suite :

$$\gamma(\omega) = \alpha n_0(\omega)\lambda_0 + \sum_{i=1}^{\nu} n_i(\omega)\underline{\lambda}_i \quad \text{si } \overset{\bullet}{\omega} = n_0(\omega)\lambda_0 + \sum_{i=1}^{\nu} n_i(\omega)\lambda_i \tag{11.45}$$

(iv) *difféo résonnant $F$ commutant avec difféo $\underline{F}$.*

$$[\mathbf{A}_\omega, \underline{F}] = \Gamma(\omega)\mathbf{A}_\omega \tag{11.46}$$

avec $\Gamma(\omega)I^\omega = (1 - \underline{F}^{\text{norm}})I^\omega$ et $\underline{F}^{\text{norm}}$ comme en (11.35). Par suite :

$$\Gamma(\omega) = 1 - e^{\alpha n_0(\omega)\lambda_0} \prod_{i=1}^{\nu} (\underline{\ell_i})^{-n_i(\omega)} = 1 - e^{-\gamma(\omega)} \tag{11.47}$$

avec $\gamma(\omega)$ et $\overset{\bullet}{\omega}$ comme en (11.45).

On voit donc que, dans chaque cas, une condition *nécessaire* (et en l'absence de quasirésonance, *suffisante*) d'analycité du commutant formel $\widetilde{\underline{\mathrm{Ob}}}$ est l'annulation de tous les $\mathbf{A}_\omega$ invariants pour lesquels $\gamma(\omega)$ ou $\Gamma(\omega)$ est $\neq 0$. Dans le premier cas, par exemple, (champ commutant avec champ), cela exige l'annulation de tous les $\mathbf{A}_\omega$, sauf si le spectre $\underline{\lambda} = (\underline{\lambda}_i)$ de $\underline{X}^{\text{lin}}$ présente des relations de résonance supplémentaires, auquel cas certains $\mathbf{A}_\omega$ peuvent subsister.

## 12. Passage aux objets locaux les plus généraux. Conclusion.

Examinons rapidement ce que deviennent les résultats précédents quand, levant les hypothèses simplificatrices du §5, on se met à envisager les objets locaux résonnants les plus généraux. Signalons d'emblée que, dans chaque cas, il existe, tant pour les normalisateurs $\Theta^{\pm 1}$ que pour les invariants $\mathbf{A}_\omega$, des développements explicites en séries "mouliennes" analogues à celles que nous avons rencontrées mais que, plus la complexité des objets envisagés augmente, plus on a intérêt à privilégier l'approche *directe*, consistant à calculer *directement* la ou les intégrales formelles comme solution formelle des systèmes (8.51) ou (8.52), puis à déduire les $\mathbf{A}_\omega$ *directement* à partir de l'*équation du pont*, qui bien sûr les détermine (constructivement).

### A. Objets à un degré de résonance.

Nous avons raisonné sur le cas-type, où les invariants formels $(p, \rho)$ valaient (1,0). Lorsque, gardant le "niveau" $p$ égal à 1, on considère des "résidus" $\rho$ quelconques, l'intégrale formelle $\widetilde{x}(z, u)$ vérifie encore l'équation du pont, avec des $\mathbf{A}_\omega$ de la forme usuelle, et ses composantes de fréquence $\omega$ ont encore la forme (8.5), mais avec $z$ remplacé par $z'$ :

$$z = z' + \rho \log z' \qquad (z \text{ et } z' \text{ sur } \underset{\bullet}{\mathbf{C}} \text{ et voisins de } \underset{\bullet}{\infty}). \tag{12.1}$$

Lorsqu'on considère un niveau et un résidu $(p, \rho)$ quelconques, avec toutefois $p < +\infty$, la forme normale de l'objet comporte des paramètres supplémentaires, les $\lambda_{i,q}$, qui sont des invariants formels. Pour un champ, par exemple, elle s'écrit (*cf.* [E3], (6.24), p.324) :

$$X^{\text{norm}} = (1 + \rho y^{pm})^{-1}\Big( \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=0}^{p} \lambda_{i,j} y^{jm}\Big) y_i \partial_{y_i} \quad (\lambda_{ij} \in \mathbf{C}) \tag{12.2}$$

avec $\lambda_{i,0} = \lambda_i$, $\lambda_{i,p} = \tau_i$ et avec :

$$\langle m, \lambda \rangle = 0 \ ; \ \ \langle m, \lambda_{\bullet,j} \rangle = 0 \ (j \leq p-1) \ ; \ \ \langle m, \tau \rangle = -1/p. \tag{12.3}$$

