ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROBERT MOUSSU

CLAUDE ROCHE

Théorèmes de finitude pour les variétés pfaffiennes

Annales de l'institut Fourier, tome 42, nº 1-2 (1992), p. 393-420

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1992__42_1-2_393_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
42, 1-2 (1992), 393-420

THEOREMES DE FINITUDE POUR LES VARIETES PFAFFIENNES

par R. MOUSSU ET C. ROCHE

Claude GODBILLON et Jean MARTINET se sont souvent intéressés aux feuilletages et aux singularités. Ce qu'ils ont pu nous apprendre dans ce domaine nous a été évidemment précieux pour écrire ce papier qui porte sur les singularités de feuilletages.

Ce travail poursuit et précise l'étude, commencée dans [MoRo], des variétés intégrales d'équations de Pfaff analytiques qui ne "spiralent" pas. Il s'agit essentiellement de montrer que de telles variétés possèdent la plupart des propriétés des ensembles semi–analytiques. Nous prouverons un théorème de finitude uniforme, de type Gabrielov–Hardt–Teissier [Ga] [Ha] [Te] pour de telles variétés et nous l'appliquerons à l'étude de leurs bouts.

I. DEFINITIONS ET RESULTATS

Dans ce travail on utilise sans rappels les définitions et résultats classiques de Lojasiewicz [Lo] [Ha] [Ma] sur les sous–ensembles semi–analytiques de $\mathbf{R}^n$.

Une *hypersurface pfaffienne* de $\mathbf{R}^n$ est un triplet $\{V, \omega, M\}$ où M est un ouvert semi–analytique de $\mathbf{R}^n$, ω une 1–forme analytique sur un

---

Mots-clés : Equations de Pfaff – Semi-analytique – Khovanskii – Finitude.
Classification A.M.S. : 32B20 – 14P99 – 57R30 – 34C05.

voisinage de l'adhérence $\bar{M}$ de M et V une variété intégrale maximale de $\omega = 0$ dans M qui est lisse de codimension 1; c'est–à–dire :

$$T_x V = \ker \omega(x) \ , \qquad \omega(x) \neq 0 \quad \text{si } x \in V$$

et V est maximale parmi les sous–variétés immergées connexes de M qui possèdent cette propriété.

Soit X un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$. Nous dirons que $\{V, \omega, M\}$ est *de Rolle dans* X si tout chemin analytique dans $X \cap M$ qui joint deux points de V est tangent en un point au moins au champ de $(n-1)$–plans défini par $\omega = 0$. Plus précisément, quel que soit l'application analytique :

$$\gamma \ : [0,1] \to X \cap M \quad , \quad t \mapsto \gamma(t),$$

il existe $t \in [0,1]$ tel que le vecteur $\gamma'(t)$ appartienne au noyau de $\omega(\gamma(t))$. Lorsque $X = M$ nous dirons seulement que $\{V, \omega, M\}$ est de *Rolle*. Cette propriété est intimement liée à la topologie de M. Nous montrerons dans le chapitre II que si $M \setminus S(\omega)$ est simplement connexe, toute hypersurface pfaffienne $\{V, \omega, M\}$ est de Rolle, où $S(\omega) = \{x / \omega(x) = 0\}$ est le lieu singulier. Lorsque ω est intégrable, c'est–à–dire $\omega \wedge d\omega = 0$ et $\{V, \omega, M\}$ est une hypersurface pfaffienne, V est une feuille du feuilletage défini par ω.

En général V est une sous–variété analytique immergée de $\mathbf{R}^n$ qui n'est pas un sous–ensemble semi–analytique de $\mathbf{R}^n$; voir par exemple les V_λ ci–dessous.

Dans [MoRo] nous avons étudié les *hypersurfaces séparantes;* ce sont des hypersurfaces pfaffiennes $\{V, \omega, M\}$ telles que $M \setminus V$; a deux composantes connexes dont V est le bord dans M. D'après le théorème de Khovanskii–Rolle [Ho1] [Ho2] une hypersurface séparante est toujours une hypersurface de Rolle. Mais la réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant. Soit :

$$M = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \omega = x^2 dy - y dx.$$

Toute courbe intégrale V de $\omega = 0$ est une hypersurface pfaffienne de Rolle, en particulier les graphes V_λ des fonctions $f_\lambda \ : x \mapsto \lambda e^{-1/x}$ avec $x > 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}$. Par contre $M \setminus V_\lambda$ est connexe et les V_λ ne sont pas des hypersurfaces séparantes.

Nous avons prouvé ([MoRo]) que : *si, pour* $i = 1, \ldots, q$, $\{V_i, \omega_i, M\}$ *sont des hypersurfaces séparantes et si* X *est un semi–analytique de* $\mathbf{R}^n$ *relativement compact alors*

$$b_0(X \cap V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_q) < \infty$$

où $b_0(A)$ signifie le nombre de composantes connexes de A. Il est facile de voir que ce résultat reste vrai pour des hypersurfaces de Rolle. Le théorème suivant montre que $b_0(X \cap V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_q)$ peut être majoré uniformement.

THÉORÈME 1. — *Soit X un sous–ensemble semi-analytique de $\mathbf{R}^n$, relativement compact et soient ω_i pour $i = 1, 2, \ldots, q$, des 1–formes analytiques sur un voisinage de l'adhérence d'un ouvert semi–analytique M de $\mathbf{R}^n$. Il existe un entier b dépendant uniquement de M, X et des ω_i tel que*

$$b_0(X \cap V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_q) \leq b$$

si, pour $i = 1, 2, \ldots, q$, $\{V_i, \omega_i, M\}$ est une hypersurface pfaffienne de Rolle dans X.

Le théorème suivant de Gabrielov–Hardt–Teissier est une conséquence immédiate du Théorème 1.

THÉORÈME [GHT]. — *Si X est un sous-ensemble semi-analytique relativement compact de $\mathbf{R}^n$ et π la projection*

$$\pi \ : \ \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}^q, \ x = (y, z) \mapsto z = (z_1, \ldots, z_q)$$

il existe b, dépendant uniquement de X tel que :

$$b_0(X \cap \pi^{-1}(\zeta)) < b \ \ si \ \ \zeta \in \mathbf{R}^q.$$

Preuve. — En effet, pour $i = 1, 2, \ldots, q$ chaque hypersurface

$$V_{\zeta_i} = \{(y, z) \in \mathbf{R}^n / z_i = \zeta_i\}$$

est une hypersurface séparante $\{V_{\zeta_i}, dz_i, \mathbf{R}^n\}$ et

$$X \cap \pi^{-1}(\zeta) = X \cap V_{\zeta_1} \cap V_{\zeta_2} \cap \cdots \cap V_{\zeta_q}.$$

D'après le théorème il existe b dépendant uniquement de X tel que

$$b_0(X \cap \pi^{-1}(\zeta)) < b.$$

Ce théorème est en fait un cas particulier du corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. — *Soient X, M et des ω_i comme dans l'enoncé du théorème 1 et soit*

$$\pi : \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^r, \quad x = (y, z) \mapsto z.$$

Il existe un entier b dépendant uniquement de M, X et des ω_i tel que pour tout $z \in \mathbf{R}^r$

$$b_0(X \cap V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_q \cap \pi^{-1}(z)) < b$$

si, pour $i = 1, 2, \ldots, q$, $\{V_i, \omega_i, M\}$ sont des hypersurfaces pfaffiennes de Rolle dans X.

En fait nous prouverons un résultat plus général, une version à paramètres du théorème 1. Supposons que dans le théorème les 1–formes dépendent analytiquement d'un paramètre $\lambda \in \Lambda$. Soit, pour chaque valeur de $\lambda \in \Lambda$, $\{V_{i,\lambda}, \omega_{i,\lambda}, M\}$ une hypersurface pfaffienne de Rolle dans X et soit b_λ le plus petit des majorants fourni par le théorème 1. Alors si Λ est un sous–ensemble semi–analytique relativement compact de $\mathbf{R}^s$, $b = \sup\{b_\lambda / \lambda \in \Lambda\}$ est fini. C'est–à–dire que pour $\lambda \in \Lambda$

$$b_0(X \cap V_{1,\lambda} \cap \cdots \cap V_{q,\lambda}) \leq b.$$

Il est assez surprenant d'obtenir une telle majoration sans imposer des conditions sur le choix des $V_{\lambda,i}$. Pour chaque λ, $V_{\lambda,i}$ est prise au hasard parmi les hypersurfaces de Rolle dans X de $\omega_{\lambda,i}$. En particulier il n'est pas exigé que les $\omega_{\lambda,i}$ soient intégrables sur $M \times \Lambda$. Ceci est illustré par l'exemple suivant.