Les composantes de l'intégrale formelle gardent la forme (8.5) avec $z$ remplacé par $(z')^{1/q}$ et $z'$ comme en (12.1), mais les paramètres $\lambda_{i,j}$ ajoutent au facteur exponentiel $\exp(\omega z')$ un facteur subexponentiel :

$$\exp \sum_{j=1}^{p-1} \omega(j)(z')^{1-j/p}. \tag{12.4}$$

L'équation du pont reste en vigueur et les invariants holomorphes $\mathbf{A}_\omega$ conservent leur forme habituelle, mais il y a deux nouveautés. Premièrement, du fait de la ramification effective d'ordre $p$, il faut, pour chaque $\omega_0$ de $\Omega$, connaître non pas un, mais $p$ invariants $\mathbf{A}_\omega$ d'indice $\omega$ au-dessus de $\omega_0$ (*i.e.* $\overset{\bullet}{\omega} = \omega_0$) pour avoir un système complet d'invariants holomorphes. Deuxièmement, lorsque les $\lambda_{i,j}$ associés aux $\lambda_i$ résonnants (*i.e.* $m_i \neq 0$) sont $\neq 0$, les facteurs subexponentiels (12.4) font que, en cas de non-discrétude du réseau intérieur $\Omega^{\text{int}}$ (cas 4,5,6 du §5), il n'existe pas de classes formelles où les objets soient automatiquement "*corrigés*", au sens des propositions 9.2 et 9.3. Au contraire, on se trouve dans une situation analogue à celle de la proposition 9.4 : chaque classe formelle contient une *majorité d'objets non corrigibles* (pour lesquels les développements mouliens, même arborifiés, de l'intégrale formelle et des invariants divergent toujours) et une *minorité d'objets corrigibles* (pour lesquels tout converge). D'une façon peut-être plus parlante, on peut dire que, dans chacune de ces classes formelles, les invariants $\mathbf{A}_\omega$ restent définis, mais en qualité de *germes au voisinage de l'objet normal.*

Lorsqu'enfin $p = +\infty$, l'objet possède une intégrale première formelle entière (à savoir $y^m$ dans la carte normale) et on se trouve en présence de *nihilence* (*cf.* §2). Si le réseau $\Omega$ accumule 0, il existe alors des classes analytiques non triviales, mais pas d'invariants holomorphes.

**B. Objets à $\mu$ degrés de résonance ($\mu \geq 2$).**

La principale nouveauté ici est l'existence, pour chaque objet, de *plusieurs* intégrales formelles. Mais leur nombre reste fini et chacune continue de vérifier l'équation du pont, avec des $\mathbf{A}_\omega$ dont les coefficients ne sont plus de simples scalaires, mais des séries formelles en $(\mu-1)$ paramètres $u_i$. Voir [E3] chap. 5,6,7.

Le cas typique à cet égard (et extrême, car $\mu = \nu$) est celui des difféos locaux de $\mathbf{C}^\nu$ tangents à l'identité :
(12.5)

$$f : x_i \mapsto f_i(x) = x_i + Q_i(x) + (\text{degré} \geq 3) \quad (i = 1, \ldots, \nu; \deg Q_i = 2).$$

Pour des formes quadratiques $Q_i$ "génériques", il existe $2^\nu - 1$ intégrales formelles, attachées chacune à un "rayon propre" de $f$, c'est-à-dire à un point fixe de l'endomorphisme $\gamma_i \mapsto Q_i(\gamma)$ de l'espace projectif. Le réseau de résurgence se réduit à la composante "universelle" $\Omega = \lambda_0 \mathbf{Z}$ et chaque intégrale formelle vérifie l'équation du pont, avec ses *propres* invariants holomorphes $\mathbf{A}_\omega$, qui sont de la forme :

$$\mathbf{A}_\omega = e^{-\omega z}\{A^0_\omega(u)\partial_z + A^1_\omega(u)\partial_{u_1} + \cdots A^{\nu-1}_\omega(u)\partial_{u_{\nu-1}}\} \tag{12.6}$$

et qui ont pour composantes $A^i_\omega(u)$ des séries formelles en

$$u = (u_1, \ldots, u_{\nu-1}).$$

Les $\mathbf{A}_\omega$ attachés à *une* intégrale formelle (n'importe laquelle) continuent de former un système complet d'invariants analytiques et holomorphes. Voir [E3] chap. 5,6,7.