Exemple. — Le premier compensateur d'Ecalle–Roussarie [Ro] est la fonction sur $]0, \infty[\times \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, \lambda) = f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{x^{\lambda+1} - x}{\lambda}, & \text{si } \lambda \neq 0 \\ x \log x, & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

Pour λ fixé, f_λ est solution de l'équation différentielle

$$x \frac{dy}{dx} = (\lambda + 1)y + x.$$

Son graphe V_λ est une courbe intégrale de

$$\omega_\lambda = ((\lambda + 1)y + x)dx - xdy = 0.$$

Cette forme n'est pas intégrable en (x, y, λ). Cependant si g est une fonction analytique sur $\mathbf{R}^2$, le nombre de racines isolées inférieures à 1, de

$$g(x, f_\lambda(x)) = 0 \qquad \text{pour } |\lambda| < 1/2$$

est borné par un nombre b. En effet, ces racines sont les abcisses des points d'intersection de V_λ et de la courbe $X = \{g = 0\}$ et pour $0 < x < 1$ et $|\lambda| < 1/2$, $|f_\lambda(x)|$ est borné par un nombre α. Tous ces points d'intersection appartiennent à l'ouvert $M =]1, 1[\times] - \alpha, \alpha[$. Puisque $\{V_\lambda, \omega_\lambda, M\}$ est une hypersurface de Rolle, il existe b tel que

$$b_0(X \cap V_\lambda) \leq b.$$

Dans un travail ultérieur nous nous proposons de calculer b dans certains cas en termes de complexité géométrique [Ho1] [Ho2], [Ri], [BeRi] de M, X et des ω_i. Il est aussi possible de faire une théorie des images par des applications propres des hypersurfaces pfaffiennes de Rolle dans l'esprit de [VdD], et poursuivre la tâche commencée dans [La]. D'autre part, le théorème (ou son corollaire) permet de montrer que certaines propriétés des ensembles semi–analytiques s'étendent aux hypersurfaces pfaffiennes de Rolle. Le théorème suivant en est une illustration.

THÉORÈME 2. — *Si $\{V, \omega, M\}$ est une hypersurface pfaffienne de Rolle où M est un ouvert semi–analytique de $\mathbf{R}^3$, relativement compact, le bord $\partial V = \bar{V} \setminus V$ de V dans $\mathbf{R}^3$ est une union finie de points et de courbes analytiques.*

II. PROPRIETES GENERALES DES HYPERSURFACES PFAFFIENNES

Ce chapitre a pour but d'étudier quelques propriétés élémentaires des sous–variétés de $\mathbf{R}^n$ de codimension 1 solutions d'une équation de Pfaff analytique.

1. Analyticité et intégrabilité.

Dans toute la suite, M désigne un ouvert semi-analytique de $\mathbf{R}^n$ et ω une 1–forme analytique sur un voisinage U de son adhérence $\bar{M}$. Dans des coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n) = x$, elle s'écrit

$$\omega = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + \cdots + a_n(x)dx_n.$$

Elle est intégrable si $\omega \wedge d\omega = 0$ et son lieu singulier est l'ensemble $S(\omega)$ d'équations $a_k = 0, k = 1, 2, \dots, n$.

Une sous–variété immergée connexe V de codimension 1 de M est *une hypersurface pfaffienne* de $\omega = 0$ dans M, ce que nous écrirons $\{V, \omega, M\}$, si pour tout x appartenant à V

$$\omega(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad T_xV = \ker \omega(x)$$

et si V est maximale parmi les variétés qui possèdent ces propriétés.

PROPOSITION 1. — *Soit $\{V, \omega, M\}$ une hypersurface pfaffienne. Alors V est contenu dans le sous–ensemble semi–analytique*

$$Z = \{x \in M / \omega(x) \wedge d\omega(x) = 0\}.$$

Si ω n'est pas intégrable, V est un sous–ensemble semi–analytique de $\mathbf{R}^n$.

Démonstration. — Soit $f = 0$ une équation locale de V en a qui est une submersion analytique d'un voisinage U_a de a sur un voisinage de $0 \in \mathbf{R}$; c'est–à–dire

$$df(x) \wedge \omega(x) = 0 \quad \text{si } x \in U_a \cap f^{-1}(0).$$

Il existe une 2–forme η analytique sur U_a et une fonction ϕ sur $f^{-1}(0)$ telles que

$$\omega \wedge df = f\eta \quad \text{et } \omega(x) = \phi(x)df(x) \quad \text{si } x \in f^{-1}(0).$$

En prenant la dérivée extérieure de la première égalité on obtient :

$$d\omega \wedge df = df \wedge \eta + fd\eta = fd\eta.$$

Ainsi en tout point x de $f^{-1}(0)$ on a

$$d\omega(x) \wedge \omega(x) = d\omega(x) \wedge \phi(x)df(x) = \phi(x)f(x)d\eta(x) = 0.$$

Supposons que la 3–forme $\omega \wedge d\omega$ ne soit pas identiquement nulle. Alors

$$Z = \{x \in M/\omega \wedge d\omega(x) = 0\}$$

est un sous–ensemble semi–analytique de $\mathbf{R}^n$ de codimension ≥ 1. Si $\{V, \omega, M\}$ est une hypersurface pfaffienne, V est une sous–variété analytique de codimension 1 contenue dans Z. Compte tenu de son caractère maximal, V est une réunion de strates de la stratification canonique de $Z \setminus S(\omega)$,([Ma]), c'est donc un sous–ensemble semi–analytique de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 1. — Si ω n'est pas intégrable et $\{V, \omega, M\}$ est une hypersurface pfaffienne, alors V est un sous–ensemble semi–analytique lisse de codimension $n - 1$ de $\mathbf{R}^n$. En général $\{V, \omega, M\}$ n'est pas une hypersurface pfaffienne de Rolle. Par exemple, si $\omega = xdy - ydx + ydz$, analytique dans $\mathbf{R}^3$, et $V = \{y = 0, x > 0\}$ alors $\{V, \omega, M\}$ est une hypersurface pfaffienne qui n'est pas de Rolle.

Cependant le semi–analytique V peut être stratifié en feuillets normaux (voir le Chapitre III). Il est ainsi une réunion d'intersections d'hypersurfaces pfaffiennes associées à des formes globalement exactes, et donc de Rolle.

2. Transcendance.

Si $\{V, \omega, M\}$ est une hypersurface pfaffienne telle que V ne soit pas un sous–ensemble semi–analytique de $\mathbf{R}^n$ nous dirons qu'elle est *transcendante.* D'après la proposition 1, ω est alors intégrable et V est une feuille du feuilletage défini pas $\omega = 0$ sur $M \setminus S(\omega)$. Nous dirons encore que V est une *feuille transcendante* de ce feuilletage. La proposition suivante montre qu'une telle feuille détermine complètement le feuilletage ou encore l'équation de Pfaff qui le définit.

PROPOSITION 2. — *Soient ω, ω' deux 1–formes analytiques sur un voisinage de M. S'il existe une sous–variété V de M telle que $\{V, \omega, M\}$, $\{V, \omega', M\}$ soient transcendantes,alors ω et ω' sont colinéaires.*

Démonstration. — La sous–variété V est contenue dans le sous–ensemble semi–analytique

$$Y = \{x \in M / \omega(x) \wedge \omega'(x) = 0\}.$$

Si ω, ω' ne sont pas colinéaires sur M, Y est un sous–ensemble semi–analytique de codimension 1 de M et V est réunion de strates de la stratification singulière de Y. C'est un sous–ensemble semi–analytique de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 2. — L'argument de cette preuve, V est un sous–ensemble de codimension 0 du lieu de colinéarité de ω, ω' peut–être utilisé dans d'autres cadres que le cadre analytique global. Il peut clairement être germifié ou encore rendu formel pour prouver :

deux germes ω, ω' en $0 \in \mathbf{K}^n$, avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, de 1–formes analytiques qui possèdent une solution formelle (non convergente) commune sont colinéaires.

Plus précisement, soit $\mathbf{K}\{x\}$ (resp. $\mathbf{K}[[x]]$) l'anneau des séries convergentes (resp. formelles) à n indéterminées sur $\mathbf{K}$ et soient ω, ω' deux germes en 0 de 1–formes :

$$\omega = \sum a_i dx_i, \qquad \omega' = \sum a'_i dx_i,$$

où les a_i, a'_i appartiennent à $\mathbf{K}\{x\}$. Supposons qu'il existe un élément non nul f de $\mathbf{K}[[x]]$ tel que

$$f\mathbf{K}[[x]] \cap \mathbf{K}\{x\} = \{0\} \quad \omega \wedge df = f\eta, \quad \omega' \wedge df = f\eta',$$

où η, η' sont deux formes à coefficients dans $\mathbf{K}[[x]]$. Alors l'argument de la preuve de la proposition précédente permet de prouver que $\omega \wedge \omega' \equiv 0$.

Cette remarque permet de retrouver un résultat de J. Ecalle [Ec], [MaRa] sur la classification des germes en $0 \in \mathbf{C}^2$ de champs de vecteurs X ayant une valeur propre nulle et une non nulle : supposons que la direction propre correspondant à cette dernière soit l'axe $x_2 = 0$, alors il existe $g \in \mathbf{C}[[x]]$ unique tel que

$$X(x_2 - g(x_1)) = 0, \quad g(0) = g'(0) = 0.$$

Si g appartient à $\mathbf{C}[[x_1]] \setminus \mathbf{C}\{x_1\}$, $f = x_2 - g(x_1)$ est une solution formelle de l'équation de Pfaff correspondante à X. D'après ce qui précède, g caractérise le type analytique de cette équation.

Avec le langage de J. Ecalle, ceci s'énonce : *si les dérivées étrangères de g ne sont pas toutes nulles, elles fournissent un système complet d'invariants analytiques de X.*

Le même type d'argument peut aussi être employé dans le cadre algébrique. *Deux équations de Pfaff algébriques sur $\mathbf{R}^2$ qui ont une courbe intégrale non algébrique en commun sont colinéaires.* C'est par exemple le cas si cette courbe est un cycle limite non algébrique. Compte tenu d'un théorème de Darboux [Jo], [Da] cette remarque ramène l'étude du XVIème Problème de Hilbert à celle des cycles limites non algébriques. Cette réduction est certainement stérile. Mais elle pose la question suivante :

A quelle condition une ovale analytique de $\mathbf{R}^2$ est–elle solution d'une équation différentielle algébrique?

3. Courbes pfaffiennes spiralantes et propriété de Rolle.

Dans tout ce paragraphe M désigne un ouvert semi–analytique, relativement compact de $\mathbf{R}^2$ et

$$\omega = a(x)dx_1 + b(x)dx_2$$

une 1–forme analytique sur un voisinage de $\bar{M}$. Les courbes intégrales maximales V de ω dans M sont des hypersurfaces pfaffiennes $\{V, \omega, M\}$. Elles sont orientées par le champ de vecteurs

$$X_\omega = b(x)\frac{\partial}{\partial x_1} - a(x)\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Rappelons qu'un *polycycle* P de X_ω est une union finie connexe de courbes intégrales et de points singuliers de X_ω qui possède une application retour unilatérale f sur une demi–transversale à X_ω en un point de P. Si f n'est pas l'application identique on dit que P est un *polycycle limite.* Lorsque P ne contient pas de point singulier, c'est un *cycle limite.* C'est un foyer s'il est réduit à un point singulier.

Nous dirons qu'une *courbe pfaffienne spirale* si son bord $\partial V = \bar{V} \setminus V$ contient un polycycle limite.

PROPOSITION 3. — *Soit V une courbe intégrale maximale de $\omega = 0$ dans M relativement compact.*

i) *Si V ne spirale pas, $\{V, \omega, M\}$ est de Rolle dans $M \setminus Z$ où Z est une union finie de courbes semi-analytiques qui joignent des points de $\partial M \cup S(\omega)$.*

ii) *Si V spirale, quel que soit le sous-ensemble semi-analytique de dimension 1 de $\mathbf{R}^2$, $\{V, \omega, M\}$ n'est pas de Rolle dans $M \setminus Z$.*

Démonstration. — Supposons que V spirale et soit P un polycycle contenu dans ∂V. Il existe une infinité de demies-transversales semi-analytiques qui sont coupées une infinité de fois par V. Ainsi $\{V, \omega, M\}$ ne peut pas être de Rolle dans $M \setminus Z$ si Z est un semi-analytique de dimension 1.

Supposons que V ne spirale pas et que ce ne soit pas un cycle. D'après le théorème de Poincaré–Bendixon, ∂V contient deux points a et b, éventuellement confondus : les ensembles α–limite et ω–limite de V qui est orientée par X_ω. Lorsque ces points n'appartiennent pas à ∂M, ce sont des points singuliers de X_ω. D'après le théorème de désingularisation de Seidenberg [Se] et la classification des singularités réduites des champs de vecteurs de dimension 2 [MaMo], [Du], le germe de $\bar{V}$ en un tel point possède une tangente puisqu'il a une équation qui a un "développement asymptotique". On en déduit que $\bar{V}$ est un arc de courbe compact qui possède des tangentes en ces extrémités a et b. C'est toujours le cas si a et b ne sont pas des points singuliers de X_ω.

Si M est simplement connexe et si a et b appartiennent à ∂M, $M \setminus V$ a deux composantes connexes et $\{V, \omega, M\}$ est séparante donc de Rolle.

Supposons que a ou b n'appartienne pas à ∂M ou que M ne soit pas simplement connexe. Puisque $\bar{V}$ possède des tangentes en a et b, il est facile de construire des courbes semi-analytiques Z_k, $k = 1, 2, \ldots, r$ joignant des points de $\partial M \cup \{a, b\}$ qui ne rencontrent pas V et telles que

$$M' = M \setminus \bigcup_{k=1}^{r} Z_k \cup \{a, b\}$$

soit simplement connexe. La courbe $\bar{V}$ joint deux points a, b du bord de M' qui est simplement connexe. Ainsi $M' \setminus V$ a deux composantes connexes et V est de Rolle dans M'.

4. Hypersurfaces spiralantes et propriété de Rolle.

Dans ce paragraphe M désigne un ouvert semi–analytique de $\mathbf{R}^n$, ω une 1–forme analytique sur un voisinage de $\bar{M}$ et $\{V, \omega, M\}$ une hypersurface pfaffienne transcendante.

Nous dirons que $\{V, \omega, M\}$ *spirale* si le spiralement peut être lu en dimension 2; plus précisément, s'il existe une application analytique f d'un ouvert semi–analytique de $\mathbf{R}^2$ dans un voisinage de M telle que $f^{-1}(V)$ contienne une courbe intégrale maximale v de $f^*(\omega)$ qui spirale. C'est–à–dire que $\{v, f^*(\omega), f^{-1}(M)\}$ est une courbe pfaffienne spiralante;

On peut encore montrer que si $\{V, \omega, M\}$ est une hypersurface pfaffienne qui spirale, alors il n'existe pas de semi–analytique Z de codimension ≥ 1 tel que $\{V, \omega, M\}$ soit de Rolle dans $M \setminus Z$. Cette affirmation n'a pas beaucoup d'interêt, sa démonstration est un exercice de géométrie analytique.

La preuve du ii) de la Proposition 3 reposait sur la propriété topologique : tout ouvert semi–analytique relativement compact du plan peut–être "rendu simplement connexe par des coupures semi–analytiques". En dimension plus grande on ne dispose pas d'un moyen aussi constructif pour "rendre simplement connexe". On a seulement le résultat suivant.

PROPOSITION 4. — *Soient M un ouvert semi–analytique de $\mathbf{R}^n$ et ω une 1–forme analytique intégrable sur un voisinage de $\bar{M}$. Si $M \setminus S(\omega)$ est simplement connexe toute hypersurface pfaffienne $\{V, \omega, M\}$ est de Rolle.*

Soit ω une 1–forme analytique sur un voisinage de $\bar{M}$, où M est un ouvert semi–analytique. Il existe un sous–ensemble semi–analytique Z de codimension 1 tel que les composantes connexes M_k, $k = 1, 2, \ldots, r$ de $M \setminus S(\omega) \cup Z$ soient simplement connexes. Ainsi toute variété pfaffienne $\{V, \omega, M\}$ se décompose en briques élémentaires, les composantes connexes de $V \setminus Z$. Elles forment une famille finie ou infinie $V_i, i \in I$. Ce sont des variétés pfaffiennes de Rolle $\{V_i, \omega, M'\}$ avec $M' = M \setminus S(\omega) \cup Z$.

La démonstration de la proposition 4 repose essentiellement sur le même argument que la preuve par A. Haefliger [Hae] de la non existence de feuilletages analytiques de S^3. Nous n'en donnerons que les grandes lignes.

Tout récemment nous avons démontré en collaboration avec Ch. Bonatti et A. Khovanskii que dans ce cas V est une sous–variété séparante. Les détails ainsi que la description complète de la relation entre variété séparante et hypersurface pfaffienne de Rolle paraîtront ultérieurement.

Démonstration. — Supposons que $\{V, \omega, M\}$ ne soit pas une hypersurface pfaffienne de Rolle. Soit T une courbe analytique transverse à $\omega = 0$ qui joint deux points a et b de V et soit C une courbe dans V sans point double qui joint a et b. En lissant la courbe simple fermée $T \cup C$ ([Hae] et [M] Lemme 1.4.*ii*) page 26) on obtient une courbe Γ fermée transverse à $\omega = 0$ qui coupe V en un point au moins.

Puisque $M \setminus S(\omega)$ est simplement connexe il existe une application C^∞, f, du disque D de centre 0 et de rayon 1 dans $M \setminus S(\omega)$ telle que la restriction de f au bord ∂D de D soit un parametrage de Γ. L'image réciproque de V par f contient une courbe intégrale v de $f^*(\omega)$ qui coupe ∂D. Un argument de position générale permet de choisir f telle que :

i) les points singuliers de $f^*(\omega)$ possèdent des intégrales premières qui soient des fonctions de Morse. Ce sont des centres ou des points de selle.

ii) le feuilletage défini par $f^*(\omega)$ n'a pas de connexion de selles.

iii) la courbe v n'aboutit pas à un point de selle.

Le théorème d'approximation de Weierstrass permet de supposer Γ et f analytiques.

D'après le théorème de Poincaré–Bendixon, $\bar{v}$ contient un cycle limite C_1 qui borde un disque D_1 dans D. Puisque l'application retour de C_1 est analytique, C_1 est encore un cycle limite de la restriction de $f^*(\omega)$ à D_1. On en déduit par le même raisonnement que $f^*(\omega)$ possède un cycle limite $C_2 \subset D_1$, etc. L'ensemble des cycles limites de $f^*(\omega)$ ordonnés par l'inclusion des disques qu'ils bordent possède un élément maximal C_0. L'application retour de C_0 est un germe de difféomorphisme analytique de $(\mathbf{R}, 0)$ qui est l'identité d'un côté de 0 et qui n'a pas de point fixe de l'autre côté. Ceci est impossible puisque c'est un germe de difféomorphisme analytique.