**C. Objets de criticité $r \geq 2$.**

Ce sont des objets assez exceptionnels, dont la (ou les) intégrale formelle possède plusieurs "temps critiques" :

$$z_1 \ll z_2 \ll \ldots \ll z_n \qquad (\text{e.g. } z_i \equiv z^{c_i} \text{ avec } 0 < c_1 < c_2 \ldots). \tag{12.7}$$

Cela veut dire qu'elle ne peut être sommée qu'au prix du passage par $r$ *modèles convolutifs* consécutifs (plan des $\zeta_1$, des $\zeta_2$, *etc.* ). On obtient le modèle $\zeta_1$ par Borel formel ($z_1 \to \zeta_1$) après quoi chaque passage $\zeta_i \to \zeta_{i+1}$ correspond à une *accélération* – les accélérations étant des transformations intégrales analogues à la transformation de Laplace, mais à noyau plus rapidement décroissant. La dernière étape ($\zeta_r \to z_r$) correspond à l'usuelle transformation de Laplace. Dans chaque modèle intermédiaire $\zeta_i$, l'intégrale formelle vérifie l'*équation du pont* avec des opérateurs $\mathbf{A}_\omega$ *propres à ces*

*modèles*. Rassemblant tous les $\mathbf{A}_\omega$ "récoltés" dans chaque modèle, on obtient un système complet d'invariants holomorphes.

### D. Autres objets locaux.

Nous nous sommes limités ici aux champs et difféos locaux, mais il y a d'autres objets locaux importants, à commencer par les systèmes locaux d'équations différentielles ou aux différences. Ceux-ci peuvent d'ailleurs se ramener à des champs ou difféos et sont de toute façon justiciables des mêmes méthodes. Cf. [E3] chap. 2 et 3.

### E. Conclusion.

On peut dire en conclusion :

(i) que la *résonance* (entendue au sens le plus large) est la seule source d'*invariants holomorphes* non triviaux (*i.e.* non réductibles à des invariants formels).

(ii) que tous ces invariants holomorphes peuvent se lire, se calculer et s'étudier sur l'*intégrale formelle*, grâce à l'*équation du pont*, qui exprime d'une manière ultracompacte toutes les propriétés de résurgence de cette intégrale formelle.

(iii) que dans certains cas particuliers, il existe une approche alternative, plus purement géométrique. Ces cas sont essentiellement : les problèmes linéaires; les difféos résonnants de $\mathbf{C}^1$ ; et les champs de vecteurs résonnants de $\mathbf{C}^2$. Ils ont tous fait l'objet d'études détaillées, par l'une et l'autre méthode. En dimensions supérieures, la méthode géométrique ne s'applique que si le "réseau intérieur" $\Omega^{\text{int}}$ est de la forme $\alpha\mathbf{Z}$, ce qui est tout à fait exceptionnel.

## 13. Formulaire.

### A. Moules et comoules.

$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ = séquence totalement ordonnée

$\overset{<}{\boldsymbol{\omega}} = (\omega_1, \ldots, \omega_r)^<$ = séquence partiellement ordonnée.

Moules symétrals : $A^{\boldsymbol{\omega}'} A^{\boldsymbol{\omega}''} = \sum \operatorname{sh}\binom{\boldsymbol{\omega}',\boldsymbol{\omega}''}{\boldsymbol{\omega}} A^{\boldsymbol{\omega}}$ (sh comme au §3)

Moules alternals : $0 = \sum \operatorname{sh}\binom{\boldsymbol{\omega}',\boldsymbol{\omega}''}{\boldsymbol{\omega}} A^{\boldsymbol{\omega}}$ ($\boldsymbol{\omega}'$ et $\boldsymbol{\omega}'' \neq \emptyset$)

Moules symétrels : $A^{\boldsymbol{\omega}'} A^{\boldsymbol{\omega}''} = \sum \operatorname{ctsh}\binom{\boldsymbol{\omega}',\boldsymbol{\omega}''}{\boldsymbol{\omega}} A^{\boldsymbol{\omega}}$ (ctsh comme au §3)

Moules alternels : $0 = \sum \operatorname{ctsh}\binom{\boldsymbol{\omega}',\boldsymbol{\omega}''}{\boldsymbol{\omega}} A^{\boldsymbol{\omega}}$ ($\boldsymbol{\omega}'$ et $\boldsymbol{\omega}'' \neq \emptyset$).