III. DEMONSTRATION DES RESULTATS DE FINITUDE

Le théorème 1 et sa version à paramètres se prouvent comme le théorème de finitude de notre travail précédent [MoRo], par une double récurrence sur le nombre de 1–formes ω_i et sur la dimension du semi–analytique X. Ce raisonnement repose sur deux propositions. La première n'est qu'une version améliorée d'un résultat de stratification de [MoRo], indispensable pour obtenir le contrôle dans le cas à paramètres. La seconde proposition est à mettre en rapport avec le "fiber cutting lemma" de la géométrie semi–analytique [BiMi]. Ces résultats sont l'objet du deuxième paragraphe. La preuve du théorème 1 se trouve dans le troisième paragraphe. Dans le dernier paragraphe on précise le cadre du théorème de finitude à paramètres et on en donne la preuve.

1. Remarques préliminaires.

Dans ce chapitre et dans le chapitre IV un *semi–analytique* est un sous–ensemble semi-analytique de $\mathbf{R}^n$, la dimension n étant fixée. De même *l'adhérence* $\bar{A}$ de $A \subset \mathbf{R}^n$ est toujours l'adhérence dans $\mathbf{R}^n$ et *le bord* ∂A est $\bar{A} \setminus A$.

On note $B_a(\rho)$ la boule de centre a et de rayon ρ :

$$B_a(\rho) = \{x \in \mathbf{R}^n / \sum (x_i - a_i)^2 < \rho^2\}.$$

Un semi–analytique N est appelé *feuillet* si c'est une sous–variété analytique connexe de $\mathbf{R}^n$. On dira que N est un feuillet *normal* dans une boule B s'il existe des fonctions $h_l, l = 1, \ldots, s$, analytiques au voisinage de $\bar{B}$ telles que

$$N \cap B = \{x \in B / h_l(x) = 0, 1 \leq l \leq n-p \text{ et } h_l(x) > 0, l > n-p\}$$

$$\sigma(x) = dh_1 \wedge \ldots \wedge dh_{n-p}(x) \neq 0 \text{ si } x \in N \cap B.$$

On dira que $h_1 = 0, \ldots, h_{n-p} = 0$, sont les équations dans B du feuillet normal N.

Un feuillet normal dans une boule B de $\mathbf{R}^n$ est aussi un feuillet normal dans toute boule incluse dans B.

Soient X un sous–ensemble de $\mathbf{R}^n$ et f une fonction réelle sur un sous–ensemble D de $\mathbf{R}^n$. Une stratification $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_\alpha\}$ de A est dite *adaptée* à X

et à f si $X \cap A$ est réunion de strates de $\mathcal{N}$ et le signe de f est constant sur chaque strate. Lorsque $N_\alpha \cap D$ n'est pas vide, f est strictement positive, ou strictement négative ou partout nulle sur $N_\alpha \cap D$.

On définit de même les stratifications adaptées à une famille quelconque de X_i et de fonctions f_j.

Rappelons que deux strates N_α et N_β d'une stratification $\mathcal{N}$ sont dites *non incidentes* si $N_\alpha \cap \bar{N}_\beta = \emptyset$ et $N_\beta \cap \bar{N}_\alpha = \emptyset$.

Toutes les *stratifications* considérées dans ce travail sont des stratifications d'un sous-ensemble semi-analytique de $\mathbf{R}^n$, localement finies, analytiques et semi-analytiques (*i.e. strongly analytic* [Ma]).

On dira qu'une stratification est *normale dans la boule B* si chaque strate est un feuillet normal de la boule B. Une stratification est *normale au voisinage d'un point* s'il existe une boule B centrée en ce point pour laquelle c'est une stratification normale dans B.

Les résultats de Lojasiewicz [Lo] permettent de trouver localement une stratification normale adaptée à chaque famille finie de semi-analytiques et des fonctions analytiques. L'utilisation de familles séparantes [BiMi] permet aussi de donner une preuve directe de ce résultat. Plus précisément on utilisera le résultat suivant de [Lo].

THÉORÈME [LO]. — *Soit $\mathcal{X}$ une famille finie de semi-analytiques et $\mathcal{G}$ une famille finie de fonctions analytiques au voisinage de $a \in \mathbf{R}^n$. Il existe une stratification normale au voisinage de a adaptée aux familles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{G}$.*

Dans toute la suite on note $\mathbf{I}_q$ l'intervalle ordonné naturel $\{1, 2, \dots, q\}$. Soient $\omega_k, k \in \mathbf{I}_q$ des 1-formes différentielles sur un voisinage de $a \in \mathbf{R}^n$. Si J est une partie de $\mathbf{I}_q$ nous notons Ω_J l'ensemble des ω_j pour $j \in J$ et $\Omega_J(x)$ le sous-espace vectoriel du cotangent $T_x^*\mathbf{R}^n$ engendré par les $\omega_j(x), j \in J$.

Si Σ_x est un sous-ensemble de $T_x^*\mathbf{R}^n$, on note Σ_x° son orthogonal, c'est-à-dire l'intersection des sous-espaces $\ker \omega(x)$ de $T_x\mathbf{R}^n$ pour $\omega(x) \in \Sigma_x$. On définit de manière analogue $A_x^\circ \subset T_x^*\mathbf{R}^n$ pour chaque partie A_x de $T_x\mathbf{R}^n$.

Si N est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$, nous dirons que Ω_J est *transverse* à N (et nous écrirons $\Omega_J \pitchfork N$) si pour tout point x de N

$$\dim(\Omega_J^\circ(x) \cap T_xN) = \dim N - \sharp J$$

où $\sharp J$ désigne le nombre d'éléments de J.

Si pour tout $x \in N$, $\Omega_{\mathbf{I}_q}(x) + T_x^\circ N = \Omega_J(x) + T_x^\circ N$, nous dirons que Ω_J est une *base* de $\Omega_{\mathbf{I}_q}$ le long de N. On dira que Ω_J est une *base minimale* si pour chaque $l \in \mathbf{I}_q \setminus J$ on a :

$$\Omega^\circ_{J\cap \mathbf{I}_{l-1}}(x) \cap T_x N = \Omega^\circ_{J\cap \mathbf{I}_l}(x) \cap T_x N$$

pour $x \in N$.

Cette condition revient à dire que dans $\mathbf{I}_q$ on a choisi les indices les plus petits permettant de former une base Ω_J de $\Omega_{\mathbf{I}_q}$ le long de N.

Le lemme suivant exprime l'absence de récurrence pour les intersections transverses de variétés pfaffiennes de Rolle. Il sera utilisé dans la preuve du Théorème de finitude.

LEMME 1. — *Soient M un ouvert semi-analytique de $\mathbf{R}^n$ et $N \subset M$ un semi-analytique qui est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$. Soit Ω un ensemble $\{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$ de 1-formes analytiques intégrables au voisinage d'un point $a \in \bar{N}$ tel que $\Omega \not\pitchfork N$ et $p = \dim N > q \geq 1$. Si les $\{V_i, \omega_i, M\}, i \in \mathbf{I}_q$ sont des hypersurfaces pfaffiennes de Rolle dans N, le bord de toute composante connexe de*

$$N \cap V_1 \cap \cdots \cap V_q,$$

est inclus dans le bord de N.

Démonstration. — Une telle composante connexe, C, est une feuille du feuilletage sans singularité de N déterminé par le système différentiel induit $\omega_{1|N} = 0, \ldots, \omega_{q|N} = 0$. De plus si $m \in \partial C$ et $m \in N$, d'après le théorème de Frobenius il existe une carte de N centrée en m, $\phi = (x_1, \ldots, x_p) : U \subset N \to \mathbf{R}^p$, telle que $\phi^{-1*}(\omega_{j|N})$ soit colinéaire à $dx_j, j \in \mathbf{I}_q$.

Soit $(\alpha_l)_l$ une suite dans $C \cap U$ qui converge vers m. Puisque $m \notin C$, l'une au moins des suites $(x_j(\alpha_l))_l$, $j \in \mathbf{I}_q$ est infinie. Soient j_0 un tel indice et l_0, l_1 tels que $x_{j_0}(\alpha_{l_0}) < x_{j_0}(\alpha_{l_1})$. La courbe analytique $\phi^{-1}([\phi(\alpha_{l_0}), \phi(\alpha_{l_1})])$, est transverse à $\omega_{j_0|N}$. Cette courbe contenue dans N rencontre V_{j_0} dans les points α_{l_0} et α_{l_1}. Ceci contredit l'hypothèse de Rolle pour $\{V_{j_0}, \omega_{j_0}, M\}$ dans N, ainsi $\partial C \cap N = \emptyset$.

2. Stratification adaptée.

La preuve du théorème de finitude repose sur une stratification de l'espace ambiant par le rang du système de Pfaff considéré. Dans la proposition suivante nous construisons une telle stratification.

PROPOSITION 1. — *Soient $\{X_i\}$ une famille finie de semi–analytiques et $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$ un ensemble ordonné de 1–formes analytiques sur un voisinage d'un point $a \in \mathbf{R}^n$. Il existe $\rho > 0$, une stratification normale $\mathcal{N}$ de $B_a(\rho)$ adaptée à chaque X_i et une application J de $\mathcal{N}$ dans l'ensemble de parties de $\mathbf{I}_q$ telle que : pour toute strate N de $\mathcal{N}$, $\Omega_{J(N)}$ soit une base minimale de Ω le long de N.*

Une telle stratification sera dite *adaptée* à Ω. Le caractère minimal de la base obtenue permet d'obtenir l'application J à partir de la stratification.

Démonstration. — On considère tout d'abord une stratification normale d'une boule $B_a(\rho_1)$ adaptée à la famille de semi–analytiques $\{X_i\}$. On construit la stratification $\mathcal{N}$ et l'application J par une récurrence descendante sur la dimension des strates. Toutes les stratifications considérées seront adaptées à la famille $\{X_i\}$.

Il suffit de prouver que si $\mathcal{M}$ est une stratification normale de la boule $B_a(\rho)$ et N est une strate de dimension p de $\mathcal{M}$ il existe une stratification normale $\mathcal{N}'$ d'une boule $B_a(\rho')$ adaptée à N (et à la stratification $\mathcal{M}$) telle que l'on puisse choisir une base minimale de Ω sur toute strate de dimension p incluse dans N.

On remplace ensuite les strates de $\mathcal{M}$ contenues dans $\bar{N}$ par les composantes connexes de leur intersection avec celles de $\mathcal{N}'$.

Pour ce faire, considérons les équations $h_1, \ldots, h_s$ de N. On a

$$\sigma(x) = dh_1 \wedge \ldots \wedge dh_{n-p}(x) \neq 0 \quad \text{si } x \in N.$$

Choisissons des coordonnées et pour chaque $K \subset \mathbf{I}_q$ notons f_K la somme des carrés des coefficients de la $(n-p+\sharp K)$–forme $\sigma \wedge \pi_K$ où $\pi_K = \bigwedge_{j \in K} \omega_j$. Les fonctions f_K sont analytiques sur $B_a(\rho)$ et il est clair que $\Omega_K \not\pitchfork N$ au point x si et seulement si $f_K(x) \neq 0$.

Soit $\mathcal{N}'$ une stratification normale d'une boule $B_a(\rho')$ adaptée à N et aux fonctions f_K. Et soit $N' \subset N$ une strate de $\mathcal{N}'$de dimension p. On détermine l'application J par récurrence comme suit : posons $J_0(N') = \emptyset$ et pour $j > 0$,

$$J_j(N') = \begin{cases} J_{j-1}(N') \cup \{\omega_j\} & \text{si} \quad f_{J_{j-1}(N') \cup \{j\}}(N') \neq 0, \\ J_{j-1}(N') & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que si l'on pose enfin $J(N') = J_q(N')$, la construction assure que $\Omega_{J(N')}$ est une base minimale de Ω le long de N'. Ceci achève la preuve de la Proposition 1.

Un deuxième argument central de la preuve du Théorème 1, qui n'est pas sans rappeler le "fiber cutting lemma", est contenu dans la proposition qui suit. Avant de l'énoncer précisons une définition.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$ des 1–formes différentielles définies sur une variété N. Une sous–variété (immergée) C de N est dite solution du système de Pfaff :

$$(*) \quad \omega_1 = 0, \quad \cdots, \quad \omega_q = 0$$

dans N, si C est maximale parmi les sous–variétés immergées de N telles que : C est connexe et en chaque point x de C on a $T_xC = \bigcap_{i=1}^{q} \ker \omega_i(x)$.

PROPOSITION 2. — *Soient M un semi–analytique ouvert de $\mathbf{R}^n$, $a \in \mathbf{R}^n$ et $N \subset M$ un feuillet normal dans la boule $B_a(\rho_0)$. Soit Ω un ensemble $\{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$ de 1–formes analytiques sur $B_a(\rho_0)$ tel que $\Omega \not\pitchfork N$ et $p = \dim N > q \geq 1$. Il existe $\rho > 0$ et un semi–analytique $Y \subset N$ de dimension strictement plus petite que p tel que, si C est une solution du système $(*)$, chaque composante connexe non vide de $C \cap B_a(\rho)$ rencontre Y si $\partial C \subset \partial N$.*

Il est très important de remarquer que cet ensemble Y ne dépend pas de la solution C choisie.

Preuve de la Proposition 2. — On suppose $a \in \bar{N}$. Quitte à stratifier à nouveau, on peut aussi supposer que le bord de N est la réunion d'un nombre fini de feuillets normaux dans une boule $B_a(\rho_1)$. On les notera $N_i, i = 1, \ldots, l$. On supposera aussi que $Y_0 = N \cap \partial B_a(\rho)$ est un semi-analytique de codimension 1 dans N.

Notons $g_1 = 0, \ldots, g_{n-p} = 0$ les équations dans $B_a(\rho)$ de N (les inéquations ne joueront pas de rôle puisqu'elles sont remplacées par les équations des N_i) et posons $\eta = dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_{n-p}$. Par hypothèse de transversalité $\eta \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q$ ne s'annule jamais sur N.

Soient $h_{1,i} = 0, \ldots, h_{s_i,i} = 0$ les équations de N_i dans $B_a(\rho)$ et soit la fonction

$$\delta_i = h_{1,i}^2 + \cdots + h_{s_i,i}^2.$$

On peut choisir une unité u_i positive et analytique dans $B_a(\rho)$ telle que l'ensemble, E_i, des points x de N pour lesquels

$$(\dagger) \quad d(u_i\delta_i) \wedge \eta \wedge \omega_1 \ldots \wedge \omega_q(x) = 0$$

soit de dimension inférieure à p. En effet, si $d\delta_i \wedge \eta \wedge \omega_1 \cdots \wedge \omega_q \equiv 0$ sur N il suffit de prendre u_i de sorte que $du_i \wedge \eta \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q$ ne s'annule pas identiquement dans un voisinage de N_i sur N. Notons Y_1 la réunion des $E_i, i = 1, \dots, l$. En utilisant le même argument que dans la preuve du Lemme 2 de [MoRo] on construit un semi–analytique $Y_2 \subset N$ de codimension 1 tel que tout sous–ensemble connexe par arcs dont l'adhérence rencontre deux strates du bord de N non incidentes, rencontre Y_2. Ce semi–analytique *sépare* les strates du bord de N.

Le semi–analytique $Y = Y_0 \cup Y_1 \cup Y_2$ est de codimension 1 dans N.

Considérons une solution C du système $(*)$ et soit C_ρ une composante connexe de $C \cap B_a(\rho)$. Chaque fonction $u_i\delta_i$, par compacité, atteint ses extrema dans $\bar{C}$. Par exemple : si C_ρ est un fermé de $\mathbf{R}^n$, $C_\rho = C$ est un compact et $u_i\delta_i$ admet un extremum. En ce point l'égalité $(\dagger)$ est vérifiée il est donc dans $C_\rho \cap E_i \subset C \cap Y$.

Si $\bar{C} \setminus C$ est inclus dans le bord de N,

$$\partial C_\rho \subset \partial(N \cap B_a(\rho)) = Y_0 \cup N_1 \cup \cdots \cup N_l.$$

Donc C_ρ est une solution du système $(*)$ sur $N \cap B_a(\rho)$ vérifiant l'hypothèse de la proposition.

Supposons que $\bar{C}_\rho$ rencontre la strate N_i du bord de N et que C_ρ ne rencontre pas la sphère Y_0. Puisque $(u_i\delta_i)(\bar{N}_i) = \{0\}$ le maximun de $u_i\delta_i$ sur $\bar{C}_\rho$ est atteint en un point x_0 qui n'est pas dans $\bar{N}_i$. Distinguons deux cas :

si $x_0 \in C_\rho, x_0$ vérifie l'égalité $(\dagger)$. On en déduit que C_ρ rencontre $Y_1 \subset Y$;

si $x_0 \in \partial C_\rho \setminus \bar{N}_i$, x_0 se trouve donc dans $\partial N \setminus \bar{N}_i$, $\bar{C}_\rho$ rencontre deux strates non incidentes de ∂N et par suite Y_2.

Ce qui achève la preuve de la proposition 2.

Remarque. — Si l'on suppose que les formes différentielles $\omega_i, i \in \mathbf{I}_q$ forment un système intégrable (en restriction à N) au sens de Frobenius on peut affaiblir l'hypothèse $\partial C \subset \partial N$ et supposer seulement $\partial C \cap \partial N \neq \emptyset$. En effet, en reprenant les notations de la preuve, si l'extremun $x_0 \in \bar{C}_\rho \setminus C_\rho$ se trouve dans N, on a $x_0 \in E_i$. Dans ce cas il suffit de choisir Y_2 plus grand, par exemple, Y_2 séparant les strates non incidentes d'une stratification convenable de la réunion du bord de N et de Y_1.

3. Preuve du théorème de finitude.

Les méthodes utilisées dans [MoRo] pour obtenir le résultat de finitude pour les variétés séparantes nous permettront de prouver les résultats de finitude uniforme pour les ensembles définis à l'aide d'hypersurfaces pfaffiennes de Rolle.