*Arborification ordinaire (resp. contractante)* $A^\bullet \mapsto A^{\overset{<}{\bullet}}$.

$$A^{\overset{<}{\omega}} = \sum \mathrm{proj}\,\tbinom{\overset{<}{\omega}}{\omega'} A^{\omega'} \quad (\text{resp. } \mathrm{cont}\,\tbinom{\overset{<}{\omega}}{\omega'} A^{\omega'}).$$

*Coarborification ordinaire (resp. contractante)* $\mathbf{B}_\bullet \mapsto \mathbf{B}_{\underset{\bullet}{<}}$.

$$\mathbf{B}_{\omega'} = \sum \mathrm{proj}\,\tbinom{\overset{<}{\omega}}{\omega'} \mathbf{B}_{\underset{\omega}{<}} \quad (\text{resp. } \mathrm{cont}\,\tbinom{\overset{<}{\omega}}{\omega'} \mathbf{B}_{\underset{\omega}{<}})$$

avec proj et cont comme au §3 et avec pour la coarborification les conditions supplémentaires (i), (ii), (iii) de la proposition 4.3.

| *Moules élémentaires* | | *Moules résurgents* | | *Moules hyperlogarithmiques* | |
|---|---|---|---|---|---|
| symétral | symétrel | symétral | symétrel | alternal | alternel |
| $S^\bullet$ | $\mathcal{S}^\bullet$ | $\mathcal{V}^\bullet$ | $\mathcal{W}^\bullet$ | $V^\bullet$ | $W^\bullet$ |
| $\mathcal{S}^\bullet$ | $\mathcal{S}^\bullet$ | $\mathcal{V}^\bullet$ | $\mathcal{W}^\bullet$ | $\mathcal{V}^\bullet$ | $\mathcal{W}^\bullet$ |

$$1^\bullet = S^\bullet \times \mathcal{S}^\bullet = \mathcal{S} \times \mathcal{S}^\bullet = \mathcal{V}^\bullet \times \mathcal{V}^\bullet = \mathcal{W}^\bullet \times \mathcal{W}^\bullet.$$

*Equations mouliennes caractéristiques.* Notations : $\partial = \partial_z$ ;

$I^\bullet$ = moule introduit en (3.42) ; $b^\bullet$ comme en (6.41).

$\nabla$ = dérivation des moules (3.40) ; $\Delta_\omega$ = dérivation étrangère en $z$.

| | |
|---|---|
| $\nabla S^\bullet = -S^\bullet \times I^\bullet$ | $\nabla \mathcal{S}^\bullet = I^\bullet \times \mathcal{S}^\bullet$ |
| $e^\nabla \mathcal{S}^\bullet = \mathcal{S}^\bullet \times (1^\bullet + I^\bullet)^{-1}$ | $e^\nabla \mathcal{S}^\bullet = (1^\bullet + I^\bullet) \times \mathcal{S}^\bullet$ |
| $(\partial + \nabla)\mathcal{V}^\bullet = -\mathcal{V}^\bullet \times b^\bullet$ | $(\partial + \nabla)\mathcal{V}^\bullet = b^\bullet \times \mathcal{V}^\bullet$ |
| $e^{\partial+\nabla}\mathcal{W}^\bullet = \mathcal{W}^\bullet \times (1^\bullet + b^\bullet)^{-1}$ | $e^{\partial+\nabla} = (1^\bullet + b^\bullet) \times \mathcal{W}^\bullet$ |
| $\Delta_\omega \mathcal{V}^\bullet = V^\bullet_\omega \times \mathcal{V}^\bullet$ | $\Delta_\omega \mathcal{V}^\bullet = \mathcal{V}^\bullet \times \mathcal{V}^\bullet_\omega$ |
| $\Delta_\omega \mathcal{W}^\bullet = W^\bullet_\omega \times \mathcal{W}^\bullet$ | $\Delta_\omega \mathcal{W}^\bullet = \mathcal{W}^\bullet \times \mathcal{W}^\bullet_\omega$ |

*Expression directe des moules élémentaires et de leurs arborifiés.*

$S^{\boldsymbol{\omega}} = (-1)^r(\breve{\omega}_1 \dots \breve{\omega}_2 \dots \breve{\omega}_r)^{-1}$ avec $\breve{\omega}_i = \omega_1 + \cdots \omega_i$