Si Θ est une famille ordonnée finie de 1–formes analytiques au voisinage de $\bar{M}$, M semi–analytique ouvert de $\mathbf{R}^n$ et si Z est un semi–analytique relativement compact de $\mathbf{R}^n$, on note $b(Z,\Theta) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ la plus petite des bornes cherchées pour le Théorème 1 : si $\{V_i, \omega_i, M\}$ sont des hypersurfaces pfaffiennes de Rolle dans Z avec $\omega_i \in \Theta$, on a :

$$b_0(Z \cap \bigcap_{\omega_i \in \Theta} V_i) \leq b(Z,\Theta).$$

Cette borne dépend de Z, Θ et M. On pose $b(Z,\Theta) = b(Z,\emptyset) = b_0(Z)$ si l'une des 1–formes de Θ ne possède pas d'hypersurface pfaffienne de Rolle dans X.

Pour souligner le rôle de la Proposition 1 dans la preuve, énonçons deux lemmes faciles.

LEMME 2. — *Si V_1 et V_2 sont deux germes de sous–variété différentiables en $0 \in \mathbf{R}^n$ de dimension $n-1$, solutions de l'équation $\omega = 0$, où ω est une 1–forme différentielle au voisinage de 0, $\omega(0) \neq 0$ et $0 \in V_1 \cap V_2$ alors $V_1 = V_2$.*

Preuve. — Il suffit d'utiliser l'intégrabilité de la restriction de ω à tout germe de 2–plan transverse à V_1.

LEMME 3. — *Soit N un feuillet contenu dans $X \setminus \bigcup_{i=1}^{q} S(\omega_i)$ et soit Θ une base de $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$ le long de N. Alors on a l'inégalité :*

$$b(N,\Omega) \leq b(N,\Theta).$$

Preuve. — Soient $\{V_i, \omega_i, M\}, i \in \mathbf{I}_q$ des hypersurfaces pfaffiennes de Rolle dans X. Par une récurrence immédiate et en utilisant le lemme précédent on prouve que le nombre de composantes connexes de $N \cap \bigcap_{i=1}^{q} V_i$ est majoré par celui de $N \cap \bigcap_{\omega_i \in \Theta} V_i$.

Les composantes connexes du premier sont les composantes connexes du deuxième qui rencontrent en au moins un point chaque V_i pour $\omega_i \in \Omega \setminus \Theta$.

Supposons que $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_q\}$ et X soient comme dans l'énoncé du Théorème 1. On prouve que $b(X, \Omega)$ est fini par une récurrence sur la dimension de X, notée p, et sur q.

Si $q = 0$ on a par définition $b(X, \Omega) = b_0(X)$. Le semi–analytique X étant relativement compact, il a donc un nombre fini de composantes connexes [Lo].

Si $p = 0$, X est un ensemble fini de points et $b(X, \Omega) \leq b_0(X)$ quel que soit Ω.

Supposons maintenant que $b(Z, \Theta)$ soit fini pour chaque semi–analytique $Z \subset X$ de dimension strictement plus petite que p et chaque $\Theta \subset \Omega$ ayant moins de q éléments. Puisque X est relativement compact, il suffit de prouver :

(∗) *Pour chaque $a \in \bar{X}$ il existe $\rho > 0$ tel que*

$$b(X \cap B_a(\rho), \Omega) < \infty.$$

En effet, s'il existe des $B_{a_i}(\rho_i)$, $i = 1, \dots, l$ recouvrant X et vérifiant (∗), on a

$$b(X, \Omega) \leq \sum_{i=1}^{l} b(X \cap B_{a_i}(\rho_i), \Omega)$$

puisque toute hypersurface pfaffienne de Rolle dans X est de Rolle dans $X \cap L$ quel que soit l'ensemble L.

Prouvons (∗), pour $a \in \bar{X}$ fixé. En utilisant la proposition 1 considérons $\rho_1 > 0$ tel que la boule $B_a(\rho_1)$ admette une stratification $\mathcal{N}$ adaptée à X, à chaque lieu singulier des formes ω_i, $(S(\omega_i)\ i = 1, \dots, q,)$ et à Ω.

Considérons pour $N \in \mathcal{N}, \mathcal{N} \subset X$ la base minimale $J(N)$ le long de N. Si la dimension de N est p et $1 \leq \sharp J(N) < p$ la Proposition 2 pour le système de formes $J(N)$ nous fournit $\rho_2(N) > 0$ et un semi–analytique Y de codimension au moins 1 dans N.

Prenons $0 < \rho < \rho_1$, $\rho < \rho_2(N)$ quel que soit N comme ci–dessus. Vérifions (∗) pour ce ρ. On a clairement

$$b(X \cap B_a(\rho), \Omega) \leq \sum \{b(N, \Omega),\ N \in \mathcal{N}, \mathcal{N} \subset X\}.$$

Par hypothèse de récurrence on sait que, pour $N \in \mathcal{N}$, $b(N, \Omega)$ est fini dès que $\dim N < p$ et que $b(N, \Omega) = 0$ si pour un indice $i, N \subset S(\omega_i)$. D'après le Lemme 3 ci–dessus, on a $b(N, \Omega) \leq b(N, \Omega_{J(N)})$ qui est fini si $\sharp J(N) < q$.

Pour finir la démonstration on peut donc supposer que : (†) X est lisse connexe et $\Omega \not\pitchfork X$.

Si $q < p$ le choix de ρ et le Lemme 1 nous permettent d'appliquer la Proposition 2. Pour $Y \subset X$ de dimension strictement inférieure à p : $b(X,\Omega) \leq b(Y,\Omega)$. On conclut par récurrence.

Reste le cas crucial, $q = p \geq 1$. Notons $\Omega' = \{\omega_1, \dots \omega_{q-1}\}$. On va démontrer que $b(X,\Omega) \leq b(X,\Omega')$. Pour cela soient $\{V_i, \omega_i, M\}, i \in \mathbf{I}_q$ des hypersurfaces pfaffiennes de Rolle dans X et soit C une composante connexe de $X \cap V_1 \cap \cdots \cap V_{q-1}$. L'intersection de C avec V_q a au plus un point.

En effet, puisque $\Omega \not\pitchfork X, C$ est une courbe analytique contenue dans X (cette courbe n'est pas en général un semi–analytique de $\mathbf{R}^n$ sauf si $q = 1$). Si C rencontre V_q en deux points, par l'hypothèse de Rolle, elle est tangente à ω_q en un point et ce dans X. En ce point les formes de $\{\omega_1, \dots \omega_q\}$ deviennent linéairement dépendantes. Ceci contredit la transversalité. La preuve est complète

4. Théorème de finitude avec paramètres.

Dans ce paragraphe on énonce et démontre la généralisation du Théorème 1 au cas à paramètres.

Soient m, s des entiers naturels tels que $m + s = n$. Soit M un ouvert semi–analytique de $\mathbf{R}^n$, et soit $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$ la projection naturelle $(x, \lambda) \mapsto \lambda$. Pour chaque sous–ensemble A de $\mathbf{R}^n$ notons $A^\lambda = A \cap \pi^{-1}(\lambda)$.

Soit ω est une 1–forme analytique sur un voisinage ouvert U de $\bar{M}$ et soit ω_λ la restriction de ω à U^λ. Pour chaque $\lambda \in \mathbf{R}^s$ on pose

$$i_\lambda : \mathbf{R}^m \times \{\lambda\} \to \mathbf{R}^n, \quad (x,\lambda) \mapsto (x,\lambda), \quad \omega_\lambda = i_\lambda^* \omega.$$

On dira que ω est intégrable pour le paramètre λ si $d\omega_\lambda \wedge \omega_\lambda = 0$ dans M^λ.

Si $I \subset \pi(M)$, une *famille à paramètres d'hypersurfaces pfaffiennes* sur I est une collection $\mathcal{W} = \{\mathcal{V}_\lambda, \omega_\lambda, M^\lambda\}_{\lambda \in I}$ où chaque $\mathcal{W}_\lambda = \{\mathcal{V}_\lambda, \omega_\lambda, M^\lambda\}$ est une hypersurface pfaffienne. La famille $\mathcal{W}$ est de Rolle dans un semi–analytique X de $\mathbf{R}^n$ si chaque $\mathcal{V}_\lambda$ l'est dans X^λ.

Prendre des 1–formes analytiques dans $\mathbf{R}^m$ dépendant analytiquement d'un paramètre $\lambda \in \mathbf{R}^s$ et choisir sans *aucune hypothèse de régularité en* λ des hypersurfaces pfaffiennes pour chaque paramètre consiste à se donner des familles à paramètres d' hypersurfaces pfaffiennes comme ci-dessus.

THÉORÈME 1_λ. — *Soient M et X des semi-analytiques de $\mathbf{R}^n$, M ouvert, X relativement compact, π la projection naturelle $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$ et $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_l\}$ un ensemble de 1-formes analytiques au voisinage de $\bar{M}$. Il existe une constante $b = b(X, \Omega)$ telle que si pour $i = 1, \dots, l$, $\mathcal{W}_i = \mathcal{V}_{i,\lambda}, \omega_{i,\lambda}, M^\lambda\}_\lambda$ est une famille d'hypersurfaces pfaffiennes de Rolle dans X sur $\{\lambda/\lambda \in \pi(X \cap M) \subset \mathbf{R}^s\}$*

$$b_0(X^\lambda \cap V_{1,\lambda} \cap \cdots \cap V_{l,\lambda}) \leq b(X, \Omega).$$

Le Théorème 1 est évidemment le cas particulier du résultat précédent avec $s = 0$. Le corollaire 1 du chapitre I admet une généralisation évidente au cas à paramètres. Il se déduit du Théorème 1_λ en considérant les "variables projetées" comme des paramètres.

Soient M, X, Ω comme dans l'énoncé du Théorème et $Z \subset X, \Theta \subset \Omega$. Convenons de noter $Z \cap \Theta(\lambda)$ un ensemble

$$Z \cap \Theta(\lambda) = Z^\lambda \cap \bigcap_{\omega_i \in \Theta} V_{i,\lambda}$$

pour un choix quelconque de familles d'hypersurfaces pfaffiennes de Rolle dans X $\mathcal{W}_i, i = 1, \dots, l$.

Comme dans le paragraphe précédent on note $b(Z, \Theta) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ la plus petite des bornes cherchées, c'est-à-dire que l'on a toujours $b_0(Z \cap \Theta(\lambda)) \leq b(Z, \Theta)$ pour Z semi-analytique.

Démonstration du Théorème 1_λ. — La démonstration est similaire à la démonstration du Théorème 1. On démontre par récurrence sur la dimension p de X et $q = l + s$ que $b(X, \Omega)$ est fini. Notons $\bar{\Omega}$ l'ensemble ordonné des formes $d\lambda_1, \dots, d\lambda_s, \omega_1, \dots, \omega_l$.

Si q ou p est zéro, la finitude du nombre de composantes connexes d'un semi-analytique relativement compact permet de conclure.

Supposons par récurrence que $b(Z, \Theta)$ est fini pour chaque semi-analytique $Z \subset X$ de dimension strictement inferieure à p et chaque $\Theta \subset \bar{\Omega}$ avec $\sharp < q$.

Comme pour le Théorème 1, à l'aide de la compacité de $\bar{X}$, on se ramène à la situation locale avec une stratification $\mathcal{N}$ adaptée au système ordonné de formes $\bar{\Omega}$:

$$a \in \bar{X}, \quad b(X \cap B_a(\rho), \Omega) \leq \sum \{b(N, \Omega) : N \in \mathcal{N}, \mathcal{N} \subset X\}.$$

Si $N \in \mathcal{N}, \mathcal{N} \subset X$ et $\dim N < p$ on a la finitude par récurrence. Il est facile de réécrire la démonstration du Lemme 3 de sorte que l'on ait $b(N,\Omega) \leq b(N,\bar{\Omega}_{J(N)})$. Par récurrence, cette dernière borne est finie si $\sharp J(N) < q$. De plus si tous les indices de $J(N)$ sont $\leq s$ le théorème de Gabrielov–Hardt–Teissier prouve la finitude de $b(N,\bar{\Omega}_{J(N)})$.

On peut donc supposer que X est lisse connexe, $\bar{\Omega} \not\pitchfork X$ et $s \geq 1$. Deux cas se présentent : $q < p$ et $q = p$.

Si $q < p$ on vérifie à l'aide du Lemme 1, en fixant le paramètre, que pour chaque collection $\mathcal{W}_i$ de familles à paramètres d'hypersurfaces pfaffiennes, l'hypothèse de la Proposition 2 est vraie. En effet, si $\lambda_0 \in \pi(M \cap X)$ est fixé, chaque $\{V_{i,\lambda_0}, \omega_{\lambda_0}, M^{\lambda_0}\}$ est de Rolle. Par transversalité des $d\lambda_i$ avec X, X^{λ_0} est un semi–analytique lisse. Donc chaque composante connexe de $X^{\lambda_0} \cap V_{1,\lambda_1} \cap \cdots \cap V_{l,\lambda_0}$ coupe le bord de X^{λ_0} et a fortiori celui de X.

Ces composantes connexes sont les solutions du système

$$d\lambda_1 = 0, \ldots, d\lambda_s = 0, \omega_1 = 0, \ldots, \omega_l = 0.$$

La Proposition 2 permet de construire un semi–analytique Y de dimension $< p$ tel que $b(X,\Omega) \leq b(Y,\Omega)$ qui est fini par récurrence.

Si $q = p$, on enlève *la dernière* forme du système $\bar{\Omega}$ pour former le système $\bar{\Omega}' = \{d\lambda_1, \ldots, \omega_{l-1}\}$. En reprenant l'argument du Théorème 1, on utilise la propriété de Rolle de $V_{l,\lambda}$ et $X \not\pitchfork \bar{\Omega}$ pour prouver que $b(X,\Omega) \leq b(X,\{\omega_1, \ldots, \omega_{l-1}\})$. Ce dernier est fini par récurrence. La preuve est finie.

IV. BORD D'UNE HYPERSURFACE PFAFFIENNE DE ROLLE

Le but de ce chapitre est la preuve du Théorème 2. Dans les deux premiers paragraphes, on établit quelques propriétés géométriques des hypersurfaces pfaffiennes de Rolle. Dans le dernier paragraphe, on prouve le Théorème 2 et on construit une stratification analytique des hypersurfaces pfaffiennes de Rolle de dimension 2.

Dans toute la suite $\{V, \omega, M\}$ est une hypersurface pfaffienne de Rolle de $\mathbf{R}^n$. Puisque, par définition $V \cap S(\omega) = \emptyset$ on supposera que $S(\omega) \cap M = \emptyset$. Le cas intéressant est celui des variétés transcendentes c'est–à–dire $\omega \wedge d\omega = 0$ d'après la Proposition 1 du Chapitre II.

L'étude étant locale, on se placera au voisinage d'un point fixé a de ∂M. Quitte à diviser la 1–forme ω par le p.g.c.d. des coefficients de ω dans un système de coordonnées centré en a on peut supposer aussi que $S(\omega)$ est de codimension au moins 2.

1. Topologie du bord, hors du lieu singulier.

Le premier resultat règle le cas sans singularités.

PROPOSITION 1. — *L'ensemble $\bar{V} \setminus S(\omega)$ est un semi–analytique de $\mathbf{R}^n \setminus S(\omega)$ de codimension au moins 1 dans ∂M.*

Soulignons que cette proposition n'affirme pas que l'adhérence d'une hypersurface pfaffienne de Rolle soit un semi–analytique de $\mathbf{R}^n$. Le plus simple des exemples, $V_0 = \{(x, e^{-1/x}), x > 0\}$ de Rolle pour la 1–forme $x^2dy - ydx$ dans $\mathbf{R}^2$, nous montre que $\bar{V_0}$ n'est pas nécessairement un semi–analytique de $\mathbf{R}^2$. En considérant la même 1–forme sur $M = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+$, $V_0 \times \mathbf{R}_+$ est une hypersurface pfaffienne de Rolle dans M. Son bord est réunion d'une demi–droite verticale et de $\{(x, e^{-1/x}, 0), x > 0\}$. Ce n'est pas un sous–analytique de $\mathbf{R}^3$.

Preuve de la proposition 1. — Soit $a \in \bar{V} \setminus S(\omega)$ et soit $x = (x_1, \ldots, x_n) : U \to]-1, 1[^n$ une carte analytique telle que $\omega \wedge dx_n = 0$ où U est un ouvert semi–analytique. D'après le Théorème 1, $U \cap V$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes qui sont contenues dans un nombre fini de plaques, $x_n =$ const. Quitte à restreindre U, on peut supposer que $U \cap S(\omega) = \emptyset$ et que $U \cap V$ est contenu dans la plaque P_a d'équation $x_n = 0$. Soit C une composante connexe de $M \cap P_a$ qui rencontre V. Puisque V est une variété intégrale (maximale) de $\omega = 0$ dans M, C est contenue dans V. Ainsi $V \cap U$ est une réunion de composantes connexes du semi–analytique $M \cap P_a$ et $\partial V \cap U$ est un semi–analytique de $\mathbf{R}^n$ contenu dans ∂M de dimension au plus $n - 2$.

2. Topologie du bord sur une courbe analytique.

Le but de ce paragraphe est de prouver avec la proposition suivante que l'adhérence d'une hypersurface pfaffienne de Rolle n'a pas de pathologies analytiquement détectables en dimension 1.

PROPOSITION 2. — *Si X est un semi–analytique de $\mathbf{R}^n$ de dimension 1, l'ensemble $X \cap \bar{V}$ est un semi–analytique de $\mathbf{R}^n$.*

Preuve. — Compte tenu de la description des semi–analytiques de dimension 1, il suffit de prouver que si X est un arc paramétré analytique, $\bar{X} \cap \bar{V}$ est localement connexe.

Soit $\gamma : [0,1] \to \bar{X}$ une paramétrisation analytique injective de $\bar{X}$ telle que $\gamma(0) = a \in S(\omega)$.

Supposons, pour une réduction à l'absurde, que $\bar{X} \cap \bar{V}$ n'est pas localement connexe en $a \in \bar{V}$. Il existe deux suites strictement décroissantes $\{t_n\}$ et $\{u_n\}$ tendant vers 0 telles que

$$t_{n+1} < u_n < t_n, \qquad \gamma(t_n) \notin X \cap \bar{V} \text{ et } \gamma(u_n) \in X \cap \bar{V}.$$

Fixons pour chaque n un $\epsilon_n > 0$ tel que

$$B_{\gamma(t_n)}(\epsilon_n) \cap X \cap \bar{V} = \emptyset, \quad 2\epsilon_n < d(\gamma(t_n), \gamma(u_n)) \text{ et } 2\epsilon_n < d(\gamma(t_n), \gamma(u_{n-1}))$$

où d est la distance euclidienne.