$\mathcal{S}^{\boldsymbol{\omega}} = (\widehat{\omega}_1 \widehat{\omega}_2 \dots \widehat{\omega}_r)^{-1}$ avec $\widehat{\omega}_i = \omega_i + \cdots \omega_r$

$\mathcal{S}^{\boldsymbol{\omega}} = (-1)^r e^{-\|\boldsymbol{\omega}\|}(1 - e^{-\breve{\omega}_1})^{-1} \dots (1 - e^{-\breve{\omega}_r})^{-1}$

$\mathcal{S}^{\boldsymbol{\omega}} = (e^{\widehat{\omega}_1} - 1)^{-1} \dots (e^{\widehat{\omega}_r} - 1)^{-1}$

$\mathcal{S}^{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}}$ comme $\mathcal{S}^{\boldsymbol{\omega}}$ mais avec $\widehat{\omega}_i = \sum_{i \leq j} \omega_j$ pour l'ordre arborescent de $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}$

$\mathcal{S}^{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}}$ comme $\mathcal{S}^{\boldsymbol{\omega}}$ mais avec $\widehat{\omega}_i = \sum_{i \leq j} \omega_j$ pour l'ordre arborescent de $\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}$ .

**B. Linéarisation des objets non résonnants.**

$X$ champ anal. form. conjugué à $X^{\text{norm}}$ linéaire de spectre $\lambda = (\lambda_i)$

$F$ difféo anal. form. conjugué à $F^{\text{norm}}$ linéaire de spectre $\ell = (\ell_i) = (e^{\lambda_i})$.

*Formes préparées décomposées en parties homogènes* $\mathbf{B}^n = \mathbf{B}_\omega$.

$$X = X^{\text{norm}} + \sum \mathbf{B}^n = X^{\text{norm}} + \sum \mathbf{B}_\omega \qquad (n = (n_1, \dots, n_\nu))$$
$$F = (1 + \sum \mathbf{B}^n) F^{\text{norm}} = (1 + \sum \mathbf{B}_\omega) F^{\text{norm}} \qquad (\omega = \langle n, \lambda \rangle).$$

*Caractérisation des comoules* $\mathbf{B}_\bullet$ *et* $\mathbf{B}_{\overset{<}{\bullet}}$.

$$\mathbf{B}_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r} = \mathbf{B}_{\omega_r} \dots \mathbf{B}_{\omega_2} \mathbf{B}_{\omega_1}$$

$\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}}$ est coséparatif, homogène de degré $\deg(\overset{<}{\boldsymbol{\omega}})$ en $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_\nu}$ et vérifie :

$$\mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}2} \mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}1} = \sum \operatorname{proj}\left(\overset{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}}{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}1 \bullet \overset{<}{\boldsymbol{\omega}}2}\right) \mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}}.$$

*Normalisateur* $\Theta$.

$$\begin{cases} X\Theta = \Theta X^{\text{norm}} \\ \Theta = 1 + \sum S^{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}} = 1 + \sum S^{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} \\ \Theta^{-1} = 1 + \sum \mathcal{S}^{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}} = 1 + \sum \mathcal{S}^{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\Theta = \Theta F^{\text{norm}} \\ \Theta = 1 + \sum \mathcal{S}^{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}} = 1 + \sum \mathcal{S}^{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} \\ \Theta^{-1} = 1 + \sum \mathcal{S}^{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\omega}} = 1 + \sum \mathcal{S}^{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{B}_{\overset{<}{\boldsymbol{\omega}}}. \end{cases}$$

Sous la condition diophantienne de Brjuno (2.6) les séries mouliennes arborifiées sont toujours convergentes. L'arborification fait disparaître les

résonances fictives car :

$$\{\mathbf{B}_{\overset{<}{\omega}} \neq 0 \text{ et } \omega_i \in \Omega\} \Rightarrow \{S^{\overset{<}{\omega}}, \mathcal{S}^{\overset{<}{\omega}}, \mathcal{S}^{\overset{<}{\omega}}, \mathcal{S}^{\overset{<}{\omega}} \text{ définis et finis}\}.$$

**C. Objets résonnants.**

On envisage pour simplifier des objets à un seul degré de résonance $\langle m, \lambda\rangle = 0$ et on se place dans le cas-type $(p, \rho) = (1, 0)$.

*Formes normales.*

$$X^{\text{norm}} = \sum_{1\leq i\leq \nu} (\lambda_i + \tau_i y^m) y_i \partial_{y_i} \quad \text{avec } \langle m, \tau\rangle = -1$$

$$F^{\text{norm}} = \exp(X^{\text{norm}}).$$

*Formes préparées dans la carte donnée $x = (x_i)$ et dans la carte $(z, u)$.*

$$X = X^{\text{norm}} + \sum_{\Sigma n_i > 2\Sigma m_i} \mathbf{B}^n = \partial_z + \sum \underset{\bullet}{b}^{\eta}\, \mathbf{B}_\eta$$

$$F = \Big(1 + \sum_{\Sigma n_i > 2\Sigma m_i} \mathbf{B}^n\Big) F^{\text{norm}} = \big(1 + \sum \underset{\bullet}{b}^{\eta}\, \mathbf{B}_\eta\big).\exp(\partial_z)$$

$$x_i = u_i e^{\lambda_i z} z^{\tau_i} \quad \text{et} \quad u^m \equiv 1$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \omega \\ \sigma \end{pmatrix} \ ; \ \underset{\bullet}{b}^{\eta} = e^{\omega z} z^{\sigma} \ ; \ [\mathbf{B}_\eta, \partial_z] = 0.$$

*Caractérisation des comoules $\mathbf{B}_\bullet$ et $\mathbf{B}_{\underset{\bullet}{<}}$.*

$$\mathbf{B}_{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r} = \overline{\mathbf{B}}_{\eta_r} \ldots \overline{\mathbf{B}}_{\eta_2} \mathbf{B}_{\eta_1} \qquad (\text{avec } \overline{\mathbf{B}}_{\eta_i} \text{ comme en (8.24)}).$$

$\mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}}$ est coséparatif, homogène de degré $\deg(\overset{<}{\eta})$ en $\partial_z, \partial_{u_1}, \ldots, \partial_{u_{\nu-1}}$ et vérifie :

$$\overline{\mathbf{B}}_{\overset{<}{\eta}^2} \mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}^1} = \sum \operatorname{proj}\big(\overset{<}{\eta}^1 \underset{\bullet}{\overset{<}{\eta}}{}^2\big) \mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}}.$$

*Caractérisation des comoules $\mathbf{D}_\bullet$ et $\mathbf{D}_{\underset{\bullet}{<}}$.*

$$\mathbf{D}_{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r} = \mathbf{D}_{\eta_r} \ldots \mathbf{D}_{\eta_2} \mathbf{D}_{\eta_1}$$

$\mathbf{D}_{\overset{<}{\eta}}$ est coséparatif, homogène de degré $\deg(\overset{<}{\eta})$ en $\partial_z, \partial_{u_1}, \ldots, \partial_{u_{\nu-1}}$ et vérifie :

$$\mathbf{D}_{\overset{<}{\eta}^2} \mathbf{D}_{\overset{<}{\eta}^1} = \sum \operatorname{proj}\big(\overset{<}{\eta}^1 \underset{\bullet}{\overset{<}{\eta}}{}^2\big) \mathbf{D}_{\overset{<}{\eta}}.$$

*Lien entre les* $\mathbf{B}_{\eta_i}$ *et les* $\mathbf{D}_{\eta_i}$.

$$\mathbf{D}_\eta = \mathbf{B}_\eta + \sum_{r\geq 1}(-1)^r \sum_{\eta_0+\eta_1+\cdots\eta_r=\eta} (\mathbf{B}_{\eta_r}.z)\dots(\mathbf{B}_{\eta_1}.z)\mathbf{B}_{\eta_0}.$$

*Normalisateur* $\Theta$.

$$X\Theta = \Theta X^{\text{norm}}$$
$$F\Theta = \Theta F^{\text{norm}}$$

*Développements mouliens pour un champ.*

$$\begin{aligned}
\Theta &= 1+\sum \underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\eta}\,\mathbf{D}_\eta &&= 1+\sum \underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\overset{<}{\eta}}\,\mathbf{D}_{\overset{<}{\eta}}\\
\Theta &= 1+\sum \underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\eta}\,\mathbf{B}_\eta &&= 1+\sum \underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\overset{<}{\eta}}\,\mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}}\\
\Theta^{-1} &= 1+\sum \underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\eta}\,\mathbf{B}_\eta &&= 1+\sum \underset{\bullet}{\mathcal{V}}^{\overset{<}{\eta}}\,\mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}}.
\end{aligned}$$