La courbe X est un feuillet normal d'une boule $B_a(\rho)$. Soient $h_1, \ldots, h_{n-1}$ ses équations analytiques sur cette boule et $\delta = h_1^2 + \cdots + h_{n-1}^2$. Il existe une composante connexe T_λ du "tube" $\{x \in M \cap B_a(\rho), \delta(x) = 0\}$ qui est lisse et qui borde un ouvert $T_{\leq\lambda}$ contenant X. La variété T_λ est une variété séparante pour la forme $d\delta$ dans $B_a(\rho) \cap M$.

Pour chaque n, on peut choisir $\lambda_n > 0$ tel que si $\lambda < \lambda_n$, alors $\gamma(u_n)$ et $\gamma(u_{n+1})$ soient dans l'adhérence de deux composantes connexes distinctes de $V \cap T_{\leq\lambda}$ (Voir Fig. 1.) Pour s'en convaincre il suffit de réduire δ à une somme de carrés de coordonnées au voisinage du compact $\gamma([t_n, t_{n+2}])$ par un lemme de Morse à paramètre t.

Globalement $b_0(T_{\lambda_{n+1}} \cap V)$ est supérieur à n, puisque $T_{\leq\lambda_n}$ rencontre V au voisinage de chaque $\gamma(u_j), j < n$.

Ceci est absurde car le Théorème 1 appliqué à ω et $d\delta$ dans $M \cap B_a(\rho)$ prouve que ce nombre doit être majoré indépendamment de λ. Ceci achève la preuve.

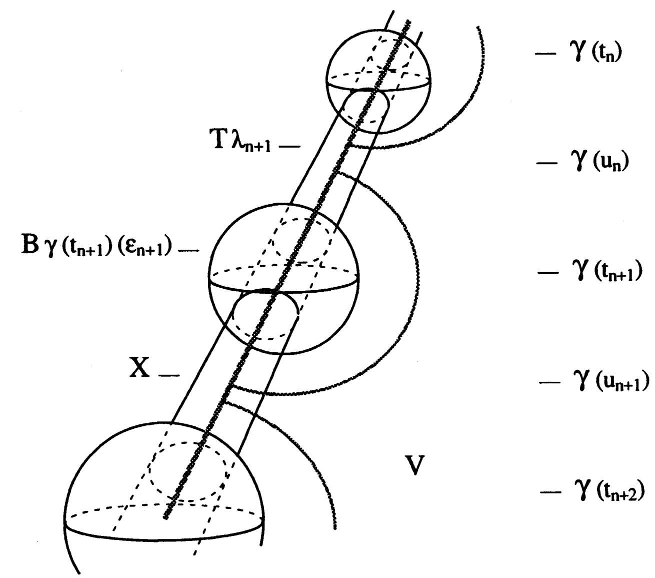

Fig. 1

3. Topologie du bord en dimension 3.

Le but de ce dernier paragraphe est de prouver le Théorème 2 énoncé dans le chapitre I. Ici M est un ouvert semi–analytique relativement compact de $\mathbf{R}^3$.

L'ensemble analytique $S(\omega)$ est de dimension au plus 1. De la Proposition 2 on déduit que $\bar{V} \cap S(\omega)$ est un semi–analytique de $\mathbf{R}^3$, c'est–à–dire une réunion d'un nombre fini de courbes analytiques lisses et d'un nombre fini de points.

D'après la Proposition 1, $\partial V \setminus S(\omega)$ est une réunion (localement finie hors de $S(\omega)$) de coubes analytiques lisses et de points. L'essentiel de la preuve du Théorème 2 est la preuve de la finitude de ce dernier ensemble de courbes et de points.

Fin de la preuve du Théorème 2. — Il reste à prouver la finitude du nombre de composantes connexes de $\bar{V} \setminus S(\omega) \setminus V$ au voisinage des points de $S(\omega)$.

Soit $a \in S(\omega)$. Dans une boule B de centre a, considérons une stratification normale adaptée à M, $\partial M, S(\omega)$ et $\{\omega\}$. Soit D une strate de cette stratification contenue dans ∂M. Si D n'est pas transverse à ω et D rencontre $\bar{V}$, on a $D \subset S(\omega)$ ainsi D est de dimension au plus 1. On sait dans ce cas que D ne rencontre $\bar{V}$ qu'en un nombre fini de composantes connexes.

On peut supposer que D est de dimension 2 et transverse à ω. On a $D \subset \mathbf{R}^3 \setminus S(\omega)$. Les composantes connexes $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $\partial V \cap D$ sont les feuilles du feuilletage de D induit par ω. Le bord d'une telle feuille est dans le bord de D car au voisinage de chaque point de D le Théorème de Frobenius permet de supposer que D est un plan de coordonnées et que ω est colinéaire à une coordonnée transverse à ce plan. D'après l'hypothèse de Rolle sur V, chaque Γ_α est fermé dans D.

On déduit de la Proposition 2 du Chapitre III, apliquée à ω et D qu'il existe, au voisinage de a, un semi–analytique Y de dimension au plus 1 inclus dans D qui rencontre chaque Γ_α. D'après la Proposition 2, D rencontre $\bar{V} \setminus S(\omega)$ selon un nombre fini de composantes connexes, c'est–à–dire que l'ensemble d'indices A est fini.

Ceci achève la preuve du Théorème 2.

On obtient la stratification suivante de $\bar{V}$: en dimension 2 on a une seule strate : V; en dimension 1 les strates sont les courbes mentionnées ci–dessus et en dimension 0 ces points.

La construction assure l'analyticité et la connexité des strates, ainsi que la propriété des frontières. Cette stratification n'est pas semi–analytique en général.

On a démontré avec J.–M. Lion que l'on peut raffiner cette stratification pour obtenir les conditions (a) et (b) de Whitney. La preuve paraitra ultérieurement.

En dimension plus grande que 3 on ne sait pas si le bord d'une hypersurface pfaffienne de Rolle est réunion localement finie de variétés différentiables. Ce bord est en général de dimension plus grande que 1 et la locale connexité ne suffit plus pour étudier sa structure.

BIBLIOGRAPHIE

[BeRi] R. BENEDETTI et J.-J. RISLER, Real algebraic and semialgebraic sets, Hermann, Paris, 1990.

[BiMi] E. BIERSTONE et P.D. MILMAN, Semianalytic and subanalytic sets, Publ. Math. I. H. E. S., 67 (1988), 5–42.

[Da] G. DARBOUX, Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré. (Mélanges), Bull. des Sc. Math., (1878), 60–96; 123–144; 151–200.

[Du] H. DULAC, Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. France., 51 (1923), 45–188.

[Ec] J. ECALLE, Les fonctions résurgentes, Vol I, II, III, Orsay, 1981.

[Ga] A.M. GABRIELOV, Projections of semi-analytic sets, Funct. Anal. And Appl., 2 (1968), 282-291.

[Hae] A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes, Thèse (1958) et Comm. Math. Helv., 32 (1958), 248–329.

[Ha] R.M. HARDT, Topological properties of subanalytic sets, Trans. Amer. Math. Soc., 211 (1975), 150–208.

[Ho1] A.G. KHOVANSKII, Real analytic varieties whith the finiteness property and complex abelian integrals, Funct. Anal. And Appl., 18, 119–127.

[Ho2] A.G. KHOVANSKII, Fewnomials, livre à paraitre, A. M. S, 1991.

[Jo] J.-P. JOUANOLOU, Equations de pfaff algebriques, Lec. Notes in Math., Springer, 708, (1979).

[La] G.A. LAFFERRIERE, A stratification theorem for an extension of the class of subanalytic sets, Thèse, Rutgers Univ., 1986.

[Lo] S. LOJASIEWICZ, Ensembles semi-analytiques, preprint I. H. E. S., 1965.

[MaRa] J. MARTINET et J.-P. RAMIS, Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 16 (1983), 571–621.

[Ma] J. MATHER, Stratifications and mappings. Dynamical Systems, M.M. Peixoto Ed., Academic Press, 1973.

[MaMo] J.-F. MATTEI et R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 4ème série, 13 (1980), 469–523.

[[M] R. MOUSSU, Sur les feuilletages de codimension un, Thèse, Orsay, 1971.

[MoRo] R. MOUSSU et C. ROCHE, Problème de Dulac et théorie de Hovanskii, Inventiones Math., 105 (1991), 431–441.

[Ri]] J.-J. RISLER, Complexité et géométrie algébrique réelle. (D'après A. Khovansky.), Séminaire Bourbaki, n°637 (1985).

[Ro] R. ROUSSARIE, Cyclicité finie des lacets et des points cuspidaux, Nonlinearity, 2 (1989) 73–117.

[Se] A. SEIDENBERG, Reduction of singularities of the differentiable equation $Ady = Bdx$, Amer. J. Math., (1968), 248–269.

[Te] B. TEISSIER, Théorèmes de finitude en géométrie analytique. (D'après H. Hironaka), Séminaire Bourbaki, n°451 (1974).

[VdD] L. VAN DEN DRIES, Tarski's problem and pfaffian functions, preprint Stanford Univ., 1985.

R. MOUSSU et C. ROCHE,
Université de Bourgogne
Laboratoire de Topologie
BP 138
21004 Dijon Cedex (France).