*Développements mouliens pur un difféo.*

$$\begin{aligned}
\Theta &= 1+\sum \underset{\bullet}{\mathcal{W}}^{\eta}\,\mathbf{B}_\eta &&= 1+\sum \underset{\bullet}{\mathcal{W}}^{\overset{<}{\eta}}\,\mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}}\\
\Theta^{-1} &= 1+\sum \underset{\bullet}{\mathcal{W}}^{\eta}\,\mathbf{B}_\eta &&= 1+\sum \underset{\bullet}{\mathcal{W}}^{\overset{<}{\eta}}\,\mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}}.
\end{aligned}$$

*Equation du pont opératorielle.*

$$\begin{aligned}
[\overset{\bullet}{\Delta}_\omega, \Theta] &= -\Theta\mathbf{A}_\omega && (\overset{\bullet}{\omega}\in\Omega)\\
[\overset{\bullet}{\Delta}_\omega, \Theta^{-1}] &= +\mathbf{A}_\omega\Theta^{-1} && (\overset{\bullet}{\omega}\in\Omega)
\end{aligned}$$

avec des opérateurs $\mathbf{A}_\omega$ de la forme :

$$\mathbf{A}_\omega = u^{n(\omega)}\big(A^\circ_\omega\partial_z + \sum_{i=1}^{\nu-1} A^i_\omega u_i\partial_{u_i}\big) \qquad \text{pour un champ}$$

$$\mathbf{A}_\omega = e^{-n_0\lambda_0 z}u^{n(\omega)}\big(A^\circ_\omega\partial_z + \sum_{i=1}^{\nu-1} A^i_\omega u_i\partial_{u_i}\big) \qquad \text{pour un difféo } (\lambda_0 = 2\pi i)$$

et admettant les séries mouliennes :

$$\mathbf{A}_\omega = -\sum V^{\overset{<}{\eta}}_\omega \mathbf{D}_{\overset{<}{\eta}} = -\sum V^{\overset{<}{\eta}}_\omega \mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}} = \sum \mathcal{V}^{\overset{<}{\eta}}_\omega \mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}} \qquad \text{(champ)}$$

$$\mathbf{A}_\omega = -e^{-n_0\lambda_0 z}\sum W^{\overset{<}{\eta}}_\omega \mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}} = e^{-n_0\lambda_0 z}\sum \mathcal{W}^{\overset{<}{\eta}}_\omega \mathbf{B}_{\overset{<}{\eta}} \qquad \text{(difféo).}$$

*Equation du pont classique.*

$$\overset{\bullet}{\Delta}_\omega\,\widetilde{x}(z,u) = \mathbf{A}_\omega\widetilde{x}(z,u) \qquad (\overset{\bullet}{\omega}\in\Omega)$$

$\widetilde{x}(z,u)$ désigne l'intégrale formelle de l'objet, solution de :

$$\partial_z \widetilde{x}_i(z,u) = X_i(\widetilde{x}(z,u)) \qquad (1 \leq i \leq \nu) \text{ (pour un champ)}$$
$$\widetilde{x}_i(z+1,u) = f_i(\widetilde{x}(z,u)) \qquad (1 \leq i \leq \nu) \text{ (pour un difféo).}$$

*Convergence des développements de* $\Theta^{\pm 1}$.

Cruciaux sont les paramètres $\tau^{\text{ext}}$ et $\tau^{\text{int}}$ (*cf.* (8.14) et (9.4)) ainsi que le paramètre $\delta^{\text{int}}$ (*cf.* (9.3)) attaché au réseau interne $\Omega^{\text{int}} = \sum_{m_i \neq 0} \lambda_i \mathbf{Z}$. *Quand* $\Omega^{\text{int}}$ *est discret*, les séries arborifiées $\Theta^{\pm 1}$ de convergent *toujours* en $z$ (dans chaque modèle géométrique) et en $\zeta$ (dans le modèle convolutif) ; elles convergent aussi en $u = (u_i)$ si $\tau^{\text{ext}} < 0$ et si la condition diophantienne de Brjuno (2.6) est vérifiée. *Quand* $\Omega^{\text{int}}$ *n'est pas discret*, les séries arborifiées de $\Theta^{\pm 1}$ convergent toujours en $z$ (dans chaque modèle géométrique) et en $\zeta$ (dans le modèle convolutif) si $\tau^{\text{int}}\delta^{\text{int}} < 1$ ; lorsqu'au contraire $1 \leq \tau^{\text{int}}\delta^{\text{int}} \leq +\infty$, elles ne convergent plus que pour des *objets corrigibles.*

*Construction et invariance des* $\mathbf{A}_\omega$.

Les séries arborifiées exprimant $\mathbf{A}_\omega$ convergent *toujours* quand $\Omega^{\text{int}}$ est discret ou quand, à défaut de discrétude, on a $\tau^{\text{int}}\delta^{\text{int}} < 1$ ; sinon elles ne convergent que pour des *objets corrigibles.* Dès lors qu'ils sont définis, les opérateurs $\mathbf{A}_\omega$ sont des *invariants analytiques* (*i.e.* relativement aux changements de variable analytiques) et *holomorphes* (*i.e.* fonctions holomorphes de l'objet). Les $\mathbf{A}_\omega$ constituent toujours un système complet d'invariants holomorphes. Quand la condition diophantienne (2.6) de Brjuno est réalisée, ils constituent en outre un système complet d'invariants analytiques.

## BIBLIOGRAPHIE


[Br] A.D. Brjuno, Analytic form of differential equations, Trans. Moscow. Math. Soc., Vol. 25 (1971).

[Be] A. Beurling, Sur les fonctions limites quasianalytiques de fractions rationnelles, in Collected Works (Vol.1, pp.109–120), Boston, 1989.

[E0] J. Ecalle, Théorie des invariants holomorphes, Thèse, Orsay, 1974.

[E1] J. Ecalle, Les fonctions résurgentes, Vol. 1, Algèbres de fonctions résurgentes, Pub. Math. Orsay, (1981).

[E2] J. Ecalle, Les fonctions résurgentes, Vol. 2, Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération, Pub. Math. Orsay, (1981).

[E3] J. Ecalle, Les fonctions résurgentes, Vol. 3, L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux, Pub. Math. Orsay, (1985).

[E4] J. ECALLE, Classification analytique des champs de vecteurs locaux résonnants de $C^\nu$. Actes de la 37ème rencontre entre Mathématiciens et Physiciens (RCP), Strasbourg, Oct. 1983.

[E5] J. ECALLE, Finitude des cycles-limites et accéléro-sommation de l'application de retour (pp. 74–159) in : Bifurcations of Planar Vector fields; Proc. Luminy 1989, Lect. Notes 1455, Springer.

[E6] J. ECALLE, Introduction aux fonctions analysables et application à la preuve constructive de la conjecture de Dulac, Hermann, Paris, 1991.

[E7] J. ECALLE, Calcul accélératoire et applications (à paraître aux Actualités Math., Ed. Hermann, Paris).

[E8] J. ECALLE, Calcul compensatoire et linéarisation quasianalytique des objets locaux. A paraître aux Proc. of the Coll. on complex Anal. Methods in Dyn. Syst., IMPA, Rio de Janeiro, Jan. 1992.

[E10] J. ECALLE, The acceleration operators and their applications, Proc. of the 1990 I.C.M., (Kyoto), Springer Verlag.

[E11] J. ECALLE, Cohesive functions and weak accelerations. A paraître au Journal d'Analyse Math., Szolem Mandelbrojt Memorial Volume, 1992.

[MR1] J. MARTINET et J.-P. RAMIS, Problèmes de modules pour des équations différentielles non-linéaires du premier ordre, Pub. Math. IHES, 55 (1982), 63–16.

[MR2] J. MARTINET et J.-P. RAMIS, Classification analytique des équations différentielles non-linéaires résonnantes du premier ordre, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t.16 (1983), 571–625.

[MR3] J. MARTINET et J.-P. RAMIS, Elementary acceleration and multisummability, Paris, 1990.

[Ma] J. MARTINET, Normalisation des champs de vecteurs holomorphes, d'après A.D. Brjuno, Séminaire Bourbaki, 1980-81, n°564-01.

[Rü1] H. RÜSSMANN, Über die Iteration analytischer Funktionen, J. Math. Mech., 17, 523–532.

[Rü2] H. RÜSSMANN, On the convergence of power series transformations of analytic mappings near a fixed point into a normal form, Preprint IHES, Paris, 1977.

Jean ECALLE,
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France